

# Линейная алгебра

## 1 курс

### Материалы для подготовки к коллоквиуму

### Доказательства

#### 1 модуль

**1. Что происходит с произведением матриц при транспонировании? Ответ обосновать.**

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

□ Пусть матрица  $A$  имеет размер  $m \times n$ , а матрица  $B$  – размер  $n \times k$ .  $\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, k}$ :

$$[(A \cdot B)^T]_{ij} = [A \cdot B]_{ji}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=1}^n [A]_{jr} \cdot [B]_{ri} \\ &= \sum_{r=1}^n [A^T]_{rj} \cdot [B^T]_{ir} \\ &= \sum_{r=1}^n [B^T]_{ir} \cdot [A^T]_{rj} \\ &= [B^T \cdot A^T]_{ij} \end{aligned}$$

■

**2. Сформулировать и доказать критерий существования обратной матрицы. Свойства определителя предполагаются известными.**

Для матрицы  $A$  существует обратная матрица  $A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$ .

□ ( $\Rightarrow$ ) По определению:  $AA^{-1} = E \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det E = 1$ .

$$\det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0.$$

( $\Leftarrow$ ) Предъявим матрицу  $B = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

где  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ . Докажем, что  $B = A^{-1}$ .

$$A \cdot B \stackrel{?}{=} E:$$

$$\begin{aligned} [A \cdot B]_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=1}^n [A]_{ir} \cdot [B]_{rj} \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{r=1}^n a_{ir} [\tilde{A}]_{rj} \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{r=1}^n a_{ir} [A]_{jr} \\ &\stackrel{(8),(9)}{=} \begin{cases} \frac{1}{\det A} \cdot \det A = 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (\text{разложение и фальшивое разложение}) \\ &= [E]_{ij} \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что  $B \cdot A = E \Rightarrow$  по определению  $B$  – это обратная матрица. ■

**3. Какие три условия достаточно наложить на функцию от столбцов матрицы, чтобы она обязательно была детерминантом? Ответ обоснуйте для матриц второго порядка.** Любая полилинейная, кососимметрическая функция, равная 1 на единичной матрице  $E$ , является определителем.

□ Докажем утверждение для  $n = 2$ .

$$\begin{aligned}
 f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) &\stackrel{(2)}{=} a_{11}f\left(\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}\right) + a_{21}f\left(\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix}\right) \text{ (полилинейность)} \\
 &\stackrel{(2)}{=} a_{11}a_{22}f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + a_{11}a_{12}f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + a_{21}a_{12}f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + a_{21}a_{22}f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
 &\stackrel{(46)}{=} a_{11}a_{22}f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + a_{21}a_{12}f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ (обнуление на одинаковых элементах)} \\
 &\stackrel{(46)}{=} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ (кососимметричность)} \\
 &\stackrel{(7)}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ (равенство 1 на единичной матрице)} \\
 &\equiv \det A
 \end{aligned}$$

**4. Сформулировать и доказать утверждение о том, что кососимметричность для линейной функции эквивалентна обнулению на паре совпадающих элементов.**

Если  $f$  – линейная функция, то:  $f(x, y) = -f(y, x) \Leftrightarrow f(x, x) = 0$ .

□  $(\Rightarrow) f(x, x) = -f(x, x) \Rightarrow 2f(x, x) = 0 \Rightarrow f(x, x) = 0$

$(\Leftarrow) f(u + v, u + v) = f(u, u) + f(u, v) + f(v, u) + f(v, v) \stackrel{f(x,x)=0}{=} f(u, v) + f(v, u) = 0 \Rightarrow f(u, v) = -f(v, u)$  ■

**5. Чему равен определитель произведения двух квадратных матриц? Ответ обосновать.**

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

□ Рассмотрим  $f(B) = \det(A \cdot B)$ . Докажем, что  $f$  линейна и кососимметрична. Тогда  $f(B) = \det B \cdot f(E)$ .

1) Она кососимметрична, так как при совпадении двух столбцов матрицы  $B$  столбцы матрицы  $A \cdot B$  также будут совпадать. Свойство выполнено за счёт свойств определителя.

2) Если столбец матрицы  $B$  имеет вид  $\lambda a + \mu b$ , то в матрице  $A \cdot B$  он будет иметь вид  $\lambda Aa + \mu Ab$  и определитель линеен  $\Rightarrow f(B)$  линейна  $\Rightarrow$  выполнены свойства (2) – полилинейность и (46) – обнуление на двух одинаковых строках  $\Rightarrow f(B) = \det B \cdot f(E)$ , но  $f(E) = \det(A \cdot E) = \det A \Rightarrow f(B) = \det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ . ■

**6. Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка и доказать их.**

$\forall i = \overline{1, n} : x_i \cdot \det A = \Delta_i$ , где  $\Delta_i$  – определитель матрицы, в которой на  $i$ -м месте стоит столбец  $b$  правых частей СЛАУ  $Ax = b$ .

□ Пусть  $A_i$  –  $i$ -й столбец матрицы  $A$ . Запишем СЛАУ в векторном виде:  $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = b$ .

$$\Delta_i = \det(A_1, \dots, A_{i-1}, \sum_{j=1}^n x_j A_j, A_{i+1}, \dots, A_n).$$

Определитель линеен:  $\Delta_i = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, \dots, A_n)$ .

Определитель обнулится, если в матрице найдутся две одинаковые строки, т.е. определитель станет нулём, если  $j \neq i$ :

$$\Delta_i = x_i \cdot \det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n) = x_i \det A$$

**7. Сформулировать и доказать критерий линейной зависимости.**

$a_1, \dots, a_s$  линейно зависимы  $\Leftrightarrow$  хотя бы один из  $a_1, \dots, a_s$  линейно выражается через остальные.

□  $(\Rightarrow)$  Пусть  $a_1, \dots, a_s$  линейно зависимы. Тогда по определению  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_s : \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s = 0$ .

Предположим, что  $\alpha_1 \neq 0$ . Тогда  $a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}a_2 - \dots - \frac{\alpha_s}{\alpha_1}a_s$ . Получили выражение для  $a_1$  как линейной комбинации остальных  $a_i$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $a_1 = \beta_2 a_2 + \dots + \beta_s a_s$ . Тогда  $1 \cdot a_1 - \beta_2 a_2 - \dots - \beta_s a_s = 0$  – получили нетривиальную ( $1 \neq 0$ ) линейную комбинацию  $a_1, \dots, a_s$ , равную нулю  $\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} a_1, \dots, a_s$  линейно зависимы. ■

### 8. Как связан ранг транспонированной матрицы с рангом исходной матрицы? Ответ обосновать.

$$\text{Rg } A = \text{Rg } A^T$$

□ Покажем, что  $\text{Rg } A^T \geq \text{Rg } A$ .

Пусть  $\text{Rg } A = r$ . Тогда по определению  $\exists M_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} \neq 0$ . В матрице  $A^T$  есть минор  $N_{j_1 j_2 \dots j_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ , получающийся из  $M$  операциями транспонирования.  $N \neq 0$  по свойству (1) определителя (о том, что  $\det A = \det A^T$ )  $\Rightarrow$  по определению ранга  $\text{Rg } A^T \geq r = \text{Rg } A$ .

$$\text{Rg } A \leq \text{Rg } A^T \leq \text{Rg } (A^T)^T = \text{Rg } A \Rightarrow \text{Rg } A = \text{Rg } A^T. \quad \blacksquare$$

### 9. Сформулировать и доказать следствие теоремы о базисном миноре для квадратных матриц (критерий невырожденности).

Рассмотрим квадратную матрицу  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\det A \neq 0$ ;
- 2)  $\text{Rg } A = n$ ;
- 3) все строки  $A$  линейно независимы.

□ ( $1 \Rightarrow 2$ ) Пусть  $\det A \neq 0 \Rightarrow$  в матрице  $A$  есть минор порядка  $n$ , он не равен нулю  $\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \text{Rg } A = n$ .

( $2 \Rightarrow 3$ ) Пусть  $\text{Rg } A = n \Rightarrow$  все строки базисные  $\Rightarrow$  по пункту 1 теоремы о базисном миноре они все линейно независимы.

( $3 \Rightarrow 1$ ) Пусть строки  $A$  линейно независимы. Предположим, что  $\det A = 0$ . Тогда  $\text{Rg } A < n$  по определению ранга, а значит (по пункту 2 теоремы о базисном миноре) хотя бы одна из строк является линейной комбинацией остальных. Следовательно, по критерию линейной зависимости все строки линейно зависимы. Противоречие  $\Rightarrow \det A \neq 0$ . ■

### 10. Сформулируйте и докажите теорему о базисном миноре.

1) Базисные строки (столбцы), соответствующие любому базисному минору  $M$  матрицы  $A$ , линейно независимы.

2) Строки (столбцы), не вошедшие в  $M$ , являются линейной комбинацией базисных.

□ 1) Предположим противное: пусть базисные строки линейно зависимы. Тогда по критерию линейной зависимости одна из них является линейной комбинацией остальных. Следовательно,  $M = 0$  по свойству определителя. Получили противоречие с определением базисного минора  $\Rightarrow$  все базисные строки линейно независимы.

2) Без ограничения общности, будем считать, что базисный минор  $M$  матрицы  $A$  расположен в левом верхнем углу матрицы. Пусть  $\text{Rg } A = r$ .

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \dots & \mathbf{a}_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{r1} & \dots & \mathbf{a}_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Возьмём строку  $a_k$ , где  $k > r$  и покажем, что  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r : a_k = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r$ . Составим определитель  $\Delta$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \dots & \mathbf{a}_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{r1} & \dots & \mathbf{a}_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix}_{(r+1) \times (r+1)}$$

Покажем, что  $\Delta = 0$  ( $j = \overline{1, n}$ ).

- Если  $j \leq r$ , то в  $\Delta$  есть два одинаковых столбца, и по свойству (46) определителя, он обнулится:  $\Delta = 0$ .
  - Если  $j > r$ , то  $\Delta$  является минором исходной матрицы  $A$ . Тогда  $\Delta = 0$ , так как является минором порядка  $r + 1$  в матрице ранга  $r$ .
- Разложим  $\Delta$  по последнему столбцу:

$$a_{1j}A_1 + a_{2j}A_2 + \dots + a_{rj}A_r + a_{kj}A_k = 0 \quad (\text{т.к. } \Delta = 0).$$

Здесь  $A_i$  – алгебраическое дополнение в  $\Delta$ , причём  $A_k \neq 0$ , так как это базисный минор. Имеем  $a_{kj} = -\frac{A_1}{A_k}a_{1j} - \dots - \frac{A_r}{A_k}a_{rj}$  ( $j = \overline{1, n}, k > r$ ). Отсюда следует, что справедлива формула для строк:

$$a_{k1}, \dots, a_{kn} = \lambda_1(a_{11}, \dots, a_{1n}) + \dots + \lambda_r(a_{r1}, \dots, a_{rn})$$

Значит,  $a_k = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r$ , где  $a_j$  – это  $j$ -я строка. ■

### 11. Сформулируйте теорему Кронекера–Капелли и докажьте её.

СЛАУ  $Ax = b$  совместна  $\Leftrightarrow \text{Rg } A = \text{Rg } (A|b)$ .

