

Índice general

1. Topología de \mathbb{R}^n (Sección I)	2
1.1. Compacidad	2
1.2. Conexidad	5

Capítulo 1

Topología de \mathbb{R}^n (Sección I)

En esta sección se estudian conceptos relacionados con la topología de \mathbb{R}^n , con particular énfasis en la definición de abiertos, vecindades, ...

1.1. Compacidad

Definición 1.1.1. Sea X un E.T. Se dice que X es compacto, si dado un cubrimiento de abiertos de X , i.e. una colección $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de abiertos de X t.q. $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, existe un subcubrimiento finito que también cubre a X , i.e. una subcolección $\{\mathcal{U}_{\alpha(i)}\}_{i=1}^n \subseteq \{\mathcal{U}_\alpha\}$ t.q. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\alpha(i)}$. Adicionalmente, si $Y \subseteq X$, se dice que Y es compacto si es compacto con la topología relativa.

La propiedad de ser compacto, a diferencia de ser abierto o cerrado, no depende de las características del espacio en donde estén sumergidos los conjuntos, i.e. que es una característica absoluta, no relativa, pues existen E.T. donde se pueden tener conjuntos $X \subseteq Y \subseteq Z$, t.q. X sea abierto relativo en Y , sin serlo en X . Por ejemplo, considérese $Z = \mathbb{R}$ con la topología usual. Si $X =]0, 5, 1]$ y $Y = [0, 1]$, nótese que $X =]0, 5, 2[\cap Y$, i.e. que X es abierto relativo en Y , pero claramente no lo es en Z . Demuéstrese a continuación lo dicho:

Teorema 1.1.2. Supóngase que $X \subseteq Y \subseteq Z$. Se tiene que X es compacto relativo en Z si y sólo si X es compacto relativo en Y .

Demostración:

Sea X compacto relativo en Z y sea $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ una colección de conjuntos

abiertos relativos en Y t.q. $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha = \bigcup (\mathcal{V}_\alpha \cap Y)$, donde para cada α , \mathcal{V}_α es abierto de Z . En particular se tiene que $X \subseteq \mathcal{V}_{\alpha(1)} \cup \dots \cup \mathcal{V}_{\alpha(n)}$, i.e. que $X = X \cap Y \subseteq (\mathcal{V}_{\alpha(1)} \cup \dots \cup \mathcal{V}_{\alpha(n)}) \cap Y = (\mathcal{V}_{\alpha(1)} \cap Y) \cup \dots \cup (\mathcal{V}_{\alpha(n)} \cap Y) = \mathcal{U}_{\alpha(1)} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{\alpha(n)}$, i.e. que X es compacto relativo en Y .

Finalmente, si se supone X compacto relativo en Y y $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ una colección de abiertos de Z que cubre a X , defínase $\mathcal{U}_\alpha := \mathcal{V}_\alpha \cap Y$, luego $X \subseteq \mathcal{U}_{\alpha(1)} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{\alpha(n)}$, pero como para toda α , $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\alpha$, claramente $X \subseteq \mathcal{V}_{\alpha(1)} \cup \dots \cup \mathcal{V}_{\alpha(n)}$, i.e. que X es compacto relativo en Z . ■

En virtud del teorema anterior se puede, en muchos casos, considerar conjuntos compactos como E.T. en sí mismos, sin prestar atención al espacio que los contiene. En particular, aunque tiene escaso sentido hablar de espacios abiertos o cerrados (pues todo E.T. es en sí mismo tanto abierto como cerrado), sí tiene sentido hablar de E.T. compactos.

Ejemplo 1.1.3. Es claro que cualquier conjunto finito de un E.T. es compacto.

Ejemplo 1.1.4. Los intervalos cerrados de \mathbb{R} son compactos.

