Алгебра. Задачи 4

Арунова Анастасия

Содержание

Линейная алгебра **2**
Задача 1 . . . 2
Задача 2 . . . 4
Задача 3 . . . 4
Задача 4 . . . 5
Задача 5 . . . 6
Задача 6 . . . 8
Задача 7 . . . 9
Задача 8 . . . 10
Задача 9 . . . 14
Задача 10 . . . 15
Задача 11 . . . 16
Задача 12 . . . 17
Задача 13 . . . 19
Задача 14 . . . 21
Задача 15 . . . 23
Задача 16 . . . 25
Задача 17 . . . 27
Задача 18 . . . 28
Задача 19 . . . 30
Задача 20 . . . 32

Линейная алгебра

Задача 1

(a) Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$. Можно ли привести ее к диагональному виду, перейдя к подходящему базису?

(b) Вычислить матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Решение:

(a) Найдём с помощью характеристического многочлена собственные значения линейного оператора, задаваемого матрицей A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 12 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$$

Найдём λ при которых $\chi_A(\lambda) = 0$:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda+2)^2 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Нашли собственное значение линейного оператора $\lambda = -2$, его алгебраическая кратность равна $a_{-2} = 2$ (других собственных значений нет).

Найдём ФСР системы $(A - \lambda E)x = 0$ при $\lambda = -2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4-\lambda & -3 & 0 \\ 12 & -8-\lambda & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 0 \\ 12 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}\to\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2}{2} \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Вектор e_1 является собственным вектором линейного оператора (все с.в. задаются как $\alpha \cdot e_1$, $\alpha \neq 0$).

Так как ФСР состоит из 1 столбца, геометрическая кратность собственного значения $\lambda = -2$ будет равна $g_{-2} = 1$. Геометрическая кратность не равна алгебраической кратности собственного значения, значит, матрицу нельзя привести к диагональному виду.

(b) Для вычисления A^n найдём J – ЖНФ матрицы A и C – матрицу перехода от базиса, в котором находится матрица A, к базису, в котором она имеет ЖНФ.

Так собственное значение всего одно, ЖНФ будет состоять всего из одной жордановой клетки.

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Размер жордановой клетки 2, значит, ей соответствуют 2 базисных вектора. Обозначим их e_1 и e_2. Вектор e_1 был найден в пункте (a). Все следующие базисные векторы находятся при помощи уравнения:

$$(A - \lambda E)e_k = e_{k-1} \quad \underset{\lambda=-2}{\overset{k=2}{\Rightarrow}} \quad (A + 2E)e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решим уравнение для e_2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 1 \\ 12 & -6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}\to\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{6} + \frac{x_2}{2} \overset{x_2=0}{\Rightarrow} e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, жорданов базис равен:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит, матрица перехода от базиса, в котором находится A, к базису, в котором находится J, равна:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём A^n:

$$A = CJC^{-1} \Leftrightarrow A^n = (CJC^{-1})^n = CJ\underbrace{C^{-1}C}_{E}J\underbrace{C^{-1}\cdot}_{E}\ldots\underbrace{\cdot C}_{E}J\underbrace{C^{-1}C}_{E}JC^{-1} = CJ^nC^{-1}$$

Обратная к C будет равна:

$$C^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A^n = CJ^nC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-3n)(-2)^{n-1} & -3n(-2)^{n-1} \\ -6n(-2)^n & (3n+1)(-2)^n \end{pmatrix}$$

Ответ: (a) с.з. $\lambda = -2$, с.в. αe_1, $\alpha \neq 0$; (b) $\begin{pmatrix} (1-3n)(-2)^{n-1} & -3n(-2)^{n-1} \\ -6n(-2)^n & (3n+1)(-2)^n \end{pmatrix}$.

Задача 2

Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $a_1 = (2,5)^T$, $a_2 = (1,3)^T$, соответственно в векторы $b_1 = (7,-4)^T$, $b_2 = (2,-1)^T$ в базисе, в котором даны координаты векторов.

Решение:

Пусть φ – линейный оператор переводящий векторы a_1, a_2 в векторы b_1, b_2, соответственно. Пусть A – искомая матрица линейного оператора. Т.к. линейное отображение полностью задаётся матрицей перехода, для каждого столбца координат a_i $(i = 1,2)$ в некотором базисе e будет верно $b_i^e = \big(\varphi(a_i)\big)^e = A_e \cdot a_i^e$.

Тогда можем составить векторное уравнение:

$$AX = Y$$

где X – матрица, столбцами которой являются векторы a_1, a_2, Y – матрица, в столбцах которой записаны векторы b_1, b_2.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 3

В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ линейный оператор ϕ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора ϕ в базисе $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

Найдём матрицу перехода от базиса e к базису $\hat{e}$ по формуле: $T_{e\to\hat{e}} = e^{-1} \cdot \hat{e}$. Для этого необходимо найти e^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \Rightarrow e^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$T_{e\to\hat{e}} = e^{-1}\cdot\hat{e} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & \frac{3}{5}\\ -1 & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

Теперь можно найти матрицу A в базисе $\hat{e}$ по формуле:

$$A_{\hat{e}} = T^{-1}A_eT = \begin{pmatrix}2 & \frac{3}{5}\\ -1 & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & \frac{3}{5}\\ -1 & -\frac{2}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-36 & -\frac{61}{5}\\ 115 & 39\end{pmatrix}$$

Ответ: $A_{\hat{e}} = \begin{pmatrix}-36 & -\frac{61}{5}\\ 115 & 39\end{pmatrix}$

Задача 4

Можно ли найти базис из собственных векторов для матрицы A? В случае положительного ответа найти этот базис, в случае отрицательного, объяснить почему это невозможно.

