

# Алгебра. Задачи 1

Арунова Анастасия

## Содержание

|                                   |           |
|-----------------------------------|-----------|
| <b>Операции над матрицами</b>     | <b>3</b>  |
| Теория . . . . .                  | 3         |
| Задача 1 . . . . .                | 4         |
| <b>Системы линейных уравнений</b> | <b>6</b>  |
| Теория . . . . .                  | 6         |
| Задача 2 . . . . .                | 8         |
| Задача 3 . . . . .                | 9         |
| Задача 4 . . . . .                | 10        |
| <b>Матричные уравнения</b>        | <b>13</b> |
| Теория . . . . .                  | 13        |
| Задача 5 . . . . .                | 13        |
| <b>Подстановки</b>                | <b>15</b> |
| Теория . . . . .                  | 15        |
| Задача 6 . . . . .                | 16        |
| Задача 7 . . . . .                | 18        |
| Задача 8 . . . . .                | 19        |
| Задача 9 . . . . .                | 20        |
| <b>Определители</b>               | <b>21</b> |
| Теория . . . . .                  | 21        |
| Задача 10 . . . . .               | 22        |
| Задача 11 . . . . .               | 23        |
| Задача 12 . . . . .               | 24        |

|  |           |
|--|-----------|
| Задача 13 . . . . .                        | 25        |
| Задача 14 . . . . .                        | 26        |
| Задача 15 . . . . .                        | 27        |
| Задача 16 . . . . .                        | 28        |
| Задача 17 . . . . .                        | 29        |
| Задача 18 . . . . .                        | 30        |
| Задача 19 . . . . .                        | 31        |
| <b>Ранг матрицы</b>                        | <b>34</b> |
| Теория . . . . .                           | 34        |
| Задача 20 . . . . .                        | 34        |
| <b>Интерполяционный многочлен Лагранжа</b> | <b>36</b> |
| Теория . . . . .                           | 36        |
| Задача 21 . . . . .                        | 36        |
| <b>Подстановка матрицы в уравнение</b>     | <b>38</b> |
| Задача 22 . . . . .                        | 38        |
| <b>Разложения матриц</b>                   | <b>39</b> |
| Теория . . . . .                           | 39        |
| Задача 23 . . . . .                        | 39        |
| Задача 24 . . . . .                        | 40        |
| <b>Удачи!</b>                              | <b>42</b> |

## Операции над матрицами

### Теория

**Определение.** Матрица  $C$  называется суммой матриц  $A$  и  $B$ , если матрицы  $A, B, C$  одного типа  $m \times n$  с элементами  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ .

**Определение.** Произведением матрицы  $A$  типа  $m \times n$  на число  $\alpha$  называют матрицу  $C$  типа  $m \times n$  с элементами  $[C]_{ij} = \alpha[A]_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ .

**Определение.** Для матрицы  $A$  типа  $m \times n$  её транспонированной матрицей  $A^T$  называют матрицу типа  $n \times m$  с элементами  $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$ .

*Пример.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

**Определение.** Рассмотрим  $A$  типа  $n \times p$  и  $B$  типа  $p \times k$ . Привидением матриц  $A$  и  $B$  называют матрицу  $C$  типа  $n \times k$  с элементами  $c_{ij} = \sum_{l=1}^p a_{il} \cdot b_{lj}, \forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}$ .

*Пример.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**Определение.** Обратной к квадратной матрице  $A \in M_n(\mathbb{R})$  называется матрица

$$A^{-1} : A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$$

**Теорема.**  $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$ .

### Вычисление обратной матрицы:

I. Формула:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

II. Элементарные преобразования: составить матрицу  $(A | E)$  и привести её к каноническому виду:  $(E | B)$  (при условии, что  $A$  – невырожденная матрица). Матрица  $B$  и будет обратной.

## Задача 1

Выполните действия:

$$(3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

1) Умножим матрицу  $B$  на число:

$$3B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Возведём полученную матрицу в квадрат:

$$(3B)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15^2 + 3 \cdot (-3) & 15 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \\ -3 \cdot 15 + 0 \cdot (-3) & -3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 216 & 45 \\ -45 & -9 \end{pmatrix}$$

3) Найдём обратную к  $A$  матрицу.

• *Первый способ.* Найдём определитель матрицы  $A$ :

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 = 2$$

Определитель матрицы  $A$  не равен нулю, значит, для неё существует обратная.

Вычислим алгебраические дополнения каждого элемента:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} = 0$$

Составим союзную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, обратная матрица равна:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- *Второй способ.* Составим матрицу  $(A | E)$  и сделаем элементарные преобразования.

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{II \rightarrow \frac{-II}{2}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{I + 3II \rightarrow I} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

Значит, обратная матрица равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- 4) Вычислим произведение матриц

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-\frac{3}{2}) + 1 \cdot (-\frac{1}{2}) & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot (-\frac{3}{2}) + 0 \cdot (-\frac{1}{2}) & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

- 5) Разность двух матриц:

$$BA^{-1} - E = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

- 6) Транспонируем полученную матрицу:

$$(BA^{-1} - E)^T = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -9 & \frac{3}{2} \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

- 7) Умножим полученную матрицу на 2:

$$2(BA^{-1} - E)^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} -9 & \frac{3}{2} \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

- 8) Выполним последнее действие:

$$(3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T = \begin{pmatrix} 216 & 45 \\ -45 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 234 & 42 \\ -55 & -5 \end{pmatrix}$$

**Ответ:**  $\begin{pmatrix} 234 & 42 \\ -55 & -5 \end{pmatrix}$

## Системы линейных уравнений

### Теория

Пусть дана СЛАУ с  $x_1, \dots, x_n$  – неизвестными, в координатной форме представленная как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Запишем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Столбец правых частей:

$$b = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Столбец неизвестных:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда СЛАУ можно записать в следующем виде:

$$A_{m \times n} \cdot x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$$

Расширенной матрицей СЛАУ называется матрица:

$$(A | b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Система линейных уравнений, которая имеет решения, называется совместной, иначе несовместной.

