

# Алгебра. Задачи 2

Арунова Анастасия

## Содержание

<b>Системы линейных уравнений</b>	<b>3</b>
Теория . . . . .	3
Задача 1 . . . . .	3
Задача 2 . . . . .	5
Задача 3 . . . . .	6
Задача 4 . . . . .	7
<b>Аналитическая геометрия</b>	<b>10</b>
Задача 5 . . . . .	10
Задача 6 . . . . .	11
Задача 7 . . . . .	11
Задача 8 . . . . .	13
Задача 9 . . . . .	14
Задача 10 . . . . .	14
Задача 11 . . . . .	15
Задача 12 . . . . .	17
Задача 13 . . . . .	17
Задача 14 . . . . .	19
Задача 15 . . . . .	19
Задача 16 . . . . .	21
Задача 17 . . . . .	21
<b>Комплексные числа</b>	<b>23</b>
Теория . . . . .	23
Задача 18 . . . . .	23

Задача 19 . . . . .	24
Задача 20 . . . . .	25
Задача 21 . . . . .	26
Задача 22 . . . . .	27
<b>Общая алгебра</b>	<b>29</b>
Теория . . . . .	29
Задача 23 . . . . .	30
Задача 24 . . . . .	30
Задача 25 . . . . .	31
Задача 26 . . . . .	32
Задача 27 . . . . .	32
Задача 28 . . . . .	33
Задача 29 . . . . .	34

## Системы линейных уравнений

### Теория

Рассмотрим СЛАУ  $Ax = 0$ ,  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ .

**Теорема** (Кронекера-Капелли). СЛАУ  $Ax = b$  совместна  $\Leftrightarrow \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} (A \mid b)$

**Определение.** Любые  $n - r$  линейно независимых столбцов, являющиеся решениями однородной СЛАУ  $Ax = 0$ , где  $n$  – число неизвестных,  $r = \operatorname{Rg} A$ , называют фундаментальной системой решений (ФСР).

**Теорема** (о существовании ФСР). Рассмотрим однородную СЛАУ  $Ax = 0$ . У неё существует  $k = n - r$  линейно независимых решений, где  $n$  – число неизвестных, а  $r = \operatorname{Rg} A$ .

**Теорема** (о структуре общего решения однородной СЛАУ). Пусть  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  – ФСР однородной СЛАУ  $Ax = 0$ . Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде:

$$x = c_1 \Phi_1 + \dots + c_k \Phi_k$$

где  $c_1, \dots, c_k$  – некоторые постоянные.

**Теорема** (о структуре общего решения неоднородной СЛАУ). Пусть известно частное решение  $\tilde{x}$  СЛАУ  $Ax = b$ . Тогда любое решение этой СЛАУ может быть представлено в виде:

$$x = \tilde{x} + c_1 \Phi_1 + \dots + c_k \Phi_k$$

где  $c_1, \dots, c_k$  – некоторые постоянные, а  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  – ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

### Задача 1

Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все её решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение), найдите ФСР соответствующей однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

### Решение:

Введём следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведём её элементарными преобразованиями к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III-I} \rightarrow \text{III}]{\text{II}-2\text{I} \rightarrow \text{II}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{I}+4\text{II} \rightarrow \text{I}]{\text{III}-\text{II} \rightarrow \text{III}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

В ступенчатом виде матрицы  $(A | b)$  две ненулевых строки, значит,  $\text{Rg}(A | b) = 2$ .

При приведении матрицы  $A$  к ступенчатому виду элементарные преобразования будут эквивалентны приведению левой части расширенной матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Так как  $\text{Rg}(A | b) = \text{Rg } A$ , по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

Выпишем решение однородной СЛАУ  $Ax = 0$ , соответствующей СЛАУ  $Ax = b$ :

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ x_2 = -x_4 + 6x_5 \\ x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Найдём ФСР, подставляя в зависимые переменные одновременно ненулевые значения:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
-2	0	1	0	0
-4	-1	0	1	0
21	6	0	0	1

Получаем столбцы ФСР:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Выпишем решение системы  $Ax = b$ :

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ x_2 = -1 - x_4 + 6x_5 \\ x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Частное решение СЛАУ  $Ax = b$ , например, будет  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = x_4 = x_5 = 0$ .

По теореме о структуре решения неоднородной СЛАУ любое решение  $Ax = b$  можно представить в виде суммы линейной комбинации ФСР и частного решения СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5, \quad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

Данное общее решение записано в векторном виде.

**Ответ:** 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5, \quad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

## Задача 2

Можно ли заданную матрицу  $A$  представить в виде  $A = LU$ , где  $L$  – нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали, а  $U$  – верхнетреугольная матрица? Если такое разложение возможно, то предъявите его, если нет, то объясните почему.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

$LU$ -разложение существует только в том случае, когда матрица  $A$  обратима, а все ведущие (угловые) главные миноры матрицы  $A$  невырождены. Проверим эти условия.

Главные угловые миноры:

$$\det M_1^1 = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\det M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Они невырождены. Так как  $A = M_{12}^{12}$ , то  $\det A = -2 \neq 0$ , и  $A$  обратима. Таким образом, для матрицы  $A$  существует  $LU$ -разложение.

Найдём матрицу  $U$ . Для этого приведём  $A$  элементарными преобразованиями к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi - 2I \rightarrow \Pi} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = U$$

Так как  $A = LU$ ,  $L = AU^{-1}$ . Найдём  $U^{-1}$ :

$$U^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = AU^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ответ:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

### Задача 3

Пользуясь методом исключения неизвестных, исследовать совместность и найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25 \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40 \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65 \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95 \end{cases}$$

**Решение:** Введём следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 23 & 17 & 44 \\ 15 & 35 & 26 & 69 \\ 25 & 57 & 42 & 108 \\ 30 & 69 & 51 & 133 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 65 \\ 95 \end{pmatrix}$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведём её элементарными преобразованиями к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{ccc}
 \left( \begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 15 & 35 & 26 & 69 & 40 \\ 25 & 57 & 42 & 108 & 65 \\ 30 & 69 & 51 & 133 & 95 \end{array} \right) & \xrightarrow[\text{IV}-3\text{I}\rightarrow\text{IV}]{\text{III}-\text{II}\rightarrow\text{III}} & \left( \begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 15 & 35 & 26 & 69 & 40 \\ 10 & 22 & 16 & 39 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right) \\
 & & \xrightarrow[\text{II}-\frac{3}{2}\text{I}\rightarrow\text{II}]{\text{III}-\text{I}\rightarrow\text{III}} & & \\
 \xrightarrow[\text{II}-\frac{3}{2}\text{I}\rightarrow\text{II}]{\text{III}-\text{I}\rightarrow\text{III}} & \left( \begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right) & \xrightarrow{\text{II}+\frac{1}{2}\text{III}\rightarrow\text{II}} & \left( \begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right) & \xrightarrow{\text{IV}-2\text{II}\rightarrow\text{IV}} \\
 \xrightarrow{\text{IV}-2\text{II}\rightarrow\text{IV}} & \left( \begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{array} \right) & \xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} & \left( \begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Количество ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы  $A$  равно 3, значит,  $\text{Rg } A = 3$ . Но количество ненулевых строк в матрице  $(A | b)$  – 4, поэтому  $\text{Rg } (A | b) = 4 \neq \text{Rg } A$ . По теореме Кронекера-Капелли система уравнений несовместная, у неё нет решений.

