# Алгебра. Задачи 4

Арунова Анастасия

## Содержание

**Линейные операторы** **3**
Задача 1 . . . 3
Задача 2 . . . 5
Задача 3 . . . 5
Задача 4 . . . 6
Задача 5 . . . 7
Задача 6 . . . 9

**Разложения матриц** **10**
Задача 7 . . . 10
Задача 8 . . . 12
Задача 9 . . . 15

**Линейные преобразования евклидовых векторных пространств** **18**
Задача 10 . . . 18
Задача 11 . . . 19
Задача 12 . . . 20
Задача 13* . . . 20
Задача 14* . . . 21

**Преобразования матриц** **23**
Задача 15 . . . 23
Задача 16 . . . 25
Задача 17 . . . 28
Задача 18 . . . 29
Задача 19 . . . 32

**Подпространства, проекция, ортогональная составляющая** **34**

Задача 20 . . . . . . . . . . 34

Задача 21 . . . . . . . . . . 36

**Кривые и поверхности второго порядка** **39**

Задача 22 . . . . . . . . . . 39

Задача 23 . . . . . . . . . . 41

Задача 24 . . . . . . . . . . 43

Задача 25 . . . . . . . . . . 45

# Линейные операторы

## Задача 1

(a) Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$. Можно ли привести ее к диагональному виду, перейдя к подходящему базису?

(b) Вычислить матрицу $A^n$, $n \in \mathbb{N}$.

**Решение:**

(a) Найдём с помощью характеристического многочлена собственные значения линейного оператора, задаваемого матрицей $A$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 12 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$$

Найдём $\lambda$ при которых $\chi_A(\lambda) = 0$:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda+2)^2 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Нашли собственное значение линейного оператора $\lambda = -2$, его алгебраическая кратность равна $a_{-2} = 2$ (других собственных значений нет).

Найдём ФСР системы $(A - \lambda E)x = 0$ при $\lambda = -2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4-\lambda & -3 & 0 \\ 12 & -8-\lambda & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 0 \\ 12 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}\to\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2}{2} \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Вектор $e_1$ является собственным вектором линейного оператора (все с.в. задаются как $\alpha \cdot e_1$, $\alpha \neq 0$).

Так как ФСР состоит из 1 столбца, геометрическая кратность собственного значения $\lambda = -2$ будет равна $g_{-2} = 1$. Геометрическая кратность не равна алгебраической кратности собственного значения, значит, матрицу нельзя привести к диагональному виду.

(b) Для вычисления $A^n$ найдём $J$ – ЖНФ матрицы $A$ и $C$ – матрицу перехода от базиса, в котором находится матрица $A$, к базису, в котором она имеет ЖНФ.

Так собственное значение всего одно, ЖНФ будет состоять всего из одной жордановой клетки.

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Размер жордановой клетки 2, значит, ей соответствуют 2 базисных вектора. Обозначим их $e_1$ и $e_2$. Вектор $e_1$ был найден в пункте (a). Все следующие базисные векторы находятся при помощи уравнения:

$$(A - \lambda E)e_k = e_{k-1} \quad \underset{\lambda=-2}{\overset{k=2}{\Rightarrow}} \quad (A + 2E)e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решим уравнение для $e_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 1 \\ 12 & -6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}\to\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{6} + \frac{x_2}{2} \quad \overset{x_2=0}{\Rightarrow} \quad e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, жорданов базис равен:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит, матрица перехода от базиса, в котором находится $A$, к базису, в котором находится $J$, равна:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём $A^n$:

$$A = CJC^{-1} \Leftrightarrow A^n = (CJC^{-1})^n = CJ\underbrace{C^{-1}C}_{E}J\underbrace{C^{-1}\cdot}_{E}\ldots\underbrace{\cdot C}_{E}J\underbrace{C^{-1}C}_{E}JC^{-1} = CJ^nC^{-1}$$

Обратная к $C$ будет равна:

$$C^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A^n = CJ^nC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-3n)(-2)^{n-1} & -3n(-2)^{n-1} \\ -6n(-2)^n & (3n+1)(-2)^n \end{pmatrix}$$

**Ответ:** (a) с.з. $\lambda = -2$, с.в. $\alpha e_1$, $\alpha \neq 0$; (b) $\begin{pmatrix} (1-3n)(-2)^{n-1} & -3n(-2)^{n-1} \\ -6n(-2)^n & (3n+1)(-2)^n \end{pmatrix}$.

## Задача 2

Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $a_1 = (2,5)^T$, $a_2 = (1,3)^T$, соответственно в векторы $b_1 = (7,-4)^T$, $b_2 = (2,-1)^T$ в базисе, в котором даны координаты векторов.

**Решение:**

Пусть $\varphi$ – линейный оператор переводящий векторы $a_1$, $a_2$ в векторы $b_1$, $b_2$, соответственно. Пусть $A$ – искомая матрица линейного оператора. Т.к. линейное отображение полностью задаётся матрицей перехода, для каждого столбца координат $a_i$ $(i = 1,2)$ в некотором базисе $e$ будет верно $b_i^e = \big(\varphi(a_i)\big)^e = A_e \cdot a_i^e$.

Тогда можем составить векторное уравнение:

$$AX = Y$$

где $X$ – матрица, столбцами которой являются векторы $a_1$, $a_2$, $Y$ – матрица, в столбцах которой записаны векторы $b_1$, $b_2$.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$.

## Задача 3

В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ линейный оператор $\phi$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\phi$ в базисе $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Решение:**

Найдём матрицу перехода от базиса $e$ к базису $\hat{e}$ по формуле: $T_{e\to\hat{e}} = e^{-1} \cdot \hat{e}$. Для этого необходимо найти $e^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) \Rightarrow e^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$T_{e\to\hat{e}} = e^{-1}\cdot\hat{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Теперь можно найти матрицу $A$ в базисе $\hat{e}$ по формуле:

$$A_{\hat{e}} = T^{-1}A_eT = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{69}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $A_{\hat{e}} = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{69}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

## Задача 4

Можно ли найти базис из собственных векторов для матрицы $A$? В случае положительного ответа найти этот базис, в случае отрицательного, объяснить почему это невозможно.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Так как матрица симметрична, базис в котором она диагональна, существует. Найдём этот базис.

Найдём с помощью характеристического многочлена собственные значения линейного оператора, задаваемого матрицей $A$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

Найдём $\lambda$ при которых $\chi_A(\lambda) = 0$:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 4 \end{array}\right.$$

Нашли собственные значения линейного оператора $\lambda = 1, 4$.

Найдём ФСР системы $(A-\lambda E)x = 0$:

- $\lambda = 1$:

$$A - E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x_1 = x_2 - x_3 \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 4$:

$$A - 4E = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, базисом будет набор $e_1, e_2, e_3$.

**Ответ:** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

## Задача 5

Линейный оператор переводит вектор $a_1 = (-1, 0)^T$ в вектор $b_1 = (5, 5)^T$, а вектор $a_2 = (1, 1)^T$ в вектор $b_1 = (-2, -3)^T$.

1) В какое множество перейдет прямая, заданная уравнение $2x_1 - x_2 = -2$?
2) Какое множество переходит в эту прямую?
3) Написать уравнения тех прямых, которые переходят сами в себя.

**Решение:**

1) Найдём матрицу линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Любая прямая задаётся точкой (или радиус-вектором данной точки), которая принадлежит прямой, и направляющим вектором прямой. Для того, чтобы найти направляющий вектор $\vec{s}$ и точку $M$ на прямой запишем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2 - 2}{2} \Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ M(0, 2)$$

Радиус-вектор точки $M$ обозначим $\vec{r} = (0, 2)^T$.