**Теорема** (Кронекера-Капелли). СЛАУ  $Ax = b$  совместна  $\Leftrightarrow \text{Rg } A = \text{Rg } (A | b)$

## Способы решения системы линейных уравнений

### 1) Метод Гаусса.

- Записать расширенную матрицу СЛАУ  $(A | b)$ .
- Привести  $(A | b)$  к каноническому (ступенчатому) виду при помощи элементарных преобразований строк.

$$(A | b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Метод Гаусса}} \left( \begin{array}{ccc|ccc|c} \overbrace{1 \dots 0}^r & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Если  $\tilde{b}_{r+1} \neq 0$ , то у СЛАУ нет решений.
- Если  $\tilde{b}_{r+1} = 0$ , то решение системы – выражение главных переменных через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 - \sum_{1+r}^k \tilde{a}_{1k} \cdot x_k \\ \vdots \\ x_r = \tilde{b}_r - \sum_{1+r}^k \tilde{a}_{rk} \cdot x_k \end{cases}$$

### 2) Метод Крамера.

Данный метод подходит только тогда, когда  $A$  – квадратная матрица.

- Вычислить главный определитель системы –  $\det A$ .

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

- Вычислить определители  $\Delta_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , являющиеся определителями матриц, полученных из матрицы  $A$  заменой  $i$ -го столбца на столбец  $b$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

- Если  $\Delta = 0$  и есть  $\Delta_i \neq 0, i = \overline{1, n}$ , то система несовместна.
- Если  $\Delta = 0$  и  $\Delta_i = 0, i = \overline{1, n}$ , то применить метод Крамера нельзя (систему можно решить методом Гаусса, например).
- Если  $\Delta \neq 0$ , то решение системы будет:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\Delta_i}{\det A}, i = \overline{1, n}$$

### 3) С помощью обратной матрицы

Данный метод так же подходит при условии, что  $A$  – квадратная матрица.

- Посчитать определитель матрицы  $A$ .
- Если  $\det A \neq 0$ , найти обратную матрицу  $A^{-1}$ .
- Найти решение системы:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

## Задача 2

Решите систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

### Решение:

Запишем систему уравнений в матричном виде:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix}$$

То есть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы  $A$ :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 \cdot 2 - (-1) \cdot 0) - 1 \cdot (1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) = -1$$

↑  
по 2-му столбцу



Определитель не равен нулю, значит, для матрицы  $A$  существует обратная. Найдём её с помощью матрицы  $(A | E)$ :

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Pi - 2I \rightarrow \Pi} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{I} - \text{III} \rightarrow \text{I}]{\text{II} + 2\text{III} \rightarrow \text{II}} \\
 & \xrightarrow[\text{I} - \text{III} \rightarrow \text{I}]{\text{II} + 2\text{III} \rightarrow \text{II}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{I} + \text{III} \rightarrow \text{I}]{\text{II} - 2\text{III} \rightarrow \text{II}} \\
 & \xrightarrow[\text{I} + \text{III} \rightarrow \text{I}]{\text{II} - 2\text{III} \rightarrow \text{II}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right) \\
 & A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Зная обратную матрицу, можно найти решение системы:

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 + 14 + 15 \\ 80 - 28 - 45 \\ -40 + 14 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Ответ:**  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = 7$ ,  $x_3 = 4$ .

### Задача 3

Найдите все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

**Решение:**

Запишем расширенную матрицу СЛАУ  $(A | b)$  и приведём её элементарными преобразованиями к каноническому виду.

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{I} \rightarrow \text{III}]{\text{II}-3\text{I} \rightarrow \text{II}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & -9 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II} \rightarrow \text{III}} \\
& \xrightarrow{\text{III}-\text{II} \rightarrow \text{III}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{I}+\text{II} \rightarrow \text{I}]{\text{I} \rightarrow -\frac{1}{2} \text{III}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II}+7 \text{ III} \rightarrow \text{II}]{\text{I}+4 \text{ III} \rightarrow \text{I}} \\
& \xrightarrow[\text{II}+7 \text{ III} \rightarrow \text{II}]{\text{I}+4 \text{ III} \rightarrow \text{I}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Получаем три главных переменных –  $x_1, x_2, x_4$ . И две зависимые переменные –  $x_3, x_5$ . Запишем решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 7x_3 + 4x_5 \\ x_2 = 1 + 11x_3 + 7x_5 \\ x_4 = x_5 \\ x_3, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ответ: 
$$\begin{cases} x_1 = 1 + 7x_3 - 4x_5 \\ x_2 = 1 + 11x_3 - 7x_5 \\ x_4 = x_5 \\ x_3, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

## Задача 4

Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все её решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение):

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

**Решение:**

Проверим совместность СЛАУ при помощи теоремы Кронекера-Капелли.

Для этого составим расширенную матрицу системы и найдём её ранг.

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III-I} \rightarrow \text{III}]{\text{II}-2\text{I} \rightarrow \text{II}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II} \rightarrow \text{III}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array} \right)$$

Таким образом,  $\text{Rg}(A | b) = 2$ , так как всего 2 ненулевых строки в ступенчатом виде матрицы, полученной элементарными преобразованиями из данной.

