Алгебра. Определения и доказательства 1

Арунова Анастасия

Содержание

1 Определения

1.1 Дать определение умножения матриц. Коммутативна ли эта операция?

Определение. Рассмотрим A типа $n \times p$ и B типа $p \times k$. Привидением матриц A и B называют матрицу C типа $n \times k$ с элементами $c_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{p} a_{il} \cdot b_{lj}$, $\forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}$

Замечание. Операция умножения матриц *не является коммутативной.*

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

1.2 Дать определения ступенчатого вида матрицы и канонического (улучшенного ступенчатого) вида матрицы.

Определение. Матрица M имеет ступенчатый вид, если номера столбцов первых ненулевых элементов всех строк (такие элементы будем называть ведущими) возрастают, а нулевые строки расположены в нижней части матрицы.

Определение. Матрица M имеет улучшенный ступенчатый (канонический) вид, если:

1) она имеет ступенчатый вид
2) все ведущие элементы равны 1
3) в столбце с ведущим элементом все остальные элементы равны 0

1.3 Перечислить элементарные преобразования строк матрицы.

Определение. Элементарными преобразованиями строк матрицы называют:

1) умножение i-ой строки матрицы на $\alpha \neq 0$:
   $\alpha \cdot (i) \to (i)$
2) перестановка двух строк в матрице:
   $(i) \leftrightarrow (k)$

3) добавление к i-ой строке k-ой строки с коэффициентом α:
$(i) + \alpha \cdot (k) \to (i)$

1.4 Сформулировать теорему о методе Гаусса.

Теорема. Любую конечную матрицу можно элементарными преобразованиями привести к ступенчатому (каноническому) виду.

1.5 Дать определения перестановки и подстановки.

Определение. Всякое расположение чисел $1, \ldots, n$ в определённом порядке называют перестановкой $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_2)$

Определение. Подстановкой называется взаимно-однозначное отображение $1, \ldots, n$ в себя:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Здесь $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ – перестановка.

1.6 Дать определения знака и чётности подстановки.

Определение. Знак перестановки: $\operatorname{sgn} \alpha = (-1)^n$, где n – сумма инверсией в первой и второй строках подстановки (число инверсий в подстановке).

Определение. Подстановка называется чётной, если число инверсий в подстановке чётно, иначе нечётной.

1.7 Выписать общую формулу для вычисления определителя произвольного порядка.

Определение. Определителем (детерминантом) порядка n, соответствующим квадратной матрице A называется число, являющееся суммой $n!$ слагаемых:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

1.8 Какие три условия достаточно наложить на функцию от столбцов матрицы, чтобы она обязательно была детерминантом?

Утверждение. На функцию от столбцов матрицы достаточно наложить следующие три условия, чтобы она обязательно была детерминантом:

1) Функция должна быть полилинейна (линейна по столбцам)
2) Кососимметрична ($\det A = -\det A$, т.е. равна 0, если есть 2 одинаковых столбца)
3) Равна 1 на E_n

1.9 Что такое алгебраическое дополнение?

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Определение. В матрице $A_{n\times n}$ вычеркнем i-ю строку и j-й столбец. Определитель получившейся матрицы называется дополняющим минором M_{ij} элемента a_{ij}

1.10 Выписать формулы для разложения определителя по строке и по столбцу.

Разложение по строке (столбцу):

Для любого фиксированного j справедливо: $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ – разложение по столбцу.

Для любого фиксированного i справедливо: $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ – разложение по строке.

1.11 Что такое фальшивое разложение?

Фальшивое разложение:

$$k \neq i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$$

$$k \neq j : \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$$

1.12 Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка. Когда с их помощью можно найти решение СЛАУ?

Теорема. Пусть $Ax = b$ совместная СЛАУ, тогда:

$$x_i \cdot \det A = \Delta_i$$

$$\Delta_i = \det(A_1, ..., A_{i-1}, b, A_{i+1}, ..., A_n)$$

Если $\det A \neq 0$, то $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\det A}$, $i = \overline{1, n}$

1.13 Дать определение союзной матрицы.

