Алгебра. Задачи 2

Арунова Анастасия

Содержание

Системы линейных уравнений **3**
Теория . . . 3
Задача 1 . . . 3
Задача 2 . . . 5
Задача 3 . . . 6
Задача 4 . . . 7

Аналитическая геометрия **10**
Задача 5 . . . 10
Задача 6 . . . 11
Задача 7 . . . 11
Задача 8 . . . 13
Задача 9 . . . 14
Задача 10 . . . 14
Задача 11 . . . 15
Задача 12 . . . 17
Задача 13 . . . 17
Задача 14 . . . 19
Задача 15 . . . 19
Задача 16 . . . 21
Задача 17 . . . 21

Комплексные числа **23**
Теория . . . 23
Задача 18 . . . 23

Задача 19 24
Задача 20 25
Задача 21 26
Задача 22 27

Общая алгебра **29**
Теория 29
Задача 23 30
Задача 24 30
Задача 25 31
Задача 26 32
Задача 27 32
Задача 28 33
Задача 29 34

Системы линейных уравнений

Теория

Рассмотрим СЛАУ $Ax = 0$, $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$.

Теорема (Кронекера-Капелли)**.** СЛАУ $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \left(A \mid b\right)$

Определение. Любые $n - r$ линейно независимых столбцов, являющиеся решениями однородной СЛАУ $Ax = 0$, где n – число неизвестных, $r = \operatorname{Rg} A$, называют фундаментальной системой решений (ФСР).

Теорема (о существовании ФСР)**.** Рассмотрим однородную СЛАУ $Ax = 0$. У неё существует $k = n - r$ линейно независимых решений, где n – число неизвестных, а $r = \operatorname{Rg} A$.

Теорема (о структуре общего решения однородной СЛАУ)**.** Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – ФСР однородной СЛАУ $Ax = 0$. Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде:

$$x = c_1\Phi_1 + \ldots + c_k\Phi_k$$

где $c_1, \ldots, c_k$ – некоторые постоянные.

Теорема (о структуре общего решения неоднородной СЛАУ)**.** Пусть известно частное решение $\widetilde{x}$ СЛАУ $Ax = b$. Тогда любое решение этой СЛАУ может быть представлено в виде:

$$x = \widetilde{x} + c_1\Phi_1 + \ldots + c_k\Phi_k$$

где $c_1, \ldots, c_k$ –некоторые постоянные, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

Задача 1

Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все её решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение), найдите ФСР соответствующей однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Введём следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведём её элементарными преобразованиями к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}\to\text{III}]{\text{II}-2\text{I}\to\text{II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}+4\text{II}\to\text{I}]{\text{III}-\text{II}\to\text{III}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right)$$

В ступенчатом виде матрицы $\left(A \mid b\right)$ две ненулевых строки, значит, $\operatorname{Rg}\left(A \mid b\right) = 2$.

При приведении матрицы A к ступенчатому виду элементарные преобразования будут эквивалентны приведению левой части расширенной матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Так как $\operatorname{Rg}\left(A \mid b\right) = \operatorname{Rg} A$, по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

Выпишем решение однородной СЛАУ $Ax = 0$, соответствующей СЛАУ $Ax = b$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ x_2 = -x_4 + 6x_5 \\ x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Найдём ФСР, подставляя в зависимые переменные одновременно ненулевые значения:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-2	0	1	0	0
-4	-1	0	1	0
21	6	0	0	1

Получаем столбцы ФСР:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Выпишем решение системы $Ax = b$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ x_2 = -1 - x_4 + 6x_5 \\ x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Частное решение СЛАУ $Ax = b$, например, будет $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

По теореме о структуре решения неоднородной СЛАУ любое решение $Ax = b$ можно представить в виде суммы линейной комбинации ФСР и частного решения СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5, \; x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

Данное общее решение записано в векторном виде.

Ответ: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5, \; x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$

Задача 2

Можно ли заданную матрицу A представит в виде $A = LU$, где L – нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали, а U – верхнетреугольная матрица? Если такое разложение возможно, то предъявите его, если нет, то объясните почему.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

LU-разложение существует только в том случае, когда матрица A обратима, а все ведущие (угловые) главные миноры матрицы A невырождены. Проверим эти условия.

Главные угловые миноры:

$$\det M_1^1 = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\det M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Они невырождены. Так как $A = M_{12}^{12}$, то $\det A = -2 \neq 0$, и A обратима. Таким образом, для матрицы A существует LU-разложение.

Найдём матрицу U. Для этого приведём A элементарными преобразованиями к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II - 2I}\to\text{II}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = U$$

Так как $A = LU$, $L = AU^{-1}$. Найдём U^{-1}:

$$U^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = AU^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 3

Пользуясь методом исключения неизвестных, исследовать совместность и найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25 \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40 \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65 \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95 \end{cases}$$

Решение: Введём следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 23 & 17 & 44 \\ 15 & 35 & 26 & 69 \\ 25 & 57 & 42 & 108 \\ 30 & 69 & 51 & 133 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 65 \\ 95 \end{pmatrix}$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведём её элементарными преобразованиями к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 15 & 35 & 26 & 69 & 40 \\ 25 & 57 & 42 & 108 & 65 \\ 30 & 69 & 51 & 133 & 95 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV}-3\text{I}\to\text{IV}]{\text{III}-\text{II}\to\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 15 & 35 & 26 & 69 & 40 \\ 10 & 22 & 16 & 39 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}-\frac{3}{2}\text{I}\to\text{II}]{\text{III}-\text{I}\to\text{III}}$$

$$\xrightarrow[\text{II}-\frac{3}{2}\text{I}\to\text{II}]{\text{III}-\text{I}\to\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}+\frac{1}{2}\text{III}\to\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV}-2\text{II}\to\text{IV}}$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-2\text{II}\to\text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Количество ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы A равно 3, значит, $\operatorname{Rg} A = 3$. Но количество ненулевых строк в матрице $\left(A \mid b\right)$ – 4, поэтому $\operatorname{Rg}\left(A \mid b\right) = 4 \neq \operatorname{Rg} A$. По теореме Кронекера-Капелли система уравнений несовместная, у неё нет решений.

Ответ: несовместная.