Ранг матрицы  $A$  также будет равен 2, так как при её приведении к ступенчатому виду элементарные преобразования будут эквивалентны преобразованиям при приведении матрицы  $(A | b)$ .

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccccc} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

Значит,  $\text{Rg } A = \text{Rg}(A | b)$ , и система совместна и у неё есть решения. Найдём их:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}+4\text{II} \rightarrow \text{I}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ x_2 = -1 - x_4 + 6x_5 \end{cases}$$

Получаем две главные переменные –  $x_1, x_2$ ; и три зависимые –  $x_3, x_4, x_5$ . Запишем решение в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

Одно из частных решений системы (при  $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** Система линейных уравнений совместна.

Решение в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5.$$

Частное решение:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## Матричные уравнения

### Теория

Операция умножения матриц *не коммутативна*, поэтому домножение выражения на матрицу слева не эквивалентно домножению справа.

Чтобы решить матричное уравнение  $XA = B$  с неизвестной матрицей  $X$ , нужно домножить его справа на  $A^{-1}$ :  $XA A^{-1} = B A^{-1} \Leftrightarrow X = B A^{-1}$ .

Чтобы решить матричное уравнение  $AX = B$  с неизвестной матрицей  $X$ , нужно домножить его слева на  $A^{-1}$ :  $A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ .

### Задача 5

Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

### Решение:

Обозначим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислим обратную к  $A$  с помощью союзной матрицы. Вычислим определитель матрицы  $A$ , разложив его по первой строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -12 - 12 - 3 = -27$$

Определитель не равен нулю, значит, у  $A$  есть обратная. Найдём алгебраические дополнения элементов:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

Составим союзную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица будет равна:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = -\frac{1}{27} \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Домножим уравнение  $XA = B$  справа на  $A^{-1}$  и найдём  $X$ :

$$XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 21 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

**Ответ:**  $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

## Подстановки

### Теория

**Определение.** Всякое расположение чисел  $1, \dots, n$  в определённом порядке называют перестановкой  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

*Пример.*  $\alpha = (1, 2, 3, 4)$

**Определение.**  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  образуют инверсию в перестановке,  $(i - j)(\alpha_i - \alpha_j) < 0$ .

**Определение.** Знак перестановки:  $\text{sgn } \alpha = (-1)^n$ , где  $n$  – число инверсий.

**Определение.** Подстановкой называется взаимно-однозначное отображение  $1, \dots, n$  в себя:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Здесь  $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$  – перестановка.

*Пример.*  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma(2) = 1$

**Определение.** Умножение подстановок – их последовательное применение (композиция).

*Пример.*  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 \\ \boxed{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 3 & 1 & \textcircled{2} \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

**Определение.** Нейтральный элемент по умножению:  $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

**Определение.**  $\forall \sigma \exists \sigma^{-1}$ ,  $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$

**Свойство.** При возведении цикла  $(a_1, \dots, a_k)$  подстановки в степень, кратную его длине, будет получаться тождественная подстановка:

$$(a_1, \dots, a_k)^{nk} = id$$

**Свойство.** При возведении подстановки в степень, кратную НОКу длин всех её циклов, будет получаться тождественная подстановка.

## Задача 6

Найти все такие  $\sigma \in S_8$ , что  $\sigma^2 = (123)(456)$ .

### Решение:

Так как подстановка принадлежит  $S_8$  можно записать её в виде  $\sigma^2 = (123)(456)(7)(8)$ .

Цикл длины 1 в  $\sigma^2$  мог получиться либо из цикла длины 1 в  $\sigma$  (т.е.  $(a) \rightsquigarrow (a)$ ), либо из цикла длины 2 в  $\sigma$ , который при возведении подстановки во вторую степень распался на циклы длины 1 (т.е.  $(ab) \rightsquigarrow (a)(b)$ ).

Значит, либо в  $\sigma$  были два цикла длиной 1 – (7) и (8), либо один цикл длиной 2 – (78).

Осталось рассмотреть только циклы длиной 3. Цикл данной длины после возведения во вторую степень может получаться из цикла длины 3:

$$(abc)^2 = (acb)$$

Т.е. цикл (123) в  $\sigma^2$  будет в  $\sigma$  имеет вид (132), а (456) – (465).

Либо цикл длины 3 получается после возведении во вторую степень цикла длины 6:

$$(abcdef)^2 = (ace)(bdf)$$

Все возможные варианты:

- $(ace)(bdf) = (123)(456) \Rightarrow (abcdef) = (142536)$
- $(ace)(bdf) = (123)(645) \Rightarrow (abcdef) = (162435)$
- $(ace)(bdf) = (123)(564) \Rightarrow (abcdef) = (152634)$
- $(ace)(bdf) = (312)(456) \Rightarrow (abcdef) = (341526) = (152634)$
- $(ace)(bdf) = (312)(645) \Rightarrow (abcdef) = (361425) = (142536)$
- $(ace)(bdf) = (312)(564) \Rightarrow (abcdef) = (351624) = (162435)$
- $(ace)(bdf) = (231)(456) \Rightarrow (abcdef) = (243516) = (162435)$
- $(ace)(bdf) = (231)(645) \Rightarrow (abcdef) = (263415) = (152634)$
- $(ace)(bdf) = (231)(564) \Rightarrow (abcdef) = (253614) = (142536)$



Таким образом, всего три цикла длины 6:  $(142536)$ ,  $(162435)$ ,  $(152634)$ .