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Решение:

Так как матрица симметрична, базис в котором она диагональна, существует. Найдём этот базис.

Найдём с помощью характеристического многочлена собственные значения линейного оператора, задаваемого матрицей A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4 = (\lambda-1)^2(\lambda-4)^2$$

Найдём λ при которых $\chi_A(\lambda)=0$:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = 1\\ \lambda = 4\end{array}\right.$$

Нашли собственные значения линейного оператора $\lambda = 1, 4$.

Найдём ФСР системы $(A-\lambda E)x = 0$:

- $\lambda = 1$:

$$A-E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x_1 = x_2 - x_3 \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 4$:

$$A - 4E = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, базисом будет набор e_1, e_2, e_3.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задача 5

Линейный оператор переводит вектор $a_1 = (-1, 0)^T$ в вектор $b_1 = (5, 5)^T$, а вектор $a_2 = (1, 1)^T$ в вектор $b_1 = (-2, -3)^T$.

1) В какое множество перейдет прямая, заданная уравнение $2x_1 - x_2 = -2$?
2) Какое множество переходит в эту прямую?
3) Написать уравнения тех прямых, которые переходят сами в себя.

Решение:

1) Найдём матрицу линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Любая прямая задаётся точкой (или радиус-вектором данной точки), которая принадлежит прямой, и направляющим вектором прямой. Для того, чтобы найти направляющий вектор $\vec{s}$ и точку M на прямой запишем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2 - 2}{2} \Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ M(0, 2)$$

Радиус-вектор точки M обозначим $\vec{r} = (0, 2)^T$.

Чтобы понять, в какое множество перейдёт прямая, надо применить к ней линейный оператор:

$$\vec{s'} = A\vec{s} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r'} = A\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Таким образом, прямая под действием линейного оператора перейдёт в прямую:

$$\frac{x_1 - 6}{1} = \frac{x_2 - 4}{-1}$$

2) Чтобы понять, какое множество переходит в данную прямую, нужно решить следующую систему:

$$\begin{cases} \vec{s} = A\vec{s'} \\ \vec{r} = A\vec{r'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{s'} = A^{-1}\vec{s} \\ \vec{r'} = A^{-1}\vec{r} \end{cases}$$

Найдём обратную к A:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\vec{s'} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r'} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, множество, переходящее по действием линейного оператора в исходную прямую, будет прямой:

$$\frac{x_1 + \frac{6}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{x_2 + 1}{-1}$$

3) Пусть $\vec{s}$ – направляющий вектор прямой, которая под действием линейного оператора переходит в саму себя (причём $\vec{s} \neq 0$, иначе прямая вырождается в точку). Тогда для него выполняется:

$$A\vec{s} = \vec{s} \Leftrightarrow (A - E)\vec{s} = 0 \Leftrightarrow \det(A - E) = 0$$

$$\det(A - E) = \begin{vmatrix} -5 - 1 & 3 \\ -5 & 2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Так как $\det(A - E) \neq 0$, решений у уравнения нет, а, значит, прямых, преходящих в самих себя под действием A, нет.

Ответ: 1) $x_1 + x_2 = 10$; 2) $5x_1 - 4x_2 = -2$; 3) нет.

Задача 6

Найти базис ядра и базис образа линейного отображения $\phi : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ заданного матрицей

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Является ли отображение сюръективным?

Решение:

Ядро линейного отображения – это множество $\operatorname{Ker}\phi = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid \phi(x) = 0\}$. Поэтому для того, чтобы найти базис ядра, нужно найти ФСР системы $\phi(x) = A_\phi x = 0$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 14x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_2 = \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Получаем e_1, e_2 – базис ядра линейного отображения.

Найдём базис образа линейного отображения $\operatorname{Im}\phi = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^5 : \phi(x) = y\}$. Чтобы найти базис $\operatorname{Im}\phi$ надо привести матрицу A_ϕ^T к ступенчатому виду и взять после этого ненулевые строки.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получаем f_1, f_2, f_3 – базис образа линейного отображения. Значит, $\dim \operatorname{Im}\phi = 3$. Так как $\dim \operatorname{Im}\phi = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, отображение сюръективно.

Ответ: 1) Базис ядра: $e_1 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, e_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}^T$

2) Базис образа: $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}^T, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}^T, f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$

3) Отображение сюръективно.

Задача 7

Представить невырожденную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

в виде произведения ортогональной матрицы Q на верхнетреугольную матрицу R.