Определение. Союзная матрица $\widetilde{A}$ (с A) – это транспонированная матрица из алгебраических дополнений для соответствующих элементов матрицы A.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

1.14 Дать определение обратной матрицы. Сформулировать критерий её существования.

Определение. Обратной к квадратной матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется матрица

$$A^{-1} : A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$$

Теорема. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

1.15 Выписать формулу для нахождения обратной матрицы.

Формула: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$

1.16 Выписать формулу для матрицы обратной к произведению двух матриц.

Формула: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

1.17 Дать определение минора.

Определение. Минором k-го порядка матрицы A называют определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечении произвольных k строк и k столбцов из матрицы A.

1.18 Дать определение базисного минора. Какие строки называются базисными?

Определение. Любой отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу, называется базисным минором матрицы. Строки, которые попали в базисный минор, называются базисными.

1.19 Дать определение ранга матрицы.

Определение. Рангом матрицы называют наивысший порядок отличного от 0 минора.

Определение означает, что:

1) $\exists M_{i1\ldots ir}^{j1\ldots jr} \neq 0$ (минор r-го порядка $r = \operatorname{Rg} A$)
2) все миноры порядков $r+1, r+2, \ldots$ равны 0 (или не существуют).

1.20 Дать определение линейной комбинации строк. Что такое нетривиальная линейная комбинация?

Определение. Линейной комбинацией строк (или столбцов) $a_1, \ldots, a_s$ одинаковой длины называют выражение вида:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k a_k, \text{ где } \alpha_1, \ldots, \alpha_s \text{ – некоторые числа}$$

Определение. Линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s$ называется нетривиальной, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ не все равны 0.

1.21 Дать определение линейной зависимости строк матрицы.

Определение. Строки $a_1, \ldots, a_s$ называют линейно зависимыми, если существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ не все равные 0, такие что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = 0$

1.22 Дать определение линейно независимых столбцов матрицы.

Определение. Если равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = 0$ возможно только в случае, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$, то столбцы матрицы $a_1, \ldots, a_s$ называют линейно независимыми.

1.23 Сформулировать критерий линейной зависимости.

Утверждение. $a_1, \ldots, a_s$ – линейно зависимы $\Leftrightarrow$ хотя бы один из $a_1, \ldots, a_s$ линейно выражается через другие.

1.24 Сформулировать теорему о базисном миноре.

Теорема (о базисном миноре)**.**

1) Базисные строки (столбцы), соответствующие любому базисному минору M матрицы A л.н.з.
2) Строки (столбцы) матрицы A, не входящие в M являются линейной комбинацией базисных строк.

1.25 Сформулировать теорему о ранге матрицы.

Следствие (теорема о ранге матрицы)**.** Ранг матрицы = максимальному числу её линейно независимых строк = максимальному числу линейно независимых столбцов.

1.26 Сформулировать критерий невырожденности квадратной матрицы.

Следствие. Рассмотрим квадратную матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$. Следующие три условия эквивалентны:

(1) $\det A \neq 0$

(2) $\operatorname{Rg} A = n$

(3) все строки A линейно независимы

1.27 Сформулировать теорему Кронекера–Капелли.

Теорема. СЛАУ $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}\left(A \mid b\right)$

1.28 Дать определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной СЛАУ

Определение. Рассмотрим СЛАУ $Ax = 0$, $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Любые $n - r$ линейно независимых столбцов, являющиеся решениями однородной СЛАУ $Ax = 0$, где n – число неизвестных, $r = \operatorname{Rg} A$, называют фундаментальной системой решений (ФСР).

2 Доказательства

2.1 Что происходит с произведением матриц при транспонировании?

Утверждение. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Доказательство. A – матрица типа $m \times n$, B – матрица типа $n \times k$

$$\left[(A \cdot B)^T\right]_{ij} = \left[A \cdot B\right]_{ji} = \sum_{r=1}^{n} \left[A\right]_{jr} \cdot \left[B\right]_{ri} = \sum_{r=1}^{n} \left[A^T\right]_{rj} \cdot \left[B^T\right]_{ir} = \left[B^T \cdot A^T\right]_{ij}, \begin{array}{l} \forall i = \overline{1,m} \\ \forall j = \overline{1,k} \end{array}$$

□

2.2 Сформулировать и доказать утверждение о том, что кососимметричность для линейной функции эквивалентна обнулению на паре совпадающих элементов.