□ ( $\Rightarrow$ ) По определению СЛАУ совместна  $\Leftrightarrow$  существует столбец  $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ , такой что  $Ax^0 = b$ ,

что в векторной форме можно записать как  $x_1^0 a_1 + \dots + x_n^0 a_n = b$ , где  $a_j$  –  $j$ -й столбец матрицы  $A$ . Преположим, что базисный минор  $M$  матрицы  $A$  расположен в её левом верхнем углу  $\Rightarrow$  столбцы  $a_1, \dots, a_r$  являются базисными, а  $a_{r+1}, \dots, a_n$  являются их линейной комбинацией (по пункту 2 теоремы о базисном миноре):

$$a_{r+1} = \lambda_{1,r+1}a_1 + \dots + \lambda_{r,r+1}a_r$$

$$\vdots$$

$$a_n = \lambda_{1n}a_1 + \dots + \lambda_{rn}a_r$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} b &= x_1^0 a_1 + \dots + x_r^0 a_r + x_{r+1}^0 (\lambda_{1,r+1}a_1 + \dots + \lambda_{r,r+1}a_r) + \dots + x_n^0 (\lambda_{1n}a_1 + \dots + \lambda_{rn}a_r) \\ &= (x_1^0 + x_{r+1}^0 \lambda_{1,r+1} + \dots + \lambda_{1n} x_n^0) a_1 + \dots + (x_r^0 + x_{r+1}^0 \lambda_{r,r+1} + \dots + \lambda_{rn} x_n^0) a_r \end{aligned}$$

Т.е. столбец  $b$  правых частей является линейной комбинацией базисных столбцов матрицы  $A$ . Из этого следует, что  $M$  – базисный минор и для матрицы  $(A|b)$ , так как:

1)  $M \neq 0$ ;

2) все окаймляющие его миноры равны нулю, так как у них один из столбцов – линейная комбинация столбцов  $a_1, \dots, a_r$ .

$$\left( \underbrace{a_{r+1}, \dots, a_r}_{\text{по опр. баз. минора в } A}, \underbrace{b}_{\text{показали}} \right) \Rightarrow \text{Rg } (A|b) = r.$$

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $\text{Rg } A = r$ ,  $M$  – базисный минор  $A$ . Преположим, что он расположен в левом верхнем углу матрицы. Очевидно, что  $M$  является базисным минором и для матрицы  $(A|b)$  (иначе, добавление  $b$  меняло бы ранг). Следовательно, по пункту 2 теоремы о базисном миноре, столбец  $b$  является линейной комбинацией остальных столбцов, т.е.  $a_1, \dots, a_r$ , входящих в  $M$ :

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r$$

Следовательно,  $x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  – решение СЛАУ  $Ax = b$ .

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + 0 \cdot a_{r+1} + \dots + 0 \cdot a_n = b$$

■

## 12. Сформулируйте и докажите теорему о ранге матрицы (теорема о базисном миноре предполагается известной).

Ранг матрицы равен максимальному числу её линейно независимых строк (столбцов).

□ Докажем теорему для строк.

Пусть  $\text{Rg } A = r$ , а максимальное количество линейно независимых строк равно  $k$ . Покажем, что  $k = r$ .

1) Так как в  $A$  имеется  $r$  линейно независимых строк (по пункту 1 теоремы о базисном миноре), то  $k \geq r$ .

2) Вычеркнем из  $A$  все строки, кроме  $k$  линейно независимых. Получим матрицу  $A_1$ , в которой  $k$  строк. При этом  $\text{Rg } A_1 = k$  (если бы ранг был меньше  $k$ , то по пункту 2 теоремы о базисном миноре какая-то строка являлась бы линейной комбинацией остальных. По критерию линейной зависимости, они будут линейно зависимыми. Это противоречие, следовательно,  $\text{Rg } A_1 = k$ .)

Базисный минор в  $A_1$  имеет порядок  $k$  и является ненулевым минором порядка  $k$  в исходной матрице, а значит  $k \leq r = \text{Rg } A$ .

3)  $k \leq r, r \leq k \Rightarrow r = k$ . ■

## 2 модуль

### 1. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений и докажите её (теорема о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений предполагается известной).

Пусть известно частное решение  $\tilde{x}$  СЛАУ  $Ax = b$ . Тогда любое решение этой СЛАУ может быть представлено в виде  $x = \tilde{x} + c_1\Phi_1 + \dots + c_k\Phi_k$ , где  $c_1, \dots, c_k$  – некоторые постоянные, а  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  – ФСР соответствующей однородной СЛАУ  $Ax = 0$ .

□ Пусть  $x^0$  – произвольное решение СЛАУ  $Ax = b \Rightarrow$  по свойствам решений,  $x^0 - \tilde{x}$  – решение СЛАУ  $Ax = 0$ .

По теореме о структуре общего решения ОСЛАУ (применяя к  $x^0 - \tilde{x}$ ):

$$x^0 - \tilde{x} = c_1\Phi_1 + \dots + c_k\Phi_k$$

$$x^0 = \tilde{x} + c_1\Phi_1 + \dots + c_k\Phi_k$$

■

### 2. Выпишите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в произвольном базисе трёхмерного пространства, и приведите её вывод.

Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  – базис в трёхмерном пространстве,  $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$  и  $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$  – разложения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  по этому базису. Тогда их скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3, \vec{e}_1) & (\vec{e}_3, \vec{e}_2) & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

□ Доказательство – прямая выкладка. Используем линейность скалярного произведения и определение матричного произведения. ■

### 3. Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе трёхмерного пространства и приведите её вывод.

Пусть  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – правый ортонормированный базис,  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ . Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

□ Так как  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – правый ортонормированный базис, то:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0;$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k};$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j};$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + \\ &\quad + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) \\ &= \vec{i} (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k} (a_x b_y - a_y b_x) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

■

**4. Докажите теорему о том, что любое линейное уравнение на координаты точки в трёхмерном пространстве задаёт плоскость и что любая плоскость определяется линейным уравнением.**

Любая плоскость в пространстве определяется уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A, B, C, D$  – некоторые числа, а любое уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ , определяет в пространстве плоскость.

□ 1) Рассмотрим плоскость  $\pi$ . Пусть точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  ей принадлежит. Рассмотрим вектор  $\vec{n} \perp \pi$ . Пусть  $\vec{n} = (A, B, C)$ .  $M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ , т.е.  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ . Таким образом, координаты  $M$  удовлетворяют уравнению  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

2) Рассмотрим  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ . Оно имеет хотя бы одно решение (например,  $x_0 = -\frac{D}{A}, y_0 = z_0 = 0$ , если  $A \neq 0$ ).

Обозначим за  $M_0$  точку  $(x_0, y_0, z_0)$ . Пусть точка  $M(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Вычтем из него равенство  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ :

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ , где  $\vec{n} = (A, B, C) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow$  точка  $M$  лежит в плоскости, проходящей через  $M_0$  и перпендикулярной вектору  $\vec{n} \Rightarrow$  уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$  определяет плоскость. ■

**5. Выпишите формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости и приведите её вывод.**

Пусть плоскость  $\pi$  задана уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$  и точка  $M(x_0, y_0, z_0)$ . Тогда расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\pi$  рассчитывается как

$$\rho(M, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

□ Пусть  $M_1$  – произвольная точка на плоскости. Тогда:

$$\begin{aligned} \rho(M, \pi) &= \left| \text{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M} \right| \\ &= \frac{\left| (\overrightarrow{M_1M}, \vec{n}) \right|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

Последний переход верен, так как  $M_1 \in \pi \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$ . ■

## 6. Выпишите формулу Муавра и докажите её.

Пусть  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тогда  $z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$

□ Применим принцип математической индукции.

• База:  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} z^2 &= r^2(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= r^2((\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + i(2 \sin \varphi \cos \varphi)) \\ &= r^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)). \end{aligned}$$

• Шаг: предположим, что формула верна  $\forall n < k$ . Докажем, что из этого следует, что она верна и для  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z \\ &= r^k(\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)) \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= r^{k+1}(\cos((k+1)\varphi) + i \sin((k+1)\varphi)). \end{aligned}$$

База верна, шаг обоснован  $\Rightarrow$  утверждение верно  $\forall n \in \mathbb{N}$ . ■

## 7. Сформулируйте и докажите утверждение об изоморфности циклических групп.

Все циклические группы одного порядка изоморфны.

□ Если группа бесконечна, то рассмотрим  $f: \langle g \rangle \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ , такой что  $g^n \xrightarrow{f} n$ , т.е.  $f(g^n) = n \in \mathbb{Z}$ . Это биекция и гомоморфизм:  $f(g^m \cdot g^n) = f(g^{m+n}) = n + m = f(g^n) + f(g^m) \Rightarrow$  это изоморфизм. Если  $G = \{e, g, g^2, \dots, g^{q-1}\}$  и  $G' = \{e', g', (g')^2, \dots, (g')^{q-1}\}$ , то  $f: g^k \mapsto (g')^k, \forall k = \overline{0, q-1}$  – это биекция и изоморфизм (просто переименовали элементы группы). ■

## 8. Выпишите формулу для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми и докажите её.

Пусть прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  скрещиваются, и при том заданы направляющими векторами  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$ . Пусть точки  $M_1$  и  $M_2$  лежат на прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  соответственно. Тогда расстояние между  $\ell_1$  и  $\ell_2$  можно вычислить как

$$\rho(\ell_1, \ell_2) = \frac{|\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1 M_2} \rangle|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

□ Построим параллелепипед на векторах  $\vec{s}_1$ ,  $\vec{s}_2$  и  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ . Тогда расстояние между прямыми,  $\rho(\ell_1, \ell_2)$ , равно высоте  $h$  этого параллелепипеда, т.е.

$$\begin{aligned} h &= \frac{V_{\text{параллелепипеда}}}{S_{\text{параллелепипеда}}} \\ &= \frac{|\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1 M_2} \rangle|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} \end{aligned}$$

## 9. Дайте определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Докажите теорему о существовании ФСР.

*Определение:* Любые  $n - r$  линейно независимых столбцов, являющихся решениями однородной СЛАУ  $Ax = 0$ , где  $n$  – число неизвестных/столбцов в матрице  $A$ ,  $r$  – ранг матрицы  $A$ , называют фундаментальной системой решений.

*Теорема:* Рассмотрим ОСЛАУ  $Ax = 0$ . У неё существуют  $k = n - r$  линейно независимых решений, где  $n$  – число неизвестных,  $r$  – ранг матрицы  $A$ .

□ Будем предполагать, что базисный минор расположен в левом верхнем углу матрицы.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \dots & \mathbf{a}_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{r1} & \dots & \mathbf{a}_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Тогда строки  $a_1, \dots, a_r$  являются базисными, а  $a_{r+1}, \dots, a_m$  – их линейными комбинациями (по теореме о базисном миноре).

$$a_{r+1} = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r$$

$$\vdots$$

$$a_m = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_r a_r$$

Сделаем элементарные преобразования (обнулим эти строки):

$$a_{r+1} - (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r) \rightarrow a_{r+1}$$

$$\vdots$$

$$a_m - (\mu_1 a_1 + \dots + \mu_r a_r) \rightarrow a_m$$

Получим матрицу, у которой последние  $n - r$  строк нулевые:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что элементарные преобразования не меняют решений СЛАУ (каждому преобразованию соответствуют эквивалентные преобразования исходной СЛАУ  $\Rightarrow$  СЛАУ  $Ax = 0$  эквивалентна).