Чтобы понять, в какое множество перейдёт прямая, надо применить к ней линейный оператор:

$$\vec{s'} = A\vec{s} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{r'} = A\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Таким образом, прямая под действием линейного оператора перейдёт в прямую:

$$\frac{x_1 - 6}{1} = \frac{x_2 - 4}{-1}$$

2) Чтобы понять, какое множество переходит в данную прямую, нужно решить следующую систему:

$$\begin{cases} \vec{s} = A\vec{s'} \\ \vec{r} = A\vec{r'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{s'} = A^{-1}\vec{s} \\ \vec{r'} = A^{-1}\vec{r} \end{cases}$$

Найдём обратную к $A$:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\vec{s'} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{r'} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, множество, переходящее по действием линейного оператора в исходную прямую, будет прямой:

$$\frac{x_1 + \frac{6}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{x_2 + 1}{-1}$$

3) Пусть $\vec{s}$ – направляющий вектор прямой, которая под действием линейного оператора переходит в саму себя (причём $\vec{s} \neq 0$, иначе прямая вырождается в точку). Тогда для него выполняется:

$$A\vec{s} = \vec{s} \Leftrightarrow (A - E)\vec{s} = 0 \Leftrightarrow \det(A - E) = 0$$
$$\det(A - E) = \begin{vmatrix} -5 - 1 & 3 \\ -5 & 2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Так как $\det(A - E) \neq 0$, решений у уравнения нет, а, значит, прямых, преходящих в самих себя под действием $A$, нет.

**Ответ:** 1) $x_1 + x_2 = 10$; 2) $5x_1 - 4x_2 = -2$; 3) нет.

## Задача 6

Найти базис ядра и базис образа линейного отображения $\phi : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ заданного матрицей

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Является ли отображение сюръективным?

**Решение:**

Ядро линейного отображения – это множество $\operatorname{Ker}\phi = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid \phi(x) = 0\}$. Поэтому для того, чтобы найти базис ядра, нужно найти ФСР системы $\phi(x) = A_\phi x = 0$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 14x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_2 = \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Получаем $e_1, e_2$ – базис ядра линейного отображения.

Найдём базис образа линейного отображения $\operatorname{Im}\phi = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^5 : \phi(x) = y\}$. Чтобы найти базис $\operatorname{Im}\phi$ надо привести матрицу $A_\phi^T$ к ступенчатому виду и взять после этого ненулевые строки.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получаем $f_1, f_2, f_3$ – базис образа линейного отображения. Значит, $\dim\operatorname{Im}\phi = 3$. Так как $\dim\operatorname{Im}\phi = 3 = \dim\mathbb{R}^3$, отображение сюръективно.

**Ответ:** 1) Базис ядра: $e_1 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, e_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}^T$

2) Базис образа: $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}^T, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}^T, f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$

3) Отображение сюръективно.

# Разложения матриц

## Задача 7

Представить невырожденную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

в виде произведения ортогональной матрицы $Q$ на верхнетреугольную матрицу $R$.

**Решение:**

Обозначим столбцы матрицы $A$ как:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Построим из векторов $a_1$, $a_2$, $a_3$ ортогональные векторы $f_1$, $f_2$, $f_3$, методом Грама-Шмидта. Пусть

$$f_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Тогда $f_2$ будет равно:

$$f_2 = a_2 - \frac{(a_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \overset{\cdot\frac{3}{4}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{(a_2, f_1)}{(f_1, f_1)} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 2}{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{2}{3}$$

Вектор $f_3$ будет равен:

$$f_2 = a_3 - \frac{(a_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 - \frac{(a_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{(a_3, f_2)}{(f_2, f_2)} = \frac{(-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3}{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{(a_3, f_1)}{(f_1, f_1)} = \frac{2\cdot 1 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3}{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = -\frac{1}{3}$$

Нормируем векторы $f_1$, $f_2$, $f_3$:

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\|f_1\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

$$\|f_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$\|f_3\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Из полученных векторов $e_1$, $e_2$, $e_3$, составим матрицу $Q$. Её столбцы – данные векторы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Найдём обратную к $Q$ матрицу. Так как она ортогональная $Q^{-1} = Q^T$.

$$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = Q^{-1}$$

Так как $A = QR$, можем найти матрицу $R$, домножив данное выражение слева на $Q^{-1}$:

$$R = Q^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

## Задача 8

Найти сингулярное разложение для матрицы:

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Рассмотрим линейный оператор, задаваемый матрицей:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & -4 \\ 5 & 5 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 90 & 72 & -72 \\ 90 & 90 & 72 & -72 \\ 72 & 72 & 90 & -90 \\ -72 & -72 & -90 & 90 \end{pmatrix}$$

Найдём его с.з. и соответствующие им с.в.:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 90-\lambda & 90 & 72 & -72 \\ 90 & 90-\lambda & 72 & -72 \\ 72 & 72 & 90-\lambda & -90 \\ -72 & -72 & -90 & 90-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 36)(\lambda - 324)$$

Корни характеристического многочлена будут с.з. Тогда $\lambda_1 = 324$ и $\lambda_2 = 36$, $\lambda_3 = 0$ (кратности равной 2). Обозначим $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 18$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 6$, $\sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = 0$.

Найдём собственные векторы для каждого из с.з., решив уравнение $(A - \lambda E)v = 0$, где $v$ – с.в.:

- $\lambda_1 = 324$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 90-\lambda & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & 90-\lambda & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & 90-\lambda & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90-\lambda & 90 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -234 & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & -234 & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & -234 & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90 & -234 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем $e_1$:

$$v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 36$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 90-\lambda & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & 90-\lambda & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & 90-\lambda & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90-\lambda & 90 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 54 & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & 54 & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & 54 & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90 & 54 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем $e_2$:

$$v_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- $\lambda_3 = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 90-\lambda & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & 90-\lambda & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & 90-\lambda & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90-\lambda & 90 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 90 & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & 90 & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90 & 90 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = x_4 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем $e_3$ и $e_4$:

$$v_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_4 = \frac{e_4}{\|e_4\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Найдём вектор $u_1$, выражающийся через $v_1$ следующим образом:

$$u_1 = \frac{A^T v_1}{\sigma_1} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Аналогично найдём $u_2$:

$$u_2 = \frac{A^T v_2}{\sigma_1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Векторы $u_1$ и $u_2$ нормированы и ортогональны. Дополним их до ОНБ в $\mathbb{R}^3$, составив матрицу из строк векторов $u_1$ и $u_2$, приведя её к ступенчатому виду и найдя не ведущие элементы:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II+I}\to\text{II}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Столбец с номером 3 не содержит ведущих элементов. Значит, вектор

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются дополнением векторов $u_1$ и $u_2$ до базиса в $\mathbb{R}^3$ (их $3 = \dim \mathbb{R}^3$ и они л.н.з., т.к., если в $B$ добавить строку вектора $f_1$, получим матрицу $B'$ ранга 3, что равно количеству строк в $B'$).