Решение:

Обозначим столбцы матрицы A как:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Построим из векторов a_1, a_2, a_3 ортогональные векторы f_1, f_2, f_3, методом Грама-Шмидта. Пусть

$$f_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Тогда f_2 будет равно:

$$f_2 = a_2 - \frac{(a_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \overset{\cdot \frac{3}{4}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{(a_2, f_1)}{(f_1, f_1)} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 2}{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{2}{3}$$

Вектор f_3 будет равен:

$$f_2 = a_3 - \frac{(a_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 - \frac{(a_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{(a_3, f_2)}{(f_2, f_2)} = \frac{(-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3}{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{(a_3, f_1)}{(f_1, f_1)} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3}{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = -\frac{1}{3}$$

Нормируем векторы f_1, f_2, f_3:

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\|f_1\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

$$\|f_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$\|f_3\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Из полученных векторов e_1, e_2, e_3, составим матрицу Q. Её столбцы – данные векторы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Найдём обратную к Q матрицу. Так как она ортогональная $Q^{-1} = Q^T$.

$$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = Q^{-1}$$

Так как $A = QR$, можем найти матрицу R, домножив данное выражение слева на Q^{-1}:

$$R = Q^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Задача 8

Найти сингулярное разложение для матрицы:

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

Решение:

Рассмотрим линейный оператор, задаваемый матрицей:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & -4 \\ 5 & 5 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 90 & 72 & -72 \\ 90 & 90 & 72 & -72 \\ 72 & 72 & 90 & -90 \\ -72 & -72 & -90 & 90 \end{pmatrix}$$

Найдём его с.з. и соответствующие им с.в.:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 90-\lambda & 90 & 72 & -72 \\ 90 & 90-\lambda & 72 & -72 \\ 72 & 72 & 90-\lambda & -90 \\ -72 & -72 & -90-\lambda & 90 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-36)(\lambda-324)$$

Корни характеристического многочлена будут с.з. Тогда $\lambda_1 = 324$ и $\lambda_2 = 36$, $\lambda_3 = 0$ (кратности равной 2). Обозначим $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 18$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 6$, $\sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = 0$.

Найдём собственные векторы для каждого из с.з., решив уравнение $(A - \lambda E)v = 0$, где v – с.в.:

- $\lambda_1 = 324$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 90-\lambda & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & 90-\lambda & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & 90-\lambda & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90-\lambda & 90 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -234 & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & -234 & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & -234 & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90 & -234 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем e_1:

$$v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 36$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 90-\lambda & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & 90-\lambda & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & 90-\lambda & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90-\lambda & 90 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 54 & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & 54 & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & 54 & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90 & 54 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем e_2:

$$v_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- $\lambda_3 = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 90-\lambda & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & 90-\lambda & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & 90-\lambda & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90-\lambda & 90 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 90 & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 90 & 90 & 72 & -72 & 0 \\ 72 & 72 & 90 & -90 & 0 \\ -72 & -72 & -90 & 90 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = x_4 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем e_3 и e_4:

$$v_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_4 = \frac{e_4}{\|e_4\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Найдём вектор u_1, выражающийся через v_1 следующим образом:

$$u_1 = \frac{A^T v_1}{\sigma_1} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Аналогично найдём u_2:

$$u_2 = \frac{A^T v_2}{\sigma_1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Векторы u_1 и u_2 нормированы и ортогональны. Дополним их до ОНБ в $\mathbb{R}^3$, составив матрицу из строк векторов u_1 и u_2, приведя её к ступенчатому виду и найдя не ведущие элементы:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}+\text{I}\to\text{II}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Столбец с номером 3 не содержит ведущих элементов. Значит, вектор

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются дополнением векторов u_1 и u_2 до базиса в $\mathbb{R}^3$ (их $3 = \dim \mathbb{R}^3$ и они л.н.з., т.к., если в B добавить строку вектора f_1, получим матрицу B' ранга 3, что равно количеству строк в B').

Ортогонализуем f_1 :

$$f_1' = f_1 - \frac{(f_1, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 - \frac{(f_1, u_2)}{(u_2, u_2)} u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Нормируем f_1':

$$u_3 = \frac{f_1'}{\|f_1'\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Составим матрицы:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$U = \left(\begin{array}{c|c|c|c} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку:

$$V\Sigma U^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix} = A$$

Ответ: $A = V\Sigma U^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T.$

Задача 9

Пусть в некотором ортонормированном базисе трёхмерного евклидова пространства заданы векторы $e_1 = (0,1,1)^T$, $e_2 = (-1,-1,1)^T$, $e_3 = (1,0,1)^T$. Пусть оператор f задан матрицей $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ в базисе e_1, e_2, e_3. Найти матрицу A_{f^*} сопряженного оператора f^* в том же базисе.

Решение:

Найдём матрицу Грама для данного базиса, записав векторы e_1, e_2, e_3 в строки матрицы, и перемножив данную матрицу на транспонированную к ней:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу сопряжённого оператора можно по формуле:

$$A_{f^*} = \Gamma^{-1} A^T \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ \frac{4}{3} & 5 & \frac{5}{3} \\ 5 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A_{f^*} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ \frac{4}{3} & 5 & \frac{5}{3} \\ 5 & -1 & 11 \end{pmatrix}$

Задача 10

В трехмерном евклидовом пространстве ϵ базис s имеет матрицу Грама

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Векторы базиса e заданы своими координатами в базисе s

$$[e_1]_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, [e_2]_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [e_3]_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найти биортогональный к базису e базис f, записав его координаты в базисе s.