Получим систему, в которой слева стоят базисные (главные) переменные, а справа – свободные:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (*)$$

Придадим свободным переменным следующие наборы значений:  $\begin{cases} x_{r+1} = 1 \\ x_{r+2} = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_{r+1} = 0 \\ x_{r+2} = 1 \\ \dots \\ x_n = 0 \end{cases}, \dots,$

$$\begin{cases} x_{r+1} = 0 \\ x_{r+2} = 0 \\ \dots \\ x_n = 1 \end{cases}.$$

Для каждого набора свободных переменных решим СЛАУ относительно  $x_1, \dots, x_r$ . Эта СЛАУ всегда имеет единственное решение, так как её определитель  $(r \times r)$  – базисный минор  $M$ , и он не равен нулю (например, есть решение по формулам Крамера).

Получим следующее решение:

- для первого набора –  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{1r} \end{pmatrix};$
- для второго набора –  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{2r} \end{pmatrix};$



...

• для  $k$ -го набора –  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{k1} \\ \vdots \\ \varphi_{kr} \end{pmatrix}.$

Тогда  $\Phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \Phi_k = \begin{pmatrix} \varphi_{k1} \\ \vdots \\ \varphi_{kr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  являются решениями СЛАУ (\*), а следова-

тельно, и решениями исходной СЛАУ.

Покажем, что они линейно независимы. Рассмотрим равенство из определения:  $\alpha_1 \Phi_1 + \dots + \alpha_k \Phi_k = 0$ .

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_k \begin{pmatrix} \varphi_{k1} \\ \vdots \\ \varphi_{kr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Понимаем, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \Rightarrow$  по

определению линейной независимости  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$  линейно независимы.

Получили, что  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$  линейно независимы, их  $n-r$  штук, они являются решениями СЛАУ  $Ax = 0 \Rightarrow$  по определению – это ФСР. ■

###### 10. Сформулируйте критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей и докажите его.

ОСЛАУ  $Ax = 0$  с квадратной матрицей  $A$  имеет ненулевые решения  $\Leftrightarrow \det A = 0$ .

□ ( $\Rightarrow$ ) Предположим, что  $\det A \neq 0$ . Тогда ОСЛАУ имеет единственное решение (по правилу Крамера), и это решение – нулевое. Противоречие  $\Rightarrow \det A = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Знаем, что  $\det A = 0 \Rightarrow \text{Rg } A < n$ . Пусть  $\text{Rg } A = r$ . По теореме о существовании ФСР, найдётся  $n-r$  линейно независимых (а, значит, не равных нулю) решений ОСЛАУ  $Ax = 0$ . Они и есть искомые ненулевые решения. ■

###### 11. Докажите теорему о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений, то есть о том, что произвольное решение однородной СЛАУ может быть представлено в виде линейной комбинации элементов ФСР.

Пусть  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  – ФСР ОСЛАУ  $Ax = 0$ . Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде  $x = c_1 \Phi_1 + \dots + c_k \Phi_k$ , где  $c_1, \dots, c_k$  – некоторые числа.

□ Пусть  $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$  – произвольное решение ОСЛАУ  $Ax = 0$ . Предположим, что базисный ми-

нор матрицы  $A$  расположен в левом верхнем углу матрицы.

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы о существовании ФСР, выразим главные пе-

ременные через свободные: 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

Решим эту СЛАУ относительно неизвестных  $x_1, \dots, x_r$  (например, методом Гаусса или Крамера):

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_r = \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{rn}x_n \end{cases} \quad (\alpha_{ij} - \text{некоторые числа}) \quad (2)$$

Составим новую матрицу  $D_{n \times (k+1)}$ :

$$\begin{pmatrix} x_1^0 & \varphi_{11} & \dots & \varphi_{k1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r^0 & \varphi_{1r} & \dots & \varphi_{kr} \\ x_{r+1}^0 & \varphi_{1,r+1} & \dots & \varphi_{k,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & \varphi_{1n} & \dots & \varphi_{kn} \end{pmatrix}$$

Здесь  $\varphi_{ij}$  – координаты столбцов, образующих ФСР. Покажем, что  $\text{Rg } D = k$ .

1)  $\text{Rg } D \geq k$ , так как  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  – линейно независимы (по определению ФСР), а по теореме о ранге матрицы,  $\text{Rg } D$  есть максимальное число линейно независимых столбцов.

2)  $\text{Rg } D \leq k$ .

Столбцы  $x^0, \Phi_1, \dots, \Phi_k$  – решения исходной СЛАУ  $Ax = 0$ . Следовательно, из (2) получим, что:

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \alpha_{1,r+1}x_{r+1}^0 + \dots + \alpha_{1n}x_n^0, \\ \varphi_{11} &= \alpha_{1,r+1}\varphi_{1,r+1} + \dots + \alpha_{1n}\varphi_{1n}, \\ &\vdots \\ \varphi_{k1} &= \alpha_{1,r+1}\varphi_{k,r+1} + \dots + \alpha_{1n}\varphi_{kn}. \end{aligned}$$

То есть первая строка  $d_1$  матрицы  $D$  является линейной комбинацией строк  $d_{r+1}, \dots, d_n$ :  $d_1 = \alpha_{1,r+1}d_{r+1} + \dots + \alpha_{1n}d_n$ . Аналогично, с остальными строками вплоть до  $r$ -й:  $d_r = \alpha_{r,r+1}d_{r+1} + \dots + \alpha_{rn}d_n$ .

Сделаем элементарные преобразования:

$$\begin{aligned} d_1 - \alpha_{1,r+1}d_{r+1} - \dots - \alpha_{1n}d_n &\rightarrow d_1 \\ &\vdots \\ d_r - \alpha_{r,r+1}d_{r+1} - \dots - \alpha_{rn}d_n &\rightarrow d_r \end{aligned}$$

Получаем матрицу  $D_1$ , у которой первые  $r$  строк нулевые:

$$D \sim D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{r+1}^0 & \varphi_{1,r+1} & \dots & \varphi_{k,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & \varphi_{1n} & \dots & \varphi_{kn} \end{pmatrix}$$

$\text{Rg } D_1 \leq n - r = k$ . При элементарных преобразованиях ранг не изменяется  $\Rightarrow \text{Rg } D \leq k$ .

3) Таким образом,  $\text{Rg } D = k$ .

Заметим, что столбцы  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  являются базисными (они линейно независимы и их  $k = \text{Rg } D$  штук)  $\Rightarrow$  по теореме о базисном миноре столбец  $x^0$  – их линейная комбинация, то есть существуют числа  $c_1, \dots, c_k$ , такие что  $x^0 = c_1\Phi_1 + \dots + c_k\Phi_k$ . ■

### 3 модуль

**1. Сформулируйте и докажите утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.**

Любая подгруппа в  $(\mathbb{Z}, +)$  имеет вид  $k\mathbb{Z}$  (числа, кратные  $k$ ) для некоторого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

□  $k\mathbb{Z}$ , очевидно, является подгруппой. Докажем, что других нет.

Если  $H$  – подгруппа и такая, что  $H = \{0\}$ , то положим  $k := 0$ .

Иначе, берём  $k := \min(H \cap \mathbb{N} \neq \emptyset)$ .

( $\subseteq$ ) Тогда  $k\mathbb{Z} \subseteq H$ .

( $\supseteq$ ) Если  $a \in H$ , то  $a = qk + r, 0 \leq r < k \Rightarrow r = a - qk \in H$  (т.к.  $a \in H$  и  $qk \in H$ )  $\Rightarrow r = 0$ .  
 $H = k\mathbb{Z}$ . ■

## 2. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа (включая две леммы).

Пусть  $G$  – конечная группа и  $H \subseteq G$  – её подгруппа. Тогда  $|G| = |H| \cdot [G : H]$ .

□ Лемма 1.  $\forall g_1, g_2 \in G : g_1H = g_2H \vee g_1H \cap g_2H = \emptyset$ .

▷ Если  $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$ , то  $\exists h_1, h_2 \in H : g_1h_1 = g_2h_2 \Rightarrow g_1 = g_2h_2h_1^{-1} \xrightarrow{H} g_1H = g_2h_2h_1^{-1}H \subseteq g_2H$  (т.к.  $h_2h_1^{-1}H \in H$ ). Аналогично, существует и обратное включение  $\Rightarrow g_1H = g_2H$ . ◀

Лемма 2.  $\forall g \in G, \forall H \subseteq G : |gH| = |H|$ .

▷  $gH = \{g \cdot h \mid h \in H\}$

$|gH| \leq |H|$  (очевидно). Если  $gh_1 = gh_2$ , то  $g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ , т.е. совпадений нет. ◀

Любой элемент группы лежит в своём левом смежном классе по  $H$ . Смежные классы не пересекаются (по лемме 1) и любой из них содержит по  $|H|$  элементов (по лемме 2). ■

## 3. Докажите, что гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда его ядро тривиально.

Гомоморфизм инъективен  $\Leftrightarrow$  ядро этого гомоморфизма тривиально.

□ ( $\Rightarrow$ ) Пусть гомоморфизм  $f : G \rightarrow F$  инъективен, т.е.  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ . Рассмотрим  $\text{Ker } f = \{g \in G \mid f(g) = e_F\}$ . Знаем, что  $f(e_G) = e_F$  (по свойству гомоморфизма). Пусть  $f(x) = e_F$ . Имеем, что  $f(x) = f(e_G) = e_F \Rightarrow x = e_G$ , так как гомоморфизм инъективен. Значит, его ядро состоит только из  $\{e_G\}$ , т.е. оно тривиально.

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $\text{Ker } f = \{e_G\}$ . Пусть гомоморфизм не инъективен, т.е.  $\exists x \neq y : f(x) = f(y)$ .

$$\begin{aligned} e_F &= f(x) \cdot f^{-1}(y) \\ &= f(x) \cdot f(y^{-1}) \\ &= f(x * y^{-1}) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $x * y^{-1} \in \text{Ker } f$ , но ядро тривиально  $\Rightarrow x * y^{-1} = e_G \Rightarrow x = y$ . Получили противоречие  $\Rightarrow$  гомоморфизм  $f$  инъективен. ■

## 4. Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.

Пусть  $H \subseteq G$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $H \triangleleft G$ ;
- 2)  $\forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H$ ;
- 3)  $\forall g \in G : gHg^{-1} = H$ .

□ (1  $\Leftrightarrow$  3) Условие нормальности:  $\forall g \in G : gH = Hg \xrightarrow{g^{-1}} gHg^{-1} = Hgg^{-1} = H$ .

(1  $\Rightarrow$  2) Очевидно: (2) – более слабое утверждение, чем (3).