**Ответ:** несовместная.

## Задача 4

Определить, какие из строк матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

**Решение:**

Составим матрицу системы  $A$  и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-4\text{III}\rightarrow\text{IV}]{\begin{matrix} \text{II}-5\text{III}\rightarrow\text{II} \\ \text{I}-2\text{III}\rightarrow\text{I} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 27 & -15 & -6 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 27 & -15 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-3\text{I}\rightarrow\text{IV}]{\text{II}-3\text{I}\rightarrow\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-3\text{I}\rightarrow\text{IV}]{\text{II}-3\text{I}\rightarrow\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом,  $\text{Rg } A = 2$ . Значит, по определению у системы будет  $5 - 2 = 3$  столбцов ФСР.

Так как каждый столбец ФСР должен быть решением системы, будем рассматривать только те строки из матрицы  $B$ , которые удовлетворяют системе  $Ax = 0$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -5 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Все четыре строки матрицы  $B$  – решения уравнения  $Ax = 0$ , поэтому они все могут быть столбцами ФСР.

Найдём среди строк матрицы  $B$  линейно зависимые. Для этого применим элементарные преобразования к матрице  $B$ .

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\frac{2}{3}\text{I}\rightarrow\text{IV}]{\begin{matrix} \text{I}-\frac{5}{6}\text{I}\rightarrow\text{II} \\ \text{III}-\frac{4}{3}\text{I}\rightarrow\text{III} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{9}{2} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & -\frac{8}{3} & -9 & \frac{26}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & -9 & \frac{19}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+\frac{5}{2}\text{II}\rightarrow\text{IV}]{\text{III}+2\text{II}\rightarrow\text{III}} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{9}{2} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & -\frac{9}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Получаем, что третья строка – линейная комбинация первой и второй строки. Значит, система из первой, второй и третьей строки – линейна зависима, а, значит, не может быть ФСР.

Остаётся всего три варианта систем строк:



- *Первая, вторая и четвёртая.* Все строки л.н.з. (ни одна строка не является линейной комбинацией двух других), поэтому этот случай образует ФСР.
- *Первая, третья и четвёртая.* Аналогично они образуют ФСР.
- *Вторая, третья и четвёртая* – тоже ФСР.

**Ответ:** четвёртая строка вместе с любыми двумя из первых трёх.

## Аналитическая геометрия

### Задача 5

В ортонормированном базисе даны векторы  $a = (1, 4, 1)$ ,  $b = (2, 1, 3)$ ,  $c = (-2, 0, 3)$ . Найти вектор  $y$  такой, что  $y \perp a$ ,  $(y, c) = 2$ ,  $(y, b) = 9$ .

#### Решение:

Пусть вектор  $y$  имеет следующие координаты  $y = (y_1, y_2, y_3)$ .

Так как  $y \perp a$ ,  $(y, a) = 0$ . Запишем систему:

$$\begin{cases} (y, a) = 0 \\ (y, b) = 9 \\ (y, c) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + 4y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 9 \\ -2y_1 + 3y_3 = 2 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II} \rightarrow \text{III}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I} \rightarrow \text{II}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}+7\text{III} \rightarrow \text{II}} \\ & \xrightarrow{\text{II}+7\text{III} \rightarrow \text{II}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 86 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 43 & 86 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} \rightarrow \frac{1}{43}\text{III}]{\text{I}-4\text{II} \rightarrow \text{I}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -23 & -44 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II}-6\text{III} \leftrightarrow \text{II}]{\text{I}+23\text{III} \rightarrow \text{I}} \\ & \xrightarrow[\text{II}-6\text{III} \leftrightarrow \text{II}]{\text{I}+23\text{III} \rightarrow \text{I}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

Таким образом, полученный вектор  $y = (2, -1, 2)$ .

**Ответ:**  $y = (2, -1, 2)$ .

## Задача 6

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $a = p + 3q$ ,  $b = p - 2q$ , если  $|p| = 2$ ,  $|q| = 3$ ,  $\angle(p, q) = \frac{\pi}{3}$ .

### Решение:

Площадь параллелограмма построенного на векторах  $a$ ,  $b$  равна модулю их векторного произведения. Найдём его.

$$\begin{aligned}[a, b] &= [p + 3q, p - 2q] = [p, p - 2q] + [3q, p - 2q] = [p, p] + [p, -2q] + [3q, p] + [3q, -2q] = \\ &= [p, p] - 2[p, q] + 3[q, p] - 6[q, q] = [p, p] - 2[p, q] - 3[p, q] - 6[q, q] = -5[p, q]\end{aligned}$$

Тогда

$$S = |a \times b| = |-5[p, q]| = |-5|p||q|\sin \angle(p, q)| = |-5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3}| = 15\sqrt{3}$$

**Ответ:**  $15\sqrt{3}$ .

## Задача 7

Даны вершины треугольника  $A(-5, 3)$ ,  $B(7, 8)$ ,  $C(-2, -1)$ . Составить уравнения следующих прямых: медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины  $A$ . Система координат прямоугольная декартова.

### Решение:

- 1) Найдём уравнения прямых при пересечении которых получается  $\angle A$ . Это прямые, содержащие стороны треугольника  $AC$  и  $AB$ .

Направляющие векторы:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (7 - (-5), 8 - 3) = (12, 5) \\ \overrightarrow{AC} &= (-2 - (-5), -1 - 3) = (3, -4)\end{aligned}$$

Тогда уравнения прямых будут:

$$\begin{aligned}AB : \frac{x - (-5)}{12} &= \frac{y - 3}{5} \Leftrightarrow 5x - 12y + 61 = 0 \\ AC : \frac{x - (-5)}{3} &= \frac{y - 3}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y + 11 = 0\end{aligned}$$

Так как каждая точка биссектрисы равноудалена от  $AB$  и  $AC$ , уравнение биссектрисы можно найти из равенства расстояний от точки  $M(x_0, y_0)$ , лежащей на биссектрисе, до прямых  $AB$  и  $AC$ .

$$\rho(M; AB) = \rho(M; AC) \Leftrightarrow \frac{5x_0 - 12y_0 + 61}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{4x_0 + 3y_0 + 11}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Leftrightarrow 3x_0 + 11y_0 - 18 = 0$$