Задача 4

Определить, какие из строк матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение:

Составим матрицу системы A и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-4\text{III}\to\text{IV}]{\substack{\text{II}-5\text{III}\to\text{II} \\ \text{I}-2\text{III}\to\text{I}}} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 27 & -15 & -6 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 27 & -15 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-3\text{I}\to\text{IV}]{\text{II}-3\text{I}\to\text{II}}$$

$$\xrightarrow[\text{IV}-3\text{I}\to\text{IV}]{\text{II}-3\text{I}\to\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $\operatorname{Rg} A = 2$. Значит, по определению у системы будет $5 - 2 = 3$ столбцов ФСР.

Так как каждый столбец ФСР должен быть решением системы, будем рассматривать только те строки из матрицы B, которые удовлетворяют системе $Ax = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -5 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Все четыре строки матрицы B – решения уравнения $Ax = 0$, поэтому они все могут быть столбцами ФСР.

Найдём среди строк матрицы B линейно зависимые. Для этого применим элементарные преобразования к матрице B.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\frac{2}{3}\text{I}\to\text{IV}]{\substack{\text{II}-\frac{5}{6}\text{I}\to\text{II} \\ \text{III}-\frac{4}{3}\text{I}\to\text{III}}} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{9}{2} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & -\frac{8}{3} & -9 & \frac{26}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & -9 & \frac{19}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+\frac{5}{2}\text{II}\to\text{IV}]{\text{III}+2\text{II}\to\text{III}} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{9}{2} & \frac{-13}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{-9}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Получаем, что третья строка – линейная комбинация первой и второй строки. Значит, система из первой, второй и третьей строки – линейна зависима, а, значит, не может быть ФСР.

Остаётся всего три варианта систем строк:

- *Первая, вторая и четвёртая.* Все строки л.н.з. (ни одна строка не является линейной комбинацией двух других), поэтому этот случай образует ФСР.
- *Первая, третья и четвёртая.* Аналогично они образуют ФСР.
- *Вторая, третья и четвёртая* – тоже ФСР.

Ответ: четвёртая строка вместе с любыми двумя из первых трёх.

Аналитическая геометрия

Задача 5

В ортонормированном базисе даны векторы $a = (1,4,1)$, $b = (2,1,3)$, $c = (-2,0,3)$. Найти вектор y такой, что $y \perp a$, $(y,c) = 2$, $(y,b) = 9$.

Решение:

Пусть вектор y имеет следующие координаты $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Так как $y \perp a$, $(y,a) = 0$. Запишем систему:

$$\begin{cases} (y,a) = 0 \\ (y,b) = 9 \\ (y,c) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + 4y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 9 \\ -2y_1 + 3y_3 = 2 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III+II}\to\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}\to\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II+7III}\to\text{II}}$$

$$\xrightarrow{\text{II+7III}\to\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 86 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 43 & 86 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}\to\frac{1}{41}\text{III}]{\text{I}-4\text{II}\to\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -23 & -44 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}-6\text{III}\leftrightarrow\text{II}]{\text{I+23III}\to\text{I}}$$

$$\xrightarrow[\text{II}-6\text{III}\leftrightarrow\text{II}]{\text{I+23III}\to\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

Таким образом, полученный вектор $y = (2,-1,2)$.

Ответ: $y = (2,-1,2)$.

Задача 6

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = p + 3q$, $b = p - 2q$, если $|p| = 2$, $|q| = 3$, $\angle(p, q) = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

Площадь параллелограмма построенного на векторах a, b равна модулю их векторного произведения. Найдём его.

$$[a, b] = [p + 3q, p - 2q] = [p, p - 2q] + [3q, p - 2q] = [p, p] + [p, -2q] + [3q, p] + [3q, -2q] =$$
$$= [p, p] - 2[p, q] + 3[q, p] - 6[q, q] = [p, p] - 2[p, q] - 3[p, q] - 6[q, q] = -5[p, q]$$

Тогда

$$S = |a \times b| = \big| -5[p, q]\big| = \big| -5|p||q| \sin\angle(p, q)\big| = \big| -5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{3}\big| = 15\sqrt{3}$$

Ответ: $15\sqrt{3}$.

Задача 7

Даны вершины треугольника $A(-5, 3)$, $B(7, 8)$, $C(-2, -1)$. Составить уравнения следующих прямых: медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A. Система координат прямоугольная декартова.

Решение:

1) Найдём уравнения прямых при пересечении которых получается $\angle A$. Это прямые, содержащие стороны треугольника AC и AB.

Направляющие векторы:

$$\overrightarrow{AB} = \big(7 - (-5), 8 - 3\big) = (12, 5)$$
$$\overrightarrow{AC} = \big(-2 - (-5), -1 - 3\big) = (3, -4)$$

Тогда уравнения прямых будут:

$$AB : \frac{x - (-5)}{12} = \frac{y - 3}{5} \;\Leftrightarrow\; 5x - 12y + 61 = 0$$
$$AC : \frac{x - (-5)}{3} = \frac{y - 3}{-4} \;\Leftrightarrow\; 4x + 3y + 11 = 0$$

Так как каждая точка биссектрисы равноудалена от AB и AC, уравнение биссектрисы можно найти из равенства расстояний от точки $M(x_0, y_0)$, лежащей на биссектрисе, до прямых AB и AC.

$$\rho(M; AB) = \rho(M; AC) \Leftrightarrow \frac{5x_0 - 12y_0 + 61}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{4x_0 + 3y_0 + 11}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Leftrightarrow 3x_0 + 11y_0 - 18 = 0$$

Беря точку M как произвольную, принадлежащую биссектрисе, получаем уравнение:

$$3x + 11y - 18 = 0$$

2) Теперь найдём высоту. Пусть высота, проведённая из $\angle A$, задаётся прямой с направляющим вектором $\overrightarrow{AH}$, где $H(x_H, y_H)$. Найдём векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AH} = \big(x_H - (-5), y_H - 3\big) = (x_H + 5, y_H - 3)$$
$$\overrightarrow{BC} = \big(-2 - 7, -1 - 8\big) = (-9, -9)$$

Так как $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

$$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 0 \Leftrightarrow -9(x_H + 5) - 9(y_H - 3) = 0 \Leftrightarrow x_H + y_H + 2 = 0$$

Получаем уравнение высоты:

$$x + y + 2 = 0$$

3) Пусть M – середина стороны BC. Тогда AM – медиана, а, значит, $\overrightarrow{AM}$ – направляющий вектор прямой, содержащей медиану. Координаты точки $M(x_M, y_M)$:

$$x_M = \frac{7 + (-2)}{2} = \frac{5}{2}$$
$$y_M = \frac{8 + (-1)}{2} = \frac{7}{2}$$

Тогда

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{5}{2} - (-5), \frac{7}{2} - 3\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

И уравнение медианы:

$$\frac{x - (-5)}{\frac{15}{2}} = \frac{y - 3}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x - 15y + 50 = 0$$

Ответ: биссектриса: $3x + 11y - 18 = 0$; высота: $x + y + 2 = 0$; медиана: $x - 15y + 50 = 0$.