Ортогонализуем $f_1$ :

$$f_1' = f_1 - \frac{(f_1, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 - \frac{(f_1, u_2)}{(u_2, u_2)} u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Нормируем $f_1'$:

$$u_3 = \frac{f_1'}{\|f_1'\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Составим матрицы:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \left( \begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$U = \left( \begin{array}{c|c|c|c} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $A = V\Sigma U^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T.$

## Задача 9

Следующую матрицу представить в виде произведения симметрической матрицы с положительными характеристическими числами на ортогональную матрицу.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

При помощи сингулярного разложения найдём полярное:

$$A = V\Sigma U^T = V\Sigma(V^TV)U^T = \underbrace{(V\Sigma V^T)}_{S}\underbrace{(VU^T)}_{O} = SO$$

Рассмотрим линейный оператор, задаваемый матрицей:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдём его с.з. и соответствующие им с.в.:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 3\\ 3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-8)$$

Корни характеристического многочлена будут с.з. Тогда $\lambda_1=8$ и $\lambda_2=2$. Обозначим $\sigma_1=\sqrt{\lambda_1}=2\sqrt{2}$, $\sigma_2=\sqrt{\lambda_2}=\sqrt{2}$.

Найдём собственные векторы для каждого из с.з., решив уравнение $(A-\lambda E)v=0$, где $v$ – с.в.:

- $\lambda_1=8$

$$\left(\begin{array}{cc|c}5-\lambda & 3 & 0\\ 3 & 5-\lambda & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}-3 & 3 & 0\\ 3 & -3 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_2\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow \text{ФСР: } e_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Нормируем $e_1$:

$$v_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

- $\lambda_2=2$

$$\left(\begin{array}{cc|c}5-\lambda & 3 & 0\\ 3 & 5-\lambda & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}3 & 3 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\ x_2\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow \text{ФСР: } e_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Нормируем $e_2$:

$$v_2=\frac{e_2}{\|e_2\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Найдём вектор $u_1$, выражающийся через $v_1$ следующим образом:

$$u_1=\frac{A^Tv_1}{\sigma_1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Аналогично найдём $u_2$:

$$u_2=\frac{A^Tv_2}{\sigma_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Векторы $u_1$ и $u_2$ нормированы и ортогональны, их количество равно размерности пространства.

Составим матрицы:

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$V = \left(\begin{array}{c|c} v_1 & v_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$U = \left(\begin{array}{c|c} u_1 & u_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём симметрическую матрицу:

$$S = V\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Найдём ортогональную матрицу:

$$O = VU^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $A = SO = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

# Линейные преобразования евклидовых векторных пространств

## Задача 10

Пусть в некотором ортонормированном базисе трёхмерного евклидова пространства заданы векторы $e_1 = (0, 1, 1)^T$, $e_2 = (-1, -1, 1)^T$, $e_3 = (1, 0, 1)^T$. Пусть оператор $f$ задан матрицей $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ в базисе $e_1$, $e_2$, $e_3$. Найти матрицу $A_{f^*}$ сопряженного оператора $f^*$ в том же базисе.

**Решение:**

Найдём матрицу Грама для данного базиса, записав векторы $e_1$, $e_2$, $e_3$ в строки матрицы, и перемножив данную матрицу на транспонированную к ней:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу сопряжённого оператора можно по формуле:

$$A_{f^*} = \Gamma^{-1} A^T \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ \frac{4}{3} & 5 & \frac{5}{3} \\ 5 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $A_{f^*} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ \frac{4}{3} & 5 & \frac{5}{3} \\ 5 & -1 & 11 \end{pmatrix}$

## Задача 11

Линейное преобразование $\varphi$ евклидова пространства в базисе векторов

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

задано матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу сопряженного преобразования $\varphi^*$ в том же базисе, считая, что координаты векторов базиса даны в некотором ОНБ.

**Решение:**

Найдём матрицу Грама для базиса $f$:

$$\Gamma = \left( \begin{array}{c|c|c} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \right)^T \left( \begin{array}{c|c|c} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда по формуле можно найти матрицу сопряжённого оператора в том же базисе:

$$A_{\varphi^*} = \Gamma^{-1} A_\varphi^T \Gamma = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $\begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$

## Задача 12

Пусть матрица $\Gamma$ – матрица Грама некоторого базиса и $A_\varphi$ – матрица линейного преобразования $\varphi$. Найти матрицу $A_{\varphi^*}$ сопряжённого линейного оператора $\varphi^*$ в том же базисе.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

По формуле можно найти матрицу сопряжённого оператора в том же базисе:

$$A_{\varphi^*} = \Gamma^{-1} A_\varphi^T \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

## Задача 13*

В трехмерном евклидовом пространстве $\epsilon$ базис $s$ имеет матрицу Грама

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Векторы базиса $e$ заданы своими координатами в базисе $s$

$$[e_1]_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T, \; [e_2]_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \; [e_3]_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Найти биортогональный к базису $e$ базис $f$, записав его координаты в базисе $s$.

**Решение:**

Составим матрицу $A$ из столбцов векторов базиса $e$:

$$A = \left( \; [e_1]_s \; \middle| \; [e_2]_s \; \middle| \; [e_3]_s \; \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица $F$ столбцов векторов базиса $f$ может быть найдена по следующей формуле:

$$F^T \Gamma A = E \Leftrightarrow F = \left(A^{-1} \cdot \Gamma^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Значит, базис $f$ задаётся следующими векторами:

$$[f_1]_s = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, [f_2]_s = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, [f_3]_s = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $[f_1]_s = (-1, 2, -1)^T$, $[f_2]_s = (3, -5, 2)^T$, $[f_3]_s = (-4, 7, -2)^T$.

## Задача 14*

Пусть $e_1$, $e_2$, $e_3$ – базис пространства $V$, $\epsilon^1$, $\epsilon^2$, $\epsilon^3$ – двойственный ему базис пространства $V^*$.

a) Найдите базис $V^*$, двойственный к базису $2e_1 + e_3$, $e_1 + e_2 + e_3$, $e_2$ пространства $V$.

b) Найдите базис $V$, для которого базис $2\epsilon^1 + \epsilon^2$, $\epsilon^1 + \epsilon^2 + \epsilon^3$, $\epsilon^2$ – двойственный.

**Решение:**

Обозначим следующие базисы $e = (e_1, e_2, e_3)$ и $e' = (2e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3, e_2)$, $\epsilon = (\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3)$ и $\epsilon' = (2\epsilon^1 + \epsilon^3, \epsilon^1 + \epsilon^2 + \epsilon^3, \epsilon^2)$.

a) Матрица перехода от $e$ к $e'$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём двойственный базис по следующей формуле:

$$FA = E \Leftrightarrow F = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Получили двойственный к $e'$ базис:

$$f^1 = (1, 0, -1),$$
$$f^2 = (-1, 0, 2),$$
$$f^3 = (1, 1, -2)$$

b) Запишем матрицу F перехода от $\epsilon$ к $\epsilon'$:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда базис, к которому $\epsilon'$ будет двойственным, можно найти по формуле:

$$FA = E \Leftrightarrow A = F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Значит, искомый базис будет равен:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** a) $f^1 = (1, 0, -1), f^2 = (-1, 0, 2), f^3 = (1, 1, -2)$

b) $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

# Преобразования матриц

## Задача 15

Привести квадратичную форму $k = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 5x_3^2$ к каноническому виду посредством ортогональной замены координат. Определить ранг и индексы инерции. Указать соответствующее линейное преобразование.

**Решение:**

Запишем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдём собственные значения и собственные векторы:

$$\chi_A(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)$$

Найдём $\lambda$ при которых $\chi_Q(\lambda) = 0$:

$$\chi_Q(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6) \Leftrightarrow \lambda = \left[\begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 6 \end{array}\right.$$

Найдём ФСР системы $(Q - \lambda E)x = 0$:

- $\lambda = -2$:

$$Q + 2E = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 3$:

$$Q - 3E = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 6$:

$$Q - 6E = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Векторы $e_1$, $e_2$, $e_3$ уже ортогональны, так как являются собственными векторами, отвечающими разным с.з., оператора, задаваемого симметричной матрицей. Остаётся нормировать данные векторы:

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \; f_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода к каноническому виду:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$A = S^T Q S$$

Ранг квадратичной формы равен рангу матрицы квадратичной формы $\operatorname{Rg} Q = 3$.