Supóngase el intervalo $[a, b]$ t.q. $a < b$, pues si $a = b$ el resultado es trivial. Considérese una colección de abiertos $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in J}$ de $[a, b]$, que cubren tal intervalo, donde $\mathcal{U}_j = \mathcal{V}_j \cap [a, b]$, con \mathcal{V}_j abierto de \mathbb{R} , para toda j . Defínase el conjunto:

$$S := \left\{ x \in [a, b] : [a, x] \subseteq \bigcup_{j \in I \subseteq J} \mathcal{U}_j \wedge |I| < \aleph_0 \right\}.$$

Es claro que $a \in S$, i.e. que $S \neq \emptyset$. Además, si $c \in S$, entonces $[a, c] \subseteq S$. Según lo anterior, por el principio del supremo, como también S está acotado superiormente por b , existe $d = \sup(S)$.

Observacion 1.1.5. Nótese que si una colección $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de conjuntos de X , recubre a X , i.e. que $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, entonces $X = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$. Luego, en la definición anterior es indiferente decir si el recubrimiento de abiertos contiene al conjunto o es igual a éste.

Teorema 1.1.6. Sea X un E.T. compacto y $Y \subseteq X$ cerrado, entonces Y es compacto.

Demostración:

Sea $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ un cubrimiento de abiertos para Y . Como Y es cerrado en X ,

por definición $Y^C = X - Y$ es abierto en X . Nótese que si $Y^C = \emptyset$, entonces $Y = X$ y trivialmente sería compacto, así que supóngase $Y^C \neq \emptyset$. Nótese que:

$$\begin{aligned}
X &= Y^C \cup Y \\
&= Y^C \cup \bigcup \mathcal{U}_\alpha \\
&= Y^C \cup \bigcup \underbrace{(Y \cap \mathcal{V}_\alpha)}_{\text{abiertos de } Y} \\
&= Y^C \cup \left(Y \cap \bigcup \mathcal{V}_\alpha \right) \\
&= (Y^C \cup Y) \cap \left(Y^C \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha \right) \\
&= X \cup \left(Y^C \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha \right),
\end{aligned}$$

y nótese que el conjunto resultante en la igualdad de la última línea, es un abierto de X , i.e. que en particular $\{\mathcal{U}_\alpha\} \cup \{Y^C\}$ es un cubrimiento de abiertos de X , y por la compacidad de X nótese que existe un conjunto finito $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n\} \subseteq \{\mathcal{U}_\alpha\}$ t.q. $X = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i \cup Y^C$ (pues como $Y = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ y $Y^C \neq \emptyset$, hay que considerar este último conjunto en el cubrimiento por si existen elementos que no están en el otro), pero como $Y \subseteq X$, entonces $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i \cup Y^C$, i.e. que $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$, mostrando que en efecto Y es compacto. ■

Teorema 1.1.7. Sean X y Y E.T. Si X es compacto y $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces $f(X)$ es compacto.

Demostración:

Si $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ es un cubrimiento de abiertos para $f(X)$, entonces $f(X) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, y por propiedades conjuntistas¹ se tiene que esto último es equivalente a decir que $X \subseteq f^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_\alpha) = \bigcup f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$, pero como f es continua, devuelve abiertos en abiertos, por tanto $\{f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)\}$ es un cubrimiento de abier-

¹Recordar de teoría de conjunto que dada la función $f : X \rightarrow Y$, la imagen directa de $A \subseteq X$ y la imagen inversa de $B \subseteq Y$ se definen respectivamente como:

$$f(A) := \{y \in Y : \exists x \in A f(x) = y\} \text{ y } f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Además, $f(A) \subseteq B$ syss $A \subseteq f^{-1}(B)$. Finalmente, si para cada α , $\mathcal{U}_\alpha \subseteq Y$, entonces $f^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_\alpha) = \bigcup f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$.

tos para X , y por la compacidad de tal conjunto, existe un subconjunto $\{f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha(i)}) : i = 1, \dots, n\} \subseteq \{f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha})\}$ t.q. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha(i)}) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\alpha(i)})$, y esto último es equivalente a que $f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\alpha(i)}$. ■

Teorema 1.1.8. El espacio producto $S \times T$ es compacto syss S y T son compactos.

