数据结构与算法 B Cheat Sheet

1 绪论

1.1 算法的时间复杂度及其表示法

什么是算法

算法是对计算过程的描述，是为了解决某个问题而设计的有限长操作序列。

算法的性质

有穷性：一个算法必须可以用有穷条指令描述，且必须在执行有穷次操作后终止。每次操作都必须在有穷时间内完成。算法终止后必须给出所处理问题的解或宣告问题无解。

确定性：一个算法，对于相同的输入，无论运行多少次，总是得到相同的输出。也可以说只要算法运行前的初始条件相同，那么算法运行的结果也相同。

可行性：算法中的指令（或描述语句）含义明确无歧义，且可以被机械化地自动执行。

输入/输出：输入指的是描述算法所处理的问题的数据，输出指的是描述该问题的答案的数据。算法可以不需要输入。但是没有输出的算法是没有意义的。

程序或算法的时间复杂度

一个程序或算法的时间效率，也称“时间复杂度”，有时简称“复杂度”。复杂度常用大的字母 O 和小写字母 n 来表示，比如 $O(n)$,$O(n^2)$ 等。n 代表问题的规模，$O(X)$ 就表示解决问题的时间和 X 成正比关系（粗略理解）。

时间复杂度是用算法运行过程中，某种时间固定的操作需要被执行的次数和 n 的关系来度量的。在无序数列中查找某个数，复杂度是 $O(n)$。

计算复杂度的时候，只统计执行次数最多的 (n 足够大时) 那种固定操作 (称为基本操作) 的次数。比如某个算法需要执行加法 n^2 次，除法 $10000n$ 次，那么就记其复杂度是 $O(n^2)$ 的。

如果复杂度是多个 n 的函数之和，则只关心随 n 的增长增长得最快的那个函数。

程序或算法的时间复杂度

在无序数列中查找某个数 (顺序查找)：$O(n)$

插入排序、选择排序等笨排序方法：$O(n^2)$

快速排序：$O(n\log(n))$

二分查找：$O(\log(n))$

Python 中一些操作的时间复杂度总结

$O(1)$ 复杂度的常见操作：

1) 根据下标访问列表、字符串、元组中的元素
2) 在集合、字典中增删元素
3) 调用列表的 `append` 函数在列表末尾添加元素，以及用 `pop()` 函数删除列表末尾元素
4) 用 `in` 判断元素是否在集合中或某关键字是否在字典中
5) 以关键字为下标访问字典中的元素的值
6) 用 `len` 函数求列表、元组、集合、字典的元素个数

$O(n)$ 复杂度的常见操作：

1) 用 `in` 判断元素是否在字符串、元组、列表中
2) 用 `insert` 在列表中插入元素
3) 用 `remove` 或 `del` 删除列表中的元素
4) 用字符串、元组或列表的 `find`、`rfind`、`index`等函数做顺序查找
5) 用字符串、元组或列表的 `count` 函数计算元素出现次数
6) 用 `max`, `min`函数求列表、元组的最大值，最小值
7) 列表和元组加法

$O(n\log n)$ 复杂度的常见操作：

Python 自带排序 `sort`, `sorted`

$O(\log n)$ 复杂度的常见操作：

在排好序的列表或元组上进行二分查找（初始的查找区间是整个元组或列表，每次和查找区间中点比较大小，并缩小查找区间到原来的一半。类似于查英语词典）有序就会找得快！Pyhon 并不自带二分查找函数。

`in` 用于列表和用于字典、集合的区别

`a in b`

若 b 是列表，字符串或元组，则该操作时间复杂度 $O(n)$，即时间和 b 的元素个数成正比

若 b 是字典或集合，则该操作时间复杂度 $O(1)$，即时间基本就是常数，和 b 里元素个数无关

因此集合用于需要经常判断某个东西是不是在一堆东西里的情况

此种场合用列表替代集合，容易导致超时!!!!

最坏复杂度、平均复杂度、最好复杂度

算法的复杂度有最好情况下复杂度、最坏情况下的复杂度和平均复杂度之分，虽然许多情况下最坏复杂度和平均复杂度恰好相同。

快速排序为例，一般情况下待排序列杂乱无章，这种情况下快速排序的复杂度就是平均复杂度 $O(n\log(n))$，但是在待排序的序列处于基本有序或基本逆序的最坏情况下，其复杂度会变成 $O(n^2)$。

1.2 数据的逻辑结构和存储结构

什么是数据结构?

数据结构 (data structure) 就是数据的组织和存储形式。描述一个数据结构，需要指出其逻辑结构、存储结构和可进行的操作。

将数据的单位称作“元素”或“结点”。数据结构描述的就是结点之间的关系。

数据的逻辑结构

从逻辑上描述结点之间的关系，和数据的存储方式无关。

集合结构：结点之间没有什么关系，只是属于同一集合。如 `set`。

线性结构：除了最靠前的结点，每个结点有唯一前驱结点；除了最靠后的结点，每个结点有唯一后继结点。如 `list`。

树结构：有且仅有一个结点称为”根结点”，其没有前驱 (父结点)；有若干个结点称为“叶结点”，没有后继 (子结点)；其它结点有唯一前驱，有 1 个或多个后继。如家谱。

图结构：每个结点都可以有任意多个前驱和后继，两个结点还可以互为前驱后继。如铁路网，车站是结点。

数据的存储结构

数据在物理存储器上存储的方式，大部分情况下指的是数据在内存中存储的方式。

顺序结构：结点在内存中连续存放，所有结点占据一片连续的内存空间。如 `list`。

链接结构：结点在内存中可不连续存放，每个结点中存有指针指向其前驱结点和/或后继结点。如链表，树。

索引结构：将结点的关键字信息（比如学生的学号）拿出来单独存储，并且为每个关键字 x 配一个指针指向关键字为 x 的结点，这样便于按照关键字查找到相应的结点。

散列结构：设置散列函数，散列函数以结点的关键字为参数，算出一个结点的存储位置。

数据的逻辑结构和存储结构无关

一种逻辑结构的数据，可以用不同的存储结构来存储。

树结构、图结构可以用链接结构存储，也可以用顺序结构存储。

线性结构可以用顺序结构存储，也可以用链接结构存储。

数据结构上的操作

建立（初始化）

插入结点

删除结点

查找结点

求结点前驱或结点后继。如线性表、树和图。

随机访问。即“找第 `i` 个结点”，如顺序表。

掌握一个数据结构，不但要了解其逻辑结构、存储结构，以及其上进行的各种操作，还需要知道每种操作的时间复杂度。

2 线性表

2.1 顺序表

即 Python 的列表，以及其它语言中的数组

元素在内存中连续存放

每个元素都有唯一序号（下标），且根据序号访问（包括读取和修改）元素的时间复杂度是 $O(1)$ 的 — 随机访问

下标为 `i` 的元素前驱下标为 `i-1`，后继下标为 `i+1`

顺序表支持的操作

序号	操作	含义	时间复杂度
1	init(n)	生成一个n个元素的顺序表，元素值随机	O(1)
2	init(a_0,a_1,....a_n)	生成元素为a_0,a_1,.... a_n的顺序表	O(n)
3	length()	求表中元素个数	O(1)
4	append(x)	在表的尾部添加一个元素x	O(1)
5	pop()	删除表尾元素	O(1)
6	get(i)	返回下标为i的元素	O(1)
7	set(i,x)	将下标为i的元素设置为x	O(1)
8	find(x)	查找元素x在表中的位置	O(n)
9	insert(i,x)	在下标i处插入元素x	O(n)
10	remove(i)	删除下标为i的元素	O(n)