Найдём индексы инерции:

- $i_+ = 2$ (так как 2 члена с положительным коэффициентом)
- $i_- = 1$ (так как 1 член с отрицательным коэффициентом)

**Ответ:** 1) Канонический вид: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2) Матрица перехода: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

3) Индексы инерции: $i_+ = 2, i_- = 1$

## Задача 16

Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к главным осям:

a) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

**Решение:**

a) Запишем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Найдём собственные значения и собственные векторы:

$$\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9)$$

Найдём $\lambda$ при которых $\chi_Q(\lambda) = 0$:

$$\chi_Q(\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9) \Leftrightarrow \lambda = \left[\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = 6 \\ \lambda = 9 \end{array}\right.$$

Найдём ФСР системы $(A - \lambda E)x = 0$:

- $\lambda = 3$:

$$Q - 3E = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 6$:

$$Q - 6E = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 9$:

$$Q - 9E = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы $e_1, e_2, e_3$ уже ортогональны, так как являются собственными векторами, отвечающими разным с.з., оператора, задаваемого симметричной матрицей. Остаётся нормировать данные векторы:

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ f_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода к каноническому виду:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = S^T Q S$$

b) Запишем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём собственные значения и собственные векторы:

$$\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

Найдём $\lambda$ при которых $\chi_Q(\lambda) = 0$:

$$\chi_Q(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-5) \Leftrightarrow \lambda = \left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = 5 \end{array}\right.$$

Найдём ФСР системы $(Q - \lambda E)x = 0$:

- $\lambda = -1$:

$$Q+E = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 5$:

$$Q-5E=\left(\begin{array}{ccc|c}-4&2&2&0\\2&-4&2&0\\2&2&-4&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}\Rightarrow \text{ФСР: } e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Векторы $e_1$ и $e_3$, $e_2$ и $e_3$ уже ортогональны, т.к. являются собственными векторами, отвечающими разным с.з., оператора, задаваемого симметричной матрицей. Ортогонализуем $e_1$ и $e_2$:

$$f_1'=e_1$$

$$f_2'=e_2-\frac{(e_2,f_1')}{(f_1',f_1')}f_1'=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$f_1=\frac{f_1'}{\|f_1'\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\ f_2=\frac{f_2'}{\|f_2'\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\ f_3=\frac{e_3}{\|e_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичной формы:

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

Матрица перехода к каноническому виду:

$$S=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$A=S^TQS$$

**Ответ:** a) Канонический вид: $3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2$; Матрица перехода: $\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

b) Канонический вид: $-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$; Матрица перехода: $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

## Задача 17

Найти ортонормированный базис собственных векторов и матрицу $B$ в этом базисе для линейного преобразования заданного в некотором ортонормированном базисе $A$

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Найдём собственные значения и собственные векторы:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-27)(\lambda-9)$$

Найдём $\lambda$ при которых $\chi_A(\lambda) = 0$:

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda-27)(\lambda-9) \Leftrightarrow \lambda = \left[\begin{aligned} &\lambda = 27 \\ &\lambda = 9 \end{aligned}\right.$$

Найдём ФСР системы $(A - \lambda E)x = 0$:

- $\lambda = 9$:

$$A - 9E = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -8 & 4 & 0 \\ -8 & 8 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x_1 = x_2 - \frac{1}{2}x_3 \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{cases} e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \\ e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

- $\lambda = 27$:

$$A - 27E = \left(\begin{array}{ccc|c} -10 & -8 & 4 & 0 \\ -8 & -10 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & -16 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы $e_1$ и $e_3$, $e_2$ и $e_3$ уже ортогональны, т.к. являются собственными векторами, отвечающими разным с.з., оператора, задаваемого симметричной матрицей. Ортогонализуем $e_1$ и $e_2$:

$$f_1' = e_1$$

$$f_2' = e_2 - \frac{(e_2, f_1')}{(f_1', f_1')} f_1' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \frac{f_1'}{\|f_1'\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \frac{f_2'}{\|f_2'\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, f_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичной формы:

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$, Базис $f_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

## Задача 18

Для ортогонального преобразования $\varphi$, заданного в ортонормированном базисе матрицей $A$, найти канонический вид матрицы $A$ и матрицу перехода к этому виду. Указать угол и ось поворота.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

По теореме Эйлера любой ортогональный оператор в $\mathbb{R}^3$ может быть приведён к следующему каноническому виду:

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Значит, одним из собственных значений должно быть 1 или $-1$. Проверим, является ли $\lambda = 1$ с.з., подставив его в характеристический многочлен:

$$\det(A - E) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{I = -II}}{=} 0$$

Он равен 0, значит, $\lambda = 1$ – с.з и в правом нижнем углу матрицы $A'$ стоит 1. Найдём для с.з. с.в., решив уравнение $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A-E)v = 0$ (по определению с.в.), где $v$ – искомый с.в.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

У данной системы две главные переменные – $x_1$ и $x_3$ и одна зависимая $x_2$. Найдём ФСР, для этого в зависимые переменные подставим наборы, состоящие не из всех нулевых значений. Зависимая переменная одна, поэтому набор будет один, пусть $x_2 = 1$.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$$

Нормируем вектор $v$:

$$f_3 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{v}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ось поворота – собственное значение, соответствующее данному с.з., т.е. вектор $f_3$.

Найдём ОНБ в $\langle f_3 \rangle^\perp$. Так как $f_3$ удовлетворяет $(A-E)f_3 = 0$, то для всех векторов $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $e_1, e_2$ – базис, состоящий из строк матрицы $(A-E)$, будет выполнено равенство $(u, f_3) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, f_3) = \alpha_1(e_1, f_3) + \alpha_2(e_2, f_3) = 0 + 0 = 0$, т.е. $u \in \langle f_3 \rangle^\perp$. Значит подпространство $\langle f_3 \rangle^\perp = L(e_1, e_2)$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем $e_1$ и $e_2$ методом Грама-Шмидта ($e_1$ и $e_2$ уже ортогональны с $f_3$, т.к. лежат в $\langle f_3 \rangle^\perp$):

$$f_1' = e_2$$

$$f_2' = e_1 - \frac{(e_1, f_1')}{(f_1', f_1')} f_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нормируем $f_1'$ и $f_2'$:

$$f_1 = \frac{f_1'}{\|f_1'\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \frac{f_2'}{\|f_2'\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $f = (f_1, f_2, f_3)$ – базис, в котором матрица $A$ имеет канонический вид.

Обозначим линейный оператор, данный в задаче, как $\varphi$. Тогда

$$\varphi(f_1) = Af_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

В базисе $f$ по определению вектор $\varphi(f_1)$ будет равен столбцу матрицы линейного оператора в этом базисе, т.е. первому столбцу из $A'$. Тогда в исходном базисе:

$$(\varphi(f_1))^f = \cos\alpha \cdot f_1 + \sin\alpha \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 = \cos\alpha \cdot f_1 + \sin\alpha \cdot f_2$$

$$(\varphi(f_1), f_1) = (\cos\alpha \cdot f_1, f_1) + (\sin\alpha \cdot f_2, f_1) = \cos\alpha \cdot (f_1, f_1) + \sin\alpha \cdot (f_2, f_1) = \cos\alpha \cdot \|f_1\| = \cos\alpha$$

$$(\varphi(f_1), f_2) = (\cos\alpha \cdot f_1, f_2) + (\sin\alpha \cdot f_2, f_2) = \cos\alpha \cdot (f_1, f_2) + \sin\alpha \cdot (f_2, f_2) = \sin\alpha \cdot \|f_2\| = \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = (\varphi(f_1), f_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$
$$\sin\alpha = (\varphi(f_1), f_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot 0 = -1$$

Найдём угол:

$$\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

Канонический вид оператора:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода к каноническому виду:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = C^T A C$$

**Ответ:** канонический вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, матрица перехода $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ось поворота $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, угол $-\frac{\pi}{2}$.

