Алгебра. Задачи 1

Арунова Анастасия

Содержание

Операции над матрицами

Теория

Определение. Матрица C называется суммой матриц A и B, если матрицы A, B, C одного типа $m \times n$ с элементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Определение. Произведением матрицы A типа $m \times n$ на число α называют матрицу C типа $m \times n$ с элементами $\big[C\big]_{ij} = \alpha\big[A\big]_{ij}$, $\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Определение. Для матрицы A типа $m \times n$ её транспонированной матрицей A^T называют матрицу типа $n \times m$ с элементами $\big[A^T\big]_{ij} = \big[A\big]_{ji}$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Определение. Рассмотрим A типа $n \times p$ и B типа $p \times k$. Привидением матриц A и B называют матрицу C типа $n \times k$ с элементами $c_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{p} a_{il} \cdot b_{lj}$, $\forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Определение. Обратной к квадратной матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется матрица

$$A^{-1} : A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$$

Теорема. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Вычисление обратной матрицы:

I. Формула:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

II. Элементарные преобразования: составить матрицу $\big(A \mid E\big)$ и привести её к каноническому виду: $\big(E \mid B\big)$ (при условии, что A – невырожденная матрица). Матрица B и будет обратной.

Задача 1

Выполните действия:

$$(3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) Умножим матрицу B на число:

$$3B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Возведём полученную матрицу в квадрат:

$$(3B)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15^2 + 3 \cdot (-3) & 15 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \\ -3 \cdot 15 + 0 \cdot (-3) & -3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 216 & 45 \\ -45 & -9 \end{pmatrix}$$

3) Найдём обратную к A матрицу.

- *Первый способ.* Найдём определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 = 2$$

Определитель матрицы A не равен нулю, значит, для неё существует обратная.

Вычислим алгебраические дополнения каждых элементов:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} = 0$$

Составим союзную матрицу:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, обратная матрица равна:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- *Второй способ.* Составим матрицу $\begin{pmatrix} A \mid E \end{pmatrix}$ и сделаем элементарные преобразования.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}\to\frac{\text{-II}}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}+3\text{II}\to\text{I}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Значит, обратная матрица равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

4) Вычислим произведение матриц

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-\frac{3}{2}) + 1\cdot(-\frac{1}{2}) & 5\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ -1\cdot(-\frac{3}{2}) + 0\cdot(-\frac{1}{2}) & (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

5) Разность двух матриц:

$$BA^{-1} - E = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

6) Транспонируем полученную матрицу:

$$(BA^{-1} - E)^T = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -9 & \frac{3}{2} \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

7) Умножим полученную матрицу на 2:

$$2(BA^{-1} - E)^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} -9 & \frac{3}{2} \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

8) Выполним последнее действие:

$$(3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T = \begin{pmatrix} 216 & 45 \\ -45 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 234 & 42 \\ -55 & -5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 234 & 42 \\ -55 & -5 \end{pmatrix}$

Системы линейных уравнений

Теория

Пусть дана СЛАУ с $x_1, \ldots, x_n$ – неизвестными, в координатной форме представленная как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Запишем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Столбец правых частей:

$$b = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Столбец неизвестных:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда СЛАУ можно записать в следующем виде:

$$A_{m\times n} \cdot x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$$

Расширенной матрицей СЛАУ называется матрица:

$$\Big(A \mid b\Big) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Система линейных уравнений, которая имеет решения, называется совместной, иначе несовместной.

Теорема (Кронекера-Капелли)**.** СЛАУ $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \Big(A \mid b\Big)$

Способы решения системы линейных уравнений

1) *Метод Гаусса.*

- Записать расширенную матрицу СЛАУ $\Big(A \mid b\Big)$.
- Привести $\Big(A \mid b\Big)$ к каноническому (ступенчатому) виду при помощи элементарных преобразований строк.

$$
\Big(A \mid b\Big) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\text{Метод Гаусса}} \left(\begin{array}{ccc|cccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{1 \quad \dots \quad 0}^{r}} & \widetilde{a}_{1\,r+1} & \dots & \dots & \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \widetilde{a}_{r\,r+1} & \dots & \dots & \widetilde{a}_{rn} & \widetilde{b}_r \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \widetilde{b}_{r+1} \\ \cline{8-8} \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

- Если $\widetilde{b}_{r+1} \neq 0$, то у СЛАУ нет решений.
- Если $\widetilde{b}_{r+1} = 0$, то решение системы – выражение главных переменных через свободные:

$$
\begin{cases} x_1 = \widetilde{b}_1 - \sum\limits_{1+r}^{k} \widetilde{a}_{1k} \cdot x_k \\ \vdots \\ x_r = \widetilde{b}_r - \sum\limits_{1+r}^{k} \widetilde{a}_{rk} \cdot x_k \end{cases}
$$

2) *Метод Крамера.*

Данный метод подходит только тогда, когда A – квадратная матрица.

