Índice general

Capítulo 1

Topología de $\mathbb{R}^n$ (Sección I)

En esta sección se estudian conceptos relacionados con la topología de $\mathbb{R}^n$, con particular énfasis en la definición de abiertos, vecindades, ...

1.1. Compacidad

Definición 1.1.1. Sea X un E.T. Se dice que X es compacto, si dado un cubrimiento de abiertos de X, i.e. una colección $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de abiertos de X t.q. $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, existe un subcubrimiento finito que también cubre a X, i.e. una subcolección $\{\mathcal{U}_{\alpha(i)}\}_{i=1}^n \subseteq \{\mathcal{U}_\alpha\}$ t.q. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\alpha(i)}$. Adicionalmente, si $Y \subseteq X$, se dice que Y es compacto si es compacto con la topología relativa.

Observacion 1.1.2. Nótese que si una colección $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de conjuntos de X, recubre a X, i.e. que $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, entonces $X = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$. Luego, en la definición anterior es indiferente decir si el recubrimiento de abiertos contiene al conjunto o es igual a éste.

Teorema 1.1.3. Sea X un E.T. compacto y $Y \subseteq X$ cerrado, entonces Y es compacto.

Demostración:
Sea $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ un cubrimiento de abiertos para Y. Como Y es cerrado en X, por definición $Y^C = X - Y$ es abierto en X. Nótese que si $Y^C = \emptyset$, entonces $Y = X$ y trivialmente sería compacto, así que supóngase $Y^C \neq \emptyset$. Nótese

que:

$$
\begin{aligned}
X &= Y^C \cup Y \\
&= Y^C \cup \bigcup \mathcal{U}_\alpha \\
&= Y^C \cup \bigcup \underbrace{(Y \cap \mathcal{V}_\alpha)}_{\text{abiertos de } Y} \\
&= Y^C \cup \left(Y \cap \bigcup \mathcal{V}_\alpha\right) \\
&= (Y^C \cup Y) \cap \left(Y^C \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha\right) \\
&= X \cup \left(Y^C \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha\right),
\end{aligned}
$$

y nótese que el conjunto resultante en la igualdad de la última linea, es un abierto de X, i.e. que en particular $\{\mathcal{U}_\alpha\} \cup \{Y^C\}$ es un cubrimiento de abiertos de X, y por la compacidad de X nótese que existe un conjunto finito $\{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n\} \subseteq \{\mathcal{U}_\alpha\}$ t.q. $X = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i \cup Y^C$ (pues como $Y = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ y $Y^C \neq \emptyset$, hay que considerar este último conjunto en el cubrimiento por si existen elementos que no están en el otro), pero como $Y \subseteq X$, entonces $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i \cup Y^C$, i.e. que $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$, mostrando que en efecto Y es compacto. ■

Teorema 1.1.4. Sean X y Y E.T. Si X es compacto y $f : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces $f(X)$ es compacto.

Demostración:

Considérese $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ un cubrimiento de abiertos para $f(X)$, i.e. que $f(X) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, y por propiedades conjuntistas se tiene que esto último es equivalente a decir que $X \subseteq f^{-1}\left(\bigcup \mathcal{U}_\alpha\right) = \bigcup f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$, pero como f es continua, devuelve abiertos en abiertos, por tanto $\{f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)\}$ es un cubrimiento de abiertos para X, y por la compacidad de tal conjunto, existe un conjunto $\left\{f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha(i)}) : i = 1, \ldots, n\right\} \subseteq \{\mathcal{U}_\alpha\}$ t.q. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}\left(\mathcal{U}_{\alpha(i)}\right) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\alpha(i)}\right)$, y esto último es equivalente a que $f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\alpha(i)}$. ■

Bibliografía

[Awo10] Steve Awodey. *Category theory*. Second. Vol. 52. Oxford Logic Guides. Oxford University Press, Oxford, 2010, págs. xvi+311.

[FST19] Brendan Fong, David Spivak y Rémy Tuyéras. «Backprop as functor: a compositional perspective on supervised learning». En: *2019 34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. IEEE, [Piscataway], NJ, 2019, [13 pp.]

[JS91] André Joyal y Ross Street. «The geometry of tensor calculus, I». En: *Advances in Mathematics* 88.1 (jul. de 1991), págs. 55-112. DOI: `10.1016/0001-8708(91)90003-p`. URL: `https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90003-p`.

[Lur21] Jacob Lurie. *Kerodon*. 2021. URL: `https://kerodon.net`.

[Mac10] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. eng. 2nd. ed., Softcover version of original hardcover edition 1998. Graduate texts in mathematics 5. New York, NY: Springer, 2010. ISBN: 9781441931238.

[Per21] Paolo Perrone. *Notes on Category Theory with examples from basic mathematics*. 2021. arXiv: `1912.10642 [math.CT]`.

[Sel10] P. Selinger. «A Survey of Graphical Languages for Monoidal Categories». En: *New Structures for Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 2010, págs. 289-355. DOI: `10.1007/978-3-642-12821-9_4`. URL: `https://doi.org/10.1007%2F978-3-642-12821-9_4`.