## Задача 19

Найти геометрический смысл линейного преобразования $\varphi$ трёхмерного евклидова пространства, заданного в ортонормированном базисе $e_1, e_2, e_3$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Геометрический смысл линейного оператора можно найти с помощью его канонического вида. По теореме Эйлера любой ортогональный оператор в $\mathbb{R}^3$ может быть приведён к следующему каноническому виду:

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Значит, одним из собственных значений должно быть 1 или $-1$. Проверим, является ли $\lambda = 1$ с.з., подставив его в характеристический многочлен:

$$\det(A-E) = \begin{vmatrix} \frac{3}{4}-1 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-1 & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2}-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \overset{\text{I} = \text{-II}}{=} 0$$

Он равен 0, значит, $\lambda = 1$ – с.з. Найдём для него с.в.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ось поворота – собственное значение, соответствующее данному с.з., т.е. вектор $f_3$.

Найдём ОНБ в $\langle f_3 \rangle^\perp$. Так как $f_3$ удовлетворяет $(A-E)f_3 = 0$, то для всех векторов $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $e_1, e_2$ – базис, состоящий из строк матрицы $(A-E)$, будет выполнено равенство $(u, f_3) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, f_3) = \alpha_1(e_1, f_3) + \alpha_2(e_2, f_3) = 0 + 0 = 0$, т.е. $u \in \langle f_3 \rangle^\perp$. Значит подпространство $\langle f_3 \rangle^\perp = L(e_1, e_2)$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем $e_1$ и $e_2$ методом Грама-Шмидта ($e_1$ и $e_2$ уже ортогональны с $f_3$, т.к. лежат в $\langle f_3 \rangle^\perp$):

$$f_1' = e_2$$
$$f_2' = e_1 - \frac{(e_1, f_1')}{(f_1', f_1')} f_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нормируем $f_1'$ и $f_2'$:

$$f_1 = \frac{f_1'}{\|f_1'\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \frac{f_2'}{\|f_2'\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $f = (f_1, f_2, f_3)$ – базис, в котором матрица $A$ имеет канонический вид.

Обозначим линейный оператор, данный в задаче, как $\varphi$. Тогда

$$\varphi(f_1) = Af_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Найдём угол:

$$\begin{cases} \cos\alpha = (\varphi(f_1), f_1) = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot 0 - \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = (\varphi(f_1), f_2) = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Для определения направления поворота найдём ориентацию базиса $f_3, f_1, f_2$. Для этого посчитаем определитель следующей матрицы:

$$\det\left( \begin{array}{c|c|c} f_3 & f_1 & f_2 \end{array} \right) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sqrt{2} < 0$$

Определитель меньше нуля, значит, вращение производится в отрицательном направлении.

**Ответ:** поворот вокруг оси $(1, 1, 0)^T$ на угол $\frac{\pi}{3}$ в отрицательном направлении.

# Подпространства, проекция, ортогональная составляющая

## Задача 20

Найти ортогональную проекцию $y$ и ортогональную составляющую $z$ вектора $x$ на линейное пространство $L = L(a_1, a_2, a_3)$.

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

**I способ.**

Найдём базис $L$. Оно задана как линейная оболочка векторов $a_1, a_2, a_3$, поэтому запишем их в столбцы и приведём к ступенчатому виду, выделив ведущие элементы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow a_1, a_2 - \text{базисные}$$

Составим матрицу из базисных столбцов:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдём проекцию по формуле:

$$y = \mathrm{pr}_L x = A(A^T A)^{-1} A^T x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Тогда ортогональная проекция будет равна:

$$z = x - y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**II способ.**

Базисные векторы подпространства $L$ найдены в первом способе. Это векторы $a_1$ и $a_2$.

Ортогонализуем $a_1$ и $a_2$:

$$e_1 = a_1$$

$$e_2 = a_2 - \frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Найдём проекцию вектора $x$ на $L$ по формуле:

$$y = \mathrm{pr}_L\, x = \frac{(e_1, x)}{(e_1, e_1)} e_1 + \frac{(e_2, x)}{(e_2, e_2)} e_2 = \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{12}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ортогональная проекция ищется так же как и в первом способе: $z = x - y$.

**III способ.**

Найдём базис $L^{\perp}$. Для этого найдём ФСР системы составленной из столбцов $a_1, a_2, a_3$, записанных в строки:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ФСР данной системы будет равна:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так как $e_1$ и $e_2$ базис ортогонального дополнения, а $z$ является ортогональной проекцией, вектор $z$ можно разложит по базису $e_1, e_2$:

$$z = \alpha e_1 + \beta e_2$$

Тогда $x = z + y = \alpha e_1 + \beta e_2 + y$. По определению ортогонального дополнения для любого вектора $a \in L$ верно, что если $b \in L^\perp$, то $(a, b) = 0$. Вектор $y \in L$, вектор $z \in L^\perp$. Посчитаем следующие скалярные произведения:

$$\begin{cases} (x, e_1) = (\alpha e_1 + \beta e_2 + y, e_1) = \alpha(e_1, e_1) + \beta(e_2, e_1) + (y, e_1) = \alpha(e_1, e_1) + \beta(e_1, e_2) \\ (x, e_2) = (\alpha e_1 + \beta e_2 + y, e_2) = \alpha(e_1, e_2) + \beta(e_2, e_2) + (y, e_2) = \alpha(e_1, e_2) + \beta(e_2, e_2) \end{cases}$$

Векторы $x, e_1, e_2$ известны, значит, можно посчитать скалярные произведения:

$$\begin{cases} -2 = 2\alpha - 2\beta \\ -10 = -2\alpha + 14\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Теперь можно найти $z$ и $y$:

$$z = -2e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y = x - z = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

## Задача 21

Найти расстояние от точки, заданной вектором $x = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}^T$, до линейного многообразия $L$, заданного системой:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$$

**Решение:**

Расстояние от вектора $x$ до линейного многообразия $L$ равно длине ортогональной составляющей $\| \operatorname{ort}_L x\|$. Перенесём вектор $x$ и $L$ на вектор $x_0$, который является частным решением системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда получаем новый вектор $x'$ и линейное многообразие $U$, между которыми будем искать расстояние:

$$x' = x - x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U : \begin{cases} 2x_1 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\| \operatorname{ort}_L x\| = \| \operatorname{ort}_U x'\|$$

Ортогональную составляющую $x'$ на $U$, можно найти в виде проекции $x'$ на $U^\perp$. В качестве базиса $U^\perp$ возьмём строки матрицы задающей систему $U$, то есть

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так можно сделать, потому что выполнены следующие условия:

1) Векторы $e_1$ и $e_2$ л.н.з. и их количество $\dim U^\perp$
2) $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in U$ для $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ из $U^\perp$ выполнено:

$$(x, v) = \alpha(x, e_1) + \beta(x, e_2) = \alpha \underbrace{(2x_1 + x_4)}_{\substack{=0 \text{ из системы,} \\ \text{задающей } U}} + \beta \underbrace{(-2x_2 + x_3 + x_4)}_{\substack{=0 \text{ из системы,} \\ \text{задающей } U}} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

То есть определение оргонального дополнения выполнено.