Задача 8

Даны точки $E(2,1,0)$, $F(0,2,1)$, $G(1,2,0)$, $H(1,0,-2)$. Найти:

1) объем пирамиды $EFGH$
2) длину высоты, проведенной из вершины H

Решение:

1) Объём пирамиды, построенной на трёх векторах, равен $\frac{1}{6}$ их смешанного произведения. Сначала найдём векторы:

$$\overrightarrow{EF} = (0-2, 2-1, 1-0) = (-2,1,1)$$
$$\overrightarrow{EG} = (1-2, 2-1, 0-0) = (-1,1,0)$$
$$\overrightarrow{EH} = (1-2, 0-1, -2-0) = (-1,-1,-2)$$

Найдём объём пирамиды $EFGH$ по формуле:

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG},\overrightarrow{EH}\rangle\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix}\right| \overset{\text{III}+2\text{I}\to\text{III}}{=} \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -5 & 1 & 0\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -5 & 1\end{vmatrix}\right| = \frac{2}{3}$$

2) Объём пирамиды можно выразить как $V = \frac{1}{3}Sh$, где S – площадь основания, h – высота, проведённая к основания. Тогда, чтобы найти длину высоты, проведённой из H, нужно сначала найти площадь основания EFG.

Площадь треугольника, построенного на двух векторах, равна половине длины их векторного произведения.

$$[\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}] = \begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix} = -i-j-k$$

$$S = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Тогда

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{3\cdot\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Ответ: $V = \dfrac{2}{3}$; $h = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Задача 9

Проверить, что прямые $a : 2x = y + 1 = z + 2$, $b : x - 1 = -1 - y = z$ лежат в одной плоскости.

Решение:

Перепишем уравнения прямых в каноническом виде:

$$a : 2x = y + 1 = z + 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$$

$$b : x - 1 = -1 - y = z \;\Leftrightarrow\; \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

Таким образом, $s_1 = (1, 2, 2)$ – направляющий вектор прямой a, $s_2 = (1, -1, 1)$ – направляющий вектор прямой b. Точка $M_1(0, -1, -2) \in a$, $M_2(1, -1, 0) \in b$. Три вектора s_1, s_2, $\overrightarrow{M_1M_2}$ лежат в одной плоскости, если их смешанное произведение равно 0. Проверим это условие.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1 - 0, -1 - (-1), 0 - (-2)) = (1, 0, 2)$$

$$\langle \overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2 \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Значит, a и b не лежат в одной плоскости.

Ответ: не лежат.

Задача 10

Найти угол между прямой

$$l : \begin{cases} 2x + 2y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + z + 7 = 0 \end{cases}$$

и плоскостью $3x + y - 4z - 15 = 0$, а также координаты точки их пересечения.

Решение:

Обозначим $n_1 = (2, 2, 3)$ – нормаль к плоскости $2x + 2y + 3z + 5 = 0$, $n_2 = (1, -2, 1)$ – нормаль к плоскости $x - 2y + z + 7 = 0$.

Прямая l, которая задаётся пересечением этих плоскостей, принадлежит как первой плоскости, так и второй, а, значит, перпендикулярна их нормалям. Так как $l \perp n_1$ и $l \perp n_2$, прямая l будет перпендикулярна и плоскости, образованной n_1 и n_2 (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Значит, направляющий вектор прямой l можно найти через векторное произведение n_1 и n_2.

$$[n_1, n_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8i + j - 6k \Rightarrow s = (8, 1, -6)$$

Теперь найдём синус угла между плоскостью $3x + y - 4z - 15 = 0$ и прямой l по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{3 \cdot 8 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot (-6)}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2}\sqrt{8^2 + 1^2 + (-6)^2}} = \frac{49}{\sqrt{26}\sqrt{101}} = \frac{49}{\sqrt{2626}}$$

Тогда

$$\varphi = \arcsin\frac{49}{\sqrt{2626}}$$

Точка пересечения прямой с плоскостью удовлетворяет и уравнениям, которые задают прямую, и плоскости, с которой она пересекается. Поэтому, чтобы найти эту точку, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + z + 7 = 0 \\ 3x + y - 4z - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3z = -5 \\ x - 2y + z = -7 \\ 3x + y - 4z = 15 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -4 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-3\text{II}\to\text{III}]{\text{I}-2\text{II}\to\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 7 & -7 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}+\frac{1}{3}\text{I}\to\text{II}]{\text{III}-\frac{7}{6}\text{I}\to\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{49}{6} & \frac{51}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}$$

$$\xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -4 \\ 0 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{49}{6} & \frac{51}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}\to-\frac{6}{49}\text{III}]{\text{II}\to\frac{1}{6}\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{153}{49} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}-\frac{4}{3}\text{III}\to\text{I}]{\text{II}-\frac{1}{6}\text{III}\to\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{49} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{99}{49} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{153}{49} \end{array}\right)$$

Искомая точка – $\left(\frac{8}{49}, \frac{99}{49}, -\frac{153}{49}\right)$.

Ответ: $\frac{49}{\sqrt{2626}}$; $\left(\frac{8}{49}, \frac{99}{49}, -\frac{153}{49}\right)$.