Беря точку  $M$  как произвольную, принадлежащую биссектрисе, получаем уравнение:

$$3x + 11y - 18 = 0$$

- 2) Теперь найдём высоту. Пусть высота, проведённая из  $\angle A$ , задаётся прямой с направляющим вектором  $\overrightarrow{AH}$ , где  $H(x_H, y_H)$ . Найдём векторы  $\overrightarrow{AH}$  и  $\overrightarrow{BC}$ .

$$\overrightarrow{AH} = (x_H - (-5), y_H - 3) = (x_H + 5, y_H - 3)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-2 - 7, -1 - 8) = (-9, -9)$$

Так как  $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ ,  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 0$ .

$$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 0 \Leftrightarrow -9(x_H + 5) - 9(y_H - 3) = 0 \Leftrightarrow x_H + y_H + 2 = 0$$

Получаем уравнение высоты:

$$x + y + 2 = 0$$

- 3) Пусть  $M$  – середина стороны  $BC$ . Тогда  $AM$  – медиана, а, значит,  $\overrightarrow{AM}$  – направляющий вектор прямой, содержащей медиану. Координаты точки  $M(x_M, y_M)$ :

$$x_M = \frac{7 + (-2)}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y_M = \frac{8 + (-1)}{2} = \frac{7}{2}$$

Тогда

$$\overrightarrow{AM} = \left( \frac{5}{2} - (-5), \frac{7}{2} - 3 \right) = \left( \frac{15}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

И уравнение медианы:

$$\frac{x - (-5)}{\frac{15}{2}} = \frac{y - 3}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x - 15y + 50 = 0$$

**Ответ:** биссектриса:  $3x + 11y - 18 = 0$ ; высота:  $x + y + 2 = 0$ ; медиана:  $x - 15y + 50 = 0$ .

## Задача 8

Даны точки  $E(2, 1, 0)$ ,  $F(0, 2, 1)$ ,  $G(1, 2, 0)$ ,  $H(1, 0, -2)$ . Найти:

- 1) объем пирамиды  $EFGH$
- 2) длину высоты, проведенной из вершины  $H$

## Решение:

- 1) Объём пирамиды, построенной на трёх векторах, равен  $\frac{1}{6}$  их смешанного произведения. Сначала найдём векторы:

$$\overrightarrow{EF} = (0 - 2, 2 - 1, 1 - 0) = (-2, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{EG} = (1 - 2, 2 - 1, 0 - 0) = (-1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{EH} = (1 - 2, 0 - 1, -2 - 0) = (-1, -1, -2)$$

Найдём объём пирамиды  $EFGH$  по формуле:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EH} \rangle| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \right| \stackrel{\text{III} + 2\text{I} \rightarrow \text{III}}{=} \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{2}{3}$$

- 2) Объём пирамиды можно выразить как  $V = \frac{1}{3}Sh$ , где  $S$  – площадь основания,  $h$  – высота, проведённая к основанию. Тогда, чтобы найти длину высоты, проведённой из  $H$ , нужно сначала найти площадь основания  $EFG$ .

Площадь треугольника, построенного на двух векторах, равна половине длины их векторного произведения.

$$[\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i - j - k$$

$$S = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}]| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Тогда

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

**Ответ:**  $V = \frac{2}{3}$ ;  $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

## Задача 9

Проверить, что прямые  $a : 2x = y + 1 = z + 2$ ,  $b : x - 1 = -1 - y = z$  лежат в одной плоскости.

## Решение:

Перепишем уравнения прямых в каноническом виде:

$$a : 2x = y + 1 = z + 2 \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z + 2}{2}$$

$$b : x - 1 = -1 - y = z \Leftrightarrow \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z}{1}$$

Таким образом,  $s_1 = (1, 2, 2)$  – направляющий вектор прямой  $a$ ,  $s_2 = (1, -1, 1)$  – направляющий вектор прямой  $b$ . Точка  $M_1(0, -1, -2) \in a$ ,  $M_2(1, -1, 0) \in b$ . Три вектора  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}$  лежат в одной плоскости, если их смешанное произведение равно 0. Проверим это условие.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1 - 0, -1 - (-1), 0 - (-2)) = (1, 0, 2)$$

$$\langle \overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2 \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Значит,  $a$  и  $b$  не лежат в одной плоскости.

**Ответ:** не лежат.

## Задача 10

Найти угол между прямой

$$l : \begin{cases} 2x + 2y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + z + 7 = 0 \end{cases}$$

и плоскостью  $3x + y - 4z - 15 = 0$ , а также координаты точки их пересечения.

## Решение:

Обозначим  $n_1 = (2, 2, 3)$  – нормаль к плоскости  $2x + 2y + 3z + 5 = 0$ ,  $n_2 = (1, -2, 1)$  – нормаль к плоскости  $x - 2y + z + 7 = 0$ .

Прямая  $l$ , которая задаётся пересечением этих плоскостей, принадлежит как первой плоскости, так и второй, а, значит, перпендикулярна их нормальям. Так как  $l \perp n_1$  и  $l \perp n_2$ , прямая  $l$  будет перпендикулярна и плоскости, образованной  $n_1$  и  $n_2$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Значит, направляющий вектор прямой  $l$  можно найти через векторное произведение  $n_1$  и  $n_2$ .

$$[n_1, n_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8i + j - 6k \Rightarrow s = (8, 1, -6)$$

Теперь найдём синус угла между плоскостью  $3x + y - 4z - 15 = 0$  и прямой  $l$  по формуле:

$$\sin \varphi = \frac{3 \cdot 8 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot (-6)}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} \sqrt{8^2 + 1^2 + (-6)^2}} = \frac{49}{\sqrt{26} \sqrt{101}} = \frac{49}{\sqrt{2626}}$$

Тогда

$$\varphi = \arcsin \frac{49}{\sqrt{2626}}$$

Точка пересечения прямой с плоскостью удовлетворяет и уравнениям, которые задают прямую, и плоскости, с которой она пересекается. Поэтому, чтобы найти эту точку, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + z + 7 = 0 \\ 3x + y - 4z - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3z = -5 \\ x - 2y + z = -7 \\ 3x + y - 4z = 15 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -4 & 15 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} - 3\text{II} \rightarrow \text{III}]{\text{I} - 2\text{II} \rightarrow \text{I}} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 7 & -7 & 36 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II} + \frac{1}{3}\text{I} \rightarrow \text{II}]{\text{III} - \frac{7}{6}\text{I} \rightarrow \text{III}} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{49}{6} & \frac{51}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \\ & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -4 \\ 0 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{49}{6} & \frac{51}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} \rightarrow -\frac{6}{49}\text{III}]{\text{II} \rightarrow \frac{1}{6}\text{II}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{153}{49} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{I} - \frac{4}{3}\text{III} \rightarrow \text{I}]{\text{II} - \frac{1}{6}\text{III} \rightarrow \text{II}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{49} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{99}{49} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{153}{49} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Искомая точка —  $\left( \frac{8}{49}, \frac{99}{49}, -\frac{153}{49} \right)$ .