Выпишем все возможные подстановки. В  $\sigma$  вместо двух циклов  $(123)(456)$  из  $\sigma^2$  может быть либо два цикла длинами 3 –  $(132)(465)$ , либо один цикл длины 6 – любой из трёх найденных вариантов  $(142536)$ ,  $(162435)$ ,  $(152634)$ . Вместо двух циклов длины 1 может быть либо 2 цикла длины 1 –  $(7)(8)$ , либо 1 цикл длины 2 –  $(78)$ . Подстановки:

$$\bullet \sigma = (132)(465)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \sigma = (132)(465)(78) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \sigma = (142536)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \sigma = (142536)(78) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \sigma = (162435)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \sigma = (162435)(78) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \sigma = (152634)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \sigma = (152634)(78) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** всего восемь подстановок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

## Задача 7

Найти все подстановки чисел 1, 2, 3, 4, перестановочные с подстановкой

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

### Решение:

Если  $X$  – подстановка, перестановочная с  $S$ , то  $XS = SX \Rightarrow S = XSX^{-1}$ .

Пусть  $X$  равен

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Вычислим произведение (умножение перестановок справа налево):

$$\begin{aligned} XSX^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix} = (x_1x_2)(x_3x_4) \end{aligned}$$

Так как  $S = XSX^{-1}$  и  $S = (12)(34)$ , выполняется  $(12)(34) = (x_1x_2)(x_3x_4)$ . Тогда возможны следующие случаи:

$$\begin{cases} (x_1x_2) = (12) \\ (x_3x_4) = (34) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x_1x_2) = (34) \\ (x_3x_4) = (12) \end{cases}$$

Если  $(x_1x_2) = (12)$  и  $(x_3x_4) = (34)$ , то решения:

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4 \\ x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 3 \\ x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 4 \\ x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 3 \end{cases}$$

Если  $(x_1x_2) = (34)$  и  $(x_3x_4) = (12)$ , то решения:

$$\begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 1, x_4 = 2 \\ x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 1 \\ x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 2 \\ x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = 1 \end{cases}$$

Получаем 8 подстановок, подставляя полученные  $x_1, x_2, x_3, x_4$  в  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ .

**Ответ:** всего 8 подстановок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## Задача 8

Найти подстановку  $X$  из равенства  $AXB = C$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Чтобы найти  $X$  домножим выражение справа на  $B^{-1}$  и слева на  $A^{-1}$ :

$$AXB = C \Leftrightarrow A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

Обратную подстановку можно найти *перевернув* её:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычислим  $X$  (умножение подстановок справа налево):

$$\begin{aligned} X = A^{-1}CB^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Задача 9**

Найти  $A^{150}$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Разложи подстановку в произведение независимых циклов:

$$A = (1\ 3\ 4\ 6\ 7)(2\ 5\ 9\ 8\ 10)$$

Оба цикла длины 5. НОК длин циклов равен 5. Значит, при возведении подстановки в степень кратную 5 она будет равна  $id$ .

$$A^{150} = A^{5 \cdot 30} = id^{30} = id$$

**Ответ:**  $id$ .

# Определители

## Теория

**Определение.** Определителем (детерминантом) порядка  $n$ , соответствующим квадратной матрице  $A$  называется число, являющееся суммой  $n!$  слагаемых:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

### Свойства определителей:

- 1)  $\det A^T = \det A$
- 2) Определитель линеен по строкам (столбцам). Фиксируем  $i$ -й столбец, тогда:
  - a)  $\det(A_1, \dots, A'_i + A''_i, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A''_i, \dots, A_n)$
  - b)  $\det(A_1, \dots, \alpha A'_i, \dots, A_n) = \alpha \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n)$
- 3) При перестановке столбцов определитель меняет знак.
- 4)  $\det A = 0$ , если выполнено хотя бы одно из условий:
  - a) в матрице есть нулевая строка
  - b) в матрице есть 2 одинаковые строки
  - c) одна из строк является линейной комбинацией остальных
- 5) Определитель не меняется, если к любой строке прибавить линейную комбинацию остальных.
- 6)  $\det E_n = 1$
- 7) Разложение по строке (столбцу):

Для любого фиксированного  $j$  справедливо:  $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$  – разложение по столбцу.

Для любого фиксированного  $i$  справедливо:  $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$  – разложение по строке.

- 8) Фальшивое разложение:

$$k \neq i : \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0$$

$$k \neq j : \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0$$

$$9) \begin{vmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

- 10) Если  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы, то для блочной матрицы:  $\det \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det A \cdot \det B$
- 11)  $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

## Задача 10

Подобрать  $j$  и  $i$  так, чтобы произведение  $a_{32}a_{16}a_{2i}a_{53}a_{45}a_{6j}a_{77}$  входило в определитель 7 порядка со знаком минус.

### Решение:

Знак слагаемого определяется знаком подстановки, т.е. количеством инверсий в ней. Если оно чётное, то слагаемое входит со знаком  $+$ , иначе со знаком  $-$ .

Запишем подстановку:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & i & 2 & 5 & 3 & j & 7 \end{pmatrix}$$

Определим какие столбцы ещё не вошли в произведение, учитывая, что каждый из столбцов  $1, 2, \dots, 7$  должен войти в него ровно один раз. Это столбцы 1 и 4.

Рассмотрим случай, когда  $i = 1, j = 4$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Посчитаем количество инверсий:

- Для числа 6: 5 инверсий (числа 1, 2, 3, 4, 5 меньше 6, но стоят правее, чем 6).
- Для числа 1: 0 инверсий.
- Для числа 2: 0 инверсий.
- Для числа 5: 2 инверсии (числа 3, 4 меньше 5, но стоят правее, чем 5).
- Для числа 3: 0 инверсий.
- Для числа 4: 0 инверсий.
- Для числа 7: 0 инверсий.