Задача 11

Найти точку M', симметричную точке $M(-1, 2, 0)$ относительно прямой

$$l: \frac{x + \frac{1}{2}}{1} = \frac{y + \frac{7}{2}}{-\frac{1}{3}} = \frac{z - 2}{2}$$

Решение:

Найдём уравнение плоскости (α), которая перпендикулярна прямой и проходит через M. Так как $l \perp (\alpha)$, нормаль к (α) равна $n = (1, -\frac{1}{3}, 2)$. Тогда, подставляя коэффициенты нормали и точку M в формулу, получим уравнение плоскости:

$$\begin{aligned} A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M) = 0 \;&\Leftrightarrow\; 1 \cdot (x - (-1)) - \frac{1}{3} \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z - 0) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; x - \frac{1}{3}y + 2z + \frac{5}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 3x - y + 6z + 5 = 0 \end{aligned}$$

Теперь найдём точку пресечения прямой l и плоскости (α). Для этого сначала составим параметрическое уравнение прямой:

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{1} = \frac{y + \frac{7}{2}}{-\frac{1}{3}} = \frac{z - 2}{2} = t \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = t - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3}t - \frac{7}{2} \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$

Тогда, подставив, данные x, y, z в уравнение (α) найдём t при котором точка данной прямой принадлежит и плоскости:

$$3\left(t - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}t - \frac{7}{2}\right) + 6(2t + 2) + 5 = 0$$

$$\frac{46}{3}t = -19 \;\Leftrightarrow\; t = -\frac{57}{46}$$

Обозначим точку $A = (\alpha) \cap l$. Её координаты равны:

$$\begin{cases} x = -\frac{57}{46} - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{57}{46}\right) - \frac{7}{2} \\ z = 2 \cdot \left(-\frac{57}{46}\right) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{40}{23} \\ y = -\frac{71}{23} \\ z = -\frac{11}{23} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{40}{23}, -\frac{71}{23}, -\frac{11}{23}\right)$$

Так как M' и M симметричны относительно прямой, то $M' \in (\alpha)$ и точка A будет серединой отрезка MM'. Тогда составим уравнение:

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{x_{M'} + x_M}{2} \\ y_A = \dfrac{y_{M'} + y_M}{2} \\ z_A = \dfrac{z_{M'} + z_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_A - x_M = 2 \cdot \left(-\dfrac{40}{23}\right) - (-1) = -\dfrac{57}{23} \\ y_{M'} = 2y_A - y_M = 2 \cdot \left(-\dfrac{71}{23}\right) - 2 = -\dfrac{188}{23} \\ z_{M'} = 2z_A - z_M = 2 \cdot \left(-\dfrac{11}{23}\right) - 0 = -\dfrac{22}{23} \end{cases} \Rightarrow M'\left(-\frac{57}{23}, -\frac{188}{23}, -\frac{22}{23}\right)$$

Ответ: $M'\left(-\dfrac{57}{23}, -\dfrac{188}{23}, -\dfrac{22}{23}\right)$.

Задача 12

Найти точку M', симметричную точке $M(3,3,3)$ относительно плоскости $8x+6y+8z-25=0$.

Решение:

Найдём уравнение прямой l, которая перпендикулярна этой плоскости и проходит через точку M. Так как l перпендикулярна плоскости, в качестве её направляющего вектора можно взять нормаль к плоскости $s=(8,6,8)$.

Тогда уравнение прямой в параметрическом виде будет

$$l: \begin{cases} x = 8t+3 \\ y = 6t+3 \\ z = 8t+3 \end{cases}$$

Найдём координаты точки A – пересечения плоскости и прямой l:

$$8(8t+3)+6(6t+3)+8(8t+3)-25=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{4}$$

Тогда

$$\begin{cases} x = 8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+3 \\ y = 6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+3 \\ z = 8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A\left(1,\tfrac{3}{2},1\right)$$

Так как M' и M симметричны относительно плоскости, то $M' \in l$ и точка A будет серединой отрезка MM'. Тогда составим уравнение:

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{x_{M'}+x_M}{2} \\ y_A = \dfrac{y_{M'}+y_M}{2} \\ z_A = \dfrac{z_{M'}+z_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_A - x_M = 2\cdot 1 - 3 = -1 \\ y_{M'} = 2y_A - y_M = 2\cdot\dfrac{3}{2} - 3 = 0 \\ z_{M'} = 2z_A - z_M = 2\cdot 1 - 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow M'(-1,0,-1)$$

Ответ: $M'(-1,0-1)$.

Задача 13

Даны точки $P(1,2,0)$, $Q(1,0,2)$, $R(2,1,0)$, $S(0,-2,1)$. Найти:

1) объем пирамиды $PQRS$
2) угол между плоскостями (PQS) и (QRS)

Решение:

1) Объём пирамиды, построенной на трёх векторах, равен $\frac{1}{6}$ их смешанного произведения. Сначала найдём векторы:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= (0-1, 0-2, 2-0) = (-1,-2,2)\\
\overrightarrow{PR} &= (2-1, 1-2, 0-0) = (1,-1,0)\\
\overrightarrow{PS} &= (0-1, -2-2, 1-0) = (-1,-4,1)
\end{aligned}$$

Найдём объём пирамиды $PQRS$ по формуле:

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\langle\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\rangle\right| = \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}-1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & -4 & 1\end{matrix}\right\| \overset{\mathrm{I}-2\mathrm{III}\to\mathrm{I}}{=} \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 6 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & -4 & 1\end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 6\\ 1 & -1\end{matrix}\right\| = \frac{7}{6}$$

2) Угол между плоскостями ищется как угол между их нормалями. Нормаль к каждой из плоскостей можно найти с помощью векторного произведения двух векторов, лежащих в плоскости. Пусть n_1 – нормаль к (PQS), n_2 – к (QRS).

$$[\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PS}] = \begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & -2 & 2\\ -1 & -4 & 1\end{vmatrix} = 6i - j + 2k \Rightarrow n_1 = (6,-1,2)$$

Для нахождения n_2 нужно найти $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{QS}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QR} &= (2-1, 1-0, 0-2) = (1,1,-2)\\
\overrightarrow{QS} &= (0-1, -2-0, 1-2) = (-1,-2,-1)
\end{aligned}$$

$$[\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QS}] = \begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{vmatrix} = -6i + 3j \Rightarrow n_2 = (-6,3,0)$$

Тогда косинус угла φ между плоскостями равен:

$$\cos\varphi = \frac{(n_1,n_2)}{|n_1||n_2|} = \frac{|6\cdot(-6) - 1\cdot 3 + 2\cdot 0|}{\sqrt{6^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{(-6)^2+3^2+0^2}} = \frac{39}{\sqrt{41}\sqrt{45}} = \frac{13}{\sqrt{205}}$$

Значит, угол равен:

$$\varphi = \arccos\frac{13}{\sqrt{205}}$$

Ответ: $V = \frac{7}{6}$; $\varphi = \arccos\frac{13}{\sqrt{205}}$.