**Ответ:**  $\frac{49}{\sqrt{2626}}; \left( \frac{8}{49}, \frac{99}{49}, -\frac{153}{49} \right)$ .

## Задача 11

Найти точку  $M'$ , симметричную точке  $M(-1, 2, 0)$  относительно прямой

$$l: \frac{x + \frac{1}{2}}{1} = \frac{y + \frac{7}{2}}{-\frac{1}{3}} = \frac{z - 2}{2}$$

**Решение:**

Найдём уравнение плоскости  $(\alpha)$ , которая перпендикулярна прямой и проходит через  $M$ . Так как  $l \perp (\alpha)$ , нормаль к  $(\alpha)$  равна  $n = (1, -\frac{1}{3}, 2)$ . Тогда, подставляя коэффициенты нормали и точку  $M$  в формулу, получим уравнение плоскости:

$$\begin{aligned} A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M) &= 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (x - (-1)) - \frac{1}{3} \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z - 0) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \frac{1}{3}y + 2z + \frac{5}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - y + 6z + 5 = 0 \end{aligned}$$

Теперь найдём точку пресечения прямой  $l$  и плоскости  $(\alpha)$ . Для этого сначала составим параметрическое уравнение прямой:

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{1} = \frac{y + \frac{7}{2}}{-\frac{1}{3}} = \frac{z - 2}{2} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3}t - \frac{7}{2} \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$

Тогда, подставив, данные  $x, y, z$  в уравнение  $(\alpha)$  найдём  $t$  при котором точка данной прямой принадлежит и плоскости:

$$\begin{aligned} 3 \left( t - \frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{1}{3}t - \frac{7}{2} \right) + 6(2t + 2) + 5 &= 0 \\ \frac{46}{3}t &= -19 \Leftrightarrow t = -\frac{57}{46} \end{aligned}$$

Обозначим точку  $A = (\alpha) \cap l$ . Её координаты равны:

$$\begin{cases} x = -\frac{57}{46} - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{57}{46} \right) - \frac{7}{2} \\ z = 2 \cdot \left( -\frac{57}{46} \right) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{40}{23} \\ y = -\frac{71}{23} \\ z = -\frac{11}{23} \end{cases} \Rightarrow A \left( -\frac{40}{23}, -\frac{71}{23}, -\frac{11}{23} \right)$$

Так как  $M'$  и  $M$  симметричны относительно прямой, то  $M' \in (\alpha)$  и точка  $A$  будет серединой отрезка  $MM'$ . Тогда составим уравнение:

$$\begin{cases} x_A = \frac{x_{M'} + x_M}{2} \\ y_A = \frac{y_{M'} + y_M}{2} \\ z_A = \frac{z_{M'} + z_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_A - x_M = 2 \cdot \left( -\frac{40}{23} \right) - (-1) = -\frac{57}{23} \\ y_{M'} = 2y_A - y_M = 2 \cdot \left( -\frac{71}{23} \right) - 2 = -\frac{188}{23} \\ z_{M'} = 2z_A - z_M = 2 \cdot \left( -\frac{11}{23} \right) - 0 = -\frac{22}{23} \end{cases} \Rightarrow M' \left( -\frac{57}{23}, -\frac{188}{23}, -\frac{22}{23} \right)$$

**Ответ:**  $M' \left( -\frac{57}{23}, -\frac{188}{23}, -\frac{22}{23} \right)$ .



## Задача 12

Найти точку  $M'$ , симметричную точке  $M(3, 3, 3)$  относительно плоскости  $8x + 6y + 8z - 25 = 0$ .

## Решение:

Найдём уравнение прямой  $l$ , которая перпендикулярна этой плоскости и проходит через точку  $M$ . Так как  $l$  перпендикулярна плоскости, в качестве её направляющего вектора можно взять нормаль к плоскости  $s = (8, 6, 8)$ .

Тогда уравнение прямой в параметрическом виде будет

$$l : \begin{cases} x = 8t + 3 \\ y = 6t + 3 \\ z = 8t + 3 \end{cases}$$

Найдём координаты точки  $A$  – пересечения плоскости и прямой  $l$ :

$$8(8t + 3) + 6(6t + 3) + 8(8t + 3) - 25 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$$

Тогда

$$\begin{cases} x = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 \\ y = 6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 \\ z = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A\left(1, \frac{3}{2}, 1\right)$$

Так как  $M'$  и  $M$  симметричны относительно плоскости, то  $M' \in l$  и точка  $A$  будет серединой отрезка  $MM'$ . Тогда составим уравнение:

$$\begin{cases} x_A = \frac{x_{M'} + x_M}{2} \\ y_A = \frac{y_{M'} + y_M}{2} \\ z_A = \frac{z_{M'} + z_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_A - x_M = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \\ y_{M'} = 2y_A - y_M = 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 0 \\ z_{M'} = 2z_A - z_M = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow M'(-1, 0, -1)$$

**Ответ:**  $M'(-1, 0, -1)$ .

## Задача 13

Даны точки  $P(1, 2, 0)$ ,  $Q(1, 0, 2)$ ,  $R(2, 1, 0)$ ,  $S(0, -2, 1)$ . Найти:

- 1) объем пирамиды  $PQRS$
- 2) угол между плоскостями  $(PQS)$  и  $(QRS)$

## Решение:

- 1) Объём пирамиды, построенной на трёх векторах, равен  $\frac{1}{6}$  их смешанного произведения. Сначала найдём векторы:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (0 - 1, 0 - 2, 2 - 0) = (-1, -2, 2) \\ \overrightarrow{PR} &= (2 - 1, 1 - 2, 0 - 0) = (1, -1, 0) \\ \overrightarrow{PS} &= (0 - 1, -2 - 2, 1 - 0) = (-1, -4, 1)\end{aligned}$$

Найдём объём пирамиды  $PQRS$  по формуле:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS} \rangle| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \right| \stackrel{\text{I} - 2\text{III} \rightarrow \text{I}}{=} \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{7}{6}$$

- 2) Угол между плоскостями ищется как угол между их нормальными. Нормаль к каждой из плоскостей можно найти с помощью векторного произведения двух векторов, лежащих в плоскости. Пусть  $n_1$  – нормаль к  $(PQS)$ ,  $n_2$  – к  $(QRS)$ .

$$[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 6i - j + 2k \Rightarrow n_1 = (6, -1, 2)$$

Для нахождения  $n_2$  нужно найти  $\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QS}$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QR} &= (2 - 1, 1 - 0, 0 - 2) = (1, 1, -2) \\ \overrightarrow{QS} &= (0 - 1, -2 - 0, 1 - 2) = (-1, -2, -1)\end{aligned}$$

$$[\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QS}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6i + 3j \Rightarrow n_2 = (-6, 3, 0)$$

Тогда косинус угла  $\varphi$  между плоскостями равен:

$$\cos \varphi = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1||n_2|} = \frac{|6 \cdot (-6) - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{39}{\sqrt{41}\sqrt{45}} = \frac{13}{\sqrt{205}}$$

Значит, угол равен:

$$\varphi = \arccos \frac{13}{\sqrt{205}}$$

**Ответ:**  $V = \frac{7}{6}; \varphi = \arccos \frac{13}{\sqrt{205}}.$

## Задача 14

Исследовать взаимное расположение прямых

$$l_1 : \frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$$

$$l_2 : \begin{cases} x = 6t + 9 \\ y = -2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

Вычислить расстояние между ними.