顺序表的 append 的 $O(1)$ 复杂度的实现

总是分配多于实际元素个数的空间（容量大于元素个数）

元素个数小于容量时，append 操作复杂度 $O(1)$

元素个数等于容量时，append 导致重新分配空间，且要拷贝原有元素到新空间，复杂度 $O(n)$

重新分配空间时，新容量为旧容量的 k 倍 ($k > 1$ 且固定)，可确保 append 操作的平均复杂度是 $O(1)$。Python 的 `list` 取 $k = 1.2$ 左右。

2.2 链表

元素在内存中并非连续存放，元素之间通过指针链接起来

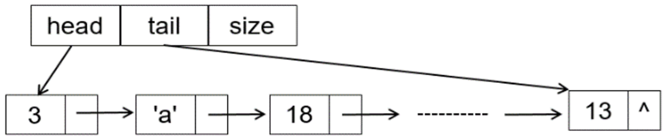
每个结点除了元素，还有 `next` 指针，指向后继

不支持随机访问。访问第 `i` 个元素，复杂度为 $O(n)$

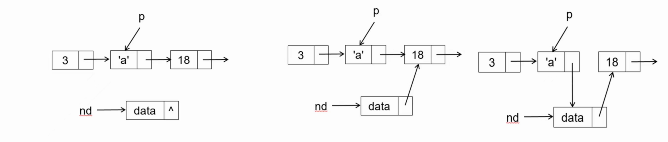
已经找到插入或删除位置的情况下，插入和删除元素的复杂度 $O(1)$, 且不需要复制或移动结点

有多种形式：单链表、循环单链表、双向链表、循环双向链表

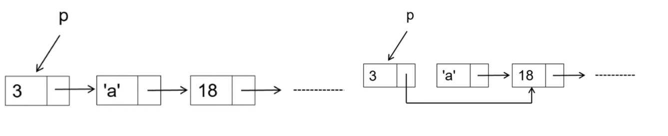
单链表




```python
class LinkList:
    class Node: #表结点
        def __init__(self, data, next=None):
            self.data, self.next = data, next
    def __init__(self):
        self.head = self.tail = None
        self.size = 0

    def printList(self): #打印全部结点
        ptr = self.head
        while ptr is not None:
            print(ptr.data, end=",")
            ptr = ptr.next

    def insert(self,p,data): #在结点P后面插入元素
        nd = LinkList.Node(data,None)
        if self.tail is p: # 新增的结点是新表尾
            self.tail = nd
        nd.next = p.next
        p.next = nd
        self.size += 1

    def delete(self,p): #删除P后面的结点
        if self.tail is p.next:
            self.tail = p
        p.next = p.next.next
        self.size -= 1

    #结点空间会被PYTHON自动回收
```



(1)执行nd = Node(data,None) 新建结点nd (2)执行nd.next = p.next (3)执行p.next = nd，完成插入



(1)初始状态，将要删除'a'结点 (2)执行p.next = p.next.next，完成删除

判断变量是否为 None，应写 p is None，p is not None 最好不要写 p == None，p != None

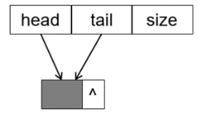
```python
    def popFront(self): #删除前端元素
        if self.head is None:
            raise \
           Exception("Popping front for Empty link list.")
        else:
            self.head = self.head.next
            self.size -= 1
            if self.size == 0:
                self.head = self.tail = None
    def pushBack(self,data): #在尾部添加元素
        if self.size == 0:
            self.pushFront(data)
        else:
            self.insert(self.tail,data)

    def pushFront(self,data): #在链表前端插入一个元素DATA
        nd = LinkList.Node(data, self.head)
        self.head = nd
        self.size += 1
        if self.tail is None:
            self.tail = nd

    def clear(self):
        self.head = self.tail = None
        self.size = 0
    def __iter__(self):
        self.ptr = self.head
        return self
    def __next__(self):
        if self.ptr is None:
            raise StopIteration() # 引发异常
        else:
            data = self.ptr.data
            self.ptr = self.ptr.next
            return data
```

```python
linkLst = LinkList()
linkLst.pushFront(0)
linkLst.pushFront(1)
for i in range(2,5):
    linkLst.pushBack(i)
for x in linkLst: #>>1,0,2,3,4,
    print(x,end=",")
```

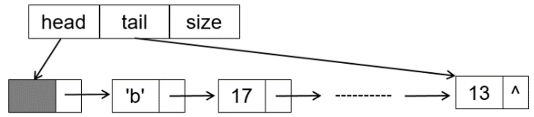
上述实现方式没有实现“隐藏”，不是很好的实现方式

带头结点的单链表

为避免链表为空是做特殊处理，可以为链表增加一个空闲头结点



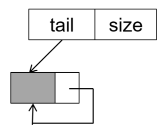
带头结点的空单链表



带头结点的非空单链表

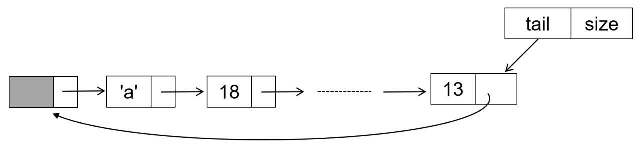
```python
class LinkList:
    def __init__(self):
        self.head = self.tail = LinkList.Node(None,None)
        self.size = 0
```

循环单链表



空表

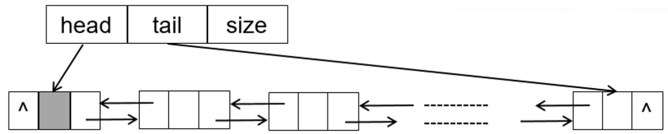
循环单链表在表首或表尾添加元素，以及删除表首元素，复杂度都是O(1)的。



tail.next即头结点

双向链表

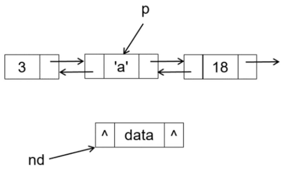
每个结点有 text 指针指向后继，有 prev 指针指向前驱



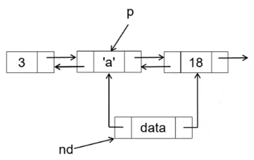
带头结点的双向链表

```python
class DoubleLinkList:
    class _Node:
        def __init__(self, data, prev=None, next=None):
            self.data, self.prev, self.next = data, prev,
            next
```