(2  $\Rightarrow$  3)  $\forall h \in H : h = gg^{-1}hgg^{-1} = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$ , так как  $g^{-1}hg \in H$  (по условию (2), но взяли  $g^{-1}$  вместо  $g$ )  $\Rightarrow H \subseteq gHg^{-1}$ . ■

## 5. Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.

$H \triangleleft G \Leftrightarrow H = \text{Ker } f$ , где  $f$  – гомоморфизм из  $G$  (куда отображает – неважно).

□ ( $\Leftarrow$ ) Если  $f : G \rightarrow F$  – гомоморфизм, то  $\forall z \in \text{Ker } f, \forall g \in G$  покажем, что  $g^{-1}zg \in \text{Ker } f$ .

$$\begin{aligned} f(g^{-1}zg) &= f(g^{-1})f(z)f(g) \\ &= f^{-1}(g)f(z)f(g) \\ &= f^{-1}(g)e_Ff(g) \\ &= f^{-1}(g)f(g) = e_F \end{aligned}$$

По определению ядра  $g^{-1}zg \in \text{Ker } f$ .

$g^{-1}(\text{Ker } f)g \subseteq \text{Ker } f \Rightarrow \text{Ker } f$  – нормальная подгруппа (из критерия нормальности через сопряжение, взяли  $g^{-1}$  вместо  $g$ ).

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $H$  – нормальная подгруппа. Необходимо доказать, что существует гомоморфизм  $f$ , такой что  $H = \text{Ker } f$ .

В роли  $f$  может выступать естественный гомоморфизм  $\varepsilon : G \rightarrow G/H$ , такой что  $\varepsilon : a \mapsto aH$  – элементу  $a$  сопоставляется смежный класс, содержащий его. Этот гомоморфизм существует, так как  $H$  – нормальная подгруппа, следовательно  $G/H$  корректно определена.  $\text{Ker } \varepsilon$  – множество всех элементов, которые перешли в  $e \cdot H = H$  – исходная нормальная подгруппа. ■

## 6. Сформулируйте и докажите теорему о гомоморфизме групп.

Пусть отображение  $f : G \rightarrow F$  – гомоморфизм групп. Тогда образ гомоморфизма,  $\text{Im } f = \{a \in F \mid \exists g \in G : f(g) = a\}$ , изоморфен (как группа) факторгруппе  $G/\text{Ker } f$ , т.е.  $G/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$ .

□ Рассмотрим отображение  $\tau : G/\text{Ker } f \rightarrow F$ , заданное формулой  $\tau(g\text{Ker } f) := f(g) \in \text{Im } f \subseteq F$ .

Докажем, что  $\tau$  и есть искомый изоморфизм. Проверим корректность: т.е. покажем, что от представителя смежного класса ничего не зависит.  $\forall h_1, h_2 \in \text{Ker } f$ :

$$\begin{aligned} f(gh_1) &= f(g) \cdot f(h_1) \\ &= f(g) \cdot e_F \\ &= f(g) \cdot f(h_2) \\ &= f(gh_2) \end{aligned}$$

Действительно,  $\tau$  определён корректно.

Отображение  $\tau$  сюръективно ( $\tau : G/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$ ). Покажем, что оно инъективно.

$f(g) = e_F \Leftrightarrow g \in \text{Ker } f = H$ , т.е. ядро гомоморфизма состоит только из нейтрального элемента в факторгруппе. Воспользуемся критерием инъективности:  $\tau$  инъективно  $\Leftrightarrow \text{Ker } \tau$  тривиально (состоит из  $e \cdot \text{Ker } f$ )  $\Rightarrow \tau$  – биективно.

Остаётся проверить, что  $\tau$  – гомоморфизм:

$$\begin{aligned} \tau((g_1 \cdot \text{Ker } f) \cdot (g_2 \cdot \text{Ker } f)) &= \tau(g_1 g_2 \text{Ker } f) \\ &= f(g_1 \cdot g_2) \\ &= f(g_1) \cdot f(g_2) \\ &= \tau(g_1 \text{Ker } f) \cdot \tau(g_2 \text{Ker } f). \end{aligned}$$

Получили, что  $\tau((g_1 \text{Ker } f)(g_2 \text{Ker } f)) = \tau(g_1 \text{Ker } f) \cdot \tau(g_2 \text{Ker } f)$ .

$\tau$  – биективный гомоморфизм, т.е. изоморфизм. ■

## 7. Докажите, что центр группы является её нормальной подгруппой.

$Z(G) \triangleleft G$ .

□ Покажем, что  $Z(G)$  является подгруппой. Для того, чтобы  $H$  было подгруппой:  $\forall a, b \in H : ab^{-1} \in H$ . Поэтому проверим, что  $\forall a, b \in Z(G) : ab^{-1} \in Z(G)$ , т.е.  $ab^{-1}g \stackrel{?}{=} gab^{-1}$ .

$$\begin{aligned} ab^{-1}g &= ab^{-1}(g^{-1})^{-1} \\ &= a(g^{-1}b)^{-1} \\ &= a(bg^{-1})^{-1} \\ &= a(g^{-1})^{-1}b^{-1} \\ &= agb^{-1} \\ &= gab^{-1} \end{aligned}$$

Т.е.  $Z(G)$  – подгруппа.  $Z(G)$  – это нормальная подгруппа, так как её элементы коммутируют с любыми элементами группы и  $gZ(G) = Z(G)g$ . ■

## 8. Сформулируйте и докажите утверждение о том, чему изоморфна факторгруппа группы по её центру.

$G/Z(G) \cong \text{Inn } G$ .

□ Факторгруппа  $G/Z(G)$  корректно определена, так как  $Z(G) \triangleleft G$ .

Рассмотрим отображение  $f : G \rightarrow \text{Aut } G$ , заданное формулой  $f : g \mapsto \varphi_g(h) = ghg^{-1}$ .

Тогда  $\text{Im } f = \text{Inn } G$  по определению и  $\text{Ker } f = Z(G)$ , так как  $\forall h \in G : \varphi_g(h) = ghg^{-1} = h = \text{id}(h) \Leftrightarrow gh = hg$ . Тогда это верно для тех элементов, которые коммутируют с любыми, т.е. элементов из центра.

Применим теорему о гомоморфизме групп:  $G/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$  и получим, что  $G/Z(G) \cong \text{Inn } G$ . ■

### 9. Сформулируйте и докажите теорему Кэли.

Любая конечная группа порядка  $n$  изоморфна некоторой подгруппе группы  $S_n$ .

□ Пусть  $|G| = n$ . Рассмотрим отображение  $L_a : G \rightarrow G$ , определённое формулой  $L_a(g) = a \cdot g$  – умножение слева на элемент  $a$ .

Покажем, что  $L_a$  – биекция.

Пусть  $e, g_2, g_3, \dots, g_n$  – элементы группы. Тогда  $a \cdot e, a \cdot g_2, a \cdot g_3, \dots, a \cdot g_n$  – те же самые элементы, но в другом порядке. (Если  $ag_i = ag_j \Leftrightarrow a^{-1} \cdot a \cdot g_i = a^{-1} \cdot a \cdot g_j \Leftrightarrow g_i = g_j$ )

Следовательно,  $L_a$  – перестановка элементов группы. При этом относительно операции композиции отображений  $\forall L_a : \exists (L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$  – существует обратный элемент и нейтральный элемент  $\text{id} = L_e$ , а также выполняется ассоциативность.

Из ассоциативности в  $G$ :  $L_{ab}(g) = (a \cdot b) \cdot g = a \cdot (b \cdot g) = L_a(L_b(g)) \Leftrightarrow L_{ab} = L_a \circ L_b \Rightarrow$  множество  $L_e, L_{g_2}, L_{g_3}, \dots, L_{g_n}$  образуют подгруппу  $H$  в группе  $S(G)$  всех биективных отображений на себя, т.е. в  $S_n$ .

Искомый изоморфизм  $f : a \in G \mapsto L_a \in H \subseteq S_n$ . ■

### 10. Докажите, что характеристика поля может быть либо простым числом, либо нулем.

Характеристика поля может быть либо простым числом  $p$ , либо равна нулю.

□ Пусть  $p \neq 0 \Rightarrow p \geq 2$  (найдутся 1 и 0, такие что  $1 \neq 0$ ).

Если  $p = m \cdot k$ , где  $1 \leq m, k < p$  (т.е.  $p$  – составное), то  $0 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{m \cdot k} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_m \cdot \underbrace{(1 + \dots + 1)}_k$ .

Так как  $m \cdot k = p$  минимально, то обе скобки не равны нулю  $\Rightarrow m$  и  $k$  – делители нуля, а их в поле нет по определению. Противоречие  $\Rightarrow p$  – простое. ■

### 11. Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.

Пусть  $P$  – поле, а  $P_0$  – его простое подполе. Тогда:

1) если  $\text{char } P = p > 0$ , то  $P_0 \cong \mathbb{Z}_p$ ;

2) если  $\text{char } P = 0$ , то  $P_0 \cong \mathbb{Q}$ .

□ Рассмотрим нейтральный элемент по умножению:  $1 \in P$ .  $\langle 1 \rangle \subseteq (P, +)$  – циклическая подгруппа по сложению, порождённая 1.

$\langle 1 \rangle$  является подкольцом в  $P$ . Так как любое подполе  $P$  содержит 1, то оно содержит и  $\langle 1 \rangle$ , т.е.  $\langle 1 \rangle \subseteq P_0$ .

1) если  $\text{char } P = p > 0$ , то  $\langle 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p$  – поле  $\Rightarrow P_0 = \langle 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p$ .

2) если  $\text{char } P = 0$ , то  $\langle 1 \rangle \cong \mathbb{Z}$ , однако  $\mathbb{Z}$  не поле.

В  $P_0$  должны быть обратные элементы по умножению (все дроби вида  $\frac{a}{b}$ , где  $a, b \in \langle 1 \rangle, b \neq 0$ ). Они все образуют подполе, изоморфное  $\mathbb{Q}$ . ■

### 12. Сформулируйте и докажите критерий того, что кольцо вычетов по модулю $n$ является полем.

$\mathbb{Z}_n$  является полем  $\Leftrightarrow n$  – простое.

□  $\forall n : \mathbb{Z}_n$  является кольцом с единицей.

Если  $n$  является составным, то  $n = m \cdot k$  и  $\overline{m} \cdot \overline{k} = \overline{0} \Rightarrow$  в кольце делитель нуля  $\Rightarrow$  это не поле. Если  $n = p$  – простое, то рассмотрим  $\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{p-1}$  – все классы вычетов, кроме нулевого  $\overline{0}$ .

Возьмём произвольный элемент  $\overline{s}$  и докажем, что  $\exists \overline{s}^{-1}$ , такой что  $\overline{s}\overline{s}^{-1} = \overline{1}$ . Рассмотрим множество  $\{\overline{s} \cdot \overline{1}, \overline{s} \cdot \overline{2}, \dots, \overline{s} \cdot \overline{p-1}\} = A; \overline{0} \notin A$ . (Так как  $p$  – простое, а среди чисел нет нуля или

кратного  $p$ .)

Заметим, что в  $A$  стоят те же элементы, но в другом порядке (если  $\overline{k_1} \cdot \overline{s} = \overline{k_2} \cdot \overline{s} \Leftrightarrow (\overline{k_1} - \overline{k_2}) \cdot \overline{s} = \overline{0}$ , а это возможно только при  $\overline{k_1} = \overline{k_2}$ ).