Demostración:

Ver [AMR12, pp. 24, 25]. ■

1.2. Conexidad

El concepto de conexidad tiene un significado relacionado con el hecho de no poder “separar” un conjunto en dos partes. Los conceptos presentados acá están en el contexto de la topología estándar de los espacios euclidianos, pero la mayoría de estos se pueden generalizar de manera análoga a espacios topológicos más generales.

Definición 1.2.1. $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice conexo cuando para cualquier pareja de abiertos disjuntos $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \subset U_1 \cup U_2$, necesariamente uno de estos dos no intercepta a A .

Equivalentemente podríamos definir este concepto diciendo que una separación de un conjunto es una escogencia de dos abiertos de este conjunto, que son disjuntos y que unen al conjunto. Recuerde que un abierto de un conjunto es la intersección de un abierto en \mathbb{R}^n con el mismo conjunto.

El siguiente teorema es una caracterización bien conocida de los subconjuntos conexos de la recta (en la topología estándar).

Teorema 1.2.2. Los únicos subconjuntos conexos de la recta son los intervalos.

La conexidad, así como la compacidad, es una propiedad preservada por aplicaciones continuas, en efecto

Teorema 1.2.3. Si $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua y X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración:

En efecto, si U_1, U_2 abiertos disjuntos de $f(X)$ unen al propio $f(X)$, por la continuidad de f , se tiene que $f^{-1}(U_1)$ y $f^{-1}(U_2)$ son abiertos de X , disjuntos y que unen a X , luego, por conexidad uno de los dos debe ser vacío, como consecuencia U_1 o U_2 es vacío. ■

Juntando los dos teoremas anteriores se obtiene el teorema del valor intermedio para funciones reales de varias variables.

Teorema 1.2.4. Si $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua y $y \in (f(x_1), f(x_2))$, entonces existe $x_3 \in X$ tal que $f(x_3) = y$.

El teorema anterior se prueba sin mucha dificultad teniendo en cuenta que por conexidad, la imagen de f es un intervalo.

Otra aplicación interesante es el conocido teorema de la aduana.

Teorema 1.2.5. Si un conjunto conexo $X \subset \mathbb{R}^n$ contiene un punto $a \in A$ y otro punto $b \notin A$, para otro conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces X contiene algún punto de la frontera de A .

Demostración:

Recordemos que la frontera de A , denotada por ∂A , se define como todos los puntos de \mathbb{R}^n tales que toda bola centrada en ellos contiene puntos de A y de su complemento, es decir, no son ni interiores ni exteriores.

Ahora, supongamos que a y b no son puntos frontera de A , caso contrario ya se tiene el resultado. Luego, se tiene que $a \in \text{int}(A)$ y $b \in \text{ext}(A)$. De esta forma, $\text{int}(A) \cap X$ y $\text{ext}(A) \cap X$ son abiertos de X no vacíos y disjuntos, luego, no pueden unir a X pues esto contradice la conexidad de X . Entonces, existe un punto de X que no está en ninguno de estos abiertos, es decir, es un punto frontera de A . ■

Una pregunta natural es si la unión de conjuntos conexos es conexa. Intuitivamente se puede responder a esta pregunta negativamente, pues uno puede unir dos conexos disjuntos y el resultado evidentemente no será conexo. Sin embargo, la respuesta es afirmativa si no son disjuntos.

Teorema 1.2.6. Una unión arbitraria de conexos con un punto en común da como resultado un conjunto conexo.

Demostración:

En efecto, sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de conexos en un espacio euclidiano, indexada por algún conjunto Λ y $p \in A_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$.