Решение:

Составим матрицу A из столбцов векторов базиса e:

$$A = \left([e_1]_s \,\middle|\, [e_2]_s \,\middle|\, [e_3]_s \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица F столбцов векторов базиса f может быть найдена по следующей формуле:

$$F^T \Gamma A = E \Leftrightarrow F = \left(A^{-1} \cdot \Gamma^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Значит, базис f задаётся следующими векторами:

$$[f_1]_s = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ [f_2]_s = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},\ [f_3]_s = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $[f_1]_s = (-1, 2, -1)^T$, $[f_2]_s = (3, -5, 2)^T$, $[f_3]_s = (-4, 7, -2)^T$.

Задача 11

Пусть e_1, e_2, e_3 – базис пространства V, ϵ^1, ϵ^2, ϵ^3 – двойственный ему базис пространства V^*.

a) Найдите базис V^*, двойственный к базису $2e_1 + e_3$, $e_1 + e_2 + e_3$, e_2 пространства V.

b) Найдите базис V, для которого базис $2\epsilon^1 + \epsilon^2$, $\epsilon^1 + \epsilon^2 + \epsilon^3$, ϵ^2 – двойственный.

Решение:

Обозначим следующие базисы $e = (e_1, e_2, e_3)$ и $e' = (2e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3, e_2)$, $\epsilon = (\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3)$ и $\epsilon' = (2\epsilon^1 + \epsilon^3, \epsilon^1 + \epsilon^2 + \epsilon^3, \epsilon^2)$.

a) Матрица перехода от e к e':

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём двойственный базис по следующей формуле:

$$FA = E \Leftrightarrow F = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Получили двойственный к e' базис:

$$f^1 = (1, 0, -1),$$
$$f^2 = (-1, 0, 2),$$
$$f^3 = (1, 1, -2)$$

b) Запишем матрицу F перехода от ϵ к ϵ':

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда базис, к которому ϵ' будет двойственным, можно найти по формуле:

$$FA = E \Leftrightarrow A = F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Значит, искомый базис будет равен:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ответ: a) $f^1 = (1, 0, -1), f^2 = (-1, 0, 2), f^3 = (1, 1, -2)$

b) $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Задача 12

Привести квадратичную форму $k = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 5x_3^2$ к каноническому виду посредством ортогональной замены координат. Определить ранг и индексы инерции. Указать соответствующее линейное преобразование.

Решение:

Запишем матрицу квадратичной формы:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдём собственные значения и собственные векторы:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)$$

Найдём λ при которых $\chi_A(\lambda) = 0$:

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6) \Leftrightarrow \lambda = \left[\begin{aligned} &\lambda = -2 \\ &\lambda = 3 \\ &\lambda = 6 \end{aligned}\right.$$

Найдём ФСР системы $(A-\lambda E)x=0$:

- $\lambda=-2$:

$$A+2E=\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&-1&0\\-3&3&1&0\\-1&1&7&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow \text{ФСР: } e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

- $\lambda=3$:

$$A-3E=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-3&-1&0\\-3&-2&1&0\\-1&1&2&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3\end{cases}\Rightarrow \text{ФСР: } e_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

- $\lambda=6$:

$$A-6E=\left(\begin{array}{ccc|c}-5&-3&-1&0\\-3&-5&1&0\\-1&1&-1&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=\frac{1}{2}x_3\end{cases}\Rightarrow \text{ФСР: } e_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Векторы e_1, e_2, e_3 уже ортогональны, так как являются собственными векторами, отвечающими разным с.з., оператора, задаваемого симметричной матрицей. Остаётся нормировать данные векторы:

$$f_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\ f_2=\frac{e_2}{\|e_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\ f_3=\frac{e_3}{\|e_3\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичной формы:

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

Матрица перехода к каноническому виду:

$$S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$A=S^TQS$$

Ранг квадратичной формы равен рангу матрицы квадратичной формы $\operatorname{Rg}Q=3$.

Найдём индексы инерции:

- $i_+ = 2$ (так как 2 члена с положительным коэффициентом)
- $i_- = 1$ (так как 1 член с отрицательным коэффициентом)

Ответ: 1) Канонический вид: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2) Матрица перехода: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

3) Индексы инерции: $i_+ = 2, i_- = 1$

Задача 13

Уравнение $5x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 14 = 0$ линии второго порядка на плоскости привести к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования и сдвига, указав:

a) Одно из преобразований перехода от заданной системы координат к канонической системе координат

b) Канонический вид уравнения линии

c) Определить тип кривой. На плоскости построить каноническую систему координат, в которой схематично изобразить кривую.