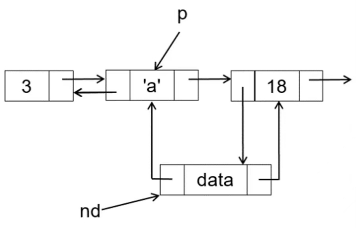
在结点 p 后面插入新结点 nd



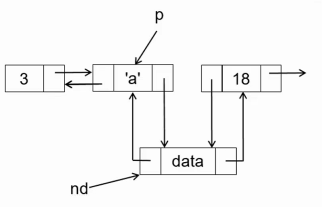
(1)执行nd = Node(data,None,None) 新建结点nd



(2) 执行 nd.prev, nd.next = p, p.next

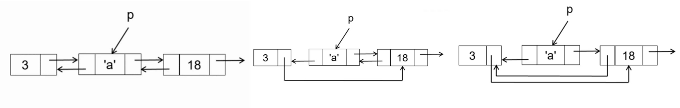


(3)执行p.next.prev = nd



(4)执行p.next = nd，插入完成

删除结点 p



(1)初始状态，将要删除'a'结点　(2)执行p.prev.next = p.next　(3)执行 p.nex.prev = p.prev, 完成删除

双向链表实现

```python
class DoubleLinkList:
    class _Node:
        def __init__(self, data, prev=None, next=None):
            self.data, self.prev, self.next = data, prev,
                 next

    class _Iterator:
        def __init__(self,p):
            self.ptr = p
        def getData(self):
            return self.ptr.data
        def setData(self,data):
            self.ptr.data = data
        def __next__(self):
            self.ptr = self.ptr.next
            if self.ptr is None:
                return None
            else:
                return DoubleLinkList._Iterator(self.ptr)
        def prev(self):
            self.ptr = self.ptr.prev
            return DoubleLinkList._Iterator(self.ptr)

    def __init__(self):
        self._head = self._tail = \
            DoubleLinkList._Node(None,None,None)
        self._size = 0

    def _insert(self,p,data):
        nd = DoubleLinkList._Node(data,p,p.next)
        if self._tail is p: # 新增的结点是新表尾
            self._tail = nd
        if p.next:
            p.next.prev = nd
        p.next = nd
        self._size += 1

    def _delete(self,p): #删除结点p
        if self._size == 0 or p is self._head:
            raise Exception("Illegal deleting.")
        else:
            p.prev.next = p.next
            if p.next: #如果p有后继
                p.next.prev = p.prev
            if self._tail is p:
                self._tail = p.prev
            self._size -= 1

    def clear(self):
        self._tail = self._head
        self._head.next = self._head.prev = None
        self.size = 0

    def begin(self):
        return DoubleLinkList._Iterator(self._head.next)

    def end(self):
        return None

    def insert(self,i,data): #在迭代器i指向的结点后面插入
         元素
        self._insert(i.ptr,data)

    def delete(self, i): # 删除迭代器i指向的结点
        self._delete(i.ptr)

    def pushFront(self,data): #在链表前端插入一个元素
        self._insert(self._head,data)

    def popFront(self):
        self._delete(self._head.next)

    def pushBack(self,data):
        self._insert(self._tail,data)

    def popBack(self):
        self._delete(self._tail)

    def __iter__(self):
        self.ptr = self._head.next
        return self

    def __next__(self):
        if self.ptr is None:
            raise StopIteration() # 引发异常
        else:
            data = self.ptr.data
            self.ptr = self.ptr.next
            return data

    def find(self,val): #查找元素val，找到返回迭代器，找不
              到返回None
        ptr = self._head.next
        while ptr is not None:
            if ptr.data == val:
                return DoubleLinkList._Iterator(ptr)
            ptr = ptr.next
        return self.end()

    def printList(self):
        ptr = self._head.next
        while ptr is not None:
            print(ptr.data,end=",")
            ptr = ptr.next

linkLst = DoubleLinkList()
for i in range(5):
    linkLst.pushBack(i)
i = linkLst.begin()
while i != linkLst.end(): #>>0,1,2,3,4,
    print(i.getData(),end = ",")
    i = next(i)
print()
i = linkLst.find(3)
i.setData(300)
linkLst.printList() #>>0,1,2,300,4,
print()
linkLst.insert(i,6000) #在i后面插入6000
linkLst.printList() #>>0,1,2,300,6000,4,
print()
linkLst.delete(i)
linkLst.printList() #>>0,1,2,6000,4,
```

2.3 链表和顺序表的选择

顺序表

中间插入太慢

链表

访问第 i 个元素太慢

顺序访问也慢 (现代计算机有 cache，访问连续内存域比跳着访问内存区域快很多)

还多费空间

结论

尽量选用顺序表。比如栈和队列，都没必要用链表实现

基本只有在找到一个位置后反复要在该位置周围进行增删，才适合用链表

实际工作中几乎用不到链表

3 枚举与二分法

3.1 二分法寻找答案的核心思想

如果一个假设的答案成立，那就跳着试一个更优的假设答案看行不行；
如果一个假设的答案不成立, 那就跳着试一个更差的假设答案看行不行。
必须每次验证假设答案，都可以把假设答案所在的区间缩小为上次的一半。
前提：单调性。一个假设答案不成立，则比它更优的假设答案肯定都不成立。

3.2 二分查找函数

写一个函数 BinarySeach，在从小到大排序的列表 a 里查找元素 p, 如果找到，则返回元素下标，如果找不到，则返回 None。要求复杂度 $O(\log(n))$

```
def binarySearch(a,p,key = lambda x : x):
    L, R = 0,len(a)-1 #查找区间的左右端点，区间含右端点
    while L <= R: #如果查找区间不为空就继续查找
        mid = L+(R-L)//2 #取查找区间正中元素的下标
        if key(p) < key(a[mid]):
            R = mid - 1 #设置新的查找区间的右端点
        elif key(a[mid]) < key(p):
            L = mid + 1 # 设置新的查找区间的左端点
        else:
            return mid
    return None
```

4 递归和分治

4.1 递归

递归的作用

1) 替代多重循环进行枚举
2) 解决本来就是用递归形式定义的问题
3) 将问题分解为规模更小的子问题进行求解
……

5 栈和队列

5.1 栈

类似于子弹匣，后压进去的子弹，先射出去
支持四种操作：

top()	返回栈顶元素
push(x)	将 x 压入栈中
pop()	弹出并返回栈顶元素
isEmpty()	看栈是否为空

要求上面操作复杂度都是 $O(1)$
用列表可以实现栈
四种操作的实现（stack 为一个列表）：

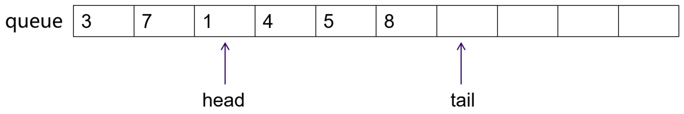
top()	stack[-1]
push(x)	stack.append(x)
pop()	stack.pop()
isEmpty()	len(stack) == 0

5.2 队列

即排队的队列。只能一头进 (push)，另一头出 (pop)。先进先出
要求进出的复杂度都是 $O(1)$
如果用列表的 append 进，pop(0) 出，则出的复杂度为 $O(n)$

队列的实现方法一

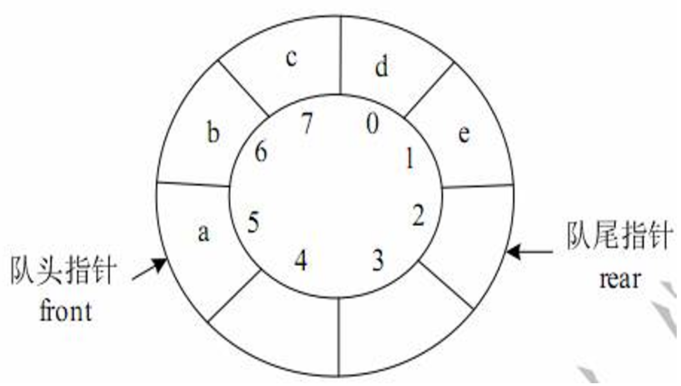
用足够大的列表实现，维护一个队头指针和队尾指针，初始：
head=tail = 0



head 指向队头元素，tail 指向队尾元素的后面
push(x) 的实现：
queue[tail] = x
tail+=1
pop() 的实现：head += 1
判断队列是否为空：head == tail