Утверждение. Для любой линейной функции кососимметричность (1) эквивалентна обнулению на паре совпадающих элементов (2).

Доказательство. Рассмотрим f – линейная функция (от столбцов).

1) (2) $\Rightarrow$ (1)
   Дано: $f(u, u) = 0$ – обнуление на паре совпадающих элементов
   Доказать: $f(u, v) = -f(v, u)$ – кососимметричность
   $$\underbrace{f(u+v, u+v)}_{=0} \overset{\text{линейность}}{=} \underbrace{f(u, u)}_{=0} + f(u, v) + f(v, u) + \underbrace{f(v, v)}_{=0} \Rightarrow f(u, v) = -f(v, u)$$
2) (1) $\Rightarrow$ (2)
   Дано: $f(u, v) = -f(v, u)$ – кососимметричность
   Доказать: $f(u, u) = 0$ – обнуление на паре совпадающих элементов
   $f(u, v) = -f(v, u)$ по (1)
   $f(a, a) = -f(a, a) \Rightarrow f(a, a) = 0$

□

2.3 Какие три условия достаточно наложить на функцию от столбцов матрицы, чтобы она обязательно была детерминантом?

Утверждение. На функцию от столбцов матрицы достаточно наложить следующие три условия, чтобы она обязательно была детерминантом:

1) Функция должна быть полилинейна (линейна по столбцам)
2) Кососимметрична ($\det A = -\det A$, т.е. равна 0, если есть 2 одинаковых столбца)
3) Равна 1 на E_n

Доказательство. Докажем при $n = 2$. Разложим столбцы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Определим, чему равна функция от матрицы:

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) \overset{\text{линейность}}{=} a_{11} f\left(\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}\right) + a_{21} f\left(\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= a_{11}a_{22} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + a_{21}a_{12} f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + a_{11}a_{21} \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=0,\text{ кососимметр.}} + a_{21}a_{22} \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=0,\text{ кососимметр.}} =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{f(E_n)=1} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$$

□

2.4 Чему равен определитель произведения двух квадратных матриц?

Утверждение. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})\ \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(B) = \det(A \cdot B)$. Докажем $f(B) = \det B \cdot f(E_n)$

1) Кососимметричность выполнена, т.к. при совпадении двух столбцов матрицы B столбцы матрицы $A \cdot B$ тоже будут совпадать.
2) Если столбец матрицы B имеет вид $\lambda a + \mu b$, то в матрице $A \cdot B$ этот столбец имеет вид $\lambda Aa + \mu Ab$, и определитель тоже линеен $\Rightarrow f(B)$ линейна.
3) Выполнены кососимметричность и линейность, следовательно:

$$f(B) = \det B \cdot f(E_n), \text{ но } f(E_n) = \det(A \cdot E_n) = \det A \Rightarrow \det(A \cdot B) = f(B) = \det B \cdot \det A$$

□

2.5 Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка и доказать их.

Теорема. Пусть $Ax = b$ совместная СЛАУ, тогда:

$$x_i \cdot \det A = \Delta_i$$

$$\Delta_i = \det(A_1, ..., A_{i-1}, b, A_{i+1}, ..., A_n)$$

Если $\det A \neq 0$, то $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\det A}$, $i = \overline{1, n}$

Доказательство. Пусть A_i – столбец матрицы. Запишем СЛАУ в векторном виде:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_n A_n = b \Leftrightarrow Ax = b$$

$$\Delta_i = \det(A_1, ..., A_{i-1}, b, A_{i+1}, ..., A_n) = \det(A_1, ..., A_{i-1}, x_1 A_1 + ... + x_n A_n, A_{i+1}, ..., A_n) =$$
$$= \det(A_1, ..., A_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j A_j, A_{i+1}, ..., A_n) \overset{\text{линейность}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n)$$

При $j \neq i$ слагаемые $x_j \cdot \underbrace{\det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n)}_{=0\text{, два одинаковых столбца}} = 0$

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n) = x_i \det(A_1, ..., A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, ..., A_n)$$

□

2.6 Сформулировать и доказать критерий существования обратной матрицы.

