Índice general

Capítulo 1

Topología de $\mathbb{R}^n$

En esta sección se estudian conceptos relacionados con la topología de $\mathbb{R}^n$, con particular énfasis en la definición de abiertos, vecindades, ...

1.1. Conjuntos abiertos y cerrados

En esta sección se desarrollará lo básico sobre la topología estándar del espacio euclidiano. Se trabajará entonces sobre el conjunto $\mathbb{R}^n$ con su estructura usual de espacio vectorial. Empecemos primero por las nociones básicas que dan lugar a la estructura de abiertos que requerimos.

Definición 1. Una norma en $\mathbb{R}^n$ es una función $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones.

1. para todo $a \in \mathbb{R}^n$ se cumple $|a| \geq 0$, donde la igualdad se da si y sólo si $a = 0$.
2. para cualquier número real α y $a \in \mathbb{R}^n$ se tiene $|\alpha a| = |\alpha||a|$.
3. Para cualquier par de vectores $a, b \in \mathbb{R}^n$ se tiene $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Notese que en la segunda propiedad se abusa ligeramente de la notación al denotar por $|\cdot|$ tanto el valor absoluto en la recta como la norma en cuestión que se está definiendo.

Algunos ejemplos clásicos de normas en $\mathbb{R}^n$ son los siguientes, para $a = a^\mu e_\mu$, donde $\{e_\mu\}$ representa la base estándar de $\mathbb{R}^n$ y se está asumiendo la convención de suma de Einstein.

$$|a| = \sum_j |a^j|, \; |a| = \max_i |a^i|, \; |a| = \sum_j (a^j)^2 \, .$$

Las tres funciones anteriores definen normas, estas se llaman respectivamente norma de la suma, norma del máximo y norma euclidiana.

Pasamos ahora a definir lo que son las bolas determinadas por una norma.

Definición 2. Dada una norma $|.|$ en $\mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ se define la bola abierta centrada en $a \in \mathbb{R}^n$, con radio ϵ como

$$B(a, \epsilon) = \{v \in \mathbb{R}^n : |a - v| < \epsilon\} \, .$$

Las nociones de bola cerrada $B[a, \epsilon]$ y esfera $S[a, \epsilon]$ se definen de forma análoga cambiando la desigualdad por una de tipo menor o igual y por una igualdad. Se puede observar que la forma geométrica de las bolas depende de la norma escogida. Sin embargo, el concepto definido a continuación si resulta independiente de la norma.

Definición 3. Un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se llama abierto cuando para cualquier $x \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U$.

De manera análoga se puede definir un abierto como un conjunto que es igual a su interior, donde el interior $\mathrm{int}(A)$ es todos los puntos de A que verifican la existencia de una bola como en la definición anterior.

El siguiente resultado, que se enunciará sin probar, confirma el hecho de que la definición de abierto no depende de la norma escogida.

Teorema 1. Dado cualquier par de normas $|.|_1$ y $|.|_2$ en $\mathbb{R}^n$, existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 |a|_1 \leq |a|_2 \leq C_2 |a|_1 \, .$$

De esta forma resulta evidente la invarianza del concepto de abierto, pues por medio de la existencia de estas constantes uno puede siempre encajar una bola de cierta norma dentro de una de cualquier otra norma. La estructura de abiertos de $\mathbb{R}^n$ le da a este espacio una estructura de espacio topológico. Esto es

Teorema 2. Los abiertos en $\mathbb{R}^n$ cumplen las siguientes propiedades.

1. $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son abiertos.

2. La intersección de una familia finita de abiertos da como resultado un conjunto abierto.

3. La intersección de una familia arbitraria de abiertos da como resultado un conjunto abierto.

El hecho de que la definición de abierto no dependa de la norma escogida se puede afirmar de manera condensada diciendo que todas las normas en $\mathbb{R}^n$ inducen la misma topología.

Pasemos ahora a hablar brevemente de lo que es un conjunto cerrado y enunciar un teorema análogo al anterior.

Definición 4. $F \subset \mathbb{R}^n$ es llamado conjunto cerrado, cuando su complemento es abierto.

Teorema 3. Los conjuntos cerrados gozan de las siguientes propiedades.

1. $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son cerrados.

2. La unión de una familia finita de cerrados es un cerrado.

3. La intersección de una familia arbitraria de cerrados es un cerrado.

Antes de continuar, y con el fin de hacer algunos conceptos futuros más sencillos, se definirá que un abierto U_A de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ como la intersección de un abierto de $\mathbb{R}^n$ con el propio A. Esto es, los abiertos de A son todos de la forma $U \cap A$ donde U es un abierto de $\mathbb{R}^n$. De manera análoga se define lo que es un cerrado en A.

Definición 5 (Punto de acumulación)**.** Se dice que un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de un conjunto $A \subset R^n$, cuando toda bola abierta de A centrada en a contiene algún punto de A diferente de a, en otras palabras, para todo numero real $\epsilon > 0$ se tiene que $A \cap B(a, \epsilon) \setminus \{a\} \neq \emptyset$

Notación 1. El conjunto de puntos de acumulación de un conjunto A se denotara por A'.

Ejercicio 1. Dado un conjunto A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $a \in A'$.

2. Existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_i \in A$ para algún $i \in \mathbb{N}$, tal que $\{a_n\} \to a$.

3. Toda bola abierta centrada en a contiene infinitos puntos de A.

Definición 6. Se dice que un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es un punto de adherencia de un conjunto A, si para toda bola abierta (vecindad) centrada en a (de A) de radio $\epsilon \in \mathbb{R}$ con $\epsilon > 0$, se cumple que $A \cap B(a, \epsilon) \neq \emptyset$

Notación 2. El conjunto de puntos de adherencia de un conjunto X se denotara por $\bar{X}$

Le definición anterior es útil porque da caracterización adicional de cuando un conjunto es cerrado, esto es, se dice que un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y solo si $X = \bar{X}$. Además de esta, el siguiente ejercicio muestra otra caracterización de conjuntos cerrados.

Ejercicio 2. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y solo si $X^c \subseteq_{op} \mathbb{R}^n$.

1.2. Convergencia de sucesiones y continuidad de aplicaciones

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ se define como una aplicación $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Usualmente se denota la sucesión como su conjunto de valores, es decir, $(\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$, o también $(\phi_n)_{n\geq 1}$. Una subsucesión de $\{\phi_n\}$ se obtiene a partir de una función creciente con imagen infinita $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. De esta forma, a la sucesión $\phi \circ i$ se le llama subsucesión de (ϕ_n), usualmente denotada $(\phi_{i(n)})$. A continuación nos enfocamos en hablar sobre convergencia de sucesiones.

Definición 7. Decimos que la sucesión (a_n) con $a_n \in \mathbb{R}^n$ converge a $a \in \mathbb{R}^n$ cuando $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$. En simbolos esto se denota como $(a_n) \to a$.

La definición anterior no depende de la norma escogida, lo cual es consecuencia de que en un espacio euclidiano todas las normas inducen la misma topología. La definición anterior se puede enunciar en términos de bolas de la siguiente forma

$$(a_n) \to a \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Rightarrow a_n \in B(a, \epsilon)\,.$$

Más aún, se puede hacer en términos de abiertos. Si entendemos por vecindad en $\mathbb{R}^n$ de a, a cualquier abierto U de $\mathbb{R}^n$, que contiene a a. Más aún, denotando por N_a a la familia de todas las vecindades de a en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$(a_n) \to a \iff \forall U \in N_a \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Rightarrow a_n \in U\,.$$

La definición anterior goza de ser independiente de la estructura métrica de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto puede ser adoptada para hablar de convergencia en cualquier espacio topológico.

El siguiente teorema, que resulta intuitivo en $\mathbb{R}^n$, no es cierto en cualquier espacio topológico, de hecho, depende crucialmente de que cualquier par de puntos distintos tengan vecindades disjuntas. Lo anterior, que es evidente en un espacio euclidiano, se conoce como propiedad de Hausdorff, y los espacios topológicos que la cumplen se denominan espacios topológicos Hausdorff.

Teorema 4. El límite de una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$ es único.

Demostración:

Supongamos que (a_n) converge a dos puntos distintos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tomando las bolas $B(x,\epsilon)$, $B(y,\epsilon)$, con ϵ suficientemente pequeño, de tal forma que estas bolas sean disjuntas, se obtiene una contradicción al suponer que la sucesión converge a ambos puntos. Para entender esta contradicción, veáse la definición de convergencia en términos de bolas. El epsilon puede tomarse por ejemplo, como menor a $\frac{|x-y|}{2}$.

■

Las propiedades básicas sobre convergencia de sucesiones se dejan al lector (suma de sucesiones convergentes es convergente, producto por un escalar, producto punto, etc.). Se puede consultar [Lim14] para ver estas propiedades con más detalle.

Ahora bien, entiéndase por aplicación a una función $f : A \subset \mathbb{R}^n\ to\mathbb{R}^m$. Se estudiará a continuación el concepto de continuidad de una aplicación. Sin embargo, antes de esto, definamos brevemente lo que es un límite.

Definición 8. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dadas normas $|.|_1$ y $|.|_2$ en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, decimos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b\,,$$

cuando

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } |x-a|_1 < \delta \Rightarrow |f(x) - b|_2 < \epsilon\,.$$

Queda como ejercicio para el lector reescribir la definición anterior en términos de bolas y en términos de abiertos, como se hizo para la convergencia de una sucesión. Además de esto, por el hecho de que todas las normas inducen la misma topología, la definición anterior no depende de las normas escogidas.

Definición 9. Una aplicación $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice continua en un punto $p \in X$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si para $x \in X$ $|x - p| < \delta$ implica que $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ con $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}$.

Observacion 1. Por la definición anterior, la continuidad de $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ esta totalmente garantizada si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap B(p, \delta)$ implica que $f(x) \in B(f(p), \epsilon)$ con $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Demostrar que la continuidad de una funcion esta caracterizada por la siguiente afirmacion. Una funcion $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua, si para cualquier secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ que converge a un punto $x \in X$, entonces la secuencia $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

Definición 10. Se dice que una funcion $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es Lipchitziana cuando existe $k \in \mathbb{R}$ con $k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < k|x - y|$.