队列的实现方法二

如果不想浪费空间开足够大的列表，而是想根据实际情况分配空间，则可以用列表 + 头尾循环法实现队列



1) 预先开设一个 capacity 个空元素的列表 queue，head = tail = 0
2) 列表没有装满的情况下：
push(x) 的实现：
queue[tail] = x
tail = (tail+1) % capacity
pop() 的实现：
head = (head+1) % capacity
capacity 可以是 4,8,16.....
3) 如何判断队列是否为空：
方法 1：维护一个元素总数 size，size == 0 即为空
方法 2：不维护 size，浪费 queue 中一个单元的存储空间
head == tail 即为空
4) 如何判断队列是否为满:
方法 1：维护一个元素总数 size，size == capacity 即为满
方法 2：不维护 size, 浪费 queue 中一个单元的存储空间，
(tail + 1) % capacity == head 即为满
如果不浪费，就无法区分 head == tail 是队列空导致，还是队列满导致
5) 若一个 push 操作后导致列表满：
i. 建一个大小是原列表 k 倍大的新列表 ($k > 1$, 可以取 1.5,2.....)
ii. 将原列表内容全部拷贝到新列表，作为新队列
iii. 重新设置新列表的 head 和 tail
iv. 原列表空间自动被 Python 解释器回收
导致队列满的 push 的时间复杂度是 $O(n)$。平均 push 操作是 $O(1)$
Python 列表 append 做到 $O(1)$ 的实现也是这种原理，且 k 取 1.125，空间换时间
若每次增加空间只增加固定数量，比如 20 个单元，则 push 平均复杂度还是 $O(n)$

```
class Queue:
    _initC = 8    #存放队列的列表的初始容量
    _expandFactor = 1.5 #扩充容量时容量增加的倍数
    def __init__(self):
        self._q = [None for i in range(Queue._initC)]
        self._size = 0              #队列元素个数
        self._capacity = Queue._initC #队列最大容量
        self._head = self._rear = 0
    def isEmpty(self):
        return self._size == 0
    def front(self): #看队头元素。空队列导致RE
        if self._size == 0:
            raise Exception("Queue␣is␣empty")
        return self._q[self._head]
    def back(self): #看队尾元素，空队列导致RE
        if self._size == 0:
            raise Exception("Queue␣is␣empty")
        if self._rear > 0:
            return self._q[self._rear - 1]
        else:
            return self._q[-1]
    def push(self,x):
        if self._size == self._capacity:
            tmp = [None for i in range(
                int(self._capacity*Queue._expandFactor))]
            k = 0
            while k < self._size:
                tmp[k] = self._q[self._head]
                self._head = (self._head + 1) % self._capacity
                k += 1
            self._q = tmp #原来self._q的空间会被Python自动释放
            self._q[k] = x
            self._head,self._rear = 0,k+1
            self._capacity = int(
                self._capacity*Queue._expandFactor)
        else:
            self._q[self._rear] = x
            self._rear = (self._rear + 1) % self._capacity
        self._size += 1
    def pop(self):
        if self._size == 0:
            raise Exception("Queue␣is␣empty")
        self._size -= 1
        self._head = (self._head + 1) % len(self._q)

q = Queue()
for i in range(1,314):
```

```python
    q.push(i)
    print(q.back(),end=",")
print()
while not q.isEmpty():
    print(q.front(),end=",")
    q.pop()
```

用两个栈实现一个队列

执行 `push(x)` 操作时，将 x 压入栈 `inStack`，执行 `pop()` 或 `front()` 操作时，看另一个栈 `outStack` 是否为空，若不为空，弹出栈顶元素或访问栈顶元素即可；若为空，则先将 `inStack` 中的全部元素弹出并依次压入 `outStack`，然后再弹出或访问 `outStack` 的栈顶元素。
由于每个元素最多出入 `inStack` 各一次，出入 `outStack` 各一次，所以 `pop` 和 `front` 操作的平均复杂度是 $O(1)$ 的。

Python 中的队列

`collections` 库中的 `deque` 是双向队列，可以像普通列表一样访问，且在两端进出，复杂度都是 $O(1)$。

```python
import collections
dq = collections.deque()
dq.append('a') #右边入队
dq.appendleft(2) #左边入队
dq.extend([100,200]) #右边加入100,200
dq.extendleft(['c','d']) #左边依次加入 'c','d'
print(dq.pop()) #>>200 右边出队
print(dq.popleft()) #>>d 左边出队
print(dq.count('a')) #>>1
dq.remove('c')
print(dq) #>>deque([2, 'a', 100])
dq.reverse()
print(dq) #>>deque([100, 'a', 2])
print(dq[0],dq[-1],dq[1]) #>>100 2 a
print(len(dq)) #>>3
dq.clear()          #清空队列
print(len(dq),dq)   #>0 deque([])
```

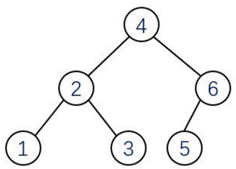
6 二叉树

6.1 二叉树的概念及性质

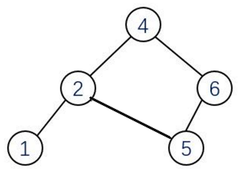
二叉树的定义

1) 二叉树是有限个元素的集合。
2) 空集合是一个二叉树，称为空二叉树。
3) 一个元素 (称其为“根”或“根结点”)，加上一个被称为“左子树”的二叉树，和一个被称为“右子树”的二叉树，就能形成一个新的二叉树。要求根、左子树和右子树三者没有公共元素。

二叉树

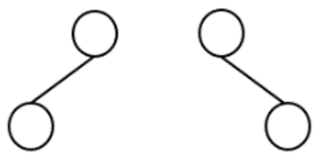


非二叉树，因不满足没有公共结点条件

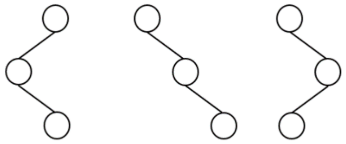


二叉树的左右子树是有区别的

以下是两棵不同的二叉树：

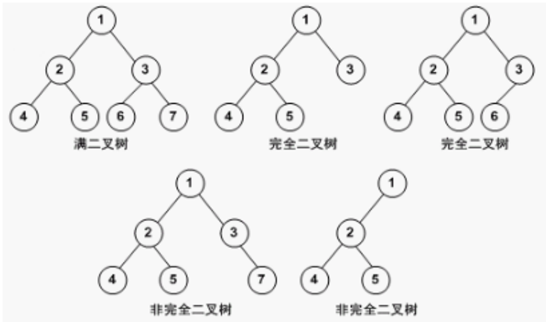


以下是三棵不同的二叉树：



二叉树的相关概念

二叉树的的元素称为“结点”。结点由三部分组成：数据、左子结点指针、右子结点指针。
结点的度 (degree)：结点的非空子树数目。也可以说是结点的子结点数目。
叶结点 (leaf node)：度为 0 的结点。
分支结点：度不为 0 的结点。即除了叶子以外的其他结点。也叫内部结点。
兄弟结点 (sibling)：父结点相同的两个结点，互为兄弟结点。
结点的层次 (level)：树根是第 0 层的。如果一个结点是第 n 层的，则其子结点就是第 n+1 层的。
结点的深度 (depth)：即结点的层次。
祖先 (ancestor):
1) 父结点是子结点的祖先
2) 若 a 是 b 的祖先，b 是 c 的祖先，则 a 是 c 的祖先。
子孙 (descendant)：也叫后代。若结点 a 是结点 b 的祖先，则结点 b 就是结点 a 的后代。
边：若 a 是 b 的父结点，则对子 <a,b> 就是 a 到 b 的边。在图上表现为连接父结点和子结点之间的线段。
二叉树的高度 (height)：二叉树的高度就是结点的最大层次数。只有一个结点的二叉树，高度是 0。结点一共有 n 层，高度就是 n-1。
完美二叉树 (perfect binary tree)：每一层结点数目都达到最大。即第 i 层有 2^i 个结点。高为 h 的完美二叉树，有 $2^{h+1}-1$ 个结点
满二叉树 (full binary tree)：没有 1 度结点的二叉树
完全二叉树 (complete binary tree)：除最后一层外，其余层的结点数目均达到最大。而且，最后一层结点若不满，则缺的结点定是在最右边的连续若干个。