- Вычислить главный определитель системы – $\det A$.

$$
\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}
$$

- Вычислить определители Δ_i, $i = \overline{1, n}$, являющиеся определителями матриц, полученных из матрицы A заменой i-го столбца на столбец b:

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}
$$

- Если $\Delta = 0$ и есть $\Delta_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, то система несовместна.
- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, то применить метод Крамера нельзя (систему можно решить методом Гаусса, например).
- Если $\Delta \neq 0$, то решение системы будет:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\Delta_i}{\det A}, \; i = \overline{1, n}$$

3) *С помощью обратной матрицы*

Данный метод так же подходит при условии, что A – квадратная матрица.

- Посчитать определитель матрицы A.
- Если $\det A \neq 0$, найти обратную матрицу A^{-1}.
- Найти решение системы:

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; x = A^{-1}b$$

Задача 2

Решите систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

Решение:

Запишем систему уравнений в матричном виде:

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix}$$

То есть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{по 2-му столбцу}}}{=} -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 \cdot 2 - (-1) \cdot 0) - 1 \cdot (1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) = -1$$

Определитель не равен нулю, значит, для матрицы A существует обратная. Найдём её с помощью матрицы $\left(A \mid E\right)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}\to\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}-\text{III}\to\text{I}]{\text{II}+2\text{III}\to\text{II}}$$

$$\xrightarrow[\text{I}-\text{III}\to\text{I}]{\text{II}+2\text{III}\to\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}+\text{III}\to\text{I}]{\text{II}-2\text{III}\to\text{II}}$$

$$\xrightarrow[\text{I}+\text{III}\to\text{I}]{\text{II}-2\text{III}\to\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Зная обратную матрицу, можно найти решение системы:

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20+14+15 \\ 80-28-45 \\ -40+14+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 9$, $x_2 = 7$, $x_3 = 4$.

Задача 3

Найдите все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу СЛАУ $\left(A \mid b\right)$ и приведём её элементарными преобразованиями к каноническому виду.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}\to\text{ III}]{\text{II}-3\text{I}\to\text{ II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & -9 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}\to\text{ III}}$$

$$\xrightarrow{\text{III}-\text{II}\to\text{ III}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}+\text{ II}\to\text{I}]{\text{I}\to-\frac{1}{2}\text{ III}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}+7\text{ III}\to\text{II}]{\text{I}+4\text{ III}\to\text{I}}$$

$$\xrightarrow[\text{II}+7\text{ III}\to\text{II}]{\text{I}+4\text{ III}\to\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем три главных переменных – x_1, x_2, x_4. И две зависимые переменные – x_3, x_5. Запишем решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 7x_3 + 4x_5 \\ x_2 = 1 + 11x_3 + 7x_5 \\ x_4 = x_5 \\ x_3, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 + 7x_3 - 4x_5 \\ x_2 = 1 + 11x_3 - 7x_5 \\ x_4 = x_5 \\ x_3, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Задача 4

Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все её решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение):

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Проверим совместность СЛАУ при помощи теоремы Кронекера-Капелли.

Для этого составим расширенную матрицу системы и найдём её ранг.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}\to\text{III}]{\text{II}-2\text{I}\to\text{II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}\to\text{III}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right)$$

Таким образом, $\operatorname{Rg}\Big(A \mid b\Big) = 2$, так как всего 2 ненулевых строки в ступенчатом виде матрицы, полученной элементарными преобразованиями из данной.

Ранг матрицы A также будет равен 2, так как при её приведении к ступенчатому виду элементарные преобразования будут эквивалентны преобразованиям при приведении матрицы $\Big(A \mid b\Big)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Значит, $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}\Big(A \mid b\Big)$, и система совместна и у неё есть решения. Найдём их:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}+4\text{II}\to\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ x_2 = -1 - x_4 + 6x_5 \end{cases}$$

Получаем две главные переменные – x_1, x_2; и три зависимые – x_3, x_4, x_5. Запишем решение в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

Одно из частных решений системы (при $x_3 = x_4 = x_5 = 0$):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: Система линейных уравнений совместна.

Решение в векторном виде: $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5.$$

Частное решение: $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матричные уравнения

Теория

Операция умножения матриц *не коммутативна*, поэтому домножение выражения на матрицу слева не эквивалентно домножению справа.

Чтобы решить матричное уравнение $XA = B$ с неизвестной матрицей X, нужно домножить его справа на A^{-1}: $XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}$.