Lema 1. Toda aplicación Lipchitziana es continua

1.3. Compacidad

Antes de dar la definición de compacidad, motívese esta a través de una visualización debida a John D. Baum:

> Supongamos que una gran multitud de personas –posiblemente infinitas– están afuera bajo la lluvia, y que cada una de estas personas usa su sombrilla, claramente ellas permanecerán sin mojarse. Pero por supuesto es posible que ellas estén juntas de manera tan compacta, que no sea necesario sino que un número finito de ellas abran sus sombrillas y todavía permanezcan sin mojarse. En este caso pensamos que ellas forman una especie de espacio compacto

Definición 11. Sea X un E.T. Se dice que X es compacto, si dado un cubrimiento de abiertos de X, i.e. una colección $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de abiertos de X t.q. $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, existe un subcubrimiento finito que también cubre a X, i.e. una subcolección $\{\mathcal{U}_{\alpha(i)}\}_{i=1}^{n} \subseteq \{\mathcal{U}_\alpha\}$ t.q. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\alpha(i)}$. Adicionalmente, si $Y \subseteq X$, se dice que Y es compacto si es compacto con la topología relativa.

La propiedad de ser compacto, a diferencia de ser abierto o cerrado, no depende de las características del espacio en donde estén sumergidos los conjuntos, i.e. que es una característica absoluta, no relativa, pues existen E.T. donde se pueden tener conjuntos $X \subseteq Y \subseteq Z$, t.q. X sea abierto relativo en Y, sin serlo en X. Por ejemplo, considérese $Z = \mathbb{R}$ con la topología usual. Si $X =]0{,}5, 1]$ y $Y = [0, 1]$, nótese que $X =]0{,}5, 2[\cap Y$, i.e. que X es abierto relativo en Y, pero claramente no lo es en Z. Demuéstrese a continuación lo dicho:

Teorema 5. Supóngase que $X \subseteq Y \subseteq Z$. Se tiene que X es compacto relativo en Z syss X es compacto relativo en Y.

Demostración:
Sea X compacto relativo en Z y sea $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ una colección de conjuntos abiertos relativos en Y t.q. $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha = \bigcup (\mathcal{V}_\alpha \cap Y)$, donde para cada α, $\mathcal{V}_\alpha$ es abierto de Z. En particular se tiene que $X \subseteq \mathcal{V}_{\alpha(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{V}_{\alpha(n)}$, i.e. que $X = X \cap Y \subseteq (\mathcal{V}_{\alpha(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{V}_{\alpha(n)}) \cap Y = (\mathcal{V}_{\alpha(1)} \cap Y) \cup \cdots \cup (\mathcal{V}_{\alpha(n)} \cap Y) = \mathcal{U}_{\alpha(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{\alpha(n)}$, i.e. que X es compacto relativo en Y.

Finalmente, si se supone X compacto relativo en Y y $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ una colección de abiertos de Z que cubre a X, defínase $\mathcal{U}_\alpha := \mathcal{V}_\alpha \cap Y$, luego $X \subseteq \mathcal{U}_{\alpha(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{\alpha(n)}$, pero como para toda α, $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\alpha$, claramente $X \subseteq \mathcal{V}_{\alpha(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{V}_{\alpha(n)}$, i.e. que X es compacto relativo en Z. ■

En virtud del teorema anterior se puede, en muchos casos, considerar conjuntos compactos como E.T. en sí mismos, sin prestar atención al espacio que los contiene. En particular, aunque tiene escaso sentido hablar de espacios abiertos o cerrados (pues todo E.T. es en sí mismo tanto abierto como cerrado), sí tiene sentido hablar de E.T. compactos.

Ejemplo 1. Es claro que cualquier conjunto finito de un E.T. es compacto. □

Ejemplo 2. Los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ son compactos.

Supóngase el intervalo $[a, b]$ t.q. $a < b$, pues si $a = b$ el resultado es trivial. Considérese una colección de abiertos $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in J}$ de $[a, b]$, que cubren tal intervalo, donde $\mathcal{U}_j = \mathcal{V}_j \cap [a,b]$, con $\mathcal{V}_j$ abierto de $\mathbb{R}$, para toda j. Defínase el conjunto:

$$S := \left\{ x \in [a,b] : [a,x] \subseteq \bigcup_{j \in I \subseteq J} \mathcal{U}_j \wedge |I| < \aleph_0 \right\}.$$

Es claro que $a \in S$, i.e. que $S \neq \emptyset$. Además, si $c \in S$, entonces $[a,c] \subseteq S$. Según lo anterior, por el principio del supremo, como también S está acotado superiormente por b, existe $d = \sup(S)$. $\square$

Observacion 2. Nótese que si una colección $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de conjuntos de X, recubre a X, i.e. que $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, entonces $X = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$. Luego, en la definición anterior es indiferente decir si el recubrimiento de abiertos contiene al conjunto o es igual a éste.

Teorema 6. Sea X un E.T. compacto y $Y \subseteq X$ cerrado, entonces Y es compacto.