Итого  $5 + 0 + 0 + 2 + 0 + 0 + 0 = 7$  инверсий в подстановке, она нечётное. Тогда слагаемое  $a_{32}a_{16}a_{21}a_{53}a_{45}a_{64}a_{77}$  входит в определитель со знаком  $-$ .

Осталось рассмотреть случай, когда  $i = 4, j = 1$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Для данной подстановки количество инверсий будет равно:

- Для числа 6: 5 инверсий (числа 1, 2, 3, 4, 5 меньше 6, но стоят правее, чем 6).
- Для числа 4: 3 инверсий (числа 1, 2, 3 меньше 4, но стоят правее, чем 4).
- Для числа 2: 1 инверсия (число 1 меньше 2, но стоит правее, чем 2).
- Для числа 5: 2 инверсии (числа 1, 3 меньше 5, но стоят правее, чем 5).
- Для числа 3: 1 инверсия (число 1 меньше 3, но стоит правее, чем 3).
- Для числа 1: 0 инверсий.
- Для числа 7: 0 инверсий.

Общее количество инверсий будет равно:  $5 + 3 + 1 + 2 + 1 + 0 + 0 = 12$  – чётное число. Таким образом, слагаемое при  $i = 4, j = 1$  входит в определитель со знаком  $+$ .

**Ответ:**  $i = 4, j = 1$ .

## Задача 11

Как изменится определитель, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец и в то же время к первому столбцу прибавить последний.

### Решение:

Пусть  $A_1, \dots, A_n$  – столбцы матрицы  $A$ . Обозначим  $\det A = \det(A_1, \dots, A_n)$ . Тогда искомый определитель  $\det(A_1 + A_n, A_1 + A_2, \dots, A_{n-1} + A_n) = \det B$  (обозначим матрицу искомого определителя  $B$ ). Определитель линеен по столбцам (строкам), поэтому при последовательном вычитании из каждого столбца предыдущего, он не изменится:

$$\begin{aligned}
 \det B &= \det(A_1 + A_n, A_1 + A_2, A_2 + A_3, \dots, A_{n-2} + A_{n-1}, A_{n-1} + A_n) = \\
 &\stackrel{\text{II} - \text{I}}{=} \det(A_1 + A_n, A_2 - A_n, A_2 + A_3, \dots, A_{n-2} + A_{n-1}, A_{n-1} + A_n) = \\
 &\stackrel{\text{III} - \text{II}}{=} \det(A_1 + A_n, A_2 - A_n, A_3 + A_n, \dots, A_{n-2} + A_{n-1}, A_{n-1} + A_n) = \dots \\
 &= \det(A_1 + A_n, A_2 - A_n, A_3 + A_n, \dots, A_{n-1} + (-1)^{(n-1)-1}A_n, A_n + (-1)^{n-1}A_n) = \\
 &= \det(A_1 + A_n, \dots, A_n + (-1)^{n-1}A_n)
 \end{aligned}$$

Если  $n$  – чётное, то определитель будет равен

$$\det B = \det(A_1 + A_n, \dots, A_n - A_n) = \det(A_1 + A_n, \dots, 0) = 0$$

Если  $n$  – нечётное, тогда

$$\det B = \det(A_1 + A_n, \dots, A_n + A_n) = \det(A_1 + A_n, \dots, 2A_n) = 2 \det(A_1 + A_n, \dots, A_n)$$

Прибавим к чётным столбцам последний столбец (столбец  $A_n$ ), а из нечётных вычтем:

$$\begin{aligned}\det B &= 2 \det(A_1 + A_n, A_2 - A_n, A_3 + A_n, \dots, A_{n-1} - A_n, A_n) = \\ &= 2 \det(A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n) = 2 \det A\end{aligned}$$

**Ответ:** при нечётном  $n$  определитель  $\det B = 2 \det A$ ; при чётном  $n$  определитель  $\det B = 0$ .

## Задача 12

Как изменится определитель порядка  $n$ , если его матрицу повернуть на  $90^\circ$  вокруг «центра».

**Решение:**

Пусть  $A$  – исходная матрица. Пусть  $A_{90^\circ}$  – повернутая на  $90^\circ$  вокруг «центра» матрица  $A$ .

При повороте  $A$  на  $90^\circ$  вокруг «центра» строки матрицы  $A$  перейдут в следующие столбцы матрицы  $A_{90^\circ}$ :

- 1-я строка из  $A \rightsquigarrow n$ -й столбец в  $A_{90^\circ}$
- 2-я строка из  $A \rightsquigarrow (n-1)$ -й столбец в  $A_{90^\circ}$
- ...
- $n$ -я строка

При транспонировании  $A$  строки матрицы  $A$  перейдут в следующие столбцы матрицы  $A^T$ :

- 1-я строка из  $A \rightsquigarrow 1$ -й столбец в  $A^T$
- 2-я строка из  $A \rightsquigarrow (n-1)$ -й столбец в  $A^T$
- ...
- $n$ -я строка из  $A \rightsquigarrow n$ -й столбец в  $A^T$

Таким образом, матрица  $A_{90^\circ}$  отличается от  $A^T$  только тем, что у неё столбцы расположены в обратном порядке.

Зная, что  $\det A = \det A^T$ , можем приведением  $A_{90^\circ}$  к  $A^T$  перестановкой столбцов, найти  $\det A_{90^\circ}$ .

Переставим 1-й и  $n$ -й, 2-й и  $(n-1)$ -й, 3-й и  $(n-2)$ -й, ... столбцы. Всего будет сделано  $\frac{n(n-1)}{2}$  перестановок. Значит, искомый определитель будет равен

$$\det A_{90^\circ} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A$$

**Ответ:**  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A$ .



## Задача 13

Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \leq -50$$

**Решение:**

Преобразуем определитель:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{IV} + 3 \text{ III} \rightarrow \text{IV}]{\text{II} + 4 \text{ III} \rightarrow \text{II}} \begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Данные определители равны, так как при прибавлении к строке линейной комбинации других строк, она не изменяется.