Чтобы решить матричное уравнение $AX = B$ с неизвестной матрицей X, нужно домножить его слева на A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Задача 5

Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Обозначим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислим обратную к A с помощью союзной матрицы. Вычислим определитель матрицы A, разложив его по первой строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -12 - 12 - 3 = -27$$

Определитель не равен нулю, значит, у A есть обратная. Найдём алгебраические дополнения элементов:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

Составим союзную матрицу:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица будет равна:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = -\frac{1}{27} \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Домножим уравнение $XA = B$ справа на A^{-1} и найдём X:

$$XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 21 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Подстановки

Теория

Определение. Всякое расположение чисел $1, \dots, n$ в определённом порядке называют перестановкой $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_2)$.

Пример. $\alpha = (1, 2, 3, 4)$

Определение. α_1 и α_j образуют инверсию в перестановке, $(i-j)(\alpha_i - \alpha_j) < 0$.

Определение. Знак перестановки: $\operatorname{sgn}\alpha = (-1)^n$, где n – число инверсией.

Определение. Подстановкой называется взаимно-однозначное отображение $1, \dots, n$ в себя:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Здесь $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ – перестановка.

Пример. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma(2) = 1$

Определение. Умножение подстановок – их последовательное применение (композиция).

Пример. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Определение. Нейтральный элемент по умножению: $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

Определение. $\forall \sigma\ \exists \sigma^{-1}$, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$

Свойство. При возведении цикла $(a_1, \dots, a_k)$ подстановки в степень, кратную его длине, будет получаться тождественная подстановка:

$$(a_1, \dots, a_k)^{nk} = id$$

Свойство. При возведении подстановки в степень, кратную НОКу длин всех её циклов, будет получаться тождественная подстановка.

Задача 6

Найти все такие $\sigma \in S_8$, что $\sigma^2 = (123)(456)$.

Решение:

Так как подстановка принадлежит S_8 можно записать её в виде $\sigma^2 = (123)(456)(7)(8)$.

Цикл длины 1 в σ^2 мог получиться либо из цикла длины 1 в σ (т.е. $(a) \rightsquigarrow (a)$), либо из цикла длины 2 в σ, который при возведении подстановки во вторую степень распался на циклы длины 1 (т.е. $(ab) \rightsquigarrow (a)(b)$).

Значит, либо в σ были два цикла длинной 1 – (7) и (8), либо один цикл длинны 2 – (78).

Осталось рассмотреть только циклы длинны 3. Цикл данной длины после возведения во вторую степень может получаться из цикла длины 3:

$$(abc)^2 = (acb)$$

Т.е. цикл (123) в σ^2 будет в σ имеет вид (132), а (456) – (465).

Либо цикл длины 3 получается после возведении во вторую степень цикла длины 6:

$$(abcdef)^2 = (ace)(bdf)$$

Все возможные варианты:

- $(ace)(bdf) = (123)(456) \Rightarrow (abcdef) = (142536)$
- $(ace)(bdf) = (123)(645) \Rightarrow (abcdef) = (162435)$
- $(ace)(bdf) = (123)(564) \Rightarrow (abcdef) = (152634)$
- $(ace)(bdf) = (312)(456) \Rightarrow (abcdef) = (341526) = (152634)$
- $(ace)(bdf) = (312)(645) \Rightarrow (abcdef) = (361425) = (142536)$
- $(ace)(bdf) = (312)(564) \Rightarrow (abcdef) = (351624) = (162435)$
- $(ace)(bdf) = (231)(456) \Rightarrow (abcdef) = (243516) = (162435)$
- $(ace)(bdf) = (231)(645) \Rightarrow (abcdef) = (263415) = (152634)$
- $(ace)(bdf) = (231)(564) \Rightarrow (abcdef) = (253614) = (142536)$

Таким образом, всего три цикла длины 6: $(142536), (162435), (152634)$.

Выпишем все возможные подстановки. В σ вместо двух циклов $(123)(456)$ из σ^2 может быть либо два цикла длинами 3 – $(132)(465)$, либо один цикл длины 6 – любой из трёх найденных вариантов $(142536), (162435), (152634)$. Вместо двух циклов длины 1 может быть либо 2 цикла длины 1 – $(7)(8)$, либо 1 цикл длины 2 – (78). Подстановки:

- $\sigma = (132)(465)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$
- $\sigma = (132)(465)(78) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
- $\sigma = (142536)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$
- $\sigma = (142536)(78) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
- $\sigma = (162435)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$
- $\sigma = (162435)(78) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
- $\sigma = (152634)(7)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$
- $\sigma = (152634)(78) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Ответ: всего восемь подстановок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача 7

Найти все подстановки чисел 1, 2, 3, 4, перестановочные с подстановкой

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

Если X – подстановка, перестановочная с S, то $XS = SX \Rightarrow S = XSX^{-1}$.