Следовательно, в наборе  $\overline{s}, \overline{s} \cdot 2, \dots, \overline{s} \cdot \overline{p-1}$  найдётся  $1 \Rightarrow \exists \overline{s}^{-1} : \overline{s} \cdot \overline{s}^{-1} = 1 \Rightarrow$  произвольно взятый  $\overline{s}$  обратим. ■

### 13. Докажите, что ядро гомоморфизма колец является идеалом.

$\text{Ker } \varphi$  (по сложению), где  $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$  – гомоморфизм колец, всегда является идеалом в кольце  $K_1$ .

□ Идеал – подгруппа в  $(K_1, +)$ , такая что  $\forall a \in \text{Ker } \varphi, \forall r \in K_1 : a \cdot r \in \text{Ker } \varphi \wedge r \cdot a \in \text{Ker } \varphi$ .

Любой гомоморфизм колец является гомоморфизмом их аддитивных групп  $\Rightarrow \text{Ker } \varphi$  является нормальной подгруппой в  $(K_1, +)$ .

Пусть  $a \in \text{Ker } \varphi$ , т.е.  $\varphi(a) = 0$ . Берём  $a \cdot r$  и рассмотрим  $\varphi(a \cdot r) = \varphi(a) \cdot \varphi(r) = 0 \cdot \varphi(r) = 0 \in \text{Ker } \varphi$  и, аналогично,  $\varphi(r \cdot a) = \varphi(r) \cdot 0 = 0 \in \text{Ker } \varphi$ . ■

### 14. Сформулируйте и докажите утверждение о том, когда факторкольцо кольца многочленов над полем само является полем.

Факторкольцо  $P[x]/\langle f(x) \rangle$  является полем  $\Leftrightarrow f(x)$  неприводим над полем  $P$ .

□ ( $\Rightarrow$ ) От противного. Если  $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ , где  $0 < \deg f_1, \deg f_2 < \deg f$  – т.е.  $f$  не является неприводимым, то  $\overline{f_1}, \overline{f_2} \in P[x]/\langle f(x) \rangle$  отличны от нуля, но  $\overline{f_1(x)} \cdot \overline{f_2(x)} = \overline{f(x)} = \overline{0} \Rightarrow$  в  $P[x]/\langle f(x) \rangle$  есть делители нуля  $\Rightarrow$  это не поле.

( $\Leftarrow$ ) Покажем, что если  $f(x)$  неприводим, то любой класс вычетов  $\overline{a(x)} \neq \overline{0}$  обратим.

Представитель  $\overline{a(x)}$  – это некоторый многочлен  $a(x)$ , такой что  $\deg a(x) < \deg f(x)$ . Так как  $f(x)$  неприводим, то он взаимно прост с  $a(x) \Rightarrow \exists b(x), c(x) : a \cdot b + c \cdot f = 1 = \text{НОД}(a, f)$ , т.е.  $\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{c} \cdot \overline{f} = \overline{1}$ .  $\overline{c} \cdot \overline{f} = \overline{0}$ , поэтому:  $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1} \pmod{\langle f(x) \rangle}$ , т.е.  $\overline{b}$  – обратный элемент к  $\overline{a}$  в  $P[x]/\langle f(x) \rangle \Rightarrow P[x]/\langle f(x) \rangle$  – поле по определению. ■

### 15. Выпишите и докажите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.

Пусть задано линейное пространство  $L$ ,  $x \in L$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  – базисы в  $L$ ;  $x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ x_2^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix}$ ,  $x^b = \begin{pmatrix} x_1^b \\ x_2^b \\ \vdots \\ x_n^b \end{pmatrix}$  –

столбцы координат вектора  $x$  в базисах  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  соответственно. Тогда  $x^b = T_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} x^a$ .

□ Докажем, что  $x^a = T_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}} x^b$ . Тогда из невырожденности матрицы перехода будет следовать нужная формула.

$$x = \mathbf{a} \cdot x^a$$

$$\begin{aligned} &= (a_1 \quad \dots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix} \\ &= x_1^a a_1 + \dots + x_n^a a_n \\ &= \mathbf{b} \cdot x^b \end{aligned}$$

$\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot T_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot x^a = \mathbf{a} \cdot T_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}} \cdot x^b$ , а так как разложение по базису единственно, то  $x^a = T_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}} \cdot x^b \Rightarrow x^b = T_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} \cdot x^a$ . ■

### 16. Выпишите формулу для преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса и докажите её.

Пусть  $B_e$  – матрица билинейной формы в базисе  $\mathbf{e}$ ,  $B_f$  – в базисе  $\mathbf{f}$ , а  $U$  – матрица перехода от базиса  $\mathbf{e}$  к базису  $\mathbf{f}$ . Тогда  $B_f = U^T \cdot B_e \cdot U$ .

□  $b(x, y) = (x^e)^T \cdot B_e \cdot y^e$ .

Здесь  $x^e$  – столбец координат  $x$  в базисе  $\mathbf{e}$  (аналогично для  $y^e$ ).

Подставим в первое равенство следующие выражения для  $x^e$  и  $y^e$ :

$$\begin{cases} x^e = Ux^f \\ y^e = Uy^f \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{aligned} b(x, y) &= (x^e)^T \cdot B_e \cdot y^e \\ &= (Ux^f)^T \cdot B_e \cdot (Uy^f) \\ &= (x^f)^T \cdot \underbrace{U^T \cdot B_e \cdot U}_{B_f} \cdot y^f \\ &= (x^f)^T \cdot B_f \cdot (y^f) \end{aligned}$$

Следовательно,  $B_f = U^T \cdot B_e \cdot U$  (так как  $x$  и  $y$  – произвольные векторы и можно выбрать векторы базиса). ■

### 17. Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса и докажите её.

Пусть  $\varphi$  – линейное отображение из линейного пространства  $V_1$  в линейное пространство  $V_2$ . Пусть  $A_{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}$  – матрица линейного отображения в паре базисов:  $\mathcal{E}_1$  – базис в  $V_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  – базис в  $V_2$ , и пусть даны две матрицы перехода:  $T_1$  – матрица перехода от  $\mathcal{E}_1$  к  $\mathcal{E}'_1$  – в  $V_1$ ,  $T_2$  – от  $\mathcal{E}_2$  к  $\mathcal{E}'_2$  – в  $V_2$ . Тогда  $A_{\mathcal{E}'_1\mathcal{E}'_2} = T_2^{-1} \cdot A_{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \cdot T_1$ .

□  $x^{\mathcal{E}'_1} = T_1^{-1}x^{\mathcal{E}_1}$  – формула для замены координат в  $V_1$ .

$x^{\mathcal{E}'_2} = T_2^{-1}x^{\mathcal{E}_2}$  – формула для замены координат в  $V_2$ .

Пусть  $y$  – образ  $x$  под действием  $\varphi$ , т.е.  $y = \varphi(x)$ . Тогда, зная, что  $(f(x))^e = A_e x^e$ , имеем  $y^{\mathcal{E}_2} = A_{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}x^{\mathcal{E}_1}$  и  $y^{\mathcal{E}'_2} = A_{\mathcal{E}'_1\mathcal{E}'_2}x^{\mathcal{E}'_1}$ . Подставим:  $T_2^{-1}y^{\mathcal{E}_2} = A_{\mathcal{E}'_1\mathcal{E}'_2}T_1^{-1}x^{\mathcal{E}_1} \Rightarrow y^{\mathcal{E}_2} = T_2 \cdot A_{\mathcal{E}'_1\mathcal{E}'_2} \cdot T_1^{-1} \cdot x^{\mathcal{E}_1}$ , а  $T_2 \cdot A_{\mathcal{E}'_1\mathcal{E}'_2} \cdot T_1^{-1} = A_{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}$ , поэтому  $A_{\mathcal{E}'_1\mathcal{E}'_2} = T_2^{-1}A_{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \cdot T_1$ . ■

### 18. Сформулируйте и докажите три следствия из теоремы Лагранжа.

*Следствие 1:* Пусть  $G$  – конечная группа и  $g \in G$ . Тогда порядок элемента  $g$  делит порядок группы.

*Следствие 2:* Пусть  $G$  – конечная группа. Тогда  $g^{|G|} = e$ .

*Следствие 3 (Малая теорема Ферма):* Пусть  $\bar{a}$  – ненулевой вычет по простому модулю  $p$ . Тогда  $\bar{a}^{p-1} = \bar{1}$ .

□ 1) Возьмём  $H = \langle g \rangle$ . Мы знаем, что  $|\langle g \rangle| = \text{ord}(g)$ .  $|G| = |\langle g \rangle| \cdot [G : \langle g \rangle]$ , т.е.  $\text{ord}(g)$  делит  $|G|$ .

2) Применим следствие 1:  $|G| = \text{ord}(g) \cdot s \Rightarrow g^{|G|} = g^{\text{ord}(g) \cdot s} = (g^{\text{ord}(g)})^s = e^s = e$ .

3) Это в точности следствие 2 ( $g^{|G|} = e$ ), применённое к группе  $\mathbb{Z}_p^* = (\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$ :  $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$  и  $\bar{a}^{|\mathbb{Z}_p^*|} = \bar{1} = e$ . ■

### 19. Что такое сумма и прямая сумма подпространств? Сформулируйте и докажите критерий того, что сумма подпространств является прямой.

*Определения:* Множество  $H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in H_1 \wedge x_2 \in H_2\}$  называется суммой подпространств  $H_1$  и  $H_2$ .

Сумма подпространств  $H_1$  и  $H_2$  называется прямой и обозначается как  $H_1 \oplus H_2$ , если  $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ , т.е. тривиально.

*Критерий:*  $H_1 + H_2$  – прямая сумма  $\Leftrightarrow \forall x \in H_1 + H_2$  единственным образом представляется в виде  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1 \in H_1$ ,  $x_2 \in H_2$ .

□ ( $\Rightarrow$ ) Предположим, что существует два таких разложения:  $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ , где  $x_1, y_1 \in H_1$ ,  $x_2, y_2 \in H_2$ .

Но тогда:  $\underbrace{x_1 - y_1}_{\in H_1} = \underbrace{y_2 - x_2}_{\in H_2} = 0$  (так как пересечение тривиально)  $\Rightarrow x_1 = y_1$  и  $x_2 = y_2$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть представление единственно:  $x = x_1 + x_2$ . Если предположить, что  $\exists x \neq 0 : x \in H_1 \cap H_2$ , то  $\forall \alpha \in \mathbb{F} : \alpha x \in H_1$  (по определению подпространства) и  $\alpha x \in H_2$ . Тогда  $\forall \beta \in \mathbb{F} : x = \underbrace{(1 - \beta)x}_{\in H_1} + \underbrace{\beta x}_{\in H_2} \Rightarrow$  представление не единственно ( $\beta$  – любое число из  $\mathbb{F}$ ). Противоречие. ■



**20. Сформулируйте и докажите утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.**

Пусть  $H_1$  и  $H_2$  – подпространства в  $L$ . Тогда  $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2$ .

□ Рассмотрим базис  $H_1 \cap H_2$ . Дополним его до базиса в  $H_1$  и до базиса в  $H_2$ .