Теорема. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Доказательство.

Необходимость.

Дано: $\exists A^{-1}$

Доказать: $\det A \neq 0$

По определению обратной матрицы: $A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$

Достаточность.

Дано: $\det A \neq 0$

Доказать: $\exists A^{-1}$

Предъявим матрицу $B = \dfrac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$, где $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$ – союзная матрица.

Докажем, что B является обратной, т.е. $A \cdot B = E$.

$$\big[A \cdot B\big]_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \big[A\big]_{ir} \cdot \big[B\big]_{rj} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot \big[\widetilde{A}\big]_{rj} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot A_{jr} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\det A} \cdot \det A, \ i = j \text{ (разложение по i-й строке)} \\ 0, \ i \neq j \text{ (фальшивое разложение)} \end{cases} = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} = \big[E\big]_{ij}$$

Аналогично проверяется $B \cdot A = E \Rightarrow$ по определению B – обратная. □

2.7 Сформулировать и доказать критерий линейной зависимости.

Утверждение. $a_1, \dots, a_s$ – линейно зависимы $\Leftrightarrow$ хотя бы один из $a_1, \dots, a_s$ линейно выражается через другие.

Доказательство.

Необходимость.

Дано: $a_1, .., a_s$ – л.з.

Доказать: найдутся выражаемые через другие.

По определению:

$$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_s \text{ (не все 0)}: \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s = 0$$

Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда:

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_s}{\alpha_1}\right) a_s$$

Достаточность.

Дано: один линейно выражается через другие.

Доказать: они линейно зависимы.

Пусть $a_1 = \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_s a_s$. Тогда $\underbrace{1 \cdot a_1 - \beta_2 a_2 - \ldots - \beta_s a_s}_{\text{нетривиальная лин.комб.}} = 0 \Rightarrow$ по определению они л.з. □

2.8 Как связан ранг транспонированной матрицы с рангом исходной матрицы?

Утверждение. $\operatorname{Rg} A^T = \operatorname{Rg} A$

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{Rg} A^T \geq \operatorname{Rg} A$. Пусть $\operatorname{Rg} A = r \overset{\text{опр}}{\Rightarrow} \exists$ минор $M^{j1\dots jr}_{i1\dots ir} \neq 0$. В матрице A есть минор $N^{i1\dots ir}_{j1\dots jr} \neq 0$, получается из M операцией транспонирования.

Минор $N \neq 0$ по свойствам определителя ($\det N = \det M^T = \det M \neq 0$). Тогда по определению $\operatorname{Rg} A^T \geq r = \operatorname{Rg} A$.

Таким образом:

$$\operatorname{Rg} A \leq \operatorname{Rg} A^T \leq \operatorname{Rg}(A^T)^T = \operatorname{Rg} A \Rightarrow \operatorname{Rg} A^T = \operatorname{Rg} A$$

□

2.9 Сформулировать и доказать следствие теоремы о базисном миноре для квадратных матриц (критерий невырожденности).

Следствие. Рассмотрим квадратную матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$. Следующие три условия эквивалентны:

(1) $\det A \neq 0$

(2) $\operatorname{Rg} A = n$

(3) все строки A линейно независимы

Доказательство.

1) (1) $\Rightarrow$ (2)

   Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow$ в A есть минор порядка n, он $\neq 0 \Rightarrow$ по определению $\operatorname{Rg} A = n$.

2) (2) $\Rightarrow$ (3)

   Пусть $\operatorname{Rg} A = n \Rightarrow$ все строки базисные $\Rightarrow$ по первому пункту теоремы о базисном миноре (строки базисного минора л.н.з) они все л.н.з.

3) (3) $\Rightarrow$ (1)

   Пусть строки A л.н.з. Предположим противное: $\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{Rg} A < n \Rightarrow$ по второму пункту теоремы о базисном миноре (строки, не входящие в базисный минор являются лин. комб. базисных) по крайней мере одна из строк является линейной комбинацией остальных $\Rightarrow$ по критерию л.з все строки л.з – $\perp$.

□