二叉树的性质

1) 第 i 层最个多 2^i 个结点
2) 高为 h 的二叉树结点总数最多 $2^{h+1}-1$
3) 结点数为 n 的树，边的数目为 $n-1$
4) n 个结点的非空二叉树至少有 $\log_2(n+1)$ 层结点，即高度至少为 $\log_2(n+1)-1$
5) 在任意一棵二叉树中，若叶子结点的个数为 n_0，度为 2 的结点个数为 n_2，则 $n_0=n_2+1$。
6) 非空满二叉树叶结点数目等于分支结点数目加 1。
7) 非空二叉树中的空子树数目等于其结点数目加 1。

完全二叉树的性质

1) 完全二叉树中的 1 度结点数目为 0 个或 1 个
2) 有 n 个结点的完全二叉树有 $(n+1)/2$ 个叶结点。
3) 有 n 个叶结点的完全二叉树有 $2n$ 或 $2n-1$ 个结点 (两种都可以构建)
4) 有 n 个结点的非空完全二叉树的高度为 $\log_2(n+1)-1$。即：有 n 个结点的非空完全二叉树共有 $\log_2(n+1)$ 层结点。
5) 可以用列表存放完全二叉树的结点，不需要左右子结点指针。下标为 i 的结点的左子结点下标是 `2*i+1`, 右子结点是 `2*i+2` (根下标为 0)。下标为 `i` 的元素，其父结点的下标就是 `(i-1)//2`

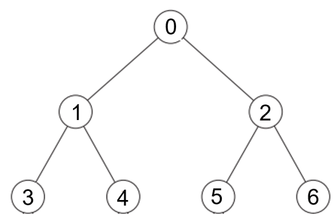
6.2 二叉树的实现

```python
class BinaryTree:
    def __init__(self,data,left = None,right = None):
        self.data,self.left,self.right = data,left,right
    def addLeft(self,tree): #tree是一个二叉树
        self.left = tree
    def addRight(self,tree): #tree是一个二叉树
        self.right = tree
```

二叉树的列表实现方法

二叉树是一个三个元素的列表 `X`
`X[0]` 是根结点的数据，`X[1]`，`X[2]` 是右子树。如果没有左子树，`X[1]` 就是空表 `[]`，如果没有右子树，`X[2]` 就是空表。
叶子结点为：`[data,[],[]]`

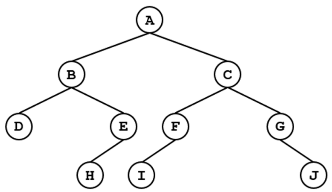
```
[0,
    [1,
    [3,[],[]],
    [4,[],[]] ],
    [2,
    [5,[],[]],
    [6,[],[]] ]
]
即: [0, [1, [3, [], []], [4, [], []]], [2, [5, [], []],
      [6, [], []]]]
```



```python
class BinaryTree:
    def __init__(self,data,left = [],right = []):
        self.treeList = [data,left,right]
    def addLeft(self,tree):
        self.treeList[1] = tree.treeList
    def addRight(self,tree):
        self.treeList[2] = tree.treeList
```

二叉树的遍历

广度优先遍历：使用队列，按层遍历
深度优先遍历：编写递归函数
前序遍历过程：1) 访问根结点 2) 前序遍历左子树 3) 前序遍历右子树。
中序遍历过程：1) 中序遍历左子树 2) 访问根结点 3) 中序遍历右子树。
后序遍历过程：1) 后序遍历左子树 2) 后序遍历右子树 3) 访问根结点。
“访问”指的是对结点进行某种具体操作，比如输出其值、修改其值等。
遍历只需要访问每个结点一次，因此复杂度 $O(n)$。n 是总结点数目。



前序遍历访问序列：ABDEHCFIGJ
中序遍历访问序列：DBHEAIFCGJ
后续遍历访问序列：DHEBIFJGCA
按层遍历访问序列：ABCDEFGHIJ

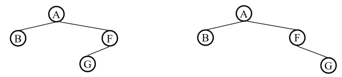
```python
class BinaryTree:
    def __init__(self,data,left = None,right = None):
        self.data,self.left,self.right = data,left,right
    def addLeft(self,tree): #TREE是一个二叉树
        self.left = tree
    def addRight(self,tree): #TREE是一个二叉树
        self.right = tree
    def preorderTraversal(self, op): #前序遍历,OP是函数,
        表示操作
        op(self)   #访问根结点
        if self.left: #左子树不为空
            self.left.preorderTraversal(op) #遍历左子树
        if self.right:
            self.right.preorderTraversal(op) #遍历右子树
    def inorderTraversal(self, op): #中序遍历
        if self.left:
            self.left.inorderTraversal( op)
        op(self)
        if self.right:
            self.right.inorderTraversal(op)
    def postorderTraversal(self, op): #后序遍历
        if self.left:
            self.left.postorderTraversal(op)
        if self.right:
            self.right.postorderTraversal(op)
        op(self)
    def bfsTraversal(self,op): #按层次遍历
        import collections
        dq = collections.deque()
        dq.append(self)
        while len(dq) > 0:
            nd = dq.popleft()
            op(nd)
            if nd.left:
                dq.append(nd.left)
            if nd.right:
                dq.append(nd.right)
```

用法：

```python
tree.preorderTraversal(lambda x: print(x.data,end=""))
tree.preorderTraversal(lambda x: x.data+=100)
```

遍历序列和二叉树

1) 仅凭一种遍历序列（前序、后序、中序），不能确定二叉树的样子
2) 给出一棵二叉树的前序遍历序列，和后序遍历序列，依然不能确定这棵树的样子



上面两棵二叉树有相同前序序列和中序序列
给出一棵二叉树的中序遍历序列，再加上前序序列，或后序序列，就可以确定树的样子

6.3 哈夫曼树 (最优二叉树)

给定 n 个结点，结点 i 有权值 W_i。要求构造一棵二叉树，叶子结点为给定的结点，且

$$\text{WPL} = \sum_{i=1}^{n} W_i L_i$$

最小。L_i 是结点 i 到树根的路径的长度。WPL: Weighted Path Length of Tree
最优二叉树也叫哈夫曼树

最优二叉树的构造

1) 开始 n 个结点位于集合 S
2) 从 S 中取走两个权值最小的结点 $n1$ 和 $n2$，构造一棵二叉树，树根为结点 r，r 的两个子结点是 $n1$ 和 $n2$，且 $W_r = W_{n1} + W_{n2}$，并将 r 加入 S
3) 重复 2), 直到 S 中只有一个结点，最优二叉树就构造完毕，根就是 S 中的唯一结点
显然，最优二叉树不唯一

哈夫曼编码树

需要对信息中用到的每个字符进行编码。
定长编码方案: 每个字符编码的比特数都相同。比如 ASCII 编码方案。

A 000	C 010	E 100	G 110
B 001	D 011	F 101	H 111

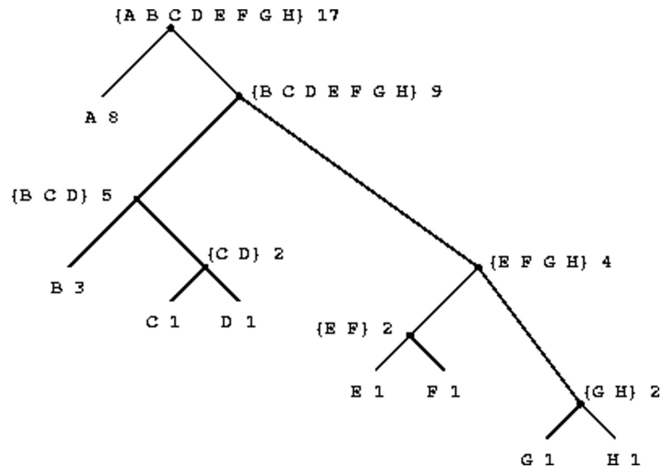
BACADAEAFABBAAAGAH
被编码为以下 54 个 bits:
001000010000011000100000101000001001000000000110000111