Demostración:

Sea $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ un cubrimiento de abiertos para Y. Como Y es cerrado en X, por definición $Y^C = X - Y$ es abierto en X. Nótese que si $Y^C = \emptyset$, entonces $Y = X$ y trivialmente sería compacto, así que supóngase $Y^C \neq \emptyset$. Nótese que:

$$\begin{aligned} X &= Y^C \cup Y \\ &= Y^C \cup \bigcup \mathcal{U}_\alpha \\ &= Y^C \cup \bigcup \underbrace{(Y \cap \mathcal{V}_\alpha)}_{\text{abiertos de } Y} \\ &= Y^C \cup \left(Y \cap \bigcup \mathcal{V}_\alpha \right) \\ &= (Y^C \cup Y) \cap \left(Y^C \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha \right) \\ &= X \cup \left(Y^C \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha \right), \end{aligned}$$

y nótese que el conjunto resultante en la igualdad de la última linea, es un abierto de X, i.e. que en particular $\{\mathcal{U}_\alpha\} \cup \{Y^C\}$ es un cubrimiento de abiertos de X, y por la compacidad de X nótese que existe un conjunto finito $\{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n\} \subseteq \{\mathcal{U}_\alpha\}$ t.q. $X = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i \cup Y^C$ (pues como $Y = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$

y $Y^C \neq \emptyset$, hay que considerar este último conjunto en el cubrimiento por si existen elementos que no están en el otro), pero como $Y \subseteq X$, entonces $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i \cup Y^C$, i.e. que $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$, mostrando que en efecto Y es compacto. ■

Teorema 7. Sean X y Y E.T. Si X es compacto y $f : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces $f(X)$ es compacto.

Ejemplo 3. Demuéstrese que $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es un conjunto compacto. Basta considerar la función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$ t.q. $f(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Por el teorema anterior $f([0, 2\pi]) = \mathbb{S}^1$ es compacto. □

Demostración:

Si $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ es un cubrimiento de abiertos para $f(X)$, entonces $f(X) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, y por propiedades conjuntistas[1] se tiene que esto último es equivalente a decir que $X \subseteq f^{-1}\left(\bigcup \mathcal{U}_\alpha\right) = \bigcup f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$, pero como f es continua, devuelve abiertos en abiertos, por tanto $\{f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)\}$ es un cubrimiento de abiertos para X, y por la compacidad de tal conjunto, existe un subconjunto $\left\{f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha(i)}) : i = 1, \ldots, n\right\} \subseteq \{f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)\}$ t.q. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}\left(\mathcal{U}_{\alpha(i)}\right) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\alpha(i)}\right)$, y esto último es equivalente a que $f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\alpha(i)}$. ■

Teorema 8. El espacio producto $S \times T$ es compacto syss S y T son compactos.

Demostración:

Ver [AMR12, pp. 24, 25]. ■

Ejemplo 4. Recordar que el toro es la superficie cerrada definida como $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Luego es compacto. □

Observacion 3. El toro también se puede definir considerando la siguiente relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^2$:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \Leftrightarrow (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

[1] Recordar de teoría de conjunto que dada la función $f : X \to Y$, la imagen directa de $A \subseteq X$ y la imagen inversa de $B \subseteq Y$ se definen respectivamente como:

$$f(A) := \{y \in Y : \exists x \in A f(x) = y\} \text{ y } f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Además, $f(A) \subseteq B$ syss $A \subseteq f^{-1}(B)$. Finalmente, si para cada α, $\mathcal{U}_\alpha \subseteq Y$, entonces $f^{-1}\left(\bigcup \mathcal{U}_\alpha\right) = \bigcup f^{-1}\left(\mathcal{U}_\alpha\right)$.

para definir $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$, donde los abiertos de la topología vienen dados por la colección $\{\mathcal{U} \subseteq \mathbb{T}^2 : \pi^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto de $\mathbb{R}^2\}$. Recordar que la aplicación π es la proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ t.q. $\pi(x) = [x]$. Esto muestra que el recíproco del teorema anterior es falso, pues $\mathbb{T}^2$ es compacto y $\mathbb{R}^2$ no (¿por qué?).

Teorema 9 (de Bolzano-Weierstraß). Si X es un E.T. compacto y Haussdorf, entonces toda sucesión convergente posee una subsucesión convergente. El recíproco es también verdadero en espacio métricos y E.T. Hausdorff segundo contables.

Demostración:

■

Definición 12. Sea M un E.M. Un conjunto $A \subseteq M$ es llamado totalmente acotado si para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq M$ t.q. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_\epsilon(p_i)$.

Teorema 10. Un E.M. es compacto syss es completo y totalmente acotado.

Demostración:

■

Teorema 11. En un E.M. los conjuntos compactos son cerrados y acotados.

Demostración:

■

Teorema 12 (de Heine-Borel). En $\mathbb{R}^n$ ser compacto es equivalente a ser cerrado y acotado.

Demostración:

■

Por lo anterior y el teorema de Bolzano-Weierstraß, se tiene que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto syss toda sucesión de puntos de X posee una subsucesión convergente a un punto de X.

Es inmediato comprobar que $]0,1[\subseteq \mathbb{R}$ no es compacto, pues por el comentario anterior, nótese que $\{1/k\}_{k\geq 2} \subseteq]0,1[$, pero tal sucesión converge a $0 \notin]0,1[$.