Ahora, si U_1, U_2 son abiertos disjuntos de $A = \cup_{\alpha} A_{\alpha}$, que unen a A , entonces, $p \in U_1$, sin pérdida de generalidad. Luego, $U_1 \cap A_{\alpha} \neq \emptyset$ es un abierto no vacío de A_{α} , para todo α . Si suponemos que $U_2 \neq \emptyset$, entonces para algún $q \in A_{\beta}$, se tiene que $q \in U_2$, luego, $U_1 \cap A_{\beta}, U_2 \cap A_{\beta}$ es una separación de A_{β} en abiertos (de A_{β}) disjuntos no vacíos, lo cual representa una contradicción. ■

Para más propiedades de los conjuntos conexos, consultar [poner referencias de elon y munkres].

Vale la pena ahora mencionar otra característica interesante, que es la conexidad por caminos. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice conexo por caminos, cuando para cualquier par de puntos $p, q \in A$, existe una curva continua con trazo contenido en A que los une. En otras palabras, existe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$, donde γ es continua y $\gamma([a, b]) \subset A$.

Todo conjunto conexo por caminos es conexo. Lo anterior es un ejercicio interesante que involucra el teorema anterior. Sin embargo, y contrario a lo que se podría intuir normalmente, no todo conexo es conexo por caminos. El siguiente resultado muestra que lo anterior mencionado es un caso realmente un poco patológico.

Teorema 1.2.7. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo, entonces es conexo por caminos.

Demostración:

Sea $p \in U$, considere el siguiente par de conjuntos.

$$U_1 = \{q \in U : \text{Existe un camino continuo entre } p \text{ y } q\},$$

$$U_2 = \{q \in U : \text{No existe un camino continuo entre } p \text{ y } q\}.$$

Note que ambos conjuntos son disjuntos, cubren U y son abiertos, pues basta considerar una bola contenida en U en torno de cada punto dentro de estos y usar el hecho de que las bolas son conexas y el hecho de que uno puede pegar dos caminos continuos con un punto en común para generar otro camino continuo.

De esta forma, nos vemos forzados a concluir que alguno de estos dos conjuntos es vacío, caso contrario estaríamos contradiciendo la conexidad de U . El que es vacío es evidentemente U_2 , de nuevo con un argumento similar considerando una bola centrada en q . ■

Bibliografía

- [AMR12] Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden y Tudor Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*. Vol. 75. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Awo10] Steve Awodey. *Category theory*. Second. Vol. 52. Oxford Logic Guides. Oxford University Press, Oxford, 2010, págs. xvi+311.
- [FST19] Brendan Fong, David Spivak y Rémy Tuyéras. «Backprop as functor: a compositional perspective on supervised learning». En: *2019 34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. IEEE, [Piscataway], NJ, 2019, [13 pp.]
- [JS91] André Joyal y Ross Street. «The geometry of tensor calculus, I». En: *Advances in Mathematics* 88.1 (jul. de 1991), págs. 55-112. DOI: 10.1016/0001-8708(91)90003-p. URL: [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(91\)90003-p](https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90003-p).
- [Lim14] Elon Lages Lima. *Curso de Análise*. Vol. 2. IMPA, Rio de Janeiro, 2014.
- [Lur21] Jacob Lurie. *Kerodon*. 2021. URL: <https://kerodon.net>.
- [Mac10] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. eng. 2nd. ed., Softcover version of original hardcover edition 1998. Graduate texts in mathematics 5. New York, NY: Springer, 2010. ISBN: 9781441931238.
- [Mun00] James R Munkres. *Topology*. Vol. 2. Prentice Hall Upper Saddle River, 2000.
- [Per21] Paolo Perrone. *Notes on Category Theory with examples from basic mathematics*. 2021. arXiv: 1912.10642 [math.CT].

- [Sel10] P. Selinger. «A Survey of Graphical Languages for Monoidal Categories». En: *New Structures for Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 2010, págs. 289-355. DOI: 10.1007/978-3-642-12821-9_4. URL: https://doi.org/10.1007%2F978-3-642-12821-9_4.