Посчитаем определитель, разложив его по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 18x - 28$$

Промежуточные вычисления:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{I} - 5\text{II} \rightarrow \text{I}]{\text{III} - 7\text{I} \rightarrow \text{III}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\uparrow} -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 18$$

по 1-му столбцу

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{\uparrow} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{I} - 2\text{II} \rightarrow \text{I}]{\text{III} - \text{I} \rightarrow \text{III}} \begin{vmatrix} 0 & -7 & -1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) \cdot 4 = 28$$

транспонируем

Решим неравенство:

$$18x - 28 \leq -50 \Leftrightarrow x \leq -\frac{11}{9}$$

**Ответ:**  $x \leq -\frac{11}{9}$ .

## Задача 14

Вычислите определитель матрицы порядка  $n$ :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

**Решение:**

Обозначим исходный определитель как  $\Delta_n$ . Разложим его по первой строке:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Заметим, что первое слагаемое – исходный определитель, но порядка  $n-1$ . Обозначим его  $\Delta_{n-1}$ .

Разложим определитель во втором слагаемом по первому столбцу:

$$\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5\Delta_{n-1} - 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Определитель во втором слагаемом аналогичен исходному, но порядка  $n-2$ . Тогда получаем рекуррентное соотношение:

$$\Delta_n = 5\Delta_{n-1} + 6\Delta_{n-2}$$

Найдём такие  $t$ , что последовательность  $t^n$  удовлетворяет рекуррентному соотношению. Составим и решим характеристическое уравнение этого соотношения:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

Первые два члена рекуррентной последовательности:

$$\Delta_1 = |5| = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 19$$

Найдём такие  $c_1$  и  $c_2$ , что линейная комбинация  $2^n c_1 + 3^n c_2 = \Delta_n$ . Решим систему:

$$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = 5 \\ 2^2 c_1 + 3^2 c_2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = 5 \\ 4c_1 + 9c_2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

Таким образом,  $\Delta_n = -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n = -2^{n+1} + 3^{n+1}$ .

**Ответ:**  $\Delta_n = -2^{n+1} + 3^{n+1}$ .

## Задача 15

Вычислите определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

**Решение:**

Обозначим исходный определитель как  $\Delta_n$ . Разложим его по первой строке:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Определитель в первом слагаемом аналогичен определителю  $\Delta_n$ , но только он порядка  $n - 1$ .

Разложим определитель во втором слагаемом по первому столбцу:

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

Найдём явное выражение рекуррентного соотношения, заданного формулой  $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ , при помощи характеристического уравнения:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Так как корни совпали, последовательность рекуррентных членов задаётся следующей формулой:  $\Delta_n = t_1^n c_1 + t_1^n n c_2 = 1^n c_1 + 1^n n c_2 = c_1 + n c_2$ .

Первые два члена рекуррентной последовательности:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Составив систему, найдём  $c_1$  и  $c_2$ :

$$\begin{cases} 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 2 \\ 1^2 \cdot c_1 + 1^2 \cdot 2 \cdot c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Значит,  $\Delta_n = 1 \cdot 1^n + 1 \cdot n \cdot 1^n = 1 + n$ .

**Ответ:**  $\Delta_n = 1 + n$ .

## Задача 16

Вычислите определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

**Решение:**

Вычтем из строк с номерами от 1 до  $n - 1$  последнюю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Теперь к последней строке прибавим все строки с номерами от 1 до  $n - 1$ . В результате все элементы последней строки станут равны 0, а последний элемент будет равен  $n - 1$  раз:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

**Ответ:**  $(-1)^{n-1}(n-1)$ .

**Задача 17**

Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

**Решение:**

Из каждой строки с номерами от 1 до  $n - 1$  вычтем последнюю строку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{I-\Pi \rightarrow I} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

Из последней строки вычтем удвоенные строки с номерами от 1 до  $n - 1$ . В правом нижнем углу будет стоять элемент, равный  $3 + 2(n - 1) = 2n + 1$ , так как из 3 вычтем  $n - 1$  раз число  $2 \cdot (-1) = -2$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n + 1 \end{vmatrix} = 1^{n-1} \cdot (2n + 1) = 2n + 1$$

**Ответ:**  $2n + 1$ .

## Задача 18

Доказать, что  $n$ -й член ряда Фибоначчи равен определителю  $n$ -го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

**Решение:**

Ряд Фибоначчи задаётся следующей рекуррентной формулой:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Его первые члены  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 2$ .

Вычислим первые члены определителя. Т.е. определители порядка 1 и 2:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Найдем рекуррентную формулу определителя. Разложим его по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Обозначим определитель порядка  $n$  как  $\Delta_n$ . Заметим, что первое слагаемое – это такое же как и исходный определитель, но только порядка  $n - 1$ . Обозначим его  $\Delta_{n-1}$ . Разложим определитель из второго слагаемого по первому столбцу:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$$

Рекуррентная формула определителя такая же, как и ряда Фибоначчи; первые два члена обоих рядов совпадают. Значит, данный определитель задаёт ряд Фибоначчи.

## Задача 19

Вычислить определитель методом представления в виде суммы определителей:

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1 & 1 + x_1^2 & \dots & 1 + x_1^n \\ 1 + x_2 & 1 + x_2^2 & \dots & 1 + x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + x_n & 1 + x_n^2 & \dots & 1 + x_n^n \end{vmatrix}$$

**Решение:**

Допишем к определителю строчку из единицы и нулей и столбец с единицами.