熵编码方案: 使用频率高的字符，给予较短编码，使用频率低的字符，给予较长编码，如哈夫曼编码。

A 0	C 1010	E 1100	G 1110
B 100	D 1011	F 1101	H 1111

BACADAEAFABBAAAGAH
被编码为以下 42 个 bits:
100010100101101100011010100100000111001111
使用可变长编码，需要解决的问题是：如何区分一个编码是一个字符的完整编码，还是另一个字符的编码的前缀。解决办法之一就是采用前缀编码：任何一个字符的编码，都不会是其他字符编码的前缀。

哈夫曼编码树:
二叉树
叶子代表字符，且每个叶子结点有个权值，权值即该字符的出现频率
非叶子结点里存放着以它为根的子树中的所有字符，以及这些字符的权值之和
权值仅用来建树，对于字符串的解码和编码没有用处



字符的编码过程：从树根开始，每次往包含该字符的子树走。往左子树走，则编码加上比特 1，往右子树走，则编码加上比特 0

A	0
B	100
C	1010
G	1110
H	1111

字符串编码的解码过程：从树根开始，在字符串编码中碰到一个 0，就往左子树走，碰到 1，就往右子树走。走到叶子，即解码出一个字符。然后回到树根重复前面的过程。
10001010
BAC
基本思想: 使用频率越高的字符，离树根越近。构造过程和最优二叉树一样
过程:
1. 开始时，若有 n 个字符，则就有 n 个结点。每个结点的权值就是字符的频率，每个结点的字符集就是一个字符。
2. 取出权值最小的两个结点，合并为一棵子树。子树的树根的权值为两个结点的权值之和，字符集为两个结点字符集之并。在结点集合中删除取出的两个结点，加入新生成的树根。
3. 如果结点集合中只有一个结点，则建树结束。否则，goto 2

```
Initial leaves
{(A 8) (B 3) (C 1) (D 1) (E 1) (F 1) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) (E 1) (F 1) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F} 2) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F} 2) ({G H} 2)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F G H} 4)}Merge
{(A 8) ({B C D} 5) ({E F G H} 4)} Merge
{(A 8) ({B C D E F G H} 9)}Final merge
{({A B C D E F G H} 17)}
```

哈夫曼编码树不唯一

如何快速地在结点集合取出权值最小的两个结点？不要 $O(n)$ 的笨办法。用”堆”，可以做到 $O(\log(n))$

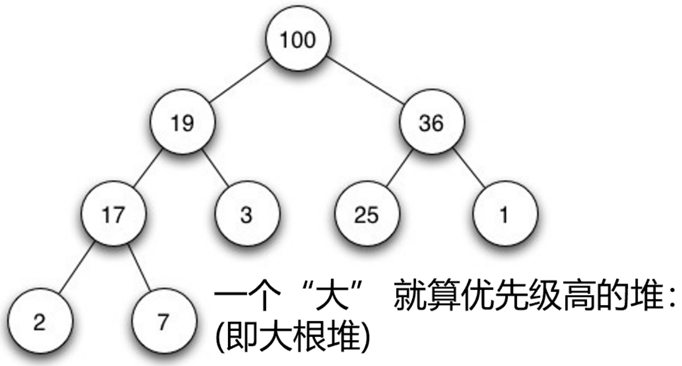
6.4 堆

堆的定义

1) 堆 (二叉堆) 是一个完全二叉树

2) 堆中任何结点优先级都高于或等于其两个子结点（什么叫优先级高可以自己定义）

3) 一般将堆顶元素最大的堆称为大根堆（大顶堆），堆顶元素最小的堆称为小根堆（小顶堆）



堆的存储

用列表存放堆。堆顶元素下标是 0。下标为 i 的结点，其左右子结点下标分别为 `i*2+1`，`i*2+2`。

堆的性质

1) 堆顶元素是优先级最高的（啥叫优先级高可自定义）

2) 中的任何一棵子树都是堆

3) 往堆中添加一个元素，并维持堆性质，复杂度 $O(\log(n))$

4) 删除堆顶元素，剩余元素依然维持堆性质，复杂度 $O(\log(n))$

5) 在无序列表中原地建堆，复杂度 $O(n)$

堆的作用

堆用于需要经常从一个集合中取走 (即删除) 优先级最高元素，而且还要经常往集合中添加元素的场合（堆可以用来实现优先队列）

可以用堆进行排序，复杂度 $O(n\log(n))$，且只需要 $O(1)$ 的额外空间, 称为“堆排序”。递归写法需要 $O(\log(n))$ 额外空间，非递归写法需要 $O(1)$ 额外空间。

堆的操作

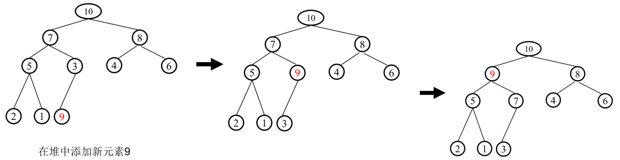
添加一个元素

假设堆存放在列表 a 中，长度为 n

添加元素 x 到列表 a 尾部，使其成为 a[n]

若 x 优先级高于其父结点，则令其和父结点交换，直到 x 优先级不高于其父结点，或 x 被交换到 a[0]，变成堆顶为止。此过程称为将 x” 上移”

x 停止交换后，新的堆形成，长度为 n+1



在堆中添加新元素9

显然，交换过程中，以 x 为根的子树，一直都是个堆

由于 n 个元素的完全二叉树高度为 $\log_2(n+1)$ 向上取整，每交换一次 x 就上升一层，因此上移操作复杂度 $O(\log(n))$，即添加元素复杂度 $O(\log(n))$

删除堆顶元素 1) 假设堆存放在列表 a 中，长度为 n

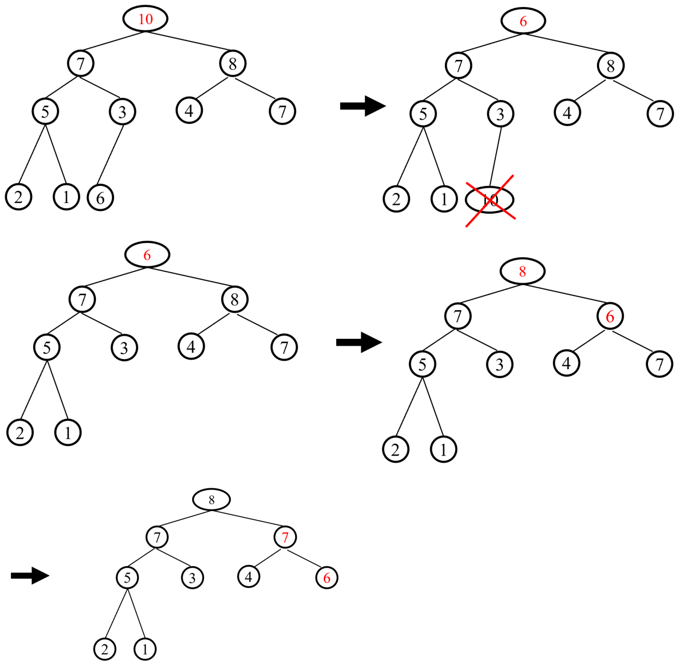
2) 将 a[0] 和 a[n-1] 交换

3) 将 a[n-1] 删除 (pop)

4) 记此时的 a[0] 为 x，则将 x 和它两个儿子中优先级较高的，且优先级高于 x 的那个交换，直到 x 变成叶子结点，或者 x 的儿子优先级都不高于 x 为止。将此整个过程称为将 x” 下移”