Пусть  $\dim H_1 = n$ ,  $\dim H_2 = m$ ,  $\dim H_1 \cap H_2 = r$ .

Рассмотрим набор векторов  $e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{n-r}, w_1, \dots, w_{m-r}$ , где  $e_1, \dots, e_r$  – базис  $H_1 \cap H_2$ ,  $v_1, \dots, v_{n-r}$  – дополнение до базиса в  $H_1$ ,  $w_1, \dots, w_{m-r}$  – дополнение до базиса в  $H_2$ .

Векторы из  $H_1$  выражаются через  $e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{n-r}$ .

Векторы из  $H_2$  выражаются через  $e_1, \dots, e_r, w_1, \dots, w_{m-r}$ .

Все эти векторы в совокупности составляют базис  $H_1 + H_2$ .

Так как любой вектор из  $H_1 + H_2$  может быть выражен через них, а также все векторы из данного набора линейно независимы (потому что  $H_1$  и  $H_2$  пересекаются по  $e_1, \dots, e_r$ , а  $v_i$  и  $w_i$  лежат в *разных* подпространствах)  $\Rightarrow \dim(H_1 + H_2) = r + (n - r) + (m - r) = n + m - r = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2$ . ■

**21. Сформулируйте и докажите (включая лемму) теорему об инвариантности ранга матрицы квадратичной формы.**

Пусть  $Q$  – квадратичная форма на линейном пространстве  $V$ ,  $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$  и  $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_n\}$  – базисы в  $V$ . Пусть  $A$  – матрица  $Q(x)$  в базисе  $\mathbf{a}$ ,  $B$  – в базисе  $\mathbf{b}$ . Тогда  $\text{Rg } A = \text{Rg } B$ .

□ *Лемма.* Пусть  $A, S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\det S \neq 0$ . Тогда  $\text{Rg}(A \cdot S) = \text{Rg } A = \text{Rg}(S \cdot A)$ , т.е. умножение на невырожденную матрицу не меняет ранг матрицы  $A$ .

▷  $\text{Rg}(A \cdot S) \leq \text{Rg } A$ , так как столбцы матрицы  $A \cdot S$  – это линейные комбинации столбцов матрицы  $A$ , и ранг – максимальное количество линейно независимых столбцов (по теореме о ранге матрицы), а число линейно независимых столбцов не может вырасти.

$\text{Rg } A \geq \text{Rg}(A \cdot S) \geq \text{Rg}((A \cdot S) \cdot S^{-1}) = \text{Rg } A \Rightarrow \text{Rg}(A \cdot S) = \text{Rg } A$  ◀

Знаем, что  $B = S^T \cdot A \cdot S$ , где  $S$  – матрица перехода от базиса  $\mathbf{a}$  к базису  $\mathbf{b}$ , а  $\det S \neq 0$ . Следовательно, по лемме, при умножении  $A$  на невырожденные матрицы  $S$  и  $S^T$  её ранг не изменится  $\Rightarrow \text{Rg } B = \text{Rg } A$ . ■

**22. Сформулируйте и докажите утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.**

Пусть  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  – линейное отображение. Тогда  $\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim V_1 = m$ .

□ Выберем базис в  $V_1$ :  $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Тогда любой вектор  $x$  можно представить в виде  $x = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m \Rightarrow \varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_m \varphi(e_m)$ , т.е.  $\text{Im } \varphi = L(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)) \Rightarrow \dim \text{Im } \varphi = \text{Rg } A$  – рангу матрицы линейного отображения.

Ядро линейного отображения записывается в виде СЛАУ  $Ax = 0 \Rightarrow \dim \text{Ker } \varphi$  – это число элементов в ФСР ОСЛАУ  $Ax = 0$ . Но число элементов в ФСР – это число неизвестных (а оно равно количеству векторов в базисе) за вычетом  $\text{Rg } A$ , т.е.:

$m - \text{Rg } A = \dim \text{Ker } \varphi \Rightarrow \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = m$ . ■

## 4 модуль

**1. Сформулируйте и докажите утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.**

$\lambda$  – собственное значение линейного оператора  $A \Leftrightarrow \lambda$  – корень характеристического уравнения.

□ ( $\Rightarrow$ ) По определению:  $\lambda$  принадлежит спектру  $\Leftrightarrow \exists x \neq 0 : Ax = \lambda x$ , т.е.  $Ax = \lambda Ix$ , где  $I$  – тождественный оператор.

$(A - \lambda I)x = 0$ . Запишем это равенство в некотором базисе:  $(A_e - \lambda E) \cdot x^e = 0$ . Здесь  $A_e$  – матрица линейного оператора в базисе  $\mathbf{e}$ ,  $x^e$  – столбец координат вектора  $x$  в базисе  $\mathbf{e}$ . Это ОСЛАУ. Она имеет ненулевое решение  $\Rightarrow \det(A_e - \lambda E) = 0$  – характеристическое уравнение, т.е.  $\lambda$  – корень характеристического уравнения.



( $\Leftarrow$ ) Если  $\lambda$  – корень характеристического уравнения, то в заданном базисе выполняется равенство  $\det(A_e - \lambda E) = 0 \Rightarrow$  соответствующая СЛАУ с матрицей  $(A_e - \lambda E)$  имеет ненулевое решение (по критерию существования нетривиального решения ОСЛАУ с квадратной матрицей). Обозначим это решение  $x^e$ . Его можно интерпретировать как набор координат некоторого вектора, для которого выполняется  $(A - \lambda I)x = 0, x \neq 0$ . А это по определению означает, что  $x$  – собственный вектор, а  $\lambda$  – собственное значение. ■

## 2. Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям.

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  – собственные значения линейного оператора  $A$ , причём  $\forall i \forall j \neq i : \lambda_i \neq \lambda_j$ , а  $v_1, \dots, v_k$  – соответствующие собственные векторы. Тогда  $v_1, \dots, v_k$  линейно независимы.

□ Докажем утверждение по индукции.

При  $k = 1$  всё верно: так как собственный вектор по определению ненулевой и, соответственно, линейно независим.

Пусть утверждение верно для  $k = m$ . Добавим ещё один собственный вектор  $v_{m+1}$ . Докажем, что система  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$  осталась линейно независимой.

Рассмотрим равенство

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} = 0 \quad (1)$$

Применим к нему линейный оператор  $A$  и получим равенство

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0 \quad (2)$$

Умножим (1) на  $\lambda_{m+1}$  и вычтем его из (2):

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) v_1 + \dots + \alpha_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) v_m = 0$$

Все  $\lambda_i$  различны, а  $v_1, \dots, v_m$  – линейно независимы, а значит: 
$$\begin{cases} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{различность} \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0 \Rightarrow$  (1) можно записать в виде  $\alpha_{m+1} v_{m+1} = 0$ , а так как  $v_{m+1}$  – собственный вектор, то  $v_{m+1} \neq 0 \Rightarrow \alpha_{m+1} = 0$ . Все  $\alpha_i = 0$ , а значит  $v_1, \dots, v_{m+1}$  линейно независимы по определению. ■

## 3. Сформулируйте и докажите критерий диагональности матрицы оператора.

Матрица линейного оператора является диагональной в данном базисе  $\Leftrightarrow$  все векторы базиса являются собственными векторами для данного линейного оператора.

□ ( $\Rightarrow$ ) По определению матрицы линейного оператора, в  $j$ -м столбце стоят координаты вектора

$$A(e_j) \text{ в базисе } e. \text{ Если матрица диагональна, то её } j\text{-й столбец имеет вид } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ то есть } A(e_j) =$$

$0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_{j-1} + \lambda_j e_j + 0 \cdot e_{j+1} + \dots + 0 \cdot e_n \Rightarrow A e_j = \lambda_j e_j$ , то есть по определению собственного вектора,  $e_j$  – собственный вектор с собственным значением  $\lambda_j$ . Он не равен нулю, так как это элемент базиса, а там не бывает нулевых векторов. Так как это верно для любых  $j = \overline{1, n}$ , то все базисные векторы собственные, а на диагонали стоят собственные значения.

( $\Leftarrow$ ) По определению собственного вектора:  $A e_j = \lambda_j e_j \Rightarrow$  если записать по определению матрицу линейного оператора, то все элементы, кроме диагональных будут нулевыми, а на диагонали будет стоять число  $\lambda_j$ . ■

## 4. Каким свойством обладает оператор в $n$ -мерном вещественном пространстве, у характеристического многочлена которого есть $n$ различных действительных корней? Ответ обоснуйте.

Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в  $V$ , где  $\dim V = n$ , имеет  $n$  попарно различных корней, то линейный оператор диагонализуем.

□ Если  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  – корень характеристического уравнения, то ему можно сопоставить хотя бы один собственный вектор  $v_i$ . Но система векторов  $v_1, \dots, v_n$  (отвечающая различным собственным значениям) будет линейно независимой, а их число равно  $\dim V \Rightarrow$  они образуют базис в  $V$ , и этот базис состоит из собственных векторов  $\Rightarrow$  в нём матрица линейного оператора диагональна. ■

### 5. Выпишите и докажите неравенство Коши—Буняковского. Выпишите и докажите неравенство треугольника.

*Неравенство Коши—Буняковского:*  $\forall x, y \in \mathcal{E} : |g(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

□  $\forall \alpha \in \mathbb{R} : g(\alpha x - y, \alpha x - y) \geq 0$  (скалярное произведение положительно определено). Раскроем по линейности:  $\alpha \cdot g(x, \alpha x - y) - g(y, \alpha x - y) = \alpha^2 \cdot g(x, x) - \alpha \cdot g(x, y) - \alpha \cdot g(y, x) + g(y, y)$ . По симметричности имеем, что выражение выше равно  $\alpha^2 \cdot g(x, x) - 2\alpha \cdot g(x, y) + g(y, y) = \alpha^2 \|x\|^2 - 2\alpha \cdot g(x, y) + \|y\|^2 \geq 0 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$ , то есть  $D \leq 0$  – квадратное уравнение имеет не более одного корня.

$$D = 4\alpha^2 \cdot g(x, y)^2 - 4\alpha^2 \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow |g(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad \blacksquare$$

*Неравенство треугольника:*  $\forall x, y \in \mathcal{E} : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

□  $\|x + y\|^2 = g(x + y, x + y) = g(x, x) + 2g(x, y) + g(y, y) \stackrel{\text{К.-Б.}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ , и обе части (т.е.  $\|x + y\|$  и  $\|x\| + \|y\|$ ) неотрицательны  $\Rightarrow$  выполнено неравенство треугольника. ■

### 6. Докажите теорему о том, что евклидово пространство можно представить в виде прямой суммы подпространства и его ортогонального дополнения.

Если  $H$  – подпространство в линейном пространстве  $V$ , то  $V$  можно представить в виде  $V = H \oplus H^\perp$ , где  $H^\perp$  – ортогональное дополнение.

□ Легко проверить, что  $H^\perp$  – подпространство в  $V$ : оно замкнуто относительно операции сложения и умножения на число.

$H^\perp$  является подпространством в  $V$ , поэтому можем рассмотреть  $H + H^\perp$ . Нужно доказать, что сумма – прямая и  $V = H + H^\perp$ .