## Решение:

Направляющий вектор прямой  $l_1$  будет  $s_1 = (3, 2, -2)$ , и точка  $M_1(-5, -5, 1) \in l_1$ . Направляющий вектор прямой  $l_2$  будет  $s_2 = (6, -2, -1)$ , и точка  $M_2(9, 0, 2) \in l_2$ . Проверим, лежат ли прямые в одной плоскости.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (9 - (-5), 0 - (-5), 2 - 1) = (14, 5, 1)$$

$$\langle \overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2 \rangle = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{III} \rightarrow \text{III}]{\text{II} + 2\text{I} \rightarrow \text{II}} \begin{vmatrix} 14 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Значит, прямые скрещиваются и расстояние между ними будет равно:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2 \rangle|}{|[s_1, s_2]|} = \frac{18}{|[s_1, s_2]|} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

$$[s_1, s_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6i - 9j - 18k$$

$$|[s_1, s_2]| = \sqrt{(-6)^2 + (-9)^2 + (-18)^2} = 21$$

Ответ:  $\frac{6}{7}$ .

## Задача 15

Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей, заданных уравнениями  $x + 2y + 3z - 4 = 0$ ,  $3x + z - 5 = 0$ , и отсекающей на осях  $Oy$  и  $Oz$  ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.

**Решение:**

Найдём две точки, лежащие на линии пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Для точки  $A$  возьмём  $x = 0$ . Тогда

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{11}{2} \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow A\left(0, -\frac{11}{2}, 5\right)$$

Для точки  $B$  возьмём  $z = 0$ . Тогда

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{7}{6} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, 0\right)$$

Пусть искомая плоскость пересекает оси  $Oy$  и  $Oz$  в точках  $P(0, k, 0)$  и  $Q(0, 0, k)$  соответственно.

Точки  $A, B, P, Q$  по условию должны лежать в плоскости. Выпишем вектор  $\overrightarrow{PQ}$ , так как он содержит условие и о том, что плоскость отсекает на осях  $Oy$  и  $Oz$  ненулевые отрезки равной длины.

$$\overrightarrow{PQ} = (0 - 0, 0 - k, k - 0) = (0, -k, k)$$

Пусть точка  $M(x, y, z)$  – произвольная точка, принадлежащая искомой плоскости. Найдём вектор с точкой  $M$ :

$$\overrightarrow{AM} = \left(x - 0, y - \left(-\frac{11}{2}\right), z - 5\right) = \left(x, y + \frac{11}{2}, z - 5\right)$$

И найдём ещё любой третий вектор, лежащий в плоскости:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{3} - 0, \frac{7}{6} - \left(-\frac{11}{2}\right), 0 - 5\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{20}{3}, -5\right)$$

Так как эти векторы лежат в искомой плоскости, они компланарны. Условие компланарности:

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB} \rangle &= \begin{vmatrix} x & y + \frac{11}{2} & z - 5 \\ 0 & -k & k \\ \frac{5}{3} & \frac{20}{3} & -5 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -k & k \\ \frac{20}{3} & -5 \end{vmatrix} - \left(y + \frac{11}{2}\right) \begin{vmatrix} 0 & k \\ \frac{5}{3} & -5 \end{vmatrix} + (z - 5) \begin{vmatrix} 0 & -k \\ \frac{5}{3} & \frac{20}{3} \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{5}{3}kx + \frac{5}{3}k\left(y + \frac{11}{2}\right) + \frac{5}{3}k(z - 5) = 0 \end{aligned}$$

По условию  $k \neq 0$ , следовательно, можем сократить уравнение на  $\frac{5}{3}k$ :

$$-\frac{5}{3}kx + \frac{5}{3}k\left(y + \frac{11}{2}\right) + \frac{5}{3}k(z - 5) = 0 \Leftrightarrow -x + \left(y + \frac{11}{2}\right) + (z - 5) = 0 \Leftrightarrow -x + y + z + \frac{1}{2} = 0$$

Получили уравнение на координаты точки, принадлежащей плоскости, т.е. уравнение самой плоскости.

**Ответ:**  $-x + y + z + \frac{1}{2} = 0$ .

## Задача 16

Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости  $2x + y - 4z + 5 = 0$  и отстоящей от точки  $M(1, 2, 0)$  на расстоянии, равном  $\sqrt{21}$ .

**Решение:**

Так как искомая (обозначим её  $(\alpha)$ ) и исходная плоскость параллельны, их нормали так же параллельны. Значит, нормаль к искомой плоскости  $n = (2, 1, -4)$ . И тогда плоскость задаётся уравнением:

$$(\alpha) : 2x + y - 4z + k = 0$$

Причём  $k \neq 5$ , иначе плоскости совпадут.

Расстояние от точки до плоскости  $\rho(M, (\alpha)) = \sqrt{21}$ . Тогда, переписывая в виде формулы, получаем уравнение:

$$\frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \sqrt{21} \Leftrightarrow |4 + k| = 21 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 17 \\ k = -25 \end{cases}$$

Получаем две плоскости, удовлетворяющие условию задачи.

**Ответ:**  $2x + y - 4z + 17 = 0$ ,  $2x + y - 4z - 25 = 0$ .

## Задача 17

Написать уравнение прямой, лежащей в плоскости  $Oyz$ , параллельной оси  $Oy$  и отсекающей на оси  $Oz$  отрезок, равный 3.

**Решение:**

Прямая отсекает на оси  $Oz$  отрезок, равный 3, поэтому точка  $M(0, 0, 3)$  принадлежит этой прямой.