Задача 14

Исследовать взаимное расположение прямых

$$l_1 : \frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$$

$$l_2 : \begin{cases} x = 6t+9 \\ y = -2t \\ z = -t+2 \end{cases}$$

Вычислить расстояние между ними.

Решение:

Направляющий вектор прямой l_1 будет $s_1 = (3, 2, -2)$, и точка $M_1(-5, -5, 1) \in l_1$. Направляющий вектор прямой l_2 будет $s_2 = (6, -2, -1)$, и точка $M_2(9, 0, 2) \in l_2$. Проверим, лежат ли прямые в одной плоскости.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (9 - (-5), 0 - (-5), 2 - 1) = (14, 5, 1)$$

$$\langle \overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2 \rangle = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{II}+2\text{I}\to\text{II}}{\underset{\text{III}-\text{I}\to\text{III}}{=}} \begin{vmatrix} 14 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Значит, прямые скрещиваются и расстояние между ними будет равно:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2 \rangle|}{|[s_1, s_2]|} = \frac{18}{|[s_1, s_2]|} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

$$[s_1, s_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6i - 9j - 18k$$

$$|[s_1, s_2]| = \sqrt{(-6)^2 + (-9)^2 + (-18)^2} = 21$$

Ответ: $\frac{6}{7}$.

Задача 15

Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей, заданных уравнениями $x + 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$, и отсекающей на осях Oy и Oz ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.

Решение:

Найдём две точки, лежащие на линии пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Для точки A возьмём $x = 0$. Тогда

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{11}{2} \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow A\left(0, -\frac{11}{2}, 5\right)$$

Для точки B возьмём $z = 0$. Тогда

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{7}{6} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, 0\right)$$

Пусть искомая плоскость пересекает оси Oy и Oz в точках $P(0, k, 0)$ и $Q(0, 0, k)$ соответственно.

Точки A, B, P, Q по условию должны лежать в плоскости. Выпишем вектор $\overrightarrow{PQ}$, так как он содержит условие и о том, что плоскость отсекает на осях Oy и Oz ненулевые отрезки равной длины.

$$\overrightarrow{PQ} = (0 - 0, 0 - k, k - 0) = (0, -k, k)$$

Пусть точка $M(x, y, z)$ – произвольная точка, принадлежащая искомой плоскости. Найдём вектор с точкой M:

$$\overrightarrow{AM} = \left(x - 0, y - \left(-\frac{11}{2}\right), z - 5\right) = \left(x, y + \frac{11}{2}, z - 5\right)$$

И найдём ещё любой третий вектор, лежащий в плоскости:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{3} - 0, \frac{7}{6} - \left(-\frac{11}{2}\right), 0 - 5\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{20}{3}, -5\right)$$

Так как эти векторы лежат в искомой плоскости, они компланарны. Условие компланарности:

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$$

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB} \rangle = \begin{vmatrix} x & y + \frac{11}{2} & z - 5 \\ 0 & -k & k \\ \frac{5}{3} & \frac{20}{3} & -5 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -k & k \\ \frac{20}{3} & -5 \end{vmatrix} - \left(y + \frac{11}{2}\right) \begin{vmatrix} 0 & k \\ \frac{5}{3} & -5 \end{vmatrix} + (z - 5) \begin{vmatrix} 0 & -k \\ \frac{5}{3} & \frac{20}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{5}{3}kx + \frac{5}{3}k\left(y + \frac{11}{2}\right) + \frac{5}{3}k(z - 5) = 0$$

По условию $k \neq 0$, следовательно, можем сократить уравнение на $\frac{5}{3}k$:

$$-\frac{5}{3}kx + \frac{5}{3}k\left(y + \frac{11}{2}\right) + \frac{5}{3}k(z-5) = 0 \Leftrightarrow -x + \left(y + \frac{11}{2}\right) + (z-5) = 0 \Leftrightarrow -x + y + z + \frac{1}{2} = 0$$

Получили уравнение на координаты точки, принадлежащей плоскости, т.е. уравненеие самой плоскости.

Ответ: $-x + y + z + \frac{1}{2} = 0$.

Задача 16

Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x + y - 4z + 5 = 0$ и отстоящей от точки $M(1, 2, 0)$ на расстоянии, равном $\sqrt{21}$.

Решение:

Так как искомая (обозначим её (α)) и исходная плоскость параллельны, их нормали так же параллельны. Значит, нормаль к искомой плоскости $n = (2, 1, -4)$. И тогда плоскость задаётся уравнением:

$$(\alpha) : 2x + y - 4z + k = 0$$

Причём $k \neq 5$, иначе плоскости совпадут.

Расстояние от точки до плоскости $\rho\big(M, (\alpha)\big) = \sqrt{21}$. Тогда, переписывая в виде формулы, получаем уравнение:

$$\frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \sqrt{21} \Leftrightarrow |4 + k| = 21 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &k = 17 \\ &k = -25 \end{aligned}\right.$$

Получаем две плоскости, удовлетворяющие условию задачи.

Ответ: $2x + y - 4z + 17 = 0$, $2x + y - 4z - 25 = 0$.

Задача 17

Написать уравнение прямой, лежащей в плоскости Oyz, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Oz отрезок, равный 3.

Решение:

Прямая отсекает на оси Oz отрезок, равный 3, поэтому точка $M(0, 0, 3)$ принадлежит этой прямой.

В качестве направляющего вектора искомой прямой (обозначим его n) можно взять направляющий вектор оси Oy, потому что искомая прямая параллельна Oy. Найдём его с помощью двух точек, лежащих на Oy: $A(0,0,0)$, $B(0,1,0)$. Тогда

$$n = \overrightarrow{AB} = (0-0, 1-0, 0-0) = (0,1,0)$$

Зная точку на прямой и её направляющий вектор, можно записать уравнение прямой:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-3}{0}$$

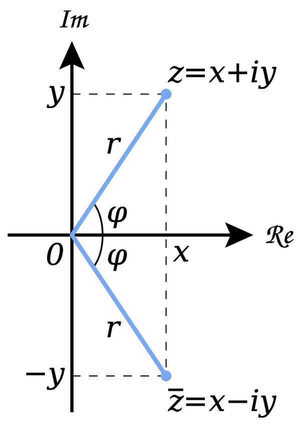
Или в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{x-0}{0} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-3}{0}$.