Остаётся найти $\| \operatorname{pr}_{U^\perp} x'\| = \| \operatorname{ort}_U x'\|$. Воспользуемся формулой

$$\operatorname{pr}_L x = A(A^TA)^{-1}A^Tx' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Осталось найти длину проекции:

$$\|\mathrm{pr}_L x\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 5$$

**Ответ:** 5.

# Кривые и поверхности второго порядка

## Задача 22

Уравнение $5x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 14 = 0$ линии второго порядка на плоскости привести к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования и сдвига, указав:

a) Одно из преобразований перехода от заданной системы координат к канонической системе координат

b) Канонический вид уравнения линии

c) Определить тип кривой. На плоскости построить каноническую систему координат, в которой схематично изобразить кривую.

**Решение:**

a) Сначала выделим из уравнения и приведём к каноническому виду квадратичную форму:

$$Q(x, y) = 5x^2 + 2y^2 + 4xy \Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

К каноническому виду приведём при помощи ортогональных преобразований:

$$\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$$

Собственные значение будут равны: $\lambda = 1, 6$. Для каждого найдем соответствующее собственное значение:

- $\lambda = 1$:

$$A - E = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 6$:

$$A - E = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) x_1 = 2x_2 \Rightarrow \text{ФСР: } e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы $e_1$, $e_2$ уже ортогональны, так как являются собственными векторами, отвечающими разным с.з., оператора, задаваемого симметричной матрицей. Остаётся нормировать данные векторы:

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \; f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Составим матрицу ортогонального преобразования:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичная формы:

$$Q'(x_1, y_1) = x_1^2 + 6y_2^2$$

Замена от координат $x, y$ к $x_1, y_1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \end{cases}$$

b) Подставим новые координаты в исходное уравнение:

$$5\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right)^2 + 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right) + \\ + 4\sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right) + 4\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right) - 14 = 0$$

$$x_1^2 + 6y_1^2 + 4x_1 + 12y - 14 = 0$$

Выделим полные квадраты:

$$\begin{gathered} x_1^2 + 6y_1^2 + 4x_1 + 12y - 14 = 0 \\ (x_1+2)^2 + 6(y_1+1)^2 = 24 \\ \frac{(x_1+2)^2}{24} + \frac{(y_1+1)^2}{4} = 1 \end{gathered}$$

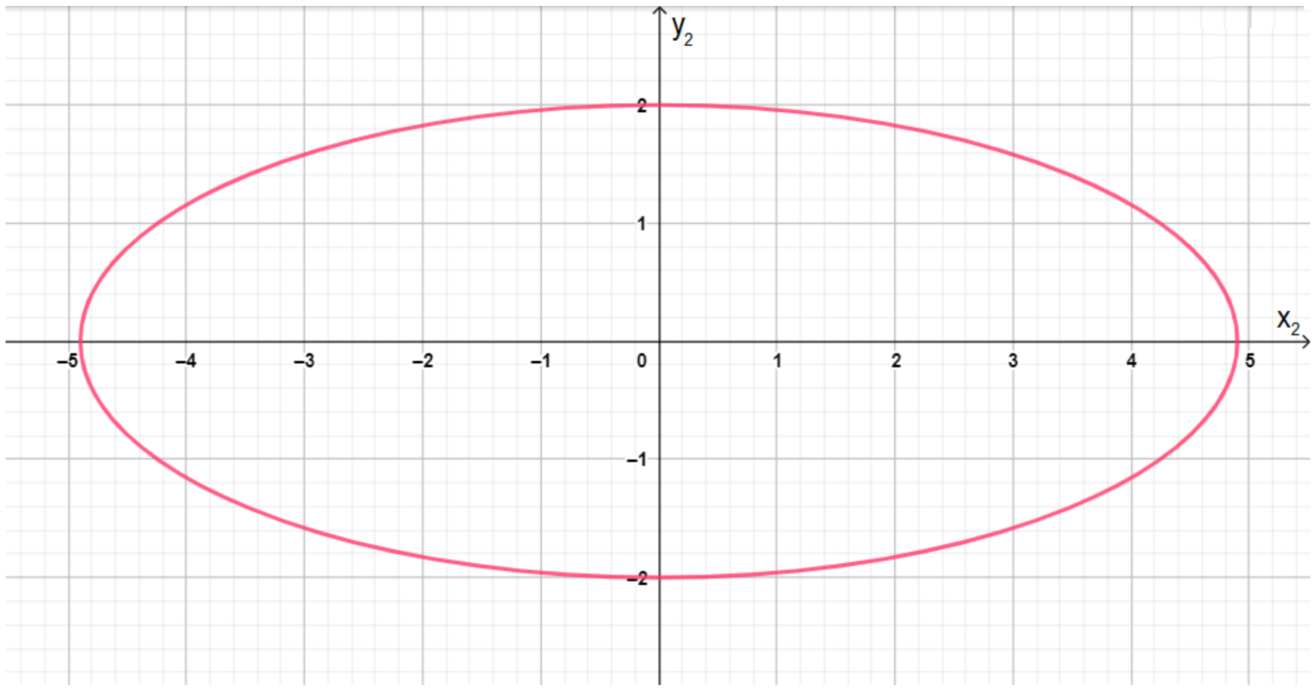
Сделаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 2 \\ y_1 = y_2 - 1 \end{cases}$$

Получаем канонический вид кривой:

$$\frac{x_2^2}{24} + \frac{y_2^2}{4} = 1$$

c) Данное уравнение задаёт эллипс с $a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, $b = \sqrt{4} = 2$. В канонической системе координат он проходит через точки $(\pm a; 0)$, $(0; \pm b)$.




**Ответ:** $\dfrac{x_2^2}{24} + \dfrac{y_2^2}{4} = 1$

## Задача 23

Эллипс проходит через точку $C(0; -1 + \sqrt{20})$, его большая ось оканчивается вершинами $A(-2; 5)$, $B(-2; -7)$. Написать уравнение кривой, указать большую и малую полуоси, найти эксцентриситет и сделать эскиз.

**Решение:**

Найдём точку – центр эллипса. Так как у вершин $A$ и $B$, задающих прямую оси, $x$-координата совпадает, ось эллипса $AB$ параллельна оси $O_y$. Координата центра $x_0 = -2$, координата центра $y_0 = \frac{-7+5}{2} = -1$. Таким образом, центр в точке $O(-2; -1)$.