Пусть X равен

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Вычислим произведение (умножение перестановок справа налево):

$$XSX^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix} = (x_1x_2)(x_3x_4)$$

Так как $S = XSX^{-1}$ и $S = (12)(34)$, выполняется $(12)(34) = (x_1x_2)(x_3x_4)$. Тогда возможны следующие случаи:

$$\begin{cases} (x_1x_2) = (12) \\ (x_3x_4) = (34) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x_1x_2) = (34) \\ (x_3x_4) = (12) \end{cases}$$

Если $(x_1x_2) = (12)$ и $(x_3x_4) = (34)$, то решения:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4 \\ x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 3 \\ x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 4 \\ x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 3 \end{array}\right.$$

Если $(x_1x_2) = (34)$ и $(x_3x_4) = (12)$, то решения:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 1, x_4 = 2 \\ x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 1 \\ x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 2 \\ x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = 1 \end{array}\right.$$

Получаем 8 подстановок, подставляя полученные x_1, x_2, x_3, x_4 в $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

Ответ: всего 8 подстановок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 8

Найти подстановку X из равенства $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Чтобы найти X домножим выражение справа на B^{-1} и слева на A^{-1}:

$$AXB = C \Leftrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

Обратную подстановку можно найти *перевернув* её:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычислим X (умножение подстановок справа налево):

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Задача 9

Найти A^{150}, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Разложи подстановку в произведение независимых циклов:

$$A = (1\,3\,4\,6\,7)(2\,5\,9\,8\,10)$$

Оба цикла длины 5. НОК длин циклов равен 5. Значит, при возведении подстановки в степень кратнуюю 5 она будет равна id.

$$A^{150} = A^{5\cdot30} = id^{30} = id$$

Ответ: id.

Определители

Теория

Определение. Определителем (детерминантом) порядка n, соответствующим квадратной матрице A называется число, являющееся суммой $n!$ слагаемых:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Свойства определителей:

1) $\det A^T = \det A$
2) Определитель линеен по строкам (столбцам). Фиксируем i-й столбец, тогда:
   a) $\det(A_1, \ldots, A_i' + A_i'', \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i', \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_i'', \ldots, A_n)$
   b) $\det(A_1, \ldots, \alpha A_i', \ldots, A_n) = \alpha \det(A_1, \ldots, A_i', \ldots, A_n)$
3) При перестановке столбцов определитель меняет знак.
4) $\det A = 0$, если выполнено хотя бы одно из условий:
   a) в матрице есть нулевая строка
   b) в матрице есть 2 одинаковые строки
   c) одна из строк является линейной комбинацией остальных
5) Определитель не меняется, если к любой строке прибавить линейную комбинацию остальных.
6) $\det E_n = 1$
7) Разложение по строке (столбцу):

   Для любого фиксированного j справедливо: $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ – разложение по столбцу.

   Для любого фиксированного i справедливо: $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ – разложение по строке.
8) Фальшивое разложение:
$$k \neq i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$$
$$k \neq j : \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0$$
9) $\begin{vmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

10) Если A и B – квадратные матрицы, то для блочной матрицы: $\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det A \cdot \det B$

11) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})\ \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Задача 10

Подобрать j и i так, чтобы произведение $a_{32}a_{16}a_{2i}a_{53}a_{45}a_{6j}a_{77}$ входило в определитель 7 порядка со знаком минус.

Решение:

Знак слагаемого определяется знаком подстановки, т.е. количеством инверсий в ней. Если оно чётное, то слагаемое входит со знаком $+$, иначе со знаком $-$.

Запишем подстановку:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & i & 2 & 5 & 3 & j & 7 \end{pmatrix}$$

Определим какие столбцы ещё не вошли в произведение, учитывая, что каждый из столбцов $1, 2, \ldots, 7$ должен войти в него ровно один раз. Это столбцы 1 и 4.

Рассмотрим случай, когда $i = 1$, $j = 4$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Посчитаем количество инверсий:

- Для числа 6: 5 инверсий (числа 1, 2, 3, 4, 5 меньше 6, но стоят правее, чем 6).
- Для числа 1: 0 инверсий.
- Для числа 2: 0 инверсий.
- Для числа 5: 2 инверсии (числа 3, 4 меньше 5, но стоят правее, чем 5).
- Для числа 3: 0 инверсий.
- Для числа 4: 0 инверсий.
- Для числа 7: 0 инверсий.

Итого $5 + 0 + 0 + 2 + 0 + 0 + 0 = 7$ инверсий в подстановке, она нечётное. Тогда слагаемое $a_{32}a_{16}a_{21}a_{53}a_{45}a_{64}a_{77}$ входит в определитель со знаком $-$.

