Алгебра. Определения и доказательства 4

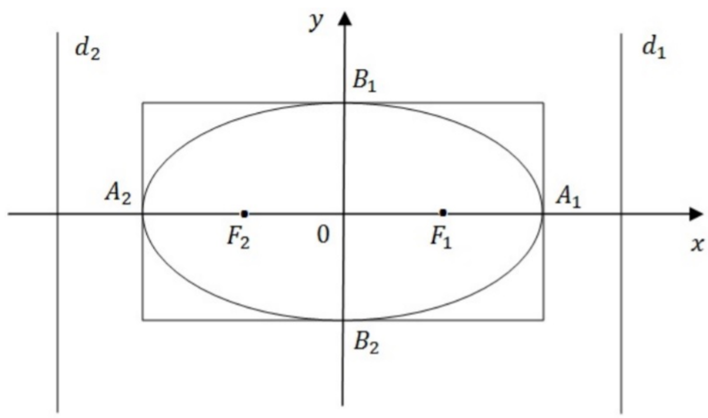
Арунова Анастасия

Содержание

1 Определения

1.1 Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться?

Определение. Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна.



1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение эллипса

2) A_1, A_2, B_1, B_2 – вершины эллипса

3) a – большая полуось, b – малая полуось, $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

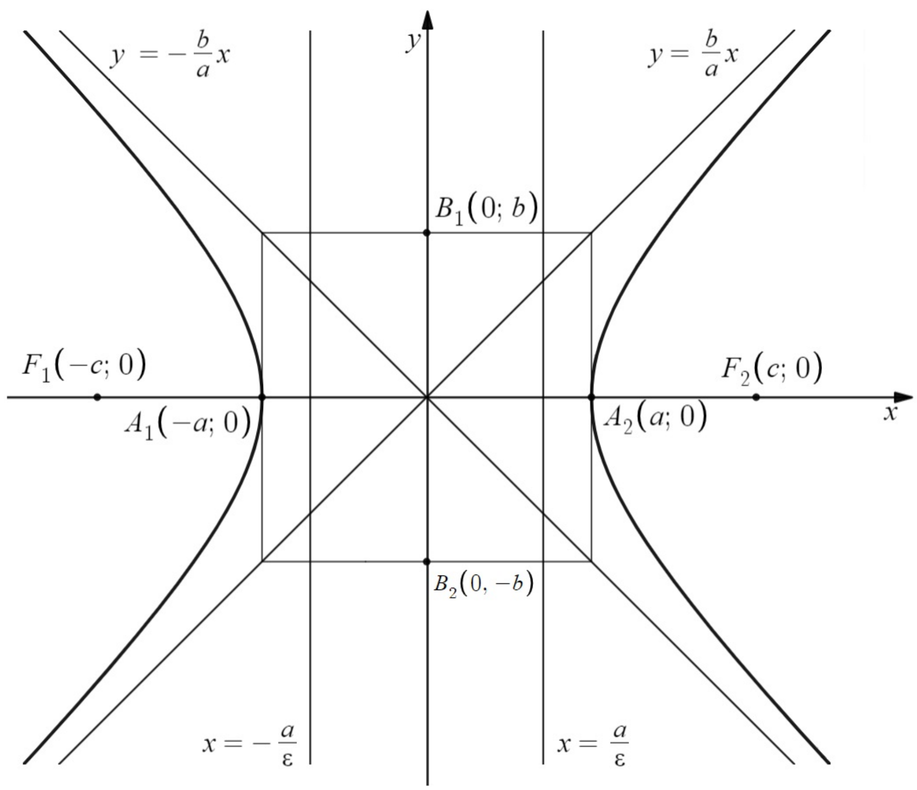
4) $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ – эксцентриситет эллипса

5) $d_1 : x=\dfrac{a}{\varepsilon}$ и $d_2 : x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$ – директрисы эллипса

Замечание. Эксцентриситет эллипса лежит на полуинтервале $[0,1)$ и служит мерой «сплюснутости» эллипса. При $\varepsilon=0, c=0 \Rightarrow F_1=F_2$ эллипс превращается в окружность. При $\varepsilon\to 1, c\to 1$ эллипс вырождается в отрезок F_1F_2.

1.2 Дайте определение гиперболы как геометрического места, точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться?

Определение. Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянен.



1) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы

2) A_1, A_2 – вершины

3) a – действительная (фокальная) полуось, b – мнимая полуось, $2c$ – расстояние между фокусами

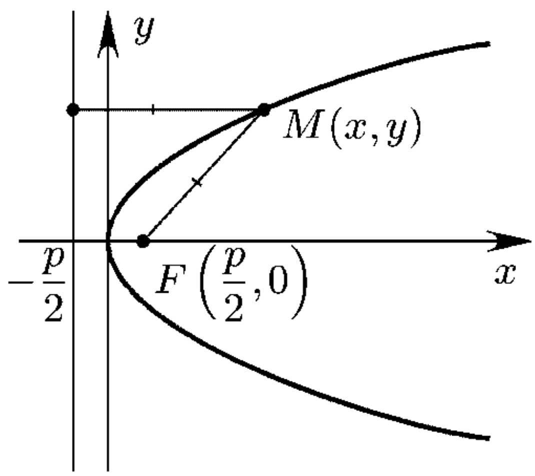
4) $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} > 1$ – эксцентриситет эллипса

5) $d_1 : x = \dfrac{\varepsilon}{a}$ и $d_2 : x = -\dfrac{\varepsilon}{a}$ – директрисы гиперболы

Замечание. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$ (при $\varepsilon \to \infty$ гипербола вырождается в два луча) характеризует угол между асимптотами.