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1 & 1 + x_1^2 & \dots & 1 + x_1^n \\ 1 + x_2 & 1 + x_2^2 & \dots & 1 + x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + x_n & 1 + x_n^2 & \dots & 1 + x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 + x_1 & 1 + x_1^2 & \dots & 1 + x_1^n \\ 1 & 1 + x_2 & 1 + x_2^2 & \dots & 1 + x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 + x_n & 1 + x_n^2 & \dots & 1 + x_n^n \end{vmatrix}$$

Так можно сделать, ведь раскладывая по строке, получаем исходный определитель.

Вычтем первый столбец из всех остальных:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Воспользуемся линейностью определителя по строкам и разложим его по первой строке следующим образом:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Разложим первое слагаемое по строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = 2 \prod_{1 \leq i \leq n} x_i \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Получаем определитель Вандермонда, умноженный на  $2 \prod_{1 \leq i \leq n} x_i$ . Таким образом, этот определитель равен  $2 \prod_{1 \leq i \leq n} x_i \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$ .

Найдём, чему равен определитель из второго слагаемого. Последовательно вычтем из каждого столбца его предыдущий. Т.е. сначала вычтем из  $n$ -го столбца  $(n-1)$ -й, из  $(n-1)$ -го столбца вычтем  $(n-2)$ -й столбец и так далее.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - 1 & x_1^2 - x_1 & \dots & x_1^n - x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - 1 & x_2^2 - x_2 & \dots & x_2^n - x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - 1 & x_n^2 - x_n & \dots & x_n^n - x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$



Полученный определитель разложим по первой строке и вынесем из каждой строки множитель  $x_i - 1$ :

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - 1 & x_1^2 - x_1 & \dots & x_1^n - x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - 1 & x_2^2 - x_2 & \dots & x_2^n - x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - 1 & x_n^2 - x_n & \dots & x_n^n - x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - 1 & (x_1 - 1)x_1 & \dots & (x_1 - 1)x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - 1 & (x_2 - 1)x_2 & \dots & (x_2 - 1)x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - 1 & (x_n - 1)x_n & \dots & (x_n - 1)x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \\
& = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & (x_1 - 1)x_1 & \dots & (x_1 - 1)x_1^{n-1} \\ x_2 - 1 & (x_2 - 1)x_2 & \dots & (x_2 - 1)x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - 1 & (x_n - 1)x_n & \dots & (x_n - 1)x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \\
& = \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - 1) \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)
\end{aligned}$$

Таким образом, исходный определитель будет равен:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = 2 \prod_{1 \leq i \leq n} x_i \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) - \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - 1) \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) = \\
& = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \left( 2 \prod_{1 \leq i \leq n} x_i - \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - 1) \right)
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \left( 2 \prod_{1 \leq i \leq n} x_i - \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - 1) \right).$

## Ранг матрицы

### Теория

**Определение.** Минором  $k$ -го порядка матрицы  $A$  называют определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечении произвольных  $k$  строк и  $k$  столбцов из матрицы  $A$ .

**Обозначение.**  $M_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$  – номера столбцов – минор  $k$ -го порядка.

*Пример.* Для  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$  минор второго порядка  $M_{23}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -4$

**Определение.** Рангом матрицы называют наивысший порядок отличного от 0 минора.

*Пример.*  $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\text{Rg } A = 1$ ,  $M_2^1 = 2 \neq 0$

### Свойства ранга:

- 1)  $\text{Rg } A^T = \text{Rg } A$ .
- 2) Элементарные преобразования строк не меняют ранг матрицы.

### Методы нахождения ранга:

I. Элементарные преобразования:

- 1) методом Гаусса приводим к ступенчатому виду:  $A \sim A_{\text{ступ.}}$
- 2)  $\text{Rg } A_{\text{ступ.}}$  = число ненулевых строк
- 3)  $\text{Rg } A = \text{Rg } A_{\text{ступ.}}$

II. Метод окаймляющих миноров

**Определение.**  $N$  (минор) называют окаймляющим для минора  $M$ , если  $N$  получается добавлением к  $M$  одной новой строки и одного нового столбца матрицы  $A$ .

### Задача 20

Найти ранг матрицы при всевозможных значениях параметра  $\lambda$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -7 & -8 & 1 & \lambda - 7 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Приведём матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -7 & -8 & 1 & \lambda - 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - 4\text{II} \rightarrow \text{III}]{\begin{smallmatrix} \text{I} + 3\text{II} \rightarrow \text{I} \\ \text{IV} - 7\text{II} \rightarrow \text{IV} \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 14 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & \lambda + 4 & -14 \\ 0 & 6 & 8 & \lambda - 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \\
 & \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & 14 \\ 0 & 3 & \lambda + 4 & -14 \\ 0 & 6 & 8 & \lambda - 28 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{II} \rightarrow \text{III}]{\text{IV} + 2\text{II} \rightarrow \text{IV}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & 14 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Если  $\lambda \neq 0$ , то в ступенчатом виде матрицы будет 4 ненулевых строки. Значит,  $\text{Rg } A = 4$ . При  $\lambda = 0$  две последние строки будут нулевыми, и тогда  $\text{Rg } A = 2$ .

**Ответ:** при  $\lambda \neq 0$  ранг равен  $\text{Rg } A = 4$ ; при  $\lambda = 0$  ранг равен  $\text{Rg } A = 2$ .

# Интерполяционный многочлен Лагранжа

## Теория

**Теорема.** Пусть  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_n$  – какие-то числа. Тогда существует единственный многочлен  $f$  степени  $\leq n - 1$  такой, что  $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$ .