Осталось рассмотреть случай, когда $i = 4$, $j = 1$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Для данной подстановки количество инверсий будет равно:

- Для числа 6: 5 инверсий (числа 1, 2, 3, 4, 5 меньше 6, но стоят правее, чем 6).
- Для числа 4: 3 инверсий (числа 1, 2, 3 меньше 4, но стоят правее, чем 4).
- Для числа 2: 1 инверсия (число 1 меньше 2, но стоит правее, чем 2).
- Для числа 5: 2 инверсии (числа 1, 3 меньше 5, но стоят правее, чем 5).
- Для числа 3: 1 инверсия (число 1 меньше 3, но стоит правее, чем 3).
- Для числа 1: 0 инверсий.
- Для числа 7: 0 инверсий.

Общее количество инверсий будет равно: $5+3+1+2+1+0+0=12$ – чётное число. Таким образом, слагаемое при $i=4$, $j=1$ входит в определитель со знаком $+$.

Ответ: $i=4$, $j=1$.

Задача 11

Как изменится определитель, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец и в то же время к первому столбцу прибавить последний.

Решение:

Пусть $A_1, \dots, A_n$ – столбцы матрицы A. Обозначим $\det A = \det(A_1, \dots, A_n)$. Тогда искомый определитель $\det(A_1+A_n,\, A_1+A_2,\, \dots,\, A_{n-1}+A_n) = \det B$ (обозначим матрицу искомого определителя B). Определитель линеен по столбцам (строкам), поэтому при последовательном вычитании из каждого столбца предыдущего, он не изменится:

$$\begin{aligned}
\det B \;&=\; \det(A_1+A_n,\ A_1+A_2,\ A_2+A_3,\ \dots,\ A_{n-2}+A_{n-1},\ A_{n-1}+A_n) = \\
&\overset{\text{II - I}}{=} \det(A_1+A_n,\ A_2-A_n,\ A_2+A_3,\ \dots,\ A_{n-2}+A_{n-1},\ A_{n-1}+A_n) = \\
&\overset{\text{III - II}}{=} \det(A_1+A_n,\ A_2-A_n,\ A_3+A_n,\ \dots,\ A_{n-2}+A_{n-1},\ A_{n-1}+A_n) = \dots \\
&= \det(A_1+A_n,\ A_2-A_n,\ A_3+A_n,\ \dots,\ A_{n-1}+(-1)^{(n-1)-1}A_n,\ A_n+(-1)^{n-1}A_n) = \\
&= \det(A_1+A_n,\ \dots,\ A_n+(-1)^{n-1}A_n)
\end{aligned}$$

Если n – чётное, то определитель будет равен

$$\det B = \det(A_1+A_n,\ \dots,\ A_n-A_n) = \det(A_1+A_n,\ \dots,\ 0) = 0$$

Если n – нечётное, тогда

$$\det B = \det(A_1+A_n,\ \dots,\ A_n+A_n) = \det(A_1+A_n,\ \dots,\ 2A_n) = 2\det(A_1+A_n,\ \dots,\ A_n)$$

Прибавим к чётным столбцам последний столбец (столбец A_n), а из нечётных вычтем:

$$\begin{aligned}\det B &= 2\det(A_1 + A_n,\ A_2 - A_n,\ A_3 + A_n,\ \ldots,\ A_{n-1} - A_n,\ A_n) = \\ &= 2\det(A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_{n-1},\ A_n) = 2\det A\end{aligned}$$

Ответ: при нечётном n определитель $\det B = 2\det A$; при чётном n определитель $\det B = 0$.

Задача 12

Как изменится определитель порядка n, если его матрицу повернуть на $90°$ вокруг «центра».

Решение:

Пусть A – исходная матрица. Пусть A_{90° – повёрнутая на $90°$ вокруг «центра» матрица A.

При повороте A на $90°$ вокруг «центра» строки матрицы A перейдёт в следующие столбцы матрицы A_{90°:

- 1-я строка из $A \rightsquigarrow n$-й столбец в A_{90°
- 2-я строка из $A \rightsquigarrow (n-1)$-й столбец в A_{90°
- $\ldots$
- n-я строка

При транспонировании A строки матрицы A перейдёт в следующие столбцы матрицы A^T:

- 1-я строка из $A \rightsquigarrow$ 1-й столбец в A^T
- 2-я строка из $A \rightsquigarrow (n-1)$-й столбец в A^T
- $\ldots$
- n-я строка из $A \rightsquigarrow n$-й столбец в A^T

Таким образом, матрица A_{90° отличается от A^T только тем, что у неё столбцы расположены в обратном порядке.

Зная, что $\det A = \det A^T$, можем приведением A_{90° к A^T перестановкой столбцов, найти $\det A_{90^\circ}$.

Переставим 1-й и n-й, 2-й и $(n-1)$-й, 3-й и $(n-2)$-й, $\ldots$ столбцы. Всего будет сделано $\frac{n(n-1)}{2}$ перестановок. Значит, искомый определитель будет равен

$$\det A_{90^\circ} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A$$

Ответ: $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A$.