Если  $x \in H \cap H^\perp$ , то  $g(x, x) = 0 \stackrel{\text{невыврожденность } g}{\Leftrightarrow} x = 0$ , т.е.  $H \cap H^\perp = \{0\} \Rightarrow$  сумма прямая.

Пусть  $f_1, \dots, f_m$  – ортонормированный базис в  $H$  (он всегда существует). Дополним его до базиса в  $V$  векторами  $f_{m+1}, \dots, f_n$ . Применим процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Получим

$$\underbrace{f_1, \dots, f_m}_{\text{уже были ОНБ}}, \underbrace{e_{m+1}, \dots, e_n}_{\text{новые векторы}}.$$

$e_{m+1}, \dots, e_n$  ортогональны  $f_1, \dots, f_m$  (базис в  $H$ )  $\Rightarrow$  они ортогональны всему  $H$ , и любой вектор

из  $V$  можно представить в виде  $x = \underbrace{x_1 f_1 + \dots + x_m f_m}_{\in H} + \underbrace{x_{m+1} e_{m+1} + \dots + x_n e_n}_{\in H^\perp}$ , т.е.  $\forall x \in V : x =$

$y + z$ , где  $y = x_1 f_1 + \dots + x_m f_m \in H$ ,  $z = x_{m+1} e_{m+1} + \dots + x_n e_n \in H^\perp$ . А это и означает, что  $V = H \oplus H^\perp$ . ■

### 7. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису и докажите её. Что происходит с определителем матрицы Грама при применении процесса ортогонализации Грама–Шмидта? Что можно сказать про знак определителя матрицы Грама? Ответы обоснуйте.

Пусть  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  – матрицы Грама в базисах  $e$  и  $e'$  соответственно, а  $U$  – матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$ . Тогда  $\Gamma' = U^T \Gamma U$ .

□ Эта формула верна, так как матрица Грама  $\Gamma$  – это матрица билинейной формы  $g(x, y)$ . ■

Определитель матрицы Грама (грамиан) не изменяется при применении процесса ортогонализации Грама–Шмидта.

$$\square \operatorname{Gr}(a_1, \dots, a_k) = \det \Gamma(a_1, \dots, a_k).$$

Матрица перехода от базиса  $a_1, \dots, a_n$  к ортогональному (не нормированному) базису  $b_1, \dots, b_n$

имеет вид  $U_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (из процесса Грама–Шмидта)  $\Rightarrow \det U_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} = 1$ .

$$\det \Gamma_{\mathbf{b}} = \det(U^T \Gamma_{\mathbf{a}} U) = (\det U)^2 \cdot \det \Gamma_{\mathbf{a}} = 1 \cdot \det \Gamma_{\mathbf{a}} = \det \Gamma_{\mathbf{a}}. \quad \blacksquare$$

Определитель матрицы Грама положительный.

$$\square \det \Gamma' = \det(U^T \Gamma U) = \det U^T \cdot \det \Gamma \cdot \det U = \underbrace{(\det U)^2}_{>0} \cdot \det \Gamma, \text{ и перейдём к ортонормированному}$$

базису (в конечномерном пространстве это можно сделать всегда). В нём  $\Gamma' = E \Rightarrow \det \Gamma' = 1 \Rightarrow 1 = (\det U)^2 \cdot \det \Gamma \Rightarrow \det \Gamma > 0$ .  $\blacksquare$

### 8. Сформулируйте и докажите критерий линейной зависимости набора векторов с помощью матрицы Грама.

Векторы  $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{E}$  линейно независимы  $\Leftrightarrow \text{Gr}(a_1, \dots, a_k) \neq 0$ .

$\square$  Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $a_1, \dots, a_k$ :

$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$ . Умножим это равенство скалярно на векторы  $a_1, \dots, a_k$ :

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases}$$

Это ОСЛАУ на коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , т.е. СЛАУ вида  $\Gamma(a_1, \dots, a_k) \cdot \alpha = 0$ .

Это ОСЛАУ с квадратной матрицей. У неё существует нетривиальное решение (т.е. векторы линейно зависимы по определению)  $\Leftrightarrow \det \Gamma = 0$ . И, соответственно,  $a_1, \dots, a_k$  линейно независимы  $\Leftrightarrow \det \Gamma \neq 0$ .  $\blacksquare$

### 9. Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов, и докажите её.

Пусть  $H = L(a_1, \dots, a_k)$ , а  $a_1, \dots, a_k$  линейно независимы. Тогда  $y = \text{pr}_H x = A \cdot (A^T A)^{-1} \cdot A^T \cdot x$ , где матрица  $A$  составлена из столбцов координат векторов  $a_1, \dots, a_k$  в некотором ортонормированном базисе.

$\square y = \text{pr}_H x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \in H$  (т.е.  $x = \underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k}_{\in H} + \underbrace{h^\perp}_{\in H^\perp}$ ). Теперь последовательно

скалярно умножим равенство  $x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + h^\perp$  на  $a_1, \dots, a_k$ :

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = (a_1, x) \\ \vdots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = (a_k, x) \end{cases}$$

Отметим, что  $h^\perp$  исчезает, так как оно ортогонально всем векторам набора  $a_1, \dots, a_k$ .

В матричной форме:  $\Gamma(a_1, \dots, a_k) \cdot \alpha = A^T \cdot x \Leftrightarrow \underbrace{A^T A}_\Gamma \cdot \alpha = A^T \cdot x$ .

Так как  $a_1, \dots, a_k$  линейно независимы, то  $\det \Gamma \neq 0 \Rightarrow$  к ней существует обратная матрица

$$\text{размера } k \times k \Rightarrow \Gamma \cdot \alpha = A^T \cdot x \Rightarrow \alpha = \Gamma^{-1} \cdot A^T \cdot x = (A^T A)^{-1} A^T x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}.$$

$$y = \text{pr}_H x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = A \cdot \alpha \stackrel{\text{подставим } \alpha}{=} A \cdot (A^T A)^{-1} \cdot A^T \cdot x. \quad \blacksquare$$

### 10. Докажите, что для любого оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует единственный сопряжённый оператор.

Для любого линейного оператора в евклидовом пространстве существует единственный сопряжённый оператор  $A^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ .

□ Покажем, что линейный оператор с матрицей  $B = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$  является сопряжённым к данному. Проверим выполнение равенства  $\forall x, y \in \mathcal{E} : (Ax, y) = (x, By)$ .

Пусть  $x^b, y^b$  – столбцы координат векторов  $x$  и  $y$  в базисе  $\mathbf{b}$ . Тогда  $(Ax)^b = A_b x^b$  (доказано ранее) и  $(x, y) = x^T \Gamma y$  – матричная запись скалярного произведения.

$$((Ax)^b)^T \cdot \Gamma \cdot y^b = (x^b)^T \cdot \Gamma \cdot (By)^b$$

$$(A_b x^b)^T \cdot \Gamma \cdot y^b = (x^b)^T \cdot \Gamma \cdot B_b y^b$$

$$(x^b)^T \cdot A_b^T \Gamma \cdot y^b = (x^b)^T \cdot \Gamma B_b \cdot y^b$$

Отсюда следует, что  $A_b^T \Gamma = \Gamma B_b \Rightarrow B_b = \Gamma^{-1} \cdot A_b^T \cdot \Gamma$  (обратная к  $\Gamma$  существует, так как её определитель всегда положителен). ■

### 11. Сформулируйте и докажите свойство собственных векторов самосопряжённого оператора, отвечающих разным собственным значениям.

Собственные векторы самосопряжённого линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

□ Пусть  $Ax_1 = \lambda_1 x_1, x_1 \neq 0$ ;  $Ax_2 = \lambda_2 x_2, x_2 \neq 0$ , и притом  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . (То есть  $x_1, x_2$  – собственные векторы с соответствующими собственными значениями  $\lambda_1, \lambda_2$ .)

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2)$$

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)$$

Однако  $(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2)$ , так как оператор самосопряжённый, а значит  $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$ ,  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , так как  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  различны, поэтому  $(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1$  и  $x_2$  ортогональны. ■

### 12. Каким свойством обладают собственные значения самосопряжённого оператора?

Ответ обоснуйте.

Все корни характеристического уравнения самосопряжённого линейного оператора являются действительными числами.

□ Пусть  $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$  – корень уравнения  $\chi_A(\lambda) = 0$ , т.е.  $\det(A - \tilde{\lambda}E) = 0$ . Тогда СЛАУ  $(A - \tilde{\lambda}E)x = 0$ ,

которое назовём (1), имеет ненулевое решение  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , состоящее из  $x_k \in \mathbb{C} \quad (k = \overline{1, n})$ .

Рассмотрим  $\bar{x}$  – столбец  $\begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$  комплексно-сопряжённых элементов.

Умножим (1) на  $\bar{x}^T$  слева:

$$\bar{x}^T (A - \tilde{\lambda}E)x = 0 \Leftrightarrow \bar{x}^T Ax - \tilde{\lambda} \bar{x}^T x = 0; \quad \bar{x}^T x = \overline{x_1} x_1 + \dots + \overline{x_n} x_n = \underbrace{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}_{\in \mathbb{R}} > 0, \text{ так как}$$

решение ненулевое (собственный вектор)  $\Rightarrow \tilde{\lambda} = \frac{\bar{x}^T Ax}{\bar{x}^T x}$ .

Если докажем, что  $z = \bar{x}^T Ax \in \mathbb{R}$ , то  $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ .

$$z = \bar{x}^T Ax \stackrel{z \text{ число}}{=} z^T = (\bar{x}^T Ax)^T = x^T A^T (\bar{x}^T)^T = x^T A^T \bar{x} \stackrel{\text{в ОНБ: } A=A^T}{=} x^T A \bar{x}$$

$$\bar{z} = \overline{\bar{x}^T Ax} = \bar{x}^T \bar{A} \bar{x} \stackrel{a_{ij} \in \mathbb{R}}{=} x^T A \bar{x}$$

Следовательно,  $z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{\lambda} = \frac{z}{\bar{x}^T x} \in \mathbb{R}$ . ■

### 13. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряжённого оператора базиса из собственных векторов. Приведите доказательство в случае различных вещественных собственных значений.

Для любого самосопряжённого линейного оператора  $A$  существует ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов.

□ Так как собственные значения самосопряжённого оператора  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  попарно различны, то, выбрав для каждого собственного значения соответствующий ему собственный вектор, получим систему ненулевых векторов.

По утверждению об ортогональности собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, это будет ортогональная система. По ранее доказанному утверждению она линейно независима и содержит  $n$  векторов, а следовательно, является базисом в  $\mathcal{E}$  (т.к.  $\dim \mathcal{E} = n$ ).

Это ортогональный базис. Чтобы получить ортонормированный базис, нужно поделить каждый вектор на его норму. Векторы не перестают быть собственными  $\Rightarrow$  это искомый базис. ■

#### 14. Сформулируйте и докажите теорему о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Верно ли обратное? Ответ обоснуйте.