Решение:

a) Сначала выделим из уравнения и приведём к каноническому виду квадратичную форму:

$$Q(x, y) = 5x^2 + 2y^2 + 4xy \Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

К каноническому виду приведём при помощи ортогональных преобразований:

$$\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$$

Собственные значение будут равны: $\lambda = 1, 6$. Для каждого найдем соответствующее собственное значение:

- $\lambda = 1$:

$$A - E = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 6$:

$$A - E = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) x_1 = 2x_2 \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы e_1, e_2 уже ортогональны, так как являются собственными векторами, отвечающими разным с.з., оператора, задаваемого симметричной матрицей. Остаётся нормировать данные векторы:

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},\ f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Составим матрицу ортогонального преобразования:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичная формы:

$$Q'(x_1, y_1) = x_1^2 + 6y_2^2$$

Замена от координат x, y к x_1, y_1:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \end{cases}$$

b) Подставим новые координаты в исходное уравнение:

$$5\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right)^2 + 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right) + \\ + 4\sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right) + 4\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\right) - 14 = 0$$

$$x_1^2 + 6y_1^2 + 4x_1 + 12y - 14 = 0$$

Выделим полные квадраты:

$$x_1^2 + 6y_1^2 + 4x_1 + 12y - 14 = 0$$
$$(x_1 + 2)^2 + 6(y_1 + 1)^2 = 24$$
$$\frac{(x_1 + 2)^2}{24} + \frac{(y_1 + 1)^2}{4} = 1$$

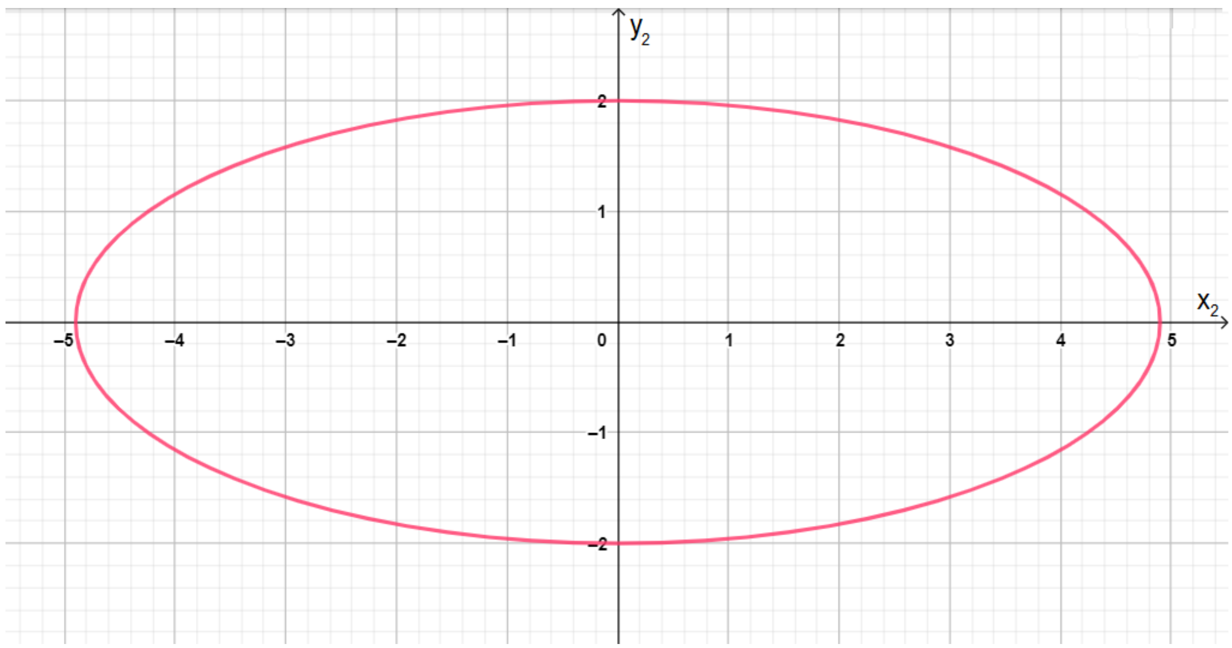
Сделаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 2 \\ y_1 = y_2 - 1 \end{cases}$$

Получаем канонический вид кривой:

$$\frac{x_2^2}{24} + \frac{y_2^2}{4} = 1$$

c) Данное уравнение задаёт эллипс с $a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, $b = \sqrt{4} = 2$. В канонической системе координат он проходит через точки $(\pm a; 0)$, $(0; \pm b)$.



Ответ: $\dfrac{x_2^2}{24} + \dfrac{y_2^2}{4} = 1$

Задача 14

Эллипс проходит через точку $C(0; -1 + \sqrt{20})$, его ось оканчивается вершинами $A(-2; 5)$, $B(-2; -7)$. Написать уравнение кривой, указать большую и малую полуоси, найти эксцентриситет и сделать эскиз.

Решение:

Найдём точку – центр эллипса. Так как у вершин A и B, задающих прямую оси, x-координата совпадает, ось эллипса AB параллельна оси O_y. Координата центра $x_0 = -2$, координата центра $y_0 = \frac{-7+5}{2} = -1$. Таким образом, центр в точке $O(-2; -1)$.