Задача 13

Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \leqslant -50$$

Решение:

Преобразуем определитель:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{II + 4 III}\to\text{II}}{\underset{\text{IV + 3 III}\to\text{IV}}{=}} \begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Данные определители равны, так как при прибавлении к строке линейной комбинации других строк, она не изменяется.

Посчитаем определитель, разложив его по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 18x - 28$$

Промежуточные вычисления:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} \overset{\text{III - 7 I}\to\text{III}}{\underset{\text{I - 5II}\to\text{I}}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{по 1-му столбцу}}}{=} -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 18$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{транспонируем}}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} \overset{\text{III - I}\to\text{III}}{\underset{\text{I - 2II}\to\text{I}}{=}} \begin{vmatrix} 0 & -7 & -1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) \cdot 4 = -28$$

Решим неравенство:

$$18x - 28 \leqslant -50 \;\Leftrightarrow\; x \leqslant -\frac{11}{9}$$

Ответ: $x \leqslant -\dfrac{11}{9}$.

Задача 14

Вычислите определитель матрицы порядка n:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Решение:

Обозначим исходный определитель как Δ_n. Разложим его по первой строке:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Заметим, что первое слагаемое – исходный определитель, но порядка $n-1$. Обозначим его Δ_{n-1}. Разложим определитель во втором слагаемом по первому столбцу:

$$\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5\Delta_{n-1} - 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Определитель во втором слагаемом аналогичен исходному, но порядка $n-2$. Тогда получаем рекуррентное соотношение:

$$\Delta_n = 5\Delta_{n-1} + 6\Delta_{n-2}$$

Найдём такие t, что последовательность t^n удовлетворяет рекуррентному соотношению. Составим и решим характеристическое уравнение этого соотношения:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{aligned}\right.$$

Первые два члена рекуррентной последовательности:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 19$$

Найдём такие c_1 и c_2, что линейная комбинация $2^n c_1 + 3^n c_2 = \Delta_n$. Решим систему:

$$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = 5 \\ 2^2 c_1 + 3^2 c_2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = 5 \\ 4c_1 + 9c_2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

Таким образом, $\Delta_n = -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n = -2^{n+1} + 3^{n+1}$.

Ответ: $\Delta_n = -2^{n+1} + 3^{n+1}$.

Задача 15

Вычислите определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

Решение:

Обозначим исходный определитель как Δ_n. Разложим его по первой строке:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Определитель в первом слагаемом аналогичен определителю Δ_n, но только он порадка $n-1$.

Разложим определитель во втором слагаемом по первому столбцу:

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

Найдём явное выражение рекуррентного соотношения, заданного формулой $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$, при помощи характеристического уравнения:

$$t^2 - 2t + t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 1 \end{array}\right.$$

Так как корни совпали, последовательность рекуррентных членов задаётся следующей формулой: $\Delta_n = t_1^n c_1 + t_1^n n c_2 = 1^n c_1 + 1^n n c_2 = c_1 + n c_2$.

Первые два члена рекуррентной последовательности:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Составив систему, найдём c_1 и c_2:

$$\begin{cases} 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 2 \\ 1^2 \cdot c_1 + 1^2 \cdot 2 \cdot c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Значит, $\Delta_n = 1 \cdot 1^n + 1 \cdot n \cdot 1^n = 1 + n$.

Ответ: $\Delta_n = 1 + n$.

Задача 16

Вычислите определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Решение:

Вычтем из строк с номерами от 1 до $n-1$ последнюю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Теперь к последней строке прибавим все строки с номерами от 1 до $n-1$. В результате все элементы последней строки станут равны 0, а последний элемент будет равен $n-1$ раз:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

Ответ: $(-1)^{n-1}(n-1)$.

Задача 17

Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

Решение:

Из каждой строки с номерами от 1 до $n-1$ вычтем последнюю строку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}\to\mathrm{I}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

Из последней строки вычтем удвоенные строки с номерами от 1 до $n-1$. В правом нижнем углу будет стоять элемент, равный $3+2(n-1)=2n+1$, так как из 3 вычтем $n-1$ раз число $2\cdot(-1)=-2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n+1 \end{vmatrix} = 1^{n-1}\cdot(2n+1) = 2n+1$$

Ответ: $2n+1$.

Задача 18

Доказать, что n-й член ряда Фибоначчи равен определителю n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение:

Ряд Фибоначчи задаётся следующей рекуррентной формулой:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Его первые члены $F_1 = 1,\ F_2 = 2$.