1.3 Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое параметр параболы, каков его геометрический смысл?

Определение. Параболой называют геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы).



1) $y^2 = 2px$ – каноническое уравнение гиперболы
2) F – фокус
3) p – параметр параболы

Замечание. Число p равно расстоянию от фокуса до директрисы.

1.4 Сформируйте теорему о классификации кривых второго порядка.

Теорема. Для любой кривой второго порядка существует ПДСК Oxy, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов.

Тип	Кривая	Уравнение
Эллиптический тип	Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a\geq b>0$
	Пустое множество	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
	Точка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
Гиперболический тип	Гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0, b>0$
	Пара пересекающихся	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
Параболический тип	Парабола	$y^2=2px$
	Пара $\parallel$ прямых	$y^2=d,\ d>0$
	Пустое множество	$y^2=-d,\ d>0$
	Точка	$y^2=0$

1.5 Дайте определение цилиндрической поверхности. Приведите пример цилиндра второго порядка, отличного от эллиптического.

Определение. Рассмотрим кривую γ, лежащую в некоторой плоскости P, и прямую L, не лежащую в P. Цилиндрической поверхностью называют множество всех прямых, параллельных L и пересекающих γ.

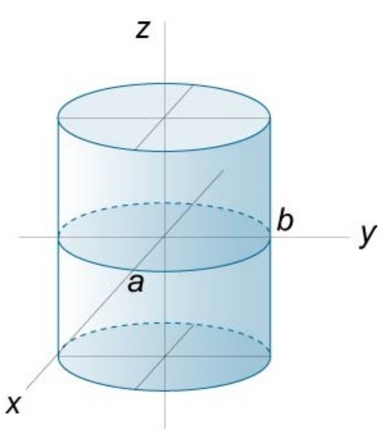
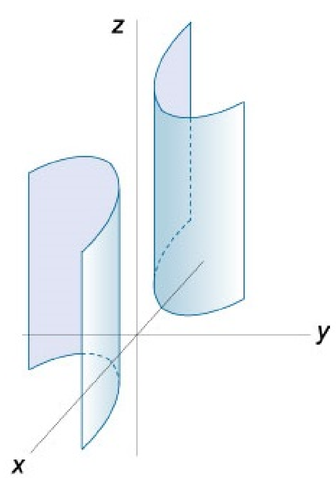
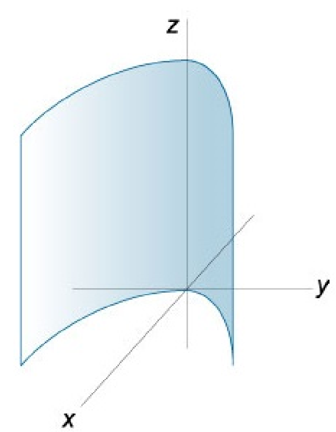
Пример. Эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр.

1.6 Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите два примера линейчатых поверхностей, не являющихся цилиндрическими поверхностями.

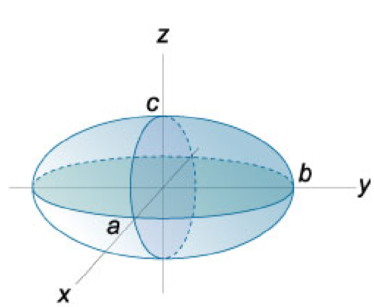
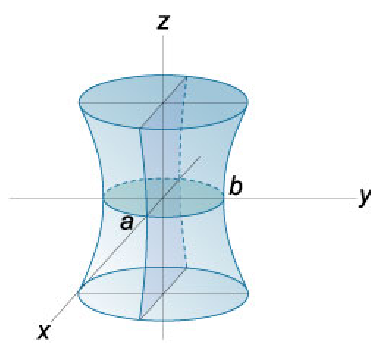
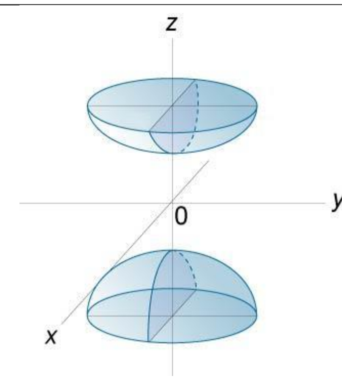
Определение. Линейчатой называют поверхность, образованную движением прямой линии.

Пример. Любой цилиндр является линейчатой поверхностью. Гиперболоиды и конус так же являются линейчатыми поверхностями.

1.7 Запишите канонические уравнения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров. Для каждой поверхности указать на сколько связных компонент она делит трехмерное пространство.

Эллиптический цилиндр	Гиперболический цилиндр	Параболический цилиндр
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px^2$
		

1.8 Запишите канонические уравнения эллипсоида, однополостного гиперболоида, двуполостного гиперболоида. Для каждой поверхности указать на сколько связных компонент она делит трехмерное пространство.

Эллипсоид	Однополостный гиперболоид	Двуполостный гиперболоид
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
		

1.9 Запишите канонические уравнения эллиптического параболоида, гиперболического параболоида. Для каждой поверхности указать на сколько связных компонент она делит трехмерное пространство.

Эллиптический параболоид	Гиперболический параболоид
$2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	$2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$