1.4. Conexidad

El concepto de conexidad tiene un significado relacionado con el hecho de no poder "separar" un conjunto en dos partes. Los conceptos presentados acá están en el contexto de la topología estándar de los espacios euclidianos, pero la mayoría de estos se pueden generalizar de manera análoga a espacios topológicos más generales.

Definición 13. $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice conexo cuando para cualquier pareja de abiertos disjuntos $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \subset U_1 \cup U_2$, necesariamente uno de estos dos no intercepta a A.

Equivalentemente podríamos definir este concepto diciendo que una separación de un conjunto es una escogencia de dos abiertos de este conjunto, que son disjuntos y que unen al conjunto. Una separación trivial es cuando uno de estos abiertos es el mismo conjunto y el otro es el conjunto vacío. Luego, un conjunto conexo es aquel que solo admite separaciones triviales. Recuerde que un abierto de un conjunto es la intersección de un abierto en $\mathbb{R}^n$ con el mismo conjunto.

El siguiente teorema es una caracterización bien conocida de los subconjuntos conexos de la recta (en la topología estándar).

Teorema 13. Los únicos subconjuntos conexos de la recta son los intervalos.

La conexidad, así como la compacidad, es una propiedad preservada por aplicaciones continuas, en efecto

Teorema 14. Si $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua y X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración:

En efecto, si U_1, U_2 abiertos disjuntos de $f(X)$ unen al propio $f(X)$, por la continuidad de f, se tiene que $f^{-1}(U_1)$ y $f^{-1}(U_2)$ son abiertos de X, disjuntos y que unen a X, luego, por conexidad uno de los dos debe ser vacío, como consecuencia U_1 o U_2 es vacío. ■

Juntando los dos teoremas anteriores se obtiene el teorema del valor intermedio para funciones reales de varias variables.

Teorema 15. Si $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua y $y \in (f(x_1), f(x_2))$, entonces existe $x_3 \in X$ tal que $f(x_3) = y$.

El teorema anterior se prueba sin mucha dificultad teniendo en cuenta que por conexidad, la imagen de f es un intervalo.

Otra aplicación interesante es el conocido teorema de la aduana.

Teorema 16. Si un conjunto conexo $X \subset \mathbb{R}^n$ contiene un punto $a \in A$ y otro punto $b \notin A$, para otro conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces X contiene algún punto de la frontera de A.

Demostración:

Recordemos que la frontera de A, denotada por ∂A, se define como todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ tales que toda bola centrada en ellos contiene puntos de A y de su complemento, es decir, no son ni interiores ni exteriores.

Ahora, supongamos que a y b no son puntos frontera de A, caso contrario ya se tiene el resultado. Luego, se tiene que $a \in \operatorname{int}(A)$ y $b \in \operatorname{ext}(A)$. De esta forma, $\operatorname{int}(A) \cap X$ y $\operatorname{ext}(A) \cap X$ son abiertos de X no vacíos y disjuntos, luego, no pueden unir a X pues esto contradice la conexidad de X. Entonces, existe un punto de X que no está en ninguno de estos abiertos, es decir, es un punto frontera de A. $\blacksquare$

Una pregunta natural es si la unión de conjuntos conexos es conexa. Intuitivamente se puede responder a esta pregunta negativamente, pues uno puede unir dos conexos disjuntos y el resultado evidentemente no será conexo. Sin embargo, la respuesta es afirmativa si no son disjuntos.

Teorema 17. Una unión arbitraria de conexos con un punto en común da como resultado un conjunto conexo.

Demostración:

En efecto, sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de conexos en un espacio euclidiano, indexada por algún conjunto Λ y $p \in A_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$.

Ahora, si U_1, U_2 son abiertos disjuntos de $A = \cup_\alpha A_\alpha$, que unen a A, entonces, $p \in U_1$, sin pérdida de generalidad. Luego, $U_1 \cap A_\alpha \neq \emptyset$ es un abierto no vacío de A_α, para todo α. Si suponemos que $U_2 \neq \emptyset$, entonces para algún $q \in A_\beta$, se tiene que $q \in U_2$, luego, $U_1 \cap A_\beta, U_2 \cap A_\beta$ es una separación de A_β en abiertos (de A_β) disjuntos no vacíos, lo cual representa una contradicción.

$\blacksquare$

Para más propiedades de los conjuntos conexos, consultar [Lim14].

Vale la pena ahora mencionar otra caracteristica interesante, que es la conexidad por caminos. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice conexo por caminos, cuando para cualquier par de puntos $p, q \in A$, existe una curva continua con trazo contenido en A que los une. En otras palabras, existe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$, donde γ es continua y $\gamma([a, b]) \subset A$.

Todo conjunto conexo por caminos es conexo. Lo anterior es un ejercicio interesante que involucra el teorema anterior. Sin embargo, y contrario a lo que se podría intuir normalmente, no todo conexo es conexo por caminos. El siguiente resultado muestra que lo anterior mencionado es un caso realmente un poco patológico.

Teorema 18. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo, entonces es conexo por caminos.