Вычислим первые члены определителя. Т.е. определители порядка 1 и 2:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Найдем рекуррентную формулу определителя. Разложим его по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Обозначим определитель порядка n как Δ_n. Заметим, что первое слагаемое – это такое же как и исходный определитель, но только порядка $n-1$. Обозначим его Δ_{n-1}. Разложим определитель из второго слагаемого по первому столбцу:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$$

Рекуррентная формула определителя такая же, как и ряда Фибоначчи; первые два члена обоих рядов совпадают. Значит, данный определитель задаёт ряд Фибоначчи.

Задача 19

Вычислить определитель методом представления в виде суммы определителей:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

Решение:

Допишем к определителю строчку из единицы и нулей и столбец с единицами.

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

Так можно сделать, ведь раскладывая по строке, получаем исходный определитель.

Вычтем первый столбец из всех отальных:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Воспользуемся линейностью определителя по строкам и разложим его по первой строке следующим образом:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Разложим первое слагаемое по строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = 2 \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Получаем определитель Вандермонда, умноженный на $2 \prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$. Таким образом, этот определитель равен $2 \prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_j)$.

Найдём, чему равен определитель из второго слагаемого. Последовательно вычтем из каждого столбца его предыдущий. Т.е. сначала вычтем из n-го столбца $(n-1)$-й, из $(n-1)$-го столбца вычтем $(n-2)$-й столбец и так далее.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - 1 & x_1^2 - x_1 & \dots & x_1^n - x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - 1 & x_2^2 - x_2 & \dots & x_2^n - x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - 1 & x_n^2 - x_n & \dots & x_n^n - x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Полученный определитель разложим по первой строке и вынесем из каждой строки множитель $x_i - 1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - 1 & x_1^2 - x_1 & \dots & x_1^n - x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - 1 & x_2^2 - x_2 & \dots & x_2^n - x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - 1 & x_n^2 - x_n & \dots & x_n^n - x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - 1 & (x_1-1)x_1 & \dots & (x_1-1)x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - 1 & (x_2-1)x_2 & \dots & (x_2-1)x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - 1 & (x_n-1)x_n & \dots & (x_n-1)x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - 1 & (x_1-1)x_1 & \dots & (x_1-1)x_1^{n-1} \\ x_2 - 1 & (x_2-1)x_2 & \dots & (x_2-1)x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - 1 & (x_n-1)x_n & \dots & (x_n-1)x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - 1) \prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

Таким образом, исходный определитель будет равен:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = 2 \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_j) - \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - 1) \prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_j) =$$

$$= \prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_j) \left(2 \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i - \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - 1) \right)$$

Ответ: $\prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_j) \left(2 \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i - \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - 1) \right)$.

Ранг матрицы

Теория

Определение. Минором k-го порядка матрицы A называют определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечении произвольных k строк и k столбцов из матрицы A.

Обозначение. $M^{j1...jk\text{ – номера столбцов}}_{i1...ik\text{ – номера строк}}$ – минор k-го порядка.

Пример. Для $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ минор второго порядка $M^{12}_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -4$

Определение. Рангом матрицы называют наивысший порядок отличного от 0 минора.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Rg} A = 1$, $M^1_2 = 2 \neq 0$

Свойства ранга:

1) $\operatorname{Rg} A^T = \operatorname{Rg} A$.
2) Элементарные преобразования строк не меняют ранг матрицы.

Методы нахождения ранга:

I. Элементарные преобразования:
   1) методом Гаусса приводим к ступенчатому виду: $A \sim A_{\text{ступ.}}$
   2) $\operatorname{Rg} A_{\text{ступ.}} =$ число ненулевых стррок
   3) $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A_{\text{ступ.}}$

II. Метод окаймляющих миноров

Определение. N (минор) называют окаймляющим для минора M, если N получается добавлением к M одной новой строки и одного нового столбца матрицы A.

Задача 20

Найти ранг матрицы при всевозможных значениях параметра λ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -7 & -8 & 1 & \lambda - 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

Приведём матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -7 & -8 & 1 & \lambda-7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-4\text{II}\to\text{III}]{\substack{\text{I}+3\text{II}\to\text{I} \\ \text{IV}-7\text{II}\to\text{IV}}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 14 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & \lambda+4 & -14 \\ 0 & 6 & 8 & \lambda-28 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}$$

$$\xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & 14 \\ 0 & 3 & \lambda+4 & -14 \\ 0 & 6 & 8 & \lambda-28 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\text{II}\to\text{III}]{\text{IV}+2\text{II}\to\text{IV}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & 14 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Если $\lambda \neq 0$, то в ступенчатом виде матрицы будет 4 ненулевых строки. Значит, $\operatorname{Rg} A = 4$. При $\lambda = 0$ две последние строки будут нулевыми, и тогда $\operatorname{Rg} A = 2$.