Так как оси эллипса параллельны координатным осям, а центр расположен в $O(-2; -1)$, получим следующее уравнение эллипса:

$$\frac{(x+2)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$

Подставим точку A в уравнение:

$$\frac{(-2+2)^2}{a^2}+\frac{(5+1)^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{36}{b^2}=1\Rightarrow b=6$$

Подставим точку C в уравнение:

$$\frac{(0+2)^2}{a^2}+\frac{(-1+\sqrt{20}+1)^2}{36}=1\Leftrightarrow\frac{4}{a^2}+\frac{5}{9}=1\Leftrightarrow a^2=9\Rightarrow a=3$$

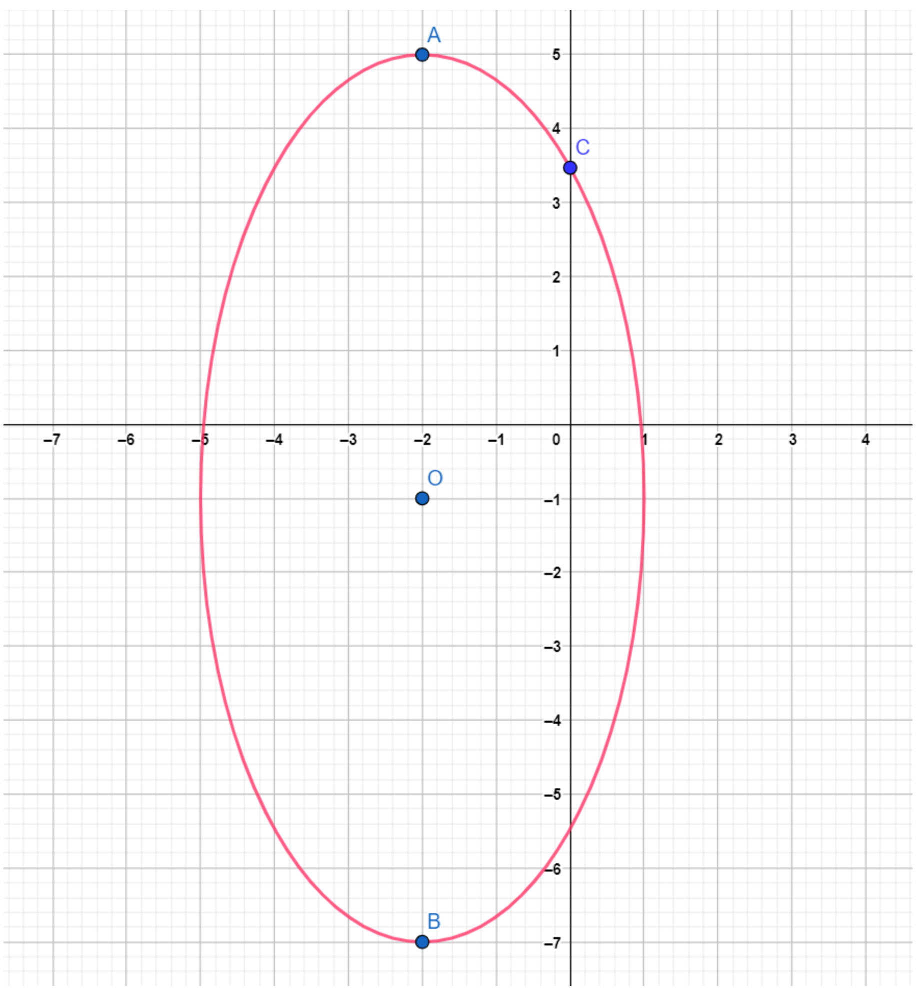
Таким образом, уравнение кривой:

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$$

Малая полуось равна $a=3$, большая полуось равна $b=6$. Посчитаем эксцентриситет:

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: малая полуось равна $a=3$, большая полуось равна $b=6$, эксцентриситет $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Задача 15

Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на линейное пространство $L = L(a_1, a_2, a_3)$.

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

I способ.

Найдём базис L. Оно задана как линейная оболочка векторов a_1, a_2, a_3, поэтому запишем их в столбцы и приведём к ступенчатому виду, выделив ведущие элементы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow a_1, a_2 \text{ -- базисные}$$

Составим матрицу из базисных столбцов:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдём проекцию по формуле:

$$y = \mathrm{pr}_L x = A(A^T A)^{-1} A^T x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Тогда ортогональная проекция будет равна:

$$z = x - y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

II способ.

Базисные векторы подпространства L найдены в первом способе. Это векторы a_1 и a_2.

Ортогонализуем a_1 и a_2:

$$e_1 = a_1$$

$$e_2 = a_2 - \frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Найдём проекцию вектора x на L по формуле:

$$y = \mathrm{pr}_L\, x = \frac{(e_1, x)}{(e_1, e_1)}e_1 + \frac{(e_2, x)}{(e_2, e_2)}e_2 = \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{12}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ортогональная проекция ищется так же как и в первом способе: $z = x - y$.

III способ.