Demostración:
Sea $p \in U$, considere el siguiente par de conjuntos.

$$U_1 = \{q \in U : \text{Existe un camino continuo entre p y q}\},$$

$$U_2 = \{q \in U : \text{No existe un camino continuo entre p y q}\}.$$

Note que ambos conjuntos son disjuntos, cubren U y son abiertos, pues basta considerar una bola contenida en U en torno de cada punto dentro de estos y usar el hecho de que las bolas son conexas y el hecho de que uno puede pegar dos caminos continuos con un punto en común para generar otro camino continuo.

De esta forma, nos vemos forzados a concluir que alguno de estos dos conjuntos es vacío, caso contrario estaríamos contradiciendo la conexidad de U. El que es vacío es evidentemente U_2, de nuevo con un argumento similar considerando una bola centrada en q. ∎

1.5. Ejercicios y problemas

1. Demuestre que una aplicación continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ debe mapear al menos dos puntos antípodales a un mismo valor. Esto es, existe $a \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(a) = f(-a)$.

2. Demuestre que un cilindro infinito en $\mathbb{R}^3$ es homeomorfo al plano sin el origen.

3. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es llamado convexo cuando para cualquier par de puntos $a, b \in A$ el segmento $[a, b] = \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$ está contenido en A. Demuestre que las bolas definidas por cualquier norma son convexas.

4. Demuestre que el determinante $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

5. Demuestre que $GL(n, \mathbb{R})$ es un abierto denso de $\mathbb{R}^n$.

6. Demuestre que cualquier esféra $S[a, r] \subset \mathbb{R}^n$ es conexa por caminos.

7. La envolvente convexa de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se define como la intersección de todos los convexos que contienen a A. Demuestre que la envolvente convexa de A es igual al conjunto de todas las combinaciones lineales convexas de elementos de A, donde por combinación lineal convexa se entiende $\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i$, $a_i \in A$, $\alpha_i \in [0, 1]$ y $\sum \alpha_i = 1$.

8. Demuestre que para cualquier par de matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n^2}$ se cumple $\det(I + AB) = \det(I + BA)$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con las siguientes dos propiedades. Para cualquier $a, b \in \mathbb{R}^2$ se cumple que la función $t \mapsto f(a+tv)$ es continua. Para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ se cumple que $f(K)$ es un compacto de la recta. Demuestre que f es continua.

Capítulo 2

Cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$

En esta sección se estudian conceptos relacionados a la diferenciabilidad, en el contexto de aplicaciones entre $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, así como las definiciones previas necesarias para llegar a ese punto. El contenido del inicio de esta sección está principalmente basado en el capítulo 2 del libro de Análisis en Variedades de Munkres [Mun91], con algo de influencia de [Nak03].

2.1. Diferenciabilidad

Es conveniente comenzar a construir las definiciones de diferenciabilidad desde funciones reales, con las que ya hay familiaridad, para determinar (y tener como motivación), qué propiedades queremos que una definición más general de derivación preserve.

Definición 14. Derivada en $\mathbb{R}$. Sea $\phi : \mathbb{R} \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}$, función real, tal que para $a \in A\ \exists_r \mid B(a, r) \subset A$, se define la derivada como:

$$\phi'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(a+t) - \phi(a)}{t} \tag{2.1}$$

Si el límite existe, se dice que ϕ es diferenciable en a.

Esta definición de derivada tiene dos consecuencias importantes:

1. Si $\phi : \mathbb{R} \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in A$, entonces es continua en a.

2. Si dos funciones, $\phi : \mathbb{R} \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \supseteq \phi(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables en $a \in A$ y $\phi(a)$, respectivamente, entonces $\psi \circ \phi$ es diferenciable en a.

La prueba de estas dos consecuencias no es complicada[1], pero de acuerdo al propósito del seminario, no es muy provechoso hacerla. La importancia de estas dos consecuencias en la construcción de una definición más generalizada de diferenciabilidad es muy grande. Como definición tentativa para la generalización de la derivada, se podría considerar a la derivada direccional.

Definición 15. Derivada direccional. Sea $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que para $\mathbf{a} \in A$, $\exists_{r \in \mathbb{R}} \,|\, B(a, r) \subset A$, se define para $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ la derivada direccional, como

$$f'(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} \tag{2.2}$$

La definición anterior de derivada no bastaría como definición general, porque existen casos en los que se puede tener derivada en un punto, sin tener continuidad. Un ejemplo de esto se mostrará más adelante, al terminar estas definiciones familiares. Con el propósito de definir un concepto más general de diferenciabilidad, es conveniente entonces modificar un poco la definición 14, de derivada de un punto, a una de diferenciabilidad en un punto:

Definición 16. Diferenciabilidad en $\mathbb{R}$. Sea $\phi : \mathbb{R} \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}$, función real, tal que para $a \in A$ $\exists_r \,|\, B(a, r) \subset A$, se dice que ϕ es diferenciable en a, si existe λ, tal que:

$$\frac{\phi(a + t) - \phi(a) - \lambda t}{t} \to 0 \text{ cuando } t \to 0 \tag{2.3}$$

Más aún, se dice que $\lambda = \phi'(a)$, es la derivada.