Комплексные числа

Теория



Re – вещественная ось, Im – мнимая ось

Перейдём к полярным координатам (r, φ)

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ – модуль комплексного числа

$\varphi = \operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ – аргумент комплексного числа (угол между r и положительным направлением Re)

$\arg z$ – главное значение аргумента, $\arg z \in [0, 2\pi]$ или $\arg z \in (-\pi, \pi]$

$$z = \underbrace{x+iy}_{\substack{\text{алгебраическая}\\ \text{форма записи}}} = r\cos\varphi + r\sin\varphi = \underbrace{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{\substack{\text{тригонометрическая}\\ \text{форма записи}}}$$

Утверждение. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

Определение. Комплексно сопряжённым к числу z называется $\bar{z} : z = a+bi$, $\bar{z} = a - bi$. Сопряжение – отражение относительно вещественной оси.

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Деление комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \; z_2 \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Утверждение. Формула Муавра: $z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$, $n \in \mathbb{N}$

Извлечение комплексных корней

$$\sqrt[n]{w} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos\left(\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\psi+2\pi k}{n}\right)\right) \;\middle|\; k = \overline{0, n-1} \right\}$$

Задача 18

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (-2+4i)x + 3yi = -10 + 21i \\ (1+5i)x + (1-2i)y = 14 + 19i \end{cases}$$

Решение:

Решим систему методом Крамера. Главный определитель будет равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2+4i & 3i \\ 1+5i & 1-2i \end{vmatrix} = (-2+4i)(1-2i) - 3i(1+5i) = -2+4i+4i-8i^2-3i-15i^2 =$$
$$= -2+5i+8+15 = 21+5i$$

Вычислим остальные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -10+21i & 3i \\ 14+19i & 1-2i \end{vmatrix} = (-10+21i)(1-2i) - 3i(14+19i) =$$
$$= -10+20i+21i-42i^2-42i-57i^2 =$$
$$= -10-i+42+57 = 89-i$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -2+4i & -10+21i \\ 1+5i & 14+19i \end{vmatrix} = (-2+4i)(14+19i) - (1+5i)(-10+21i) =$$
$$= -28-38i+56i+76i^2+10-21i+50i-105i^2 =$$
$$= -28+47i-76+10+105 = 11+47i$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5-i}{21+5i} = \frac{(89-i)(21-5i)}{(21+5i)(21-5i)} = \frac{1869-445i-21i+5i^2}{21^2+5^2} = \frac{1864-466i}{466} = 4-i$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{11+47i}{21+5i} = \frac{(11+47i)(21-5i)}{(21+5i)(21-5i)} = \frac{231-55i+987i-235i^2}{466} = \frac{466+932i}{466} = 1+2i$$

Ответ: $\begin{cases} x = 4-i \\ y = 1+2i \end{cases}$

Задача 19

Решить уравнение

$$z^2 - (7+i)z + (18+i) = 0$$

Решение:

Данное уравнение квадратное, поэтому его можно решить через дискриминант.

$$D = \big(-(7+i)\big)^2 - 4(18+i) = 49+14i+i^2-72-4i = -24+10i$$

Найдём корень из дискриминанта. Пусть $\sqrt{D} = a + ib$. Тогда

$$\sqrt{D} = a + ib \Leftrightarrow \sqrt{-24+10i} = a + ib \Leftrightarrow -24 + 10i = a^2 + 2abi - b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ 2ab = 10 \end{cases}$$

Ни a, ни b не равны нулю, иначе бы $2ab = 0$. Значит, можно выразить a через b из второго уравнения и подставить его в первое:

$$2ab = 10 \Leftrightarrow a = \frac{5}{b}$$

$$\left(\frac{5}{b}\right)^2 - b^2 = -24,\ b \neq 0 \Leftrightarrow b^4 - 24b^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (b^2+1)(b^2-25) = 0 \Leftrightarrow b = \pm 5$$

Получаем два решения системы:

$$\left[\begin{array}{l} a = 1, b = 5 \\ a = -1, b = -5 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{D} = 1 + 5i \\ \sqrt{D} = -1 - 5i \end{array}\right.$$

Для нахождения корней можно взять любой из полученных $\sqrt{D}$, так как они отличаются только знаком.

$$z_1 = \frac{7 + i - \sqrt{D}}{2} = \frac{7 + i - (1+5i)}{2} = 3 - 2i$$

$$z_2 = \frac{7 + i - \sqrt{D}}{2} = \frac{7 + i + (1+5i)}{2} = 4 + 3i$$

Ответ: $3 - 2i$, $4 + 3i$.

Задача 20

Пусть $z = -\sqrt{3} - i$. Вычислить значение $\sqrt[7]{z^3}$, для которого число $\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i}$ имеет аргумент $\frac{9\pi}{28}$. Найди модуль этого числа.

Решение:

Перепишем комплексное число в тригонометрическом виде:

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\arg z = -\pi + \arctan\frac{-1}{-\sqrt{3}} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

Теперь возведём z в третью степень:

$$z^3 = 2^3\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\cdot 3\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\cdot 3\right)\right) = 8\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right)$$

Возьмём из z^3 корень седьмой степени:

$$\sqrt[7]{z^3} = \sqrt[7]{8}\left(\cos\frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi k}{7} + i\sin\frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi k}{7}\right),\ k = \overline{0,6}$$

Зная $\arg\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i}$, можно найти k. Сначала запишем $-1+i$ в тригонометрической форме:

$$-1+i = \sqrt{(-1)^2+1^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} + \frac{i}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Тогда

$$\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i} = \frac{\sqrt[7]{8}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi k}{7} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi k}{7} - \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

По условию

$$\arg\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i} = \frac{9\pi}{28} \Rightarrow \frac{9\pi}{28} = \frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi k}{7} - \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{9\pi}{28} = \frac{-10\pi + 8\pi k - 21\pi}{28}$$

$$k = \frac{40\pi}{8\pi} = 5$$

Таким образом, значение $\sqrt[7]{z^3}$ будет:

$$\sqrt[7]{z^3} = \sqrt[7]{8}\left(\cos\frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi\cdot 5}{7} + i\sin\frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi\cdot 5}{7}\right) = \sqrt[7]{8}\left(\cos\frac{15\pi}{14} + i\sin\frac{15\pi}{14}\right)$$

Ответ: $\sqrt[7]{8}\left(\cos\frac{15\pi}{14} + i\sin\frac{15\pi}{14}\right)$.