В качестве направляющего вектора искомой прямой (обозначим его  $n$ ) можно взять направляющий вектор оси  $Oy$ , потому что искомая прямая параллельна  $Oy$ . Найдём его с помощью двух точек, лежащих на  $Oy$ :  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ . Тогда

$$n = \overrightarrow{AB} = (0 - 0, 1 - 0, 0 - 0) = (0, 1, 0)$$

Зная точку на прямой и её направляющий вектор, можно записать уравнение прямой:

$$\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 3}{0}$$

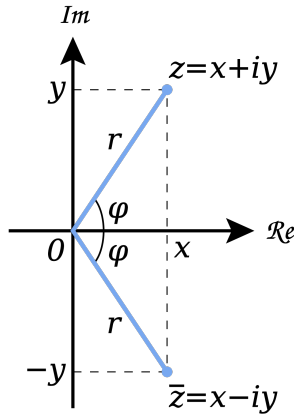
Или в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$$

**Ответ:**  $\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 3}{0}$ .

## Комплексные числа

### Теория



Re – вещественная ось, Im – мнимая ось

Перейдём к полярным координатам  $(r, \varphi)$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \text{ – модуль комплексного числа}$$

$\varphi = \operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  – аргумент комплексного числа  
(угол между  $r$  и положительным направлением Re)

$\arg z$  – главное значение аргумента,  $\arg z \in [0, 2\pi]$  или  $\arg z \in (-\pi, \pi]$

$$z = \underbrace{x + iy}_{\text{алгебраическая форма записи}} = r \cos \varphi + r \sin \varphi = \underbrace{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{\text{тригонометрическая форма записи}}$$

**Утверждение.**  $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

**Определение.** Комплексно сопряжённым к числу  $z$  называется  $\bar{z}$ :  $z = a + bi$ ,  $\bar{z} = a - bi$ . Сопряжённое – отражение относительно вещественной оси.

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

**Деление комплексных чисел:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}, z_2 \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

**Утверждение.** Формула Муавра:  $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**Извлечение комплексных корней**

$$\sqrt[n]{w} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \cdot \left( \cos \left( \frac{\psi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\psi + 2\pi k}{n} \right) \right) \mid k = \overline{0, n-1} \right\}$$

### Задача 18

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (-2 + 4i)x + 3yi = -10 + 21i \\ (1 + 5i)x + (1 - 2i)y = 14 + 19i \end{cases}$$

**Решение:**

Решим систему методом Крамера. Главный определитель будет равен

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} -2+4i & 3i \\ 1+5i & 1-2i \end{vmatrix} = (-2+4i)(1-2i) - 3i(1+5i) = -2+4i+4i-8i^2-3i-15i^2 = \\ &= -2+5i+8+15 = 21+5i\end{aligned}$$

Вычислим остальные определители:

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \begin{vmatrix} -10+21i & 3i \\ 14+19i & 1-2i \end{vmatrix} = (-10+21i)(1-2i) - 3i(14+19i) = \\ &= -10+20i+21i-42i^2-42i-57i^2 = \\ &= -10-i+42+57 = 89-i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_y &= \begin{vmatrix} -2+4i & -10+21i \\ 1+5i & 14+19i \end{vmatrix} = (-2+4i)(14+19i) - (1+5i)(-10+21i) = \\ &= -28-38i+56i+76i^2+10-21i+50i-105i^2 = \\ &= -28+47i-76+10+105 = 11+47i\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{89-i}{21+5i} = \frac{(89-i)(21-5i)}{(21+5i)(21-5i)} = \frac{1869-445i-21i+5i^2}{21^2+5^2} = \frac{1864-466i}{466} = 4-i \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{11+47i}{21+5i} = \frac{(11+47i)(21-5i)}{(21+5i)(21-5i)} = \frac{231-55i+987i-235i^2}{466} = \frac{466+932i}{466} = 1+2i\end{aligned}$$

**Ответ:**  $\begin{cases} x = 4-i \\ y = 1+2i \end{cases}$

**Задача 19**

Решить уравнение

$$z^2 - (7+i)z + (18+i) = 0$$

**Решение:**

Данное уравнение квадратное, поэтому его можно решить через дискриминант.

$$D = (-(7+i))^2 - 4(18+i) = 49+14i+i^2-72-4i = -24+10i$$



Найдём корень из дискриминанта. Пусть  $\sqrt{D} = a + ib$ . Тогда

$$\sqrt{D} = a + ib \Leftrightarrow \sqrt{-24 + 10i} = a + ib \Leftrightarrow -24 + 10i = a^2 + 2abi - b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ 2ab = 10 \end{cases}$$

Ни  $a$ , ни  $b$  не равны нулю, иначе бы  $2ab = 0$ . Значит, можно выразить  $a$  через  $b$  из второго уравнения и подставить его в первое:

$$2ab = 10 \Leftrightarrow a = \frac{5}{b}$$

$$\left(\frac{5}{b}\right)^2 - b^2 = -24, b \neq 0 \Leftrightarrow b^4 - 24b^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (b^2 + 1)(b^2 - 25) = 0 \Leftrightarrow b = \pm 5$$

Получаем два решения системы:

$$\begin{cases} a = 1, b = 5 \\ a = -1, b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{D} = 1 + 5i \\ \sqrt{D} = -1 - 5i \end{cases}$$

Для нахождения корней можно взять любой из полученных  $\sqrt{D}$ , так как они отличаются только знаком.

$$z_1 = \frac{7 + i - \sqrt{D}}{2} = \frac{7 + i - (1 + 5i)}{2} = 3 - 2i$$

$$z_2 = \frac{7 + i - \sqrt{D}}{2} = \frac{7 + i + (1 + 5i)}{2} = 4 + 3i$$

**Ответ:**  $3 - 2i, 4 + 3i$ .

## Задача 20

Пусть  $z = -\sqrt{3} - i$ . Вычислить значение  $\sqrt[7]{z^3}$ , для которого число  $\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i}$  имеет аргумент  $\frac{9\pi}{28}$ .  
Найди модуль этого числа.

**Решение:**

Перепишем комплексное число в тригонометрическом виде:

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\arg z = -\pi + \arctan \frac{-1}{-\sqrt{3}} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$z = 2 \left( \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{6} \right) \right)$$

Теперь возведём  $z$  в третью степень:

$$z^3 = 2^3 \left( \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \cdot 3 \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{6} \cdot 3 \right) \right) = 8 \left( \cos \left( -\frac{5\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{2} \right) \right)$$

Возьмём из  $z^3$  корень седьмой степени:

$$\sqrt[7]{z^3} = \sqrt[7]{8} \left( \cos \frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi k}{7} + i \sin \frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi k}{7} \right), \quad k = \overline{0, 6}$$

Зная  $\arg \frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i}$ , можно найти  $k$ . Сначала запишем  $-1 + i$  в тригонометрической форме:

$$-1 + i = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \left( \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} + \frac{i}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

Тогда

$$\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i} = \frac{\sqrt[7]{8}}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi k}{7} - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi k}{7} - \frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

По условию

$$\arg \frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i} = \frac{9\pi}{28} \Rightarrow \frac{9\pi}{28} = \frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi k}{7} - \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{9\pi}{28} = \frac{-10\pi + 8\pi k - 21\pi}{28}$$

$$k = \frac{40\pi}{8\pi} = 5$$

Таким образом, значение  $\sqrt[7]{z^3}$  будет:

$$\sqrt[7]{z^3} = \sqrt[7]{8} \left( \cos \frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi \cdot 5}{7} + i \sin \frac{-\frac{5\pi}{2} + 2\pi \cdot 5}{7} \right) = \sqrt[7]{8} \left( \cos \frac{15\pi}{14} + i \sin \frac{15\pi}{14} \right)$$