Найдём базис $L^{\perp}$. Для этого найдём ФСР системы составленной из столбцоы a_1, a_2, a_3, записанных в строки:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ФСР данной системы будет равна:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так как e_1 и e_2 базис ортогонального дополнения, а z является ортогональной проекцией, вектор z можно разложит по базису e_1, e_2:

$$z = \alpha e_1 + \beta e_2$$

Тогда $x = z + y = \alpha e_1 + \beta e_2 + y$. По определению ортогонального дополнения для любого вектора $a \in L$ верно, что если $b \in L^{\perp}$, то $(a, b) = 0$. Вектор $y \in L$, вектор $z \in L^{\perp}$. Посчитаем следующие скалярные произведения:

$$\begin{cases} (x, e_1) = (\alpha e_1 + \beta e_2 + y, e_1) = \alpha(e_1, e_1) + \beta(e_2, e_1) + (y, e_1) = \alpha(e_1, e_1) + \beta(e_1, e_2) \\ (x, e_2) = (\alpha e_1 + \beta e_2 + y, e_2) = \alpha(e_1, e_2) + \beta(e_2, e_2) + (y, e_2) = \alpha(e_1, e_2) + \beta(e_2, e_2) \end{cases}$$

Векторы x, e_1, e_2 известны, значит, можно посчитать скалярные произведения:

$$\begin{cases} -2 = 2\alpha - 2\beta \\ -10 = -2\alpha + 14\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Теперь можно найти z и y:

$$z = -2e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y = x - z = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T$, $z = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T$

Задача 16

Найти расстояние от точки, заданной вектором $x = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}^T$, до линейного многообразия L, заданного системой:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$$

Решение:

Расстояние от вектора x до линейного многообразия L равно длине ортогональной составляющей $\| \operatorname{ort}_L x \|$. Перенесём вектор x и L на вектор x_0, который является частным решением системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда получаем новый вектор x' и линейное многообразие U, между которыми будем искать расстояние:

$$x' = x - x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U : \begin{cases} 2x_1 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\| \operatorname{ort}_L x\| = \| \operatorname{ort}_U x'\|$$

Ортогональную составляющую x' на U, можно найти в виде проекции x' на $U^\perp$. В качестве базиса $U^\perp$ возьмём строки матрицы задающей систему U, то есть

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так можно сделать, потому что выполнены следующие условия:

1) Векторы e_1 и e_2 л.н.з. и их количество $\dim U^\perp$
2) $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in U$ для $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ из $U^\perp$ выполнено:

$$(x, v) = \alpha(x, e_1) + \beta(x, e_2) = \alpha \underbrace{(2x_1 + x_4)}_{\substack{=0 \text{ из системы,} \\ \text{задающей } U}} + \beta \underbrace{(-2x_2 + x_3 + x_4)}_{\substack{=0 \text{ из системы,} \\ \text{задающей } U}} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

То есть определение оргонального дополнения выполнено.

Остаётся найти $\| \operatorname{pr}_{U^\perp} x'\| = \| \operatorname{ort}_U x'\|$. Воспользуемся формулой

$$\operatorname{pr}_L x = A(A^T A)^{-1} A^T x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Осталось найти длину проекции:

$$\|\operatorname{pr}_L x\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 5$$

Ответ: 5.

Задача 17

Линейное преобразование φ евклидова пространства в базисе векторов

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

задано матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу сопряженного преобразования φ^* в том же базисе, считая, что координаты векторов базиса даны в некотором ОНБ.

Решение:

Найдём матрицу Грама для базиса f:

$$\Gamma = \left(\ f_1 \ \middle| \ f_2 \ \middle| \ f_3 \ \right)^T \left(\ f_1 \ \middle| \ f_2 \ \middle| \ f_3 \ \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда по формуле можно найти матрицу сопряжённого оператора в том же базисе:

$$A_{\varphi^*} = \Gamma^{-1} A_\varphi^T \Gamma = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$

Задача 18

Для ортогонального преобразования φ, заданного в ортонормированном базисе матрицей A, найти канонический вид матрицы A и матрицу перехода к этому виду. Указать угол и ось поворота.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

По теореме Эйлера любой ортогональный оператор в $\mathbb{R}^3$ может быть приведён к следующему каноническому виду:

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Значит, одним из собственных значений должно быть 1 или -1. Проверим, является ли $\lambda = 1$ с.з., подставив его в характеристический многочлен:

$$\det(A+E) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{I = -II}}{=} 0$$

Он равен 0, значит, $\lambda = 1$ – с.з и в правом нижнем углу матрицы A' стоит 1. Найдём для с.з. с.в., решив уравнение $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A-E)v = 0$ (по определению с.в.), где v – искомый с.в.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

У данной системы две главные переменные – x_1 и x_3 и одна зависимая x_2. Найдём ФСР, для этого в зависимые переменные подставим наборы, состоящие не из всех нулевых значений. Зависимая переменная одна, поэтому набор будет один, пусть $x_2 = 1$.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$$

Нормируем вектор v:

$$f_3 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{v}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ось поворота – собственное значение, соответствующее данному с.з., т.е. вектор f_3.