## Задача 21

Найти многочлен 3-й степени  $f(x)$ , для которого

$$f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 16$$

### Решение:

По теореме при данных четырёх значениях многочлена  $f$  существует единственный многочлен степени не большей  $4 - 1 = 3$ .

Тогда пусть  $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , где  $a_0, a_1, a_2, a_3$  – искомые коэффициенты.

Подставим в многочлен точки, которые нам даны:

$$\begin{cases} f(-1) = 0 = a_3 \cdot (-1)^3 + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 \\ f(1) = 4 = a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ f(2) = 3 = a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 \\ f(3) = 16 = a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 4 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 2 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 16 \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV}+27\text{I} \rightarrow \text{IV}]{\begin{array}{l} \text{II}+\text{I} \rightarrow \text{II} \\ \text{III}+8\text{I} \rightarrow \text{III} \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & 36 & -24 & 28 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV} \rightarrow \frac{\text{IV}}{4}]{\begin{array}{l} \text{I} \rightarrow -\text{I} \\ \text{II} \rightarrow \frac{\text{II}}{2} \\ \text{III} \rightarrow \frac{\text{III}}{3} \end{array}} \\ & \xrightarrow[\text{IV} \rightarrow \frac{\text{IV}}{4}]{\begin{array}{l} \text{I} \rightarrow -\text{I} \\ \text{II} \rightarrow \frac{\text{II}}{2} \\ \text{III} \rightarrow \frac{\text{III}}{3} \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & -6 & 7 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV}-9\text{II} \rightarrow \text{IV}]{\begin{array}{l} \text{I}+\text{II} \rightarrow \text{I} \\ \text{III}-4\text{II} \rightarrow \text{III} \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -14 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-3\text{III} \rightarrow \text{IV}} \\ & \xrightarrow{\text{IV}-3\text{III} \rightarrow \text{IV}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II}-\text{IV} \rightarrow \text{II}]{\text{III}+\text{IV} \rightarrow \text{III}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Таким образом, решением системы будет:

$$\begin{cases} a_3 = 2 - a_1 \\ a_2 = -5 \\ -2a_1 = 0 \\ a_0 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = 2 \\ a_2 = -5 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = 7 \end{cases}$$

Получаем многочлен третьей степени  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$ .

**Ответ:**  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$ .

## Подстановка матрицы в уравнение

### Задача 22

Доказать, что матрица  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$$

#### Решение:

Подставим матрицу  $A$  вместо  $x$ .

$$\begin{aligned} A^2 - (a + d) \cdot A + ad - bc &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a + d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \cdot E = \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Равенство доказано.

## Разложения матриц

### Теория

**Определение.**  $LU$ -разложение матрицы  $A$  – это представление матрицы  $A$  в виде произведения  $A = LU$ , где  $L$  – нижняя треугольная матрица,  $U$  – верхняя треугольная или ступенчатая матрица.

**Определение.** Скелетное разложение матрицы  $A$  порядка  $m \times n$  и ранга  $r$  – это представление матрицы  $A$  в виде произведения двух матриц  $B$  и  $C$ , где  $B$  –  $(m \times r)$ -матрица,  $C$  –  $r \times n$ -матрица, и  $\text{Rg } B = r$ ,  $\text{Rg } C = r$ .

### Задача 23

Можно ли заданную матрицу  $A$  представить в виде  $A = LU$ , где  $L$  – нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали, а  $U$  – верхнетреугольная матрица? Если такое разложение возможно, то предъявите его, если нет, то объясните почему.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

### Решение:

$LU$ -разложение существует только в том случае, когда матрица  $A$  обратима, а все ведущие (угловые) главные миноры матрицы  $A$  невырождены. Проверим эти условия.

Главные угловые миноры:

$$\det M_1^1 = |2| = 1 \neq 0$$

$$\det M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\det M_{132}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

Они невырожденные. Так как  $A = M_{123}^{123}$ , то  $\det A = 11 \neq 0$ , и  $A$  обратима. Таким образом, для матрицы  $A$  существует  $LU$ -разложение.

Найдём матрицу  $U$ . Для этого приведём  $A$  элементарными преобразованиями к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} - \text{I} \rightarrow \text{III}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + 2\text{II} \rightarrow \text{III}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём  $L$  с помощью матрицы  $(L^{-1}|E)$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} - 2\text{II} \rightarrow \text{III}]{\text{III} + \text{I} \rightarrow \text{III}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A$$

**Ответ:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$

## Задача 24

Построить скелетное разложение (разложение полного ранга) матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$



**Решение:**

Найдём ранг матрицы  $A$  методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} - \text{I} \rightarrow \text{II}]{\text{IV} + \text{III} \rightarrow \text{IV}} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} - 3\text{II} \rightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg } A = 2$$

Построим матрицу  $C$  из л.н.з. строк матрицы  $A$ :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычислим псевдообратную  $C^+$  к матрице  $C$ :

$$C^T = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad CC^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 27 \\ 27 & 45 \end{pmatrix}$$

$$(CC^T)^{-1} = \frac{1}{(45^2 - 27^2)} \begin{pmatrix} 45 & -27 \\ -27 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{144} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{48} & \frac{5}{144} \end{pmatrix}$$

$$C^+ = C^T(CC^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{144} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{48} & \frac{5}{144} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} \\ 0 & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

Тогда матрица  $B$  будет:

$$B = AC^+ = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} \\ 0 & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} = A$$

**Ответ:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

Удачи!



Это Ларсик – самый крутой пёсик на ФКНе!