En esta definición, en cierto sentido se está encontrando una aproximación lineal local, dada por la función λt, en el punto a. Esa esencia se preserva en una generalización del concepto de diferenciabilidad, como se muestra a continuación.

[1] Se puede encontrar la prueba en [Mun91]

Definición 17. Diferenciabilidad. Sea $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, aplicación, y sea $\mathbf{a} \in A$, tal que $\exists_{r\in\mathbb{R}} \,|\, B(\mathbf{a}, r) \subset A$. Se dice que f es diferenciable en $\mathbf{a}$, si existe una matriz $B \in \mathbb{M}_{n\times m}$, tal que:

$$\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - B \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} \to \mathbf{0}_n \text{ cuando } \mathbf{h} \to \mathbf{0}_m \tag{2.4}$$

Se dice que la aplicación lineal B es la derivada de f en $\mathbf{a}$.

Como nota importante, veamos que **B es única**...

Demostración:

Suponga que B y C son ambas derivadas de f en $\mathbf{a}$. Restando la condición de diferenciabilidad (ecuación 2.4) de ambas derivadas, se llega a que

$$\frac{(C - B) \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} \to \mathbf{0} \text{ cuando } \mathbf{h} \to \mathbf{0}$$

Al considerar que $\mathbf{h}$ puede tomar valores arbitrarios, escójase en particular que $\mathbf{h} = t\mathbf{u}$, con un $\mathbf{u}$ cualquiera. Entonces

$$(C - B) \cdot \mathbf{u} \to \mathbf{0}$$

De lo que se concluye que $C = B$ ■

Se puede verificar que para la Definición 17, generalización de la diferenciabilidad a aplicaciones $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, se cumplen las dos condiciones cuya importancia se resaltó al definir la diferenciabilidad usual en $\mathbb{R}$, en adición a una tercera:

1. **Diferenciabilidad $\implies$ Continuidad**: Si $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $\mathbf{a} \in A$, entonces es continua en $\mathbf{a}$. Ver el Teorema 20.

2. **Diferenciabilidad y composición**: Si dos funciones, $\phi : \mathbb{R}^m \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : \mathbb{R}^n \supseteq \phi(A) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ son diferenciables en $\mathbf{a} \in A$ y $\phi(\mathbf{a})$, respectivamente, entonces $\psi \circ \phi$ es diferenciable en $\mathbf{a}$.

3. **Diferenciabilidad y derivada direccional**: Sea $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, si f es diferenciable en $\mathbf{a} \in A$, con derivada B, entonces existen todas las derivadas direccionales en $\mathbf{a}$.

Clarifiquemos los conceptos anteriores con un ejemplo. Este ejemplo es basado en el ejemplo 3 de la sección 2 de [Mun91].

Ejemplo 5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y = 0 \\ \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & si \quad (x,y) \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

Nótese primero, motivado por la intuición, que f tiene potencias de orden 3 en el numerador y de orden 4 en el denominador, por lo que se esperaría de entrada que la función no sea continua en $\mathbf{0}$, y por lo tanto, no fuera diferenciable en 0.

Tomemos para ejemplificar la función evaluada en las curvas $x = 0$ y $y = 0$. La forma funcional de f evaluada en estas curvas sería $f(x,0) = f(0,y) = 0$, en donde hay continuidad y diferenciabilidad. Es decir, para los vectores base, existe la derivada direccional. Consideremos otra curva paramétrica, (t, t^2). Evaluando f sobre esta curva se obtiene que

$$f(t,t^2) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y = 0 \\ \frac{1}{2} & si \quad (x,y) \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

Se evidencia la discontinuidad de f en $\mathbf{0}$. Se mostró que existen derivadas direccionales de f en $\mathbf{0}$, a pesar de que la función no fuera diferenciable en ese mismo punto.

Más aún, utilizando la Definición 15, de derivada direccional, se puede mostrar la existencia de todas las derivadas direccionales, y encontrar su valor.

$\square$

La última definición de diferenciabilidad sólo habla de existencia. Para computar las derivadas de la forma usual, sin recurrir a la definición, es necesario introducir un par de teoremas primero. Veamos.

Teorema 19. Derivada y derivada direccional: Sea $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, aplicación diferenciable en $\mathbf{a} \in A$, y sea $\mathbf{u} \in A$,

$$f'(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$$

La prueba de este teorema es sencilla usando las Definiciones 15 and 17.

Teorema 20. Diferenciabilidad $\Longrightarrow$ continuidad: Si $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $\mathbf{a} \in A$, entonces es continua en $\mathbf{a}$.

Demostración:

Sea $B = Df(\mathbf{a})$. Sea $\mathbf{h} \longrightarrow \mathbf{0}$, véase que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} [f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})] = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left\{ |\mathbf{h}| \left[\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - B \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} \right] \right\} + B \cdot \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \mathbf{h}$$

El primer término de la derecha tiende a cero, porque f es diferenciable en $\mathbf{a}$, y es evidente que el segundo término también tiende a cero. Por lo tanto se concluye que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} [f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})] = \mathbf{0}$$

Es decir, $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$.

■

Como paso intermedio, es de utilidad definir la derivada parcial, como armazón de lo que será la derivada general.