Задача 21

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i \end{cases}$$

Решение:

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2-i & -i \\ 4-2i & -5 & -1-2i \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-(2-i)\text{I}\to\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2-i & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем одну главную и одну зависимую переменную:

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{i}{2} + (2+i)z_2 \\ z_2 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} z_1 = -\frac{i}{2} + (2+i)z_2 \\ z_2 \in \mathbb{C} \end{cases}$

Задача 22

Вычислить:

$$\sqrt[8]{16},\ \sqrt[6]{-27},\ \sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$$

Решение:

Запишем каждое из чисел в тригонометрической форме:

$$16 = 16+0i = \sqrt{16^2+0^2}\left(\frac{16}{\sqrt{16^2+0^2}} + \frac{0i}{\sqrt{16^2+0^2}}\right) = 16(1+0i) = 16(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$-27 = -27+0i = \sqrt{(-27)^2+0^2}\left(\frac{-27}{\sqrt{(-27)^2+0^2}} + \frac{0i}{\sqrt{(-27)^2+0^2}}\right) = 27(-1+0i) = 27(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$8\sqrt{3}i-8 = 8(\sqrt{3}i-1) = 8\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}} + \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}}\right) = 16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right) =$$
$$= 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Найдём корни из каждого числа:

$$\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{16}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{8} + i\sin\frac{0+2\pi k}{8}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi k}{4}\right),\ k=\overline{0,7}$$

$$\sqrt[6]{-27} = \sqrt[6]{27}\left(\cos\frac{\pi+2\pi m}{6} + i\sin\frac{\pi+2\pi m}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi(1+2m)}{6} + i\sin\frac{\pi(1+2m)}{6}\right),\ m=\overline{0,5}$$

$$\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi n}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi n}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi(1+3n)}{6} + i\sin\frac{\pi(1+3n)}{6}\right),\ n=\overline{0,3}$$

Ответ: $\sqrt[8]{16} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi k}{4}\right),\ k=\overline{0,7}$

$$\sqrt[6]{-27} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi(1+2m)}{6} + i\sin\frac{\pi(1+2m)}{6}\right),\ m=\overline{0,5}$$

$$\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8} = 2\left(\cos\frac{\pi(1+3n)}{6} + i\sin\frac{\pi(1+3n)}{6}\right),\ n=\overline{0,3}$$

Общая алгебра

Теория

Определение. Бинарной операцией на X называется отображение $\tau : X \times X \to X$.

Определение. Множество с корректно заданной на нём бинарной операцией называется группоидом (магмой).

Определение. Множество X с заданной на нём бинарной ассоциативной операцией называется полугруппой.

Замечание. Ассоциативность: $\forall a, b, c \in X \;\; a * (b * c) = (a * b) * c$, где $*$ – бинарная операция.

Определение. Элемент полугруппы M называется нейтральным, если $\forall x \in M \;\; e * x = x * e = x$.

Определение. Полугруппа, в которой есть нейтральный элемент – моноид.

Определение. Элемент a моноида $(M, e, \cdot)$ называется обратимым, если $\exists b : a * b = b * a = e$.

Определение. Моноид G все элементы которого обратимы, называется группой.

Определение (эквивалентное)**.** Множество G с корректно определённой на нём бинарной операцией $*$ называется группой, если:

1) операция ассоциативна: $\forall x, y, z \in G \;\; x * (y * z) = (x * y) * z$
2) $\exists e \in G \; \forall x \in G : x * e = e * x = x$
3) $\forall x \in G \; \exists x^{-1} \in G : x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

Определение. Группа с коммутативной операцией называется абелевой.

Замечание. Коммутативность: $\forall a, b \in X \;\; a * b = b * a$, где $*$ – бинарная операция.

Определение. Пусть q – наименьшее натуральное ($\neq 0$) число, для которого $a^q = e$, где $a \in G$, оно называется порядком элемента. Если такого числа не существует, то говорят об элементе бесконечного порядка.

Определение. Пусть даны две группы: $(G_1, *)$ и $(G_2, \circ)$. Тогда отображение $f : G_1 \to G_2$ называется гомоморфизмом, если выполняется следующее условие: $\forall a, b \in G_1 \;\; f(a * b) = f(a) \circ f(b)$.

Определение. Инъективный гомоморфизм называют мономорфизмом, а сюръективный – эпиморфизмом.

Определение. Биективный гомоморфизм называется изоморфизмом.

Задача 23

Является ли отображение $\phi : X \to Y$, где

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\},\ \ Y = \mathbb{Z},\ \ \phi\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = a + b + c$$

инъективным, сюръективным, биективным?

Решение:

1) *Инъективность:* $\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

   Результат отображения – целое число, равное сумме трёх чисел из первой строки матрицы из множества X. Так как любое целое число можно представить в виде суммы трёх слагаемых бесконечным количеством способов, отображение не инъективно. Контрпример:

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 + 2 + 3 = \phi\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

2) *Сюръективность:* $\forall y \in Y\ \exists x \in X : \phi(x) = y$.

   Любое целое число y можно разложить в сумму трёх слагаемых, т.е. $y = a + b + c$. Тогда всегда есть такая матрица $x \in X$, что

$$x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \phi\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = a + b + c = y$$

   Сюръективность выполнена.

3) *Биективность.* Выполняется, когда отображение и инъективно, и сюръективно.

   Отображение не биективно, так как оно не инъективно.

Ответ: только сюръективно.

Задача 24

Является ли (a) группоидом, (b) полугруппой, (c) моноидом, (d) группой множество целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно операции $a \circ b = a + b - 5$? Ответ обосновать.