**Ответ:**  $\sqrt[7]{8} \left( \cos \frac{15\pi}{14} + i \sin \frac{15\pi}{14} \right)$ .

## Задача 21

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i \end{cases}$$

**Решение:**

Решим систему методом Гаусса:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -2-i & -i \\ 4-2i & -5 & -1-2i \end{array} \right) \xrightarrow{\Pi-(2-i)\text{I} \rightarrow \Pi} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -2-i & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Получаем одну главную и одну зависимую переменную:

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{i}{2} + (2+i)z_2 \\ z_2 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Ответ:  $\begin{cases} z_1 = -\frac{i}{2} + (2+i)z_2 \\ z_2 \in \mathbb{C} \end{cases}$

## Задача 22

Вычислить:

$$\sqrt[8]{16}, \sqrt[6]{-27}, \sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$$

**Решение:**

Запишем каждое из чисел в тригонометрической форме:

$$16 = 16 + 0i = \sqrt{16^2 + 0^2} \left( \frac{16}{\sqrt{16^2 + 0^2}} + \frac{0i}{\sqrt{16^2 + 0^2}} \right) = 16(1 + 0i) = 16(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$-27 = -27 + 0i = \sqrt{(-27)^2 + 0^2} \left( \frac{-27}{\sqrt{(-27)^2 + 0^2}} + \frac{0i}{\sqrt{(-27)^2 + 0^2}} \right) = 27(-1 + 0i) = 27(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\begin{aligned} 8\sqrt{3}i - 8 &= 8(\sqrt{3}i - 1) = 8\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} \left( \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2}} + \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2}} \right) = 16 \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) = \\ &= 16 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

Найдём корни из каждого числа:

$$\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{16} \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{8} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{8} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi k}{4} \right), \quad k = \overline{0, 7}$$

$$\sqrt[6]{-27} = \sqrt[6]{27} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi m}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi m}{6} \right) = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi(1 + 2m)}{6} + i \sin \frac{\pi(1 + 2m)}{6} \right), \quad m = \overline{0, 5}$$

$$\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8} = \sqrt[4]{16} \left( \cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi n}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi n}{4} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi(1+3n)}{6} + i \sin \frac{\pi(1+3n)}{6} \right), \quad n = \overline{0, 3}$$

**Ответ:**  $\sqrt[8]{16} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi k}{4} \right), \quad k = \overline{0, 7}$

$$\sqrt[6]{-27} = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi(1+2m)}{6} + i \sin \frac{\pi(1+2m)}{6} \right), \quad m = \overline{0, 5}$$

$$\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8} = 2 \left( \cos \frac{\pi(1+3n)}{6} + i \sin \frac{\pi(1+3n)}{6} \right), \quad n = \overline{0, 3}$$

## Общая алгебра

### Теория

**Определение.** Бинарной операцией на  $X$  называется отображение  $\tau : X \times X \rightarrow X$ .

**Определение.** Множество с корректно заданной на нём бинарной операцией называется группоидом (магмой).

**Определение.** Множество  $X$  с заданной на нём бинарной ассоциативной операцией называется полугруппой.

**Замечание.** Ассоциативность:  $\forall a, b, c \in X \ a * (b * c) = (a * b) * c$ , где  $*$  – бинарная операция.

**Определение.** Элемент полугруппы  $M$  называется нейтральным, если  $\forall x \in M \ e * x = x * e = x$ .

**Определение.** Полугруппа, в которой есть нейтральный элемент – моноид.

**Определение.** Элемент  $a$  моноида  $(M, e, \cdot)$  называется обратимым, если  $\exists b : a * b = b * a = e$ .

**Определение.** Моноид  $G$  все элементы которого обратимы, называется группой.

**Определение** (эквивалентное). Множество  $G$  с корректно определённой на нём бинарной операцией  $*$  называется группой, если:

- 1) операция ассоциативна:  $\forall x, y, z \in G \ x * (y * z) = (x * y) * z$
- 2)  $\exists e \in G \ \forall x \in G : x * e = e * x = x$
- 3)  $\forall x \in G \ \exists x^{-1} \in G : x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

**Определение.** Группа с коммутативной операцией называется абелевой.

**Замечание.** Коммутативность:  $\forall a, b \in X \ a * b = b * a$ , где  $*$  – бинарная операция.

**Определение.** Пусть  $q$  – наименьшее натуральное ( $\neq 0$ ) число, для которого  $a^q = e$ , где  $a \in G$ , оно называется порядком элемента. Если такого числа не существует, то говорят об элементе бесконечного порядка.

**Определение.** Пусть даны две группы:  $(G_1, *)$  и  $(G_2, \circ)$ . Тогда отображение  $f : G_1 \rightarrow G_2$  называется гомоморфизмом, если выполняется следующее условие:  $\forall a, b \in G_1 \ f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ .

**Определение.** Инъективный гомоморфизм называют мономорфизмом, а сюръективный – эпиморфизмом.

**Определение.** Биъективный гомоморфизм называется изоморфизмом.

## Задача 23

Является ли отображение  $\phi : X \rightarrow Y$ , где

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}, Y = \mathbb{Z}, \phi \left( \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = a + b + c$$

инъективным, сюръективным, биективным?

**Решение:**

1) *Инъективность*:  $\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

Результат отображения – целое число, равное сумме трёх чисел из первой строки матрицы из множества  $X$ . Так как любое целое число можно представить в виде суммы трёх слагаемых бесконечным количеством способов, отображение не инъективно. Контрпример:

$$\phi \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 1 + 2 + 3 = \phi \left( \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

2) *Сюръективность*:  $\forall y \in Y \exists x \in X : \phi(x) = y$ .

Любое целое число  $y$  можно разложить в сумму трёх слагаемых, т.е.  $y = a + b + c$ . Тогда всегда есть такая матрица  $x \in X$ , что

$$x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi \left( \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = a + b + c = y$$

Сюръективность выполнена.

3) *Биективность*. Выполняется, когда отображение и инъективно, и сюръективно.

Отображение не биективно, так как оно не инъективно.

**Ответ:** только сюръективно.

## Задача 24

Является ли (a) группоидом, (b) полугруппой, (c) моноидом, (d) группой множество целых чисел  $\mathbb{Z}$  относительно операции  $a \circ b = a + b - 5$ ? Ответ обосновать.

**Решение:**

а) Проверим корректна ли задана операция на множестве  $\mathbb{Z}$ . Если  $a, b \in \mathbb{Z}$ , то  $a \circ b = a + b - 5 \in \mathbb{Z}$ .