5) x 停止交换后，新的堆形成，长度为 n-1

下移过程复杂度为 $O(\log(n))$，因此删除堆顶元素复杂度 $O(\log(n))$



重要结论：

如果 a[i] 的两棵子树都是堆，则对 a[i] 的下移操作完成后，以新 a[i] 为根的子树会形成堆。

建堆

一个长度为 n 的列表 a, 要原地将 a 变成一个堆

方法：

将 a 看作一个完全二叉树。假设有 H 层。根在第 0 层，第 H-1 层都是叶子

对第 H-2 层的每个元素执行下移操作

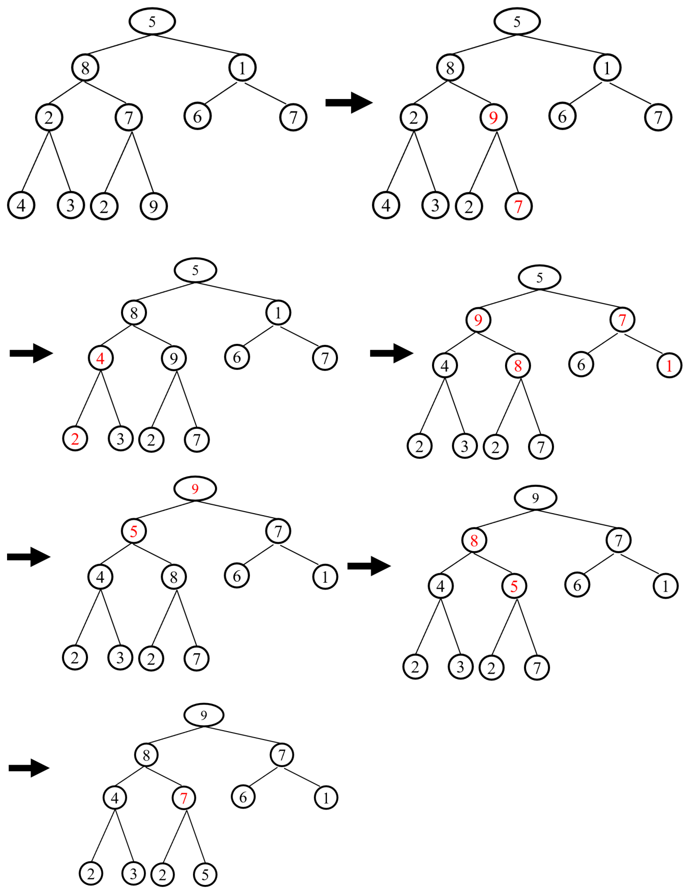
对第 H-3 层的每个元素执行下移操作

.....

对第 0 层的元素执行下移操作

堆即建好。复杂度 $O(n)$。

无序列表



堆的应用

哈夫曼编码树的构造


```
Initial leaves
{(A 8) (B 3) (C 1) (D 1) (E 1) (F 1) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) (E 1) (F 1) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F} 2) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F} 2) ({G H} 2)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F G H} 4)}Merge
{(A 8) ({B C D} 5) ({E F G H} 4)} Merge
```

```
{(A 8) ({B C D E F G H} 9)}Final merge
{({A B C D E F G H} 17)}
```

哈夫曼编码树不唯一
用" 堆" 存放结点集合，便于快速取出最小权值的两个结点，以及加入合并后的新结点。

堆排序

1) 将待排序列表 a 变成一个堆 ($O(n)$)
2) 将 a[0] 和 a[n-1] 交换，然后对新 a[0] 做下移，维持前 n-1 个元素依然是堆。此时优先级最高的元素就是 a[n-1]
3) 将 a[0] 和 a[n-2] 交换，然后对新 a[0] 做下移, 维持前 n-2 个元素依然是堆。此时优先级次高的元素就是 a[n-2]
......
直到堆的长度变为 1，列表 a 就按照优先级从低到高排好序了。
整个过程相当不断删除堆顶元素放到 a 的后部。堆顶元素依次是优先级最高的、次高的....
一共要做 n 次下移，每次下移 $O(\log(n))$，因此总复杂度 $O(n\log(n))$
如果用递归实现，需要 $O(\log(n))$ 额外栈空间 (递归要进行 $\log(n)$ 层)。
如果不用递归实现，需要 $O(1)$ 额外空间。

堆的实现

```python
class Heap:
    def __init__(self,array = [],less = lambda x,y : x < y):
        #若x为堆顶元素，y为堆中元素，则 less(x,y)为True
        #默认情况下，小的算优先级高 #i的儿子是2*i+1和2*i+2
        self._a = array[:] #array是列表
        self._size = len(array)
        self._less = less  #less是比较函数
        self.makeHeap()
    def top(self):
        return self._a[0]
    def pop(self): #删除堆顶元素
        tmp = self._a[0]
        self._a[0] = self._a[-1]
        self._a.pop()
        self._size -= 1
        self._goDown(0) #_goDown是下移操作，将a[0]下移
        return tmp
    def append(self,x): #往堆中添加x
        self._size += 1
        self._a.append(x)
        self._goUp(self._size-1) #_goUp是上移
    def _goUp(self,i): #将a[i]上移
        #只在append的时候调用，不能直接调用或在别处调用
        #被调用时，以a[i]为根的子树，已经是个堆
        if i == 0:
            return
        f = ( i -1 )// 2 #父结点下标
        if self._less(self._a[i],self._a[f]):
            self._a[i],self._a[f] = self._a[f],self._a[i]
            self._goUp(f) #a[f]上移
    def _goDown(self,i): #a[i]下移
        #前提：在a[i]的两个子树都是堆的情况下，下移
        if i * 2 + 1 >= self._size: #a[i]没有儿子
            return
        L,R = i * 2 + 1, i * 2 + 2
        if R >= self._size or self._less(self._a[L],self._a[R]):
            s = L
        else:
            s = R
        #上面选择小的儿子
        if self._less(self._a[s],self._a[i]):
            self._a[i],self._a[s] = self._a[s],self._a[i]
            self._goDown(s)
    def makeHeap(self): #建堆
        i = (self._size - 1 - 1) // 2 #i是最后一个叶子的父亲
        for k in range(i,-1,-1):
            self._goDown(k)

    def heapSort(self): #建好堆之后调用，进行堆排序
        for i in range(self._size-1,-1,-1):
            self._a[i],self._a[0] = self._a[0],self._a[i]
            self._size -= 1
            self._goDown(0)
        self._a.reverse()
        return self._a

#下面是堆的用法，不是堆内部的代码
import random
def heapSort(a,less): #对列表a进行堆排序,哪个less哪个排在前面
    hp = Heap(a,less)
    return hp.heapSort()

s = [i for i in range(17)]
random.shuffle(s)
print(s)
h = heapSort(s,lambda x,y : x < y)
print(h)
```

python 中的堆：heapq

```python
import heapq

heapq.heapify(s)          将列表s变成一个堆
heapq.heappush(s,item)  往已经是堆的s里面添加元素item
heapq.heappop(s)          弹出堆顶元素(会减少s长度)
......

def heapsort(iterable): #iterable是个序列
#函数返回一个列表，内容是iterable中元素排序的结果
    h = []
    for value in iterable:
        h.append(value)
    heapq.heapify(h)
    return [heapq.heappop(h) for i in range(len(h))]
#不便之处：没有设定排序规则的机会。如果要形成大元素在顶的整数堆，只能取-2相反数进堆。出来的时候再取相反数（默认最优是小的）
import heapq
def heapSorted(iterable): #iterable是个序列
#函数返回一个列表，内容是iterable中元素排序的结果，不会改变iterable
    h = []
    for value in iterable:
        h.append(value)
    heapq.heapify(h)
    return [heapq.heappop(h) for i in range(len(h))]

a = (2,13,56,31,5)
print(heapSorted(a)) #>>[2, 5, 13, 31, 56]
print(heapq.nlargest(3,a)) #>>[56, 31, 13]
print(heapq.nlargest(3,a,lambda x:x%10)) #>>[56, 5, 13]
#取个位数最大的三个
print(heapq.nsmallest(3,a,lambda x:x%10))#>>[31, 2, 13]
#取个位数最小的三个
```