Решение:

a) Проверим корректна ли задана операция на множестве $\mathbb{Z}$. Если $a, b \in \mathbb{Z}$, то $a \circ b = a + b - 5 \in \mathbb{Z}$. Операция не выводит из множества, значит, она корректно задана. Таким образом, $(\mathbb{Z}, \circ)$ – группоид.

b) Проверим ассоциативность операции:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad a \circ (b \circ c) = a + (b + c - 5) - 5 = (a + b - 5) + c - 5 = (a \circ b) \circ c$$

Операция ассоциативна, значит, группоид $(\mathbb{Z}, \circ)$ – полугруппа.

c) Попробуем найти нейтральный элемент в $(\mathbb{Z}, \circ)$.

$$e \circ a = e + a - 5 = a \;\Leftrightarrow\; e = 5$$

$$a \circ e = a \circ 5 = a + 5 - 5 = a$$

Значит, $e = 5$ – нейтральный элемент, и $(\mathbb{Z}, \circ)$ – моноид.

d) Проверим, есть ли у любого $a \in \mathbb{Z}$ обратный элемент $a^{-1} : a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$.

$$a^{-1} \circ a = a^{-1} + a - 5 = 5 \;\Leftrightarrow\; a^{-1} = 10 - a$$

$$a \circ a^{-1} = a \circ (10 - a) = a + 10 - a - 5 = 5 = e$$

У каждого элемента есть обратный, значит, $(\mathbb{Z}, \circ)$ – группа.

Ответ: a)-d) – является.

Задача 25

Является ли отображение

$$\phi(7^a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

гомоморфизмом групп, если первая группа – это множество $G = \{7^a, a \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения, а вторая группа – $H = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \right\}$ множество с операцией сложения? Является ли это отображение изоморфизмом?

Решение:

Проверим, для произвольных $7^a, 7^b \in G$:

$$\phi(7^a \cdot 7^b) = \phi(7^{a+b}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \phi(7^a) + \phi(7^b)$$

Таким образом, это гомоморфизм.

Отображение инъективно, так как

$$\forall 7^a, 7^b \in G \quad \phi(7^a) = \phi(7^b) \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; a = b \;\Rightarrow\; 7^a = 7^b$$

Отображение не сюръективно, так как в H входят матрицы в левом углу которых может стоять не 0, а отображение не переводит в такие матрицы. Контрпример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Отображение не сюръективно, значит, не биективно. Тогда ϕ – не изоморфизм.

Ответ: гомоморфизм, не изоморфизм.

Задача 26

Ассоциативна ли операция $*$ на множествах, если

$$G = \mathbb{N},\ x * y = x^y$$

$$H = \mathbb{N},\ x * y = \text{НОД}(x, y)$$

Решение:

Проверим ассоциативность каждой из операций:

1) Для произвольных $a, b, c \in G$:

$$a * (b * c) = a^{b^c}$$
$$(a * b) * c = (a^b)^c = a^{bc}$$
$$a * (b * c) \neq (a * b) * c$$

Операция не ассоциативна.

2) Для произвольных $a, b, c \in H$:

$$a * (b * c) = \text{НОД}\big(a, \text{НОД}(b, c)\big) = \text{НОД}(a, b, c)$$
$$(a * b) * c = \text{НОД}\big(\text{НОД}(a, b), c\big) = \text{НОД}(a, b, c)$$
$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

Ответ: 1) нет; 2) да.

Задача 27

Пусть G – множество всех вещественных чисел, отличных от -1. Доказать, что G является группой относительно операции

$$x \cdot y = x + y + xy$$

Решение:

Докажем по определению.

1) *Замкнутость операции.*

Операция не должна выводить из $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\forall x, y \in G \ \ x \cdot y = x + y + xy \in \mathbb{R}$$

Проверим, может ли получиться $x + y + xy = -1$.

$$x + y + xy = -1 \ \Leftrightarrow \ x(1+y) + y + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ (x+1)(y+1) = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Но, так как $x, y \in G$, они не могут быть равны -1. Значит, случай, когда $x + y + xy = -1$, невозможен. Таким образом, $x + y + xy \in G$.

2) *Ассоциативность операции.*

$$\forall x, y, z \in G \ \ x \cdot (y \cdot z) = x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) = x + y + xy + z + yz + xz + xyz =$$
$$= (x + y + xy) + z + z(x + y + xy) = (x \cdot y) \cdot z$$

Операция ассоциативна.

3) *Нейтральный элемент.*

$$x \cdot e = e \cdot x = x$$

$$x + e + xe = x \ \Leftrightarrow \ e = 0$$

4) *Обратный элемент.*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$$

$$x + x^{-1} + xx^{-1} = 0 \ \Leftrightarrow \ (x+1)(x^{-1}+1) = 1 \ \Leftrightarrow \ x^{-1} = \frac{1}{x+1} - 1$$

Обратный существует для всех x, так как $x \neq -1$.

Таким образом, $(G, \cdot)$ – группа.

Задача 28

Какие из отображений групп $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ являются гомоморфизмами:

$$f(z) = |z|$$

$$g(z) = 2|z|$$

Решение:

Группа $\mathbb{C}^*$ – множество комплексных чисел с операцией умножения, $\mathbb{R}^*$ – множество вещественных чисел с операцией умножения.

Рассмотрим произвольные $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Проверим, являются ли f и g гомоморфизмом:

$$f(z_1 \cdot z_2) = f\Big(r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)\Big) = r_1 r_2 = f(z_1)\cdot f(z_2)$$

$$\left.\begin{aligned} &g(z_1 \cdot z_2) = g\Big(r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)\Big) = 2r_1 r_2 \\ &g(z_1)\cdot g(z_2) = 2r_1 \cdot 2r_2 = 4r_1 r_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ g(z_1\cdot z_2) \neq g(z_1)\cdot g(z_2)$$

Таким образом, f – гомоморфизм, g – не гомоморфизм.

Ответ: f – гомоморфизм, g – не гомоморфизм.

Задача 29

Найти порядок элемента группы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$$

Решение:

1) Разложим подстановку в произведение независимых циклов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (123)(45)$$

Так как подстановка в степени, равной НОКу длин её циклов, будет равна e, порядок этой подстановки будет $\text{НОК}(3,2) = 6$ (меньшая степень не подойдёт).

2) Перепишем комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$

Надо возвести z в такую минимальную степень $n \in \mathbb{N}$, что $z^n = 1$ – нейтральный элемент в $\mathbb{C}^*$.

$$z^n = \cos\frac{5\pi n}{6} + i\sin\frac{5\pi n}{6} = 1$$

$$\begin{cases}\cos\frac{5\pi n}{6} = 1 \\ \sin\frac{5\pi n}{6} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{5\pi n}{6} = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi n}{6} = \pi l,\ l \in \mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow \frac{5\pi n}{6} = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{12k}{5}$$

Так как $n \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$ должно быть кратно 5. Минимальное такое $k = 5$. Значит, $n = 12$.

Ответ: 1) 6; 2) 12.