Операция не выводит из множества, значит, она корректно задана. Таким образом,  $(\mathbb{Z}, \circ)$  – группоид.

b) Проверим ассоциативность операции:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad a \circ (b \circ c) = a + (b + c - 5) - 5 = (a + b - 5) + c - 5 = (a \circ b) \circ c$$

Операция ассоциативна, значит, группоид  $(\mathbb{Z}, \circ)$  – полугруппа.

c) Попробуем найти нейтральный элемент в  $(\mathbb{Z}, \circ)$ .

$$e \circ a = e + a - 5 = a \Leftrightarrow e = 5$$

$$a \circ e = a \circ 5 = a + 5 - 5 = a$$

Значит,  $e = 5$  – нейтральный элемент, и  $(\mathbb{Z}, \circ)$  – моноид.

d) Проверим, есть ли у любого  $a \in \mathbb{Z}$  обратный элемент  $a^{-1} : a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ .

$$a^{-1} \circ a = a^{-1} + a - 5 = 5 \Leftrightarrow a^{-1} = 10 - a$$

$$a \circ a^{-1} = a \circ (10 - a) = a + 10 - a - 5 = 5 = e$$

У каждого элемента есть обратный, значит,  $(\mathbb{Z}, \circ)$  – группа.

**Ответ:** a)-d) – является.

## Задача 25

Является ли отображение

$$\phi(7^a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

гомоморфизмом групп, если первая группа – это множество  $G = \{7^a, a \in \mathbb{Z}\}$  с операцией умножения, а вторая группа –  $H = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \right\}$  множество с операцией сложения?

Является ли это отображение изоморфизмом?

**Решение:**

Проверим, для произвольных  $7^a, 7^b \in G$ :

$$\phi(7^a \cdot 7^b) = \phi(7^{a+b}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \phi(7^a) + \phi(7^b)$$

Таким образом, это гомоморфизм.

Отображение инъективно, так как

$$\forall 7^a, 7^b \in G \quad \phi(7^a) = \phi(7^b) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b \Rightarrow 7^a = 7^b$$

Отображение не сюръективно, так как в  $H$  входят матрицы в левом углу которых может стоять не 0, а отображение не переводит в такие матрицы. Контрпример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Отображение не сюръективно, значит, не биективно. Тогда  $\phi$  – не изоморфизм.

**Ответ:** гомоморфизм, не изоморфизм.

## Задача 26

Ассоциативна ли операция  $*$  на множествах, если

$$G = \mathbb{N}, x * y = x^y$$

$$H = \mathbb{N}, x * y = \text{НОД}(x, y)$$

**Решение:**

Проверим ассоциативность каждой из операций:

1) Для произвольных  $a, b, c \in G$ :

$$a * (b * c) = a^{b^c}$$

$$(a * b) * c = (a^b)^c = a^{bc}$$

$$a * (b * c) \neq (a * b) * c$$

Операция не ассоциативна.

2) Для произвольных  $a, b, c \in H$ :

$$a * (b * c) = \text{НОД}(a, \text{НОД}(b, c)) = \text{НОД}(a, b, c)$$

$$(a * b) * c = \text{НОД}(\text{НОД}(a, b), c) = \text{НОД}(a, b, c)$$

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

**Ответ:** 1) нет; 2) да.

## Задача 27

Пусть  $G$  – множество всех вещественных чисел, отличных от  $-1$ . Доказать, что  $G$  является группой относительно операции

$$x \cdot y = x + y + xy$$



**Решение:**

Докажем по определению.

1) *Замкнутость операции.*

Операция не должна выводить из  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

$$\forall x, y \in G \quad x \cdot y = x + y + xy \in \mathbb{R}$$

Проверим, может ли получиться  $x + y + xy = -1$ .

$$x + y + xy = -1 \Leftrightarrow x(1 + y) + y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Но, так как  $x, y \in G$ , они не могут быть равны  $-1$ . Значит, случай, когда  $x + y + xy = -1$ , невозможен. Таким образом,  $x + y + xy \in G$ .

2) *Ассоциативность операции.*

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in G \quad x \cdot (y \cdot z) &= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) = x + y + xy + z + yz + xz + xyz = \\ &= (x + y + xy) + z + z(x + y + xy) = (x \cdot y) \cdot z \end{aligned}$$

Операция ассоциативна.

3) *Нейтральный элемент.*

$$x \cdot e = e \cdot x = x$$

$$x + e + xe = x \Leftrightarrow e = 0$$

4) *Обратный элемент.*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$$

$$x + x^{-1} + xx^{-1} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^{-1} + 1) = 1 \Leftrightarrow x^{-1} = \frac{1}{x + 1} - 1$$

Обратный существует для всех  $x$ , так как  $x \neq -1$ .

Таким образом,  $(G, \cdot)$  – группа.

**Задача 28**

Какие из отображений групп  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  являются гомоморфизмами:

$$f(z) = |z|$$

$$g(z) = 2|z|$$

**Решение:**

Группа  $\mathbb{C}^*$  – множество комплексных чисел с операцией умножения,  $\mathbb{R}^*$  – множество вещественных чисел с операцией умножения.

Рассмотрим произвольные  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ . Пусть

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Проверим, являются ли  $f$  и  $g$  гомоморфизмом:

$$f(z_1 \cdot z_2) = f\left(r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))\right) = r_1 r_2 = f(z_1) \cdot f(z_2)$$

$$\left. \begin{aligned} g(z_1 \cdot z_2) &= g\left(r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))\right) = 2r_1 r_2 \\ g(z_1) \cdot g(z_2) &= 2r_1 \cdot 2r_2 = 4r_1 r_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(z_1 \cdot z_2) \neq g(z_1) \cdot g(z_2)$$

Таким образом,  $f$  – гомоморфизм,  $g$  – не гомоморфизм.

**Ответ:**  $f$  – гомоморфизм,  $g$  – не гомоморфизм.

**Задача 29**

Найти порядок элемента группы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$$

**Решение:**

1) Разложим подстановку в произведение независимых циклов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (123)(45)$$

Так как подстановка в степени, равной НОКу длин её циклов, будет равна  $e$ , порядок этой подстановки будет  $\text{НОК}(3, 2) = 6$  (меньшая степень не подойдёт).

2) Перепишем комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$$

Надо возвести  $z$  в такую минимальную степень  $n \in \mathbb{N}$ , что  $z^n = 1$  – нейтральный элемент в  $\mathbb{C}^*$ .

$$z^n = \cos \frac{5\pi n}{6} + i \sin \frac{5\pi n}{6} = 1$$

$$\begin{cases} \cos \frac{5\pi n}{6} = 1 \\ \sin \frac{5\pi n}{6} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi n}{6} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi n}{6} = \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \frac{5\pi n}{6} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{12k}{5}$$

Так как  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq 0$  должно быть кратно 5. Минимальное такое  $k = 5$ . Значит,  $n = 12$ .

**Ответ:** 1) 6; 2) 12.