Так как оси эллипса параллельны координатным осям, а центр расположен в $O(-2; -1)$, получим следующее уравнение эллипса:

$$\frac{(x+2)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$

Подставим точку $A$ в уравнение:

$$\frac{(-2+2)^2}{a^2} + \frac{(5+1)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{36}{b^2} = 1 \Rightarrow b = 6$$

Подставим точку $C$ в уравнение:

$$\frac{(0+2)^2}{a^2}+\frac{(-1+\sqrt{20}+1)^2}{36}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{5}{9}=1 \Leftrightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3$$

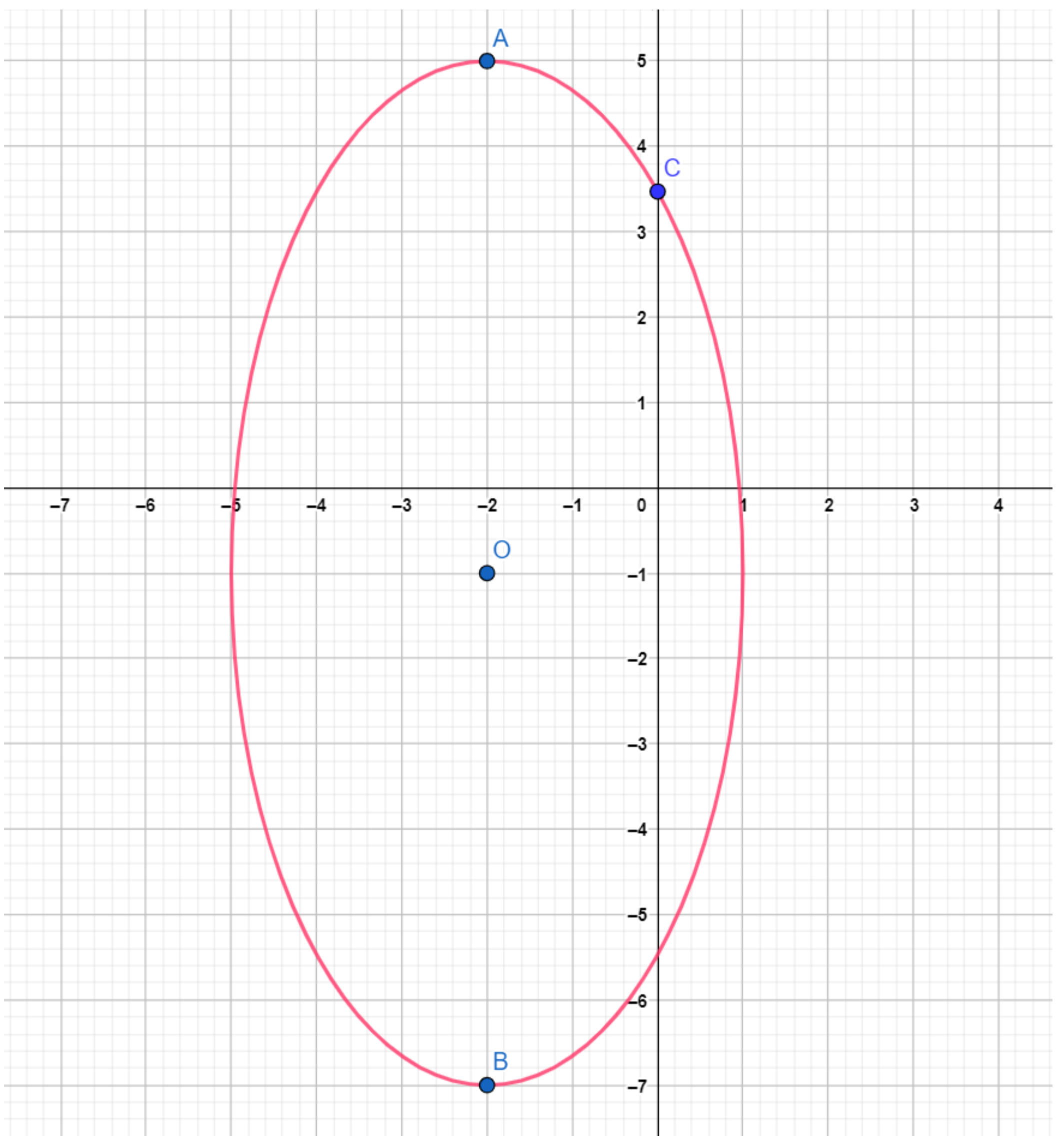
Таким образом, уравнение кривой:

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$$

Малая полуось равна $a=3$, большая полуось равна $b=6$. Посчитаем эксцентриситет:

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Ответ:** малая полуось равна $a=3$, большая полуось равна $b=6$, эксцентриситет $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



## Задача 24

Используя параллельный перенос, выяснить вид и расположение на координатной плоскости следующих линий второго порядка

a) $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$

c) $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$

d) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$

**Решение:**

a) Преобразуем выражение:

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$$
$$(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) - 16 = 0$$
$$(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 16$$
$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Сделаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

Получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1$$

Значит, исходное уравнение задаёт эллипс с центром в точке $O(-2, 1)$, большой полуосью $a = 4$ и малой полуосью $b = 2$.

b) Преобразуем выражение:

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$$
$$(x^2 + 6x + 9) - 4y^2 - 4 = 0$$
$$(x+3)^2 - 4y^2 = 4$$
$$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

Сделаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' \end{cases}$$

Получаем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{1^2} = 1$$

Значит, исходное уравнение задаёт гиперболу с центром в точке $O(-3,0)$, действительной полуосью $a = 2$ и мнимой полуосью $b = 1$.

c) Преобразуем выражение:

$$3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$$
$$3(x^2 + 2x + 1) - 2(y^2 - 2y + 1) = 0$$
$$3(x+1)^2 - 2(y-1)^2 = 0$$
$$\big(\sqrt{3}(x+1) - \sqrt{2}(y-1)\big)\big(\sqrt{3}(x+1) + \sqrt{2}(y-1)\big) = 0$$

Сделаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

Получаем канонические уравнения двух прямых:

$$\left[\begin{aligned} &\sqrt{3}x' - \sqrt{2}y' = 0 \\ &\sqrt{3}x' + \sqrt{2}y' = 0 \end{aligned}\right.$$

Значит, исходное уравнение задаёт две пересекающиеся прямые в точке $O(-1,1)$.

d) Преобразуем выражение:

$$y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$$
$$(y^2 - 2x + 1) - 10x - 20 = 0$$
$$(y-1)^2 = 10(x+2)$$

Сделаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

Получаем каноническое уравнение параболы:

$$y'^2 = 2 \cdot 5x'$$

Значит, исходное уравнение задаёт параболу с вершиной в точке $O(-2,1)$, $p = 5$.

**Ответ:** a) эллипс; b) гипербола; c) пара пересекающихся прямых; d) парабола.

## Задача 25

Используя метод вращений, определить форму и расположение на плоскости следующих линий второго порядка:

a) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

b) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$

c) $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$

**Решение:**

a) Выделим из выражения квадратичную форму и приведём её к каноническому виду:

$$Q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

К каноническому виду приведём при помощи ортогональных преобразований:

$$\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)$$

Собственные значение будут равны: $\lambda = 0, 2$. Для каждого найдем соответствующее собственное значение:

- $\lambda = 0$:

$$A - 0E = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) x_1 = x_2 \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 2$:

$$A - 2E = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) x_1 = -x_2 \Rightarrow \text{ФСР: } e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы $e_1, e_2$ уже ортогональны, так как являются собственными векторами, отвечающими разным с.з., оператора, задаваемого симметричной матрицей. Остаётся нормировать данные векторы:

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Составим матрицу ортогонального преобразования:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичная формы:

$$Q'(x_1, y_1) = 0x_1^2 + 2y_2^2$$

Замена от координат $x, y$ к $x_1, y_1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{cases}$$

Подставим новые координаты в исходное уравнение:

$$0x_1^2 + 2y_2^2 - 10\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) - 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) + 25 = 0$$

$$2y_1^2 - 8\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}y_1 + 25 = 0$$
$$2\left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 8\sqrt{2}\left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0$$
$$\left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

Сделаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y_2 = y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y_1 = y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Получаем канонический вид параболы:

$$y_2^2 = 2 \cdot 2\sqrt{2}x_2$$

Вернёмся к исходным координатам:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 2 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 1 \end{cases}$$

Вершина параболы в координатах $x_2, y_2$ находится в точке $(0; 0)$. Тогда в координатах $x, y$ вершина параболы будет находиться в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 2; \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 1\right)$, то есть в точке $(2; 1)$.