Definición 18. Derivada parcial: Sea $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}$, se define la j-derivada parcial en el punto $\mathbf{a}$, denotada $D_j f(\mathbf{a})$, como la derivada direccional en dirección del vector base j, $\mathbf{e}_j$.

$$D_j f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{t}$$

Esta es la definición usual, y los métodos de cálculo son los mismos que en el cálculo ordinario. Ahora sí, veamos un caso de cálculo de derivada en términos de esta derivada parcial, a través del siguiente teorema...

Teorema 21. Cálculo de la derivada en codominio $\mathbb{R}$: Sea $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{a} \in A$, la derivada de f se calcula como:

$$Df(\mathbf{a}) = (\leftarrow D_j f(\mathbf{a}) \rightarrow)\,,\ j = 1, ..., m. \tag{2.5}$$

Donde se introdujo notación para expresar las matrices mediante secuencias, en bloques. Lo anterior es equivalente a:

$$(D_1 f(\mathbf{a}) \cdots D_j f(\mathbf{a}) \cdots D_m f(\mathbf{a})) = (\leftarrow D_j f(\mathbf{a}) \rightarrow)\,,\ j = 1, ..., m.$$

Demostración:

Como f es diferenciable, se tiene que existe $\{\lambda_j\}_{j=1,\ldots,m.}$, tal que la derivada es $Df(\mathbf{a}) = (\leftarrow \lambda_j \rightarrow)$. Veamos entonces:

$$D_j f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j) = Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_j = \lambda_j$$

En la primera igualdad, se usó la Definición 18, en la segunda igualdad el Teorema 19, y en la tercera igualdad se usó la hipótesis de la demostración.

■

Finalmente, para el cálculo de la derivada en el caso general, se utiliza este resultado en la construcción. Veamos.

Teorema 22. Cálculo de la derivada en codominio $\mathbb{R}^n$: Sea $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, y $\exists_r | B_m(\mathbf{a}, r) \subset A$. Sean las componentes de f en el codominio $\{f_i\}_{i=1,\ldots,n.}$, tales que

$$f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \uparrow \\ f_i(\mathbf{a}) \\ \downarrow \end{pmatrix}$$

Se tiene que

- f es diferenciable en $\mathbf{a}$ sii $\{f_i\}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$.
- Si f es diferenciable en $\mathbf{a}$, se tiene que

$$Df(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \uparrow \\ Df_i(\mathbf{a}) \\ \downarrow \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Nótese entonces que $Df(\mathbf{a}) \in \mathbb{M}_{m\times n}$. Además, se puede escribir equivalentemente que

$$(Df(\mathbf{a}))_{ij} = D_j f_i(\mathbf{a})$$

Esta matriz, se conoce también como el **Jacobiano** de f. La prueba del el Teorema 22 se realiza de manera similar a la del Teorema 21. Es importante hacer explícito que puede darse el caso en el que se pueda calcular el Jacobiano de una función en un punto en el que esta no es diferenciable (como se vio en el Ejemplo 5). En los casos en los que la función sí es diferenciable, la derivada es el Jacobiano.

Es natural entonces que la siguiente pregunta sea ¿Bajo qué condiciones se puede garantizar diferenciabilidad, sin recurrir a la definición?

Continuar pag 7 notas

Bibliografía

[AMR12] Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden y Tudor Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*. Vol. 75. Springer Science & Business Media, 2012.

[Awo10] Steve Awodey. *Category theory*. Second. Vol. 52. Oxford Logic Guides. Oxford University Press, Oxford, 2010, págs. xvi+311.

[FST19] Brendan Fong, David Spivak y Rémy Tuyéras. «Backprop as functor: a compositional perspective on supervised learning». En: *2019 34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. IEEE, [Piscataway], NJ, 2019, [13 pp.]

[JS91] André Joyal y Ross Street. «The geometry of tensor calculus, I». En: *Advances in Mathematics* 88.1 (jul. de 1991), págs. 55-112. DOI: `10.1016/0001-8708(91)90003-p`. URL: `https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90003-p`.

[Lim14] Elon Lages Lima. *Curso de Análise*. Vol. 2. IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

[Lur21] Jacob Lurie. *Kerodon*. 2021. URL: `https://kerodon.net`.

[Mac10] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. eng. 2nd. ed., Softcover version of original hardcover edition 1998. Graduate texts in mathematics 5. New York, NY: Springer, 2010. ISBN: 9781441931238.

[Mun91] J.R. Munkres. *Analysis On Manifolds*. Basic Books, 1991. ISBN: 9780201315967. URL: `https://books.google.com.co/books?id=rSTcqZMZ8UIC`.

[Mun00] James R Munkres. *Topology*. Vol. 2. Prentice Hall Upper Saddle River, 2000.

[Nak03] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics). 2003. URL: http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?key=7208855.

[Per21] Paolo Perrone. *Notes on Category Theory with examples from basic mathematics*. 2021. arXiv: 1912.10642 [math.CT].

[Sel10] P. Selinger. «A Survey of Graphical Languages for Monoidal Categories». En: *New Structures for Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 2010, págs. 289-355. DOI: 10.1007/978-3-642-12821-9_4. URL: https://doi.org/10.1007%2F978-3-642-12821-9_4.