Пусть  $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  – линейный оператор. Тогда  $\mathcal{A}$  – ортогональный линейный оператор  $\Leftrightarrow$  ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$  переходит в другой ортонормированный базис  $Ae_1, \dots, Ae_n$ .

$$\square (\Rightarrow) (Ae_i, Ae_j) \stackrel{A - \text{орт. л.о.}}{=} (e_i, e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \text{ т.е. система векторов } Ae_1, \dots, Ae_n \text{ состоит}$$

из ненулевых векторов, и они попарно ортогональны – это ортонормированный базис. Их  $n \Rightarrow$  это базис в  $\mathcal{E}$ .

( $\Leftarrow$ )  $x \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$  (сопоставление вектору набора координат)

Заметим, что  $Ax \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T$  в базисе  $Ae_1, \dots, Ae_n$ , так как  $Ax = A(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) \stackrel{A - \text{л.о.}}{=} x_1Ae_1 + \dots + x_nAe_n$ .

Найдём скалярные произведения в ортонормированном базисе  $e_1, \dots, e_n$  и  $(Ae_1, \dots, Ae_n)$

Так как координаты не меняются, то  $\forall x, y \in \mathcal{E}$  :

- $(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$  – в ортонормированном базисе  $e_1, \dots, e_n$
- $(Ax, Ay) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$  – в ортонормированном базисе  $Ae_1, \dots, Ae_n$

Следовательно, по определению,  $\mathcal{A}$  – ортогональный линейный оператор. ■

#### 15. Сформулируйте и докажите критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.

Матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в ортонормированном базисе ортогональна  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  – ортогональный оператор.

$\square (\Rightarrow)$  По определению:  $A_e$  ортогональна  $\Leftrightarrow A_e^T \cdot A_e = E \Rightarrow \forall x, y \in \mathcal{E}$ , если рассмотреть их

координаты в базисе  $e_1, \dots, e_n$ :  $x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $y \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , будет выполнено:

$$\underbrace{(x_1 \dots x_n) \cdot (A_e^T A_e) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\text{это } (Ax, Ay): \begin{bmatrix} A_e \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} A_e \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{bmatrix}} = \underbrace{(x_1 \dots x_n) \cdot E \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{(x, y) \text{ в ОНБ}}$$

Т.е.  $\forall x, y \in \mathcal{E} : (Ax, Ay) = (x, y) \Rightarrow$  по определению,  $\mathcal{A}$  – ортогональный линейный оператор.

( $\Leftarrow$ ) По определению:  $\forall x, y \in \mathcal{E} : (Ax, Ay) = (x, y)$ .

В любом ортонормированном базисе это можно записать в координатах:

$(A_e x^e)^T \cdot E \cdot (A_e y^e) = (x^e)^T \cdot (y^e)$ , так как  $(x, y) = x^T \cdot \Gamma \cdot y$ ,  $\Gamma = E$ .

Следовательно,  $(x^e)^T A_e^T A_e y^e = (x^e)^T \cdot E \cdot (y^e) \stackrel{\text{по лемме}}{\Rightarrow} A_e^T A_e = E$ . ■

#### 16. Сформулируйте и докажите утверждение о QR-разложении.

Пусть  $A \in M_m(\mathbb{R})$ , а её столбцы  $A_1, \dots, A_m$  линейно независимы. Тогда существуют матрицы  $Q$  и  $R$ , такие что  $A = QR$ , где  $Q$  – ортогональная, а  $R$  – верхнетреугольная матрица.

$\square$  Применим к столбцам  $A_1, \dots, A_m$  процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Получим столбцы  $Q_1, \dots, Q_m$  – ортонормированный базис в  $\text{Im } A$ . Заметим, что  $A_k \in L(Q_1, \dots, Q_k)$ ,  $k = \overline{1, m}$  (по формулам Грама–Шмидта мы используем только столбцы с меньшими или равными номерами)  $\Rightarrow A_k = \sum_{i=1}^k \Gamma_{ik} Q_i$ , где  $k = \overline{1, m}$ , или в матричной форме:  $A = Q \cdot R$ , где  $Q = (Q_1 | \dots | Q_m)$ , а

$$R = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Gamma_{mm} \end{pmatrix}.$$

### 17. Сформулируйте и докажите теорему о сингулярном разложении.

Для любой прямоугольной матрицы  $A \in \mathbf{M}_{mn}(\mathbb{R})$  имеет место следующее разложение:

$$A = V \cdot \Sigma \cdot U^T - \text{сингулярное разложение,}$$

где  $U \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$  – ортогональная матрица размера  $n \times n$ ,  $V \in \mathbf{O}_m(\mathbb{R})$  – ортогональная матрица размера  $m \times m$ , а  $\Sigma \in \mathbf{M}_{mn}(\mathbb{R})$  – диагональная матрица с числами  $\sigma_i \geq 0$  на диагонали. (Договариваются, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > 0$ , где  $r = \text{Rg } A$ .)

□ Рассмотрим  $A^T A$  (матрицу Грама). Она является симметрической и соответствующая квадратичная форма неотрицательно определена, т.е.:

$$x^T \underbrace{A^T A}_\Gamma x \stackrel{\text{в исходном ОНБ}}{=} (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, существуют все собственные значения (т.е. принадлежат  $\mathbb{R}$  для самосопряжённого оператора  $A^T A$ ) и они неотрицательны. Запишем эти собственные значения в виде  $\sigma_i^2$  (любое неотрицательное число можно записать в таком виде). Отсортируем по невозрастанию:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = 0$ , и существует ортонормированный базис  $u_1, \dots, u_n$  – из собственных

векторов  $A^T A$ , т.е.  $A^T A u_i = \begin{cases} \sigma_i^2 u_i, & 1 \leq i \leq r \\ 0, & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$

Положим  $v_i := \frac{A u_i}{\sigma_i}$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Тогда

$$(v_i, v_j) = \begin{cases} (\frac{A u_i}{\sigma_i}, \frac{A u_j}{\sigma_j}) = 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Получаем векторы  $v_1, \dots, v_r$ . Они образуют ортонормированную систему. Дополним её векторами  $v_{r+1}, \dots, v_m$  до ортонормированного базиса в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда  $v_1, \dots, v_m$  и  $u_1, \dots, u_n$  – это ортонормированные базисы. В итоге:

$$A \cdot \underbrace{[u_1, \dots, u_n]}_{\text{столбцы } U} = \underbrace{[v_1, \dots, v_m]}_{\text{столбцы } V} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_i = \frac{A u_i}{\sigma_i} \Leftrightarrow A u_i = v_i \sigma_i.$$

Матрицы  $U$  и  $V$  ортогональны. ■

### 18. Сформулируйте и докажите теорему о полярном разложении.

Любой линейный оператор в евклидовом пространстве представляется в виде композиции симметрического и ортогонального:  $A = S \cdot U$ , где  $S$  – матрица симметрического оператора, а  $U$  – ортогонального.

□ Возьмём сингулярное разложение:

$A = Q \cdot \Sigma \cdot P^T$ , где  $Q, P$  – ортогональные матрицы.

$A = Q \cdot \Sigma \cdot \underbrace{Q^T \cdot Q}_E \cdot P^T$ . Обозначим за  $S$  произведение  $Q \cdot \Sigma \cdot Q^T$ , а за  $U$  – произведение  $Q \cdot P^T$ .

$S^T = (Q \cdot \Sigma \cdot Q^T)^T = (Q^T)^T \cdot \Sigma^T \cdot Q^T \stackrel{\Sigma^T = \Sigma}{=} Q \cdot \Sigma \cdot Q^T = S$ , значит  $S$  – симметрическая матрица.

$U$  – произведение двух ортогональных матриц, а значит  $U$  ортогональна. ■

### 19. Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичных форм к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

Любую квадратичную форму можно ортогональным преобразованием привести к каноническому виду.

□ Матрица квадратичной формы является симметрической. Рассмотрим  $n$ -мерное (пусть исходная матрица имеет размер  $n \times n$ ) евклидово пространство  $\mathcal{E}$  и некоторый ортонормированный базис в нём.

Тогда матрица квадратичной формы  $B$  является матрицей некоторого *самосопряжённого* линейного оператора, так как  $B = B^T$  по определению матрицы квадратичной формы. Пусть матрица  $A$  совпадает с  $B$ .

По теореме о существовании для самосопряжённого линейного оператора ортонормированного базиса из собственных векторов, для линейного оператора с матрицей  $A$  найдётся новый ортонормированный базис, в котором его матрица диагональна. Пусть  $U$  – матрица перехода к этому базису. Эта матрица ортогональна.

Тогда в новом базисе матрица линейного оператора будет иметь вид  $A' = U^{-1}AU$ , а матрица квадратичной формы  $B' = U^TBU$ , но для ортогональных матриц  $U^{-1} = U^T \Rightarrow$  если  $A = B$ , то  $A' = B'$ , т.е. матрица квадратичной формы тоже диагональна. Это означает, что в этом базисе квадратичная форма приведена к каноническому виду. ■

### 20. Что можно сказать про ортогональное дополнение к образу сопряжённого оператора? Ответ обоснуйте. Сформулируйте и докажите теорему Фредгольма.

*Ортогональное дополнение к образу сопряжённого оператора.* Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  – линейный оператор. Тогда  $\text{Ker } \mathcal{A} = (\text{Im } \mathcal{A}^*)^\perp$ .

□ Докажем, что эти множества совпадают.

( $\subseteq$ ) Пусть  $x \in \text{Ker } \mathcal{A}$ . Тогда  $Ax = 0$ .  $\forall y \in V : 0 = y^T \underbrace{Ax}_0 = (A^T y)^T x$ .

Рассмотрим ортонормированный базис в  $V$ . Тогда  $(A^T y)^T \cdot \Gamma \cdot x \stackrel{\Gamma=E}{=} (A^T y)^T x = (A^* y, x)$ , т.е.  $x \perp \text{Im } \mathcal{A}^* \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A} \subseteq (\text{Im } \mathcal{A}^*)^\perp$ .

( $\supseteq$ ) Пусть  $x \in (\text{Im } \mathcal{A}^*)^\perp$ . Рассмотрим  $(x, A^* y)$ :

$\forall y \in V : 0 \stackrel{x \in (\text{Im } \mathcal{A}^*)^\perp}{=} (x, A^* y) \stackrel{\text{по опр. сопряж. л.о.}}{=} (Ax, y) = 0$ .

Так как мы можем рассмотреть любые векторы, рассмотрим  $y = Ax$ :

$(Ax, y) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } \mathcal{A} \Rightarrow (\text{Im } \mathcal{A}^*)^\perp \subseteq \text{Ker } \mathcal{A}$ .

Следовательно,  $\text{Ker } \mathcal{A} = (\text{Im } \mathcal{A}^*)^\perp$ . ■

*Теорема Фредгольма.* СЛАУ  $Ax = b$  совместна  $\Leftrightarrow$  вектор  $b$  перпендикулярен всем решениям ОСЛАУ  $A^T y = 0$ .

□  $Ax = b$  совместна  $\Leftrightarrow b \in \text{Im } A$ , а по теореме,  $V = \text{Im } A \oplus \text{Ker } A^*$ , т.е.  $b \in \text{Im } A = (\text{Ker } A^*)^\perp$ . ■

*Доказательства 4 модуля, не использованные на коллоквиуме*

### 21. Выпишите и докажите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.