Ответ: при $\lambda \neq 0$ ранг равен $\operatorname{Rg} A = 4$; при $\lambda = 0$ ранг равен $\operatorname{Rg} A = 2$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теория

Теорема. Пусть $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ – какие-то числа. Тогда существует единственный многочлен f степени $\leqslant n-1$ такой, что $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$.

Задача 21

Найти многочлен 3-й степени $f(x)$, для которого

$$f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 16$$

Решение:

По теореме при данных четырёх значениях многочлена f существует единственный многочлен степени не большей $4-1=3$.

Тогда пусть $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, где a_0, a_1, a_2, a_3 – искомые коэффициенты.

Подставим в многочлен точки, которые нам даны:

$$\begin{cases} f(-1) = 0 = a_3 \cdot (-1)^3 + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 \\ f(1) = 4 = a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ f(2) = 3 = a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 \\ f(3) = 16 = a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 4 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 2 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 16 \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV}+27\text{I}\to\text{IV}]{\substack{\text{II}+\text{I}\to\text{II} \\ \text{III}+8\text{I}\to\text{III}}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & 36 & -24 & 28 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{III}\to\frac{\text{III}}{3} \\ \text{IV}\to\frac{\text{IV}}{4}}]{\substack{\text{I}\to-\text{I} \\ \text{II}\to\frac{\text{II}}{2}}}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{III}\to\frac{\text{III}}{3} \\ \text{IV}\to\frac{\text{IV}}{4}}]{\substack{\text{I}\to-\text{I} \\ \text{II}\to\frac{\text{II}}{2}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & -6 & 7 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV}-9\text{II}\to\text{IV}]{\substack{\text{I}+\text{II}\to\text{I} \\ \text{III}-4\text{II}\to\text{III}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV}-3\text{III}\to\text{IV}}$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-3\text{III}\to\text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}-\text{IV}\to\text{II}]{\text{III}+\text{IV}\to\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Таким образом, решением системы будет:

$$\begin{cases} a_3 = 2 - a_1 \\ a_2 = -5 \\ -2a_1 = 0 \\ a_0 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = 2 \\ a_2 = -5 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = 7 \end{cases}$$

Получаем многочлен третьей степени $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

Ответ: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

Подстановка матрицы в уравнение

Задача 22

Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$$

Решение:

Подставим матрицу A вместо x.

$$A^2 - (a+d) \cdot A + ad - bc = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \cdot E =$$
$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Равенство доказано.

Разложения матриц

Теория

Определение. LU-разложение матрицы A – это представление матрицы A в виде произведения $A = LU$, где L – нижняя треугольная матрица, U – верхняя треугольная или ступенчатая матрица.

Определение. Скелетное разложение матрицы A порядка $m \times n$ и ранга r – это представление матрицы A в виде произведения двух матриц B и C, где B – $(m \times r)$-матрица, C – $r \times n$-матрица, и $\operatorname{Rg} B = r$, $\operatorname{Rg} C = r$.

Задача 23

Можно ли заданную матрицу A представит в виде $A = LU$, где L – нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали, а U – верхнетреугольная матрица? Если такое разложение возможно, то предъявите его, если нет, то объясните почему.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:

LU-разложение существует только в том случае, когда матрица A обратима, а все ведущие (угловые) главные миноры матрицы A невырождены. Проверим эти условия.

Главные угловые миноры:

$$\det M_1^1 = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\det M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\det M_{132}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

Они невырожденые. Так как $A = M_{123}^{123}$, то $\det A = 11 \neq 0$, и A обратима. Таким образом, для матрицы A существует LU-разложение.

Найдём матрицу U. Для этого приведём A элементарными преобразованиями к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III - I}\to\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III + 2II}\to\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},\ L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём L с помощью матрицы $(L^{-1}|E)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III - 2I}\to\text{III}]{\text{III + I}\to\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Задача 24

Построить скелетное разложение (разложение полного ранга) матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение:

Найдём ранг матрицы A методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II - I}\to\text{II}]{\text{IV + III}\to\text{IV}} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I - 3II}\to\text{III}} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} A = 2$$

Построим матрицу C из л.н.з. строк матрицы A:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычислим псевдообратную C^+ к матрице C:

$$C^T = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \ CC^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 27 \\ 27 & 45 \end{pmatrix}$$

$$(CC^T)^{-1} = \frac{1}{(45^2 - 27^2)} \begin{pmatrix} 45 & -27 \\ -27 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{144} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{48} & \frac{5}{144} \end{pmatrix}$$

$$C^+ = C^T(CC^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{144} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{48} & \frac{5}{144} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} \\ 0 & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

Тогда матрица B будет:

$$B = AC^+ = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} \\ 0 & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} = A$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Удачи!

Это Ларсик – самый крутой пёсик на ФКНе!