Ось параболы в координатах $x_2, y_2$ равна $y_2 = 0$. Найдём ось параболы в координатах $x, y$. Вычтем из второго уравнения системы для координат $x, y$ первое:

$$y - x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 2\right) = \sqrt{2}y_2 - 1 \Leftrightarrow y = x - 1 + \sqrt{2}y_2$$

Подставляя $y_2 = 0$, получаем ось исходной параболы: $y = x - 1$.
Параметр $p = 2\sqrt{2}$. Тогда фокус в координатах $x_2, y_2$ будет в точке $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, т.е. $\left(\sqrt{2}, 0\right)$. Найдём фокус в координатах $x, y$: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 2; \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 1\right)$.Таким образом, фокус в точке $(3; 2)$.

b) Выделим из выражения квадратичную форму и приведём её к каноническому виду:

$$Q(x,y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 \Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

К каноническому виду приведём при помощи ортогональных преобразований:

$$\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

Собственные значение будут равны: $\lambda = 1, 6$. Для каждого найдем соответствующее собственное значение:

- $\lambda = 1$:

$$A - E = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) x_1 = -2x_2 \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 6$:

$$A - 6E = \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) x_1 = \frac{1}{2}x_2 \Rightarrow \text{ФСР: } e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы $e_1$, $e_2$ уже ортогональны, так как являются собственными векторами, отвечающими разным с.з., оператора, задаваемого симметричной матрицей. Остаётся нормировать данные векторы:

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \ f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Составим матрицу ортогонального преобразования:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичная формы:

$$Q'(x_1, y_1) = x_1^2 + 6y_2^2$$

Замена от координат $x, y$ к $x_1, y_1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 \end{cases}$$

Подставим новые координаты в исходное уравнение:

$$x_1^2 + 6y_2^2 - 6\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right) - 8\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right) - 1 = 0$$

$$x_1^2 + 6y_1^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x - \frac{22}{\sqrt{5}}y - 1 = 0$$

$$\left(x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5} + 6\left(y_1 - \frac{11}{6\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{121}{30} - 1 = 0$$

$$\left(x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y_1 - \frac{11}{6\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{35}{6}$$

$$\frac{\left(x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{35}{6}} + \frac{\left(y_1 - \frac{11}{6\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{35}{36}} = 1$$

Сделаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y_2 = y_1 - \frac{11}{6\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y_1 = y_2 + \frac{11}{6\sqrt{5}} \end{cases}$$

Получаем канонический вид эллипса:

$$\frac{x_2^2}{\left(\sqrt{\frac{35}{6}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{\sqrt{35}}{6}\right)^2} = 1$$

Вернёмся к исходным координатам:

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(y_2 + \frac{11}{6\sqrt{5}}\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(y_2 + \frac{11}{6\sqrt{5}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{7}{6} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Центр эллипса в координатах $x_2, y_2$ находится в точке $(0;0)$. Тогда в координатах $x, y$ центр эллипса будет находиться в точке $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 + \frac{7}{6}; \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0 + \frac{1}{3}\right)$, то есть в точке $(\frac{7}{6}; \frac{1}{3})$.
Большая полуось эллипса равна $a = \frac{\sqrt{35}}{6}$, меньшая – $b = \sqrt{\frac{35}{6}}$.
Большая ось в координатах $x_2, y_2$ задаётся уравнением $y_2 = 0$. Найдём ось эллипса в координатах $x, y$. Сложим удвоенное второе уравнение системы для координат $x, y$ и первое:

$$2y + x = \frac{2}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{4}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{7}{6} = \sqrt{5}y_2 + \frac{11}{6} \Leftrightarrow 2y + x - \frac{11}{6} = \sqrt{5}y_2$$

Подставляя $y_2 = 0$, получаем большую ось исходного эллипса: $2y + x - \frac{11}{6} = 0$.

c) Выделим из выражения квадратичную форму и приведём её к каноническому виду:

$$Q(x,y) = 0x^2 + 6xy - 8y^2 \Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

К каноническому виду приведём при помощи ортогональных преобразований:

$$\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 \\ 3 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-9)$$

Собственные значение будут равны: $\lambda = 1, -9$. Для каждого найдем соответствующее собственное значение:

- $\lambda = 1$:

$$A - E = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) x_1 = 3x_2 \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -9$:

$$A + 9E = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) x_1 = -\frac{1}{3}x_2 \Rightarrow \text{ФСР: } e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы $e_1$, $e_2$ уже ортогональны, так как являются собственными векторами, отвечающими разным с.з., оператора, задаваемого симметричной матрицей. Остаётся нормировать данные векторы:

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix},\ f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Составим матрицу ортогонального преобразования:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичная формы:

$$Q'(x_1, y_1) = x_1^2 - 9y_2^2$$

Замена от координат $x, y$ к $x_1, y_1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}y_1 \\ \frac{1}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}y_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_1 \end{cases}$$

Подставим новые координаты в исходное уравнение:

$$x_1^2 - 9y_2^2 + 12\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}y_1\right) - 26\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_1\right) - 11 = 0$$

$$x_1^2 - 9y_1^2 + \sqrt{10}x - 9\sqrt{10}y - 11 = 0$$

$$\left(x_1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} - 9\left(y_1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \frac{45}{2} - 11 = 0$$

$$\left(x_1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 9\left(y_1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 9$$

$$\frac{\left(x_1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{9} + \frac{\left(y_1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{1} = 1$$

Сделаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y_2 = y_1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y_1 = y_2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Получаем канонический вид гиперболы:

$$\frac{x_2^2}{3^2} + \frac{y_2^2}{1^2} = 1$$

Вернёмся к исходным координатам:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}y_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}}\left(x_2 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{10}}\left(y_2 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(x_2 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) + \frac{3}{\sqrt{10}}\left(y_2 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{10}}y_2 - 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}x_2 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_2 - 2 \end{cases}$$

Центр гиперболы в координатах $x_2, y_2$ находится в точке $(0;0)$. Тогда в координатах $x, y$ центр гиперболы будет находиться в точке $\left(\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 0 - 1; \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 0 + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot 0 - 2\right)$, то есть в точке $(-1;-2)$.

Мнимая полуось гиперболы равна $b = 3$, действительная – $a = 1$.

Действительная ось в координатах $x_2, y_2$ задаётся уравнением $x_2 = 0$. Найдём ось эллипса в координатах $x, y$. Сложим утроенное первое уравнение системы для координат $x, y$ и второе:

$$y + 3x = \frac{1}{\sqrt{10}}x_2 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_2 - 2 + \frac{9}{\sqrt{10}}x_2 - \frac{3}{\sqrt{10}}y_2 - 3 = \sqrt{10}x_2 - 5 \Leftrightarrow y + 3x + 5 = \sqrt{10}x_2$$

Подставляя $x_2 = 0$, получаем большую ось исходного эллипса: $y + 3x + 5 = 0$.

**Ответ:** a) Парабола с вершиной $(2;1)$ и фокусом $(3;2), p = 2\sqrt{2}$, ось: $y = x - 1$

b) Эллипс с центром $\left(\frac{7}{6}; \frac{1}{3}\right)$, большая полуось $a = \frac{\sqrt{35}}{6}$, меньшая – $b = \sqrt{\frac{35}{6}}$, ось: $2y + x - \frac{11}{6} = 0$

b) Гипербола с центром $(-1;-2)$, действительная полуось $a = 1$, мнимая – $b = 3$, действительная ось: $y + 3x + 5 = 0$