7 树、森林和并查集

7.1 树

树的概念

每个结点可以有任意多棵不相交的子树
子树有序，从左到右依次是子树 1, 子树 2......
二叉树的结点在只有一棵子树的情况下，要区分是左子树还是右子树。树的结点在只有一棵子树的情况下，都算其是第 1 棵子树 (所以二叉树不是树)
支持广度优先遍历、前序遍历（先处理根结点，再依次处理各个子树）和后序遍历（先依次处理各个子树，再处理根结点），中序遍历无明确定义

树的性质

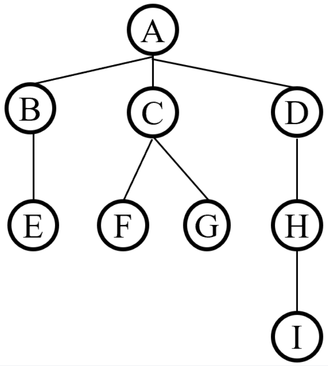
结点度数最多为 K 的树，第 i 层最多 K^i 个结点（i 从 0 开始）。
结点度数最多为 K 的树，高为 h 时最多有 $(K^{h+1}-1)/(k-1)$ 个结点。
n 个结点的 K 度完全树，高度 h 是 $\log_k(n)$ 向下取整
n 个结点的树有 n-1 条边

树的实现

直观表示法：每个结点有一个变量存放数据，加上一个可变长列表存放所有子结点指针
在不支持可变长列表的语言中，就要想别的办法，比如用二叉树来表示一棵树的儿子-兄弟表示法
父亲表示法：把所有结点编号，在每个结点内记录其父结点编号（用于并查集）
直观表示法

```python
class Tree:
    def __init__(self,data, *subtrees): #参数个数可变的函数
        #参数subtrees是个元组，其中每个元素都是一个Tree对象
        self.data = data
        self.subtrees = list(subtrees) #self.subtrees是子树列表
    def addSubTree(self,tree): #tree是一个Tree对象
        self.subtrees.append(tree)
    def preorderTraversal(self,op):
        op(self)
        for t in self.subtrees:
            t.preorderTraversal(op)
```

```
    def postorderTraversal(self,op):
        for t in self.subtrees:
            t.postorderTraversal(op)
        op(self)
    def printTree(self,level = 0): #输出树的层次结构
        print("\t" * level + str(self.data))
        for t in self.subtrees:
            t.printTree(level+1)
```



输出形如

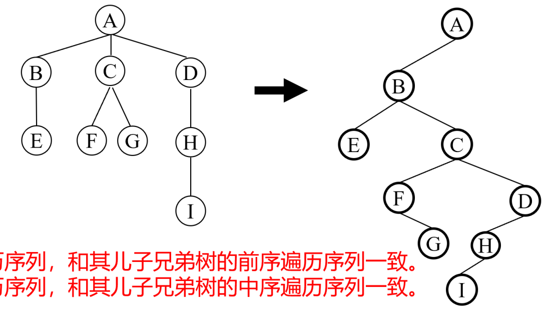
```
A
    B
        E
    C
        F
        G
    D
        H
            I
```

构建树

直观表示法

```
def buildTree(level): #读取nodesPtr指向的那一行，并建立以其为根的子树
    #该根的层次是level。建好后，令nodesPtr指向该子树的下一行
    global nodesPtr,nodes
    tree = Tree(nodes[nodesPtr][1]) #建根结点
    nodesPtr += 1 #看下一行
    while nodesPtr < len(nodes) and nodes[nodesPtr][0] == level + 1:
        tree.addSubTree(buildTree(level + 1))
    return tree

nodes = []
while True:
    try:
        s = input().rstrip()
        nodes.append((len(s)-1,s.strip()))
    except:
        break
nodesPtr = 0 #表示看到nodes里的第几行
print(nodes)
tree = buildTree(0)
#nodes内容形如:
#[(0, 'A'), (1, 'B'), (2, 'E'), (1, 'C'), (2, 'F'), (2, 'G'), (1, 'D'), (2, 'H'), (3, 'I')]
#元素为(缩进, 数据)
```

儿子-兄弟表示法：用二叉树 B 表示一棵树 T(二叉树形式表示的树，简称儿子兄弟树)



树的前序遍历序列，和其儿子兄弟树的前序遍历序列一致。
树的后序遍历序列，和其儿子兄弟树的中序遍历序列一致。

树的直观表示法转儿子兄弟树

```
def treeToBinaryTree(tree):
#直观表示法的树转儿子兄弟树。tree是Tree对象
    bTree = BinaryTree(tree.data) #二叉树讲义中的BinaryTree
    for i in range(len(tree.subtrees)):
        if i == 0:
            tmpTree = treeToBinaryTree(tree.subtrees[i])
            bTree.addLeft(tmpTree)
        else:
            tmpTree.addRight(treeToBinaryTree(tree.subtrees[i]))
            tmpTree = tmpTree.right
    return bTree

#所有结点复制了一份
```

树的儿子兄弟表示法转直观表示法

```
def binaryTreeToTree(biTree):
#儿子兄弟树转直观表示法的树转。biTree是BinaryTree对象
    tree = Tree(biTree.data)
    son = biTree.left
    if son:
        tree.addSubTree(binaryTreeToTree(son))
        while son.right:
            tree.addSubTree(binaryTreeToTree(son.right))
            son = son.right
    return tree

#所有结点复制了一份
```

7.2 森林

森林的概念

不相交的树的集合，就是森林

森林有序，有第 1 棵树、第 2 棵树、第 3 棵树之分

森林可以表示为树的列表，也可以表示为一棵二叉树

森林的二叉树表示法

1) 森林中第 1 棵树的根，就是二叉树的根 S1，S1 及其左子树，是森林的第 1 棵树的二叉树表示形式

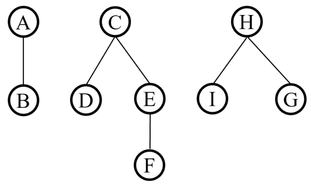
2) S1 的右子节 S2，以及 S2 的左子树，是森林的第 2 棵树的二叉树表示形式

3) S2 的右子节 S3，以及 S3 的左子树，是森林的第 3 棵树的二叉树表示形式

....

以此类推

森林的遍历



广度优先遍历: ACH BDEIG F

前序遍历: AB CDEF HIG
后续遍历: BA DFEC IGH

无中序遍历

森林转二叉树

```
def woodsToBinaryTree(woods):
    #woods是个列表，每个元素都是一棵二叉树形式的树

    biTree = woods[0]
    p = biTree
    for i in range(1,len(woods)):
        p.addRight(woods[i])
        p = p.right
    return biTree
#biTree和woods共用结点,执行完后woods的元素不再是原儿子兄弟树

def binaryTreeToWoods(tree):
#tree是以二叉树形式表示的森林
    p = tree
    q = p.right
    p.right = None
    woods = [p]
    if q:
        woods += binaryTreeToWoods(q)
    return woods

#woods是兄弟-儿子树的列表,woods和tree共用结点
#执行完后tree的元素不再是原儿子兄弟树
```