Найдём ОНБ в $\langle f_3 \rangle^\perp$. Так как f_3 удовлетворяет $(A-E)f_3 = 0$, то для всех векторов $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и e_1, e_2 – базис, состоящий из строк матрицы $(A-E)$, будет выполнено равенство $(u, f_3) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, f_3) = \alpha_1(e_1, f_3) + \alpha_2(e_2, f_3) = 0 + 0 = 0$, т.е. $u \in \langle f_3 \rangle^\perp$. Значит подпространство $\langle f_3 \rangle^\perp = L(e_1, e_2)$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем e_1 и e_2 методом Грама-Шмидта (e_1 и e_2 уже ортогональны с f_3, т.к. лежат в $\langle f_3 \rangle^\perp$):

$$f_1' = e_2$$

$$f_2' = e_1 - \frac{(e_1, f_1')}{(f_1', f_1')} f_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нормируем f_1' и f_2':

$$f_1 = \frac{f_1'}{\|f_1'\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; f_2 = \frac{f_2'}{\|f_2'\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $f = (f_1, f_2, f_3)$ – базис, в котором матрица A имеет канонический вид.

Обозначим линейный оператор, данный в задаче, как φ. Тогда

$$\varphi(f_1) = Af_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

В базисе f по определению вектор $\varphi(f_1)$ будет равен столбцу матрицы линейного оператора в этом базисе, т.е. первому столбцу из A'. Тогда в исходном базисе:

$$(\varphi(f_1))^f = \cos\alpha \cdot f_1 + \sin\alpha \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 = \cos\alpha \cdot f_1 + \sin\alpha \cdot f_2$$

$$(\varphi(f_1), f_1) = (\cos\alpha \cdot f_1, f_1) + (\sin\alpha \cdot f_2, f_1) = \cos\alpha \cdot (f_1, f_1) + \sin\alpha \cdot (f_2, f_1) = \cos\alpha \cdot \|f_1\| = \cos\alpha$$

$$(\varphi(f_1), f_2) = (\cos\alpha \cdot f_1, f_2) + (\sin\alpha \cdot f_2, f_2) = \cos\alpha \cdot (f_1, f_2) + \sin\alpha \cdot (f_2, f_2) = \sin\alpha \cdot \|f_2\| = \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = (\varphi(f_1), f_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$
$$\sin\alpha = (\varphi(f_1), f_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot 0 = -1$$

Найдём угол:

$$\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

Канонический вид оператора:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода к каноническому виду:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A' = C^T A C$$

Ответ: канонический вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, матрица перехода $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ось поворота $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, угол $-\frac{\pi}{2}$.

Задача 19

Найти ортонормированный базис собственных векторов и матрицу в этом базисе для линейного преобразования, заданного в некотором ОНБ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

Решение:

Найдём собственные значения и собственные векторы:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 27)(\lambda - 9)^2$$

Найдём λ при которых $\chi_A(\lambda) = 0$:

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 27)(\lambda - 9)^2 \Leftrightarrow \lambda = \left[\begin{array}{l} \lambda = 27 \\ \lambda = 9 \end{array}\right.$$

Найдём ФСР системы $(A - \lambda E)x = 0$:

- $\lambda = 27$:

$$A - 27E = \left(\begin{array}{ccc|c} -10 & -8 & 4 & 0 \\ -8 & -10 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & -16 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 9$:

$$A - 9E = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -8 & 4 & 0 \\ -8 & 8 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x_1 = x_2 - \frac{1}{2}x_3$$

$$\Rightarrow \text{ФСР: } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы e_1, e_2 и e_1, e_3 уже ортогональны, так как являются собственными векторами, отвечающими разным с.з., оператора, задаваемого симметричной матрицей. Ортогонализуем e_2 и e_3, а затем нормируем все векторы.

$$f_2' = e_2$$

$$f_3' = e_3 - \frac{(e_2, e_3)}{(e_3, e_3)} e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \ f_2 = \frac{f_2'}{\|f_2'\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \ f_3 = \frac{f_3'}{\|f_3'\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичной формы:

$$B = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода к каноническому виду:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$B = S^T A S$$

Ответ: ортонормированный базис f_1, f_2, f_3, матрица в этом базисе $\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Задача 20

Следующую матрицу представить в виде произведения симметрической матрицы с положительными характеристическими числами на ортогональную матрицу.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

При помощи сингулярного разложения найдём полярное:

$$A = V\Sigma U^T = V\Sigma(V^T V)U^T = \underbrace{(V\Sigma V^T)}_{S}\underbrace{(VU^T)}_{O} = SO$$

Рассмотрим линейный оператор, задаваемый матрицей:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдём его с.з. и соответствующие им с.в.:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 8)$$

Корни характеристического многочлена будут с.з. Тогда $\lambda_1 = 8$ и $\lambda_2 = 2$. Обозначим $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2\sqrt{2}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}$.

Найдём собственные векторы для каждого из с.з., решив уравнение $(A - \lambda E)v = 0$, где v – с.в.:

- $\lambda_1 = 8$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем e_1:

$$v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем e_2:

$$v_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Найдём вектор u_1, выражающийся через v_1 следующим образом:

$$u_1 = \frac{A^T v_1}{\sigma_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично найдём u_2:

$$u_2 = \frac{A^T v_2}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы u_1 и u_2 нормированы и ортогональны, их количество равно размерности пространства. Составим матрицы:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$V = \left(\begin{array}{c|c} v_1 & v_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$U = \left(\begin{array}{c|c} u_1 & u_2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём симметрическую матрицу:

$$S = V \Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Найдём ортогональную матрицу:

$$O = V U^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ответ: $A = SO = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$