Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Конспект лекций

«Преобразования Лапласа и Фурье»

Лектор
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2019

Содержание

1 Как заполнять документ

Сейчас я расскажу, как максимально быстро собрать лекцию, чтобы никому ничего не сломать. Предлагаю также ориентироваться на этот пример (папка `ch0`). Итак, порядок действий:

1. Скачать себе этот архив.
   Он собирается командой `make` или `pdflatex doc`, если вы используете Windows.

2. Создать в корне вашу папку `chНОМЕРГЛАВЫ`.
   В примере папка `ch0`.

3. Заполнить в этой папке три документа: `doc.tex`, `bib.tex`, `set.tex`, положить туда все ваши картинки и все, что вам нужно.

4. Проверить, что все собралось правильно.

5. Отослать мне на почту `kireku@gmail.com` с темой "ВКР" или, если вы умеете, сделать `pull request`.

1.1 doc.tex

Это файл с вашим текстом. Туда вы пишите лекцию.

Я добавил уже ряд математических операторов. Если вы хотите добавить свои смотри раздел про `set.tex`.

Код	Результат
`\sgn`	sgn
`\const`	const
`\T`	T
`\SetN`	$\mathbb{N}$
`\SetZ`	$\mathbb{Z}$
`\SetQ`	$\mathbb{Q}$
`\SetR`	$\mathbb{R}$
`\SetC`	$\mathbb{C}$
`\Prb`	$\mathbb{P}$
`\Ind`	$\mathbb{I}$
`\Exp`	$\mathbb{E}$
`\Var`	$\mathbb{V}\mathrm{ar}$
`\SetX`	$\mathcal{X}$
`\SetP`	$\mathcal{P}$

Также встроены окружения. Они как в книжке Арама, то есть красивые, не используйте другие.

Код	Результат

`\begin{theorem}`
`        Это теорема.`
`\end{theorem}`
	Теорема 1.1. *Это теорема.*

`\begin{definition}`
`        Это определение`
`        \textit{сходимости}.`
`\end{definition}`
	Определение 1.1. Это определение *сходимости.*

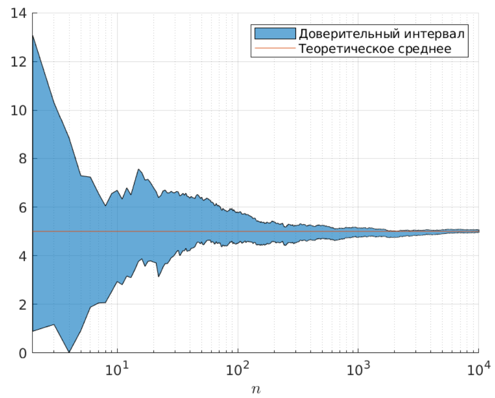
`\begin{lemma}`
`        Это лемма.`
`\end{lemma}`
	Лемма 1.1. *Это лемма.*

`\begin{assertion}`
`        Это утверждение.`
`\end{assertion}`
	Утверждение 1.1. *Это утверждение.*

`\begin{example}`
`        Это пример.`
`\end{example}`
	Пример 1.1. Это пример.

`\begin{proof}`
`        Это доказательство чего-либо.`
`\end{proof}`
	Д о к а з а т е л ь с т в о. Это доказательство чего-либо. ■

Чтобы добавить картинку, положите ее в вашу папку и укажите полный путь:

<table>
<tr><th>Код</th><th>Результат</th></tr>
<tr><td><code>\includegraphics{ch0/example.eps}</code></td><td>
</td></tr>
</table>

Используя метки, обязательно ставьте префикс-название папки:

Код	Результат

`\begin{equation}`
`\label{ch0.square}`
`        x^2 = 0.`
`\end{equation}`
	$$x^2 = 0. \qquad (1.1)$$

1.2 bib.tex

Если вам нужна библиография — сюда можно написать библиографию, она автоматом окажется внизу. Все ссылки, по-прежнему с префиксом.

Содержимое `ch0/bib.tex`

```
\bibitem{ch0.voroncov}
        К.~В.~Воронцов. \textit{\LaTeX в примерах}.~--- М.: МЦНМО, 2005.
```

1.3 set.tex

Если вам жизненно не хватает какой-нибудь суперштуки, которую обычно объявляют в начале файла: новую команду, окружение или что-то в этом духе, то напишите сюда. Но все это пишите с каким-нибудь префиксом.

Например, я очень захотел писать прикольные дроби, типа $\nicefrac{3}{4}$ и новый оператор $\operatorname{Kirill}_{x \in \mathcal{X}}$, тогда я должен туда написать:

Содержимое `ch0/bib.tex`

```
\usepackage{nicefrac}
\DeclareMathOperator{\zeroKir}{Kirill}
```

Но вообще, если вы не уверены, что все не перестанет компилиться, то не стоит подключать пакеты. Пакеты будут действовать на весь документ в целом.

1.4 Заключение

Вообще, было бы круто, чтобы все получилось примерно одинаково и красиво. В библиографии есть книжка хорошая по Латеху, если кому нужна.

2 Дискреные системы с запаздыванием

Иногда удобно рассматривать $N_{t+1} = f(N_t, .., N_{t-\tau})$. Эквивалентная запись в виде многомерной системы:

$$u_1(t) = N_t, u_2(t) = N_{t-1}, \dots, u_{\tau+1}(t) = N_{t-\tau} \;\Rightarrow\; u_1(t+1) = f(u_1(t), \dots, u_{\tau+1}(t)),$$

$$u_2(t+1) = u_1(t),\; u_3(t+1) = u_2(t), \dots, u_{\tau+1}(t+1) = u_\tau(t).$$

Определение 2.1. Для многомерной системы неподвижной точкой называется $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$, такая что

$$\begin{cases} u_1^* = f(u_1^*, \dots, u_n^*), \\ u_2^* = u_1^*, \\ \vdots \\ u_{\tau+1}^* = u_\tau^*. \end{cases}$$

Для системы с запаздыванием: $u^* = f(u^*, \dots, u^*)$.

Исследуем на устойчивость: пусть $f(N_t, ..., N_{t-\tau}) \in C(\mathbb{R}^\tau)$. Дадим всем точкам приращение:

$$\begin{gathered} u_1(t+1) = u^* + \Delta\, u_1(t+1) \\ u_2(t+1) = u^* + \Delta\, u_2(t+1) \\ \vdots \\ u_\tau(t+1) = u^* + \Delta\, u_\tau(t+1) \end{gathered}$$

$$u^* + \Delta\, u_1(t+1) = f\left(u^* + \Delta\, u_1(t), \dots, u^* + \Delta\, u_{\tau+1}(t)\right) = f(u^*, \dots, u^*) + \sum_{i=1}^{\tau+1} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u^*, \dots, u^*) \Delta\, u_i(t) + o(|\Delta\, u|)$$

В первом приближении это линейная система $u(t+1) = Au(t)$.

Лемма 2.1. *Собственное значение A удовлетворяет $\mu^{\tau+1} = \sum\limits_{i=1}^{\tau} a_i \mu^{\tau-i}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По индукции
База: $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi(\mu) = \begin{pmatrix} a_1 - \mu & a_2 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \mu^2 = \mu a_1 + a_2$$

Переход: $n = n - 1$

$$\begin{vmatrix} a_0 - \mu & a_1 & \dots & a_{\tau-1} & a_\tau \\ 1 & -\mu & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\mu \end{vmatrix} = -\mu \left(\mu^\tau - \sum_{i=0}^{\tau-1} a_i \mu_i^{\tau-1-i} \right) + a_\tau$$

■ Из леммы выше следует:

1. Характеристический многочлен $\mu^{\tau+1} = \sum\limits_{i=1}^{\tau} a_i \mu_i^{\tau-i}$.

2. Если все $|\mu_i| < 1,\ i = \overline{1, \tau+1}$, то неподвижная точка устойчива

3. Если существует $|\mu_i| > 1$, то неподвижная точка неустойчива.

Общий случай: $u_{t+1} = f(u_t),\ y_t = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T,\ f = (f_1, \dots, f_n),\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Матрица Якоби:

$$A = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right\|_{u=u^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(u^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(u^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n}(u^*) \end{pmatrix}$$

2.1 Падение и взлет численности математической модели популяции жука (tribolium)

У жуков три стадии развития. Обозначим фазы следующим образом:

L–личинка $\longrightarrow$ P–куколка $\longrightarrow$ A–взрослая особь

Запишем математическую интерпретацию каждой фазы:

$$\begin{cases} L_{t+1} = bA_t, & \\ P_{t+1} = (1-\eta_l)L_t, & \eta_l\text{–смертность L} \\ A_{t+1} = (1-\eta_p)P_t + (1-\eta_A)A_t, & \eta_p,\ \eta_A\text{–смертность P и A.} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 1-\eta_l & 0 & 0 \\ 0 & 1-\eta_p & 1-\eta_A \end{pmatrix}$$

$$|A - \mu E| = \begin{vmatrix} -\mu & 0 & b \\ 1-\eta_l & -\mu & 0 \\ 0 & 1-\eta_p & 1-\eta_A-\mu \end{vmatrix} = \mu^2(1-\eta_A-\mu) + b(1-\eta_p)(1-\eta_l) =$$

$$= \mu^3 - \mu^2 \underbrace{(1-\mu-\eta_A)}_{<1} - b\underbrace{(1-\eta_p)}_{<1}\underbrace{(1-\eta_l)}_{<1}$$

Поскольку $b > 1$, то неподвижная точка $(0, 0, 0)$ неустойчива.

С учетом каннибализма модель можно описать так:

$$\begin{cases} L_{t+1} = bA_t e^{-C_{ea}A_t - C_{al}L_t}, \\ P_{t+1} = (1-\eta_l)L_t, \\ A_{t+1} = (1-\eta_p)P_t e^{-C_{pa}A_t} + (1-\eta_A)A_t. \end{cases}$$

Причем $C_{ea} = 0.009, C_{al} = 0.012, C_{pa} = 0.004, \eta_l = 0.267, \eta_p = 0, \eta_A = 0.0036, b = 7.48$

3 Непрерывные системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ x_i(0) = x_i^0 \end{cases} \text{— автономная система.}$$

Будем называть Ω фазовым пространством, а множество $\{x(t, x^0)\}$ – фазовой кривой, и также будем считать, что $f \in C^\infty(\Omega)$.

3.1 Свойства автономных систем

Запишем еще раз вид автономной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} == f(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{3.1}$$

1. *Если $x = \psi(t)$ удовлетворяет 3.1, ψ – гладкая, то $\overline{x} = \psi(t) + C$ — тоже решение* $\forall C = \text{const}$.

   Доказательство. $\dfrac{d\overline{x}}{dt} = \dfrac{d\psi(t+C)}{dt} = \dfrac{\psi(t+C)}{d(t+C)} = f(\psi(t+C))$, т.к. $\dfrac{d\psi}{dt} = f(\psi(t))$ ■

2. *Фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают.*

   Доказательство. Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$ – точка, через которую проходят две фазовые кривые $\Rightarrow \exists x_1 = \varphi(t; x^0), \ x_2 = \psi(t; x^0)$ – решения системы: $\exists\ t_1, t_2 : \varphi(t; x^0) = \psi(t; x^0)$.

   Проектируем x_1, x_2 на фазовую плоскость так, чтобы они пересеклись в x^0. Пусть теперь $\chi(t; x^0) = \varphi(t + (t_1 - t_2); x^0)$, тогда χ является решением по первому свойству.

   $\chi(t_2; x^0) = \varphi(t_1; x^0) = \psi(t_2; x^0) \Rightarrow$ в точке t_2 χ и ψ проходят через $x^0 \Rightarrow$ по теореме о единственности кривые совпадают, значит $\varphi = \psi$. ■

3. *Точка $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ называется неподвижной точкой, если $f_i(a) = 0, i = 1, 2, ..., n \Rightarrow$ неподвижная точка является фазовой траекторией:*

   $$x_i = a_i, \quad \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad f_i(a) = 0.$$

4. *Всякая фазовая траеткория автономной динамической системы может принадлежать одному из трех типов кривых: гладкая кривая без самопересечений, цикл, точка.*

5. *Если фазовая траектория – цикл, то отвечающее ей решение периодическая функция.*

   Доказательство. Пусть $\dfrac{dx_i}{dt} = f_i(x), \ i = \overline{1,n}, \ x_i(0) = a_i$. Тогда $x = \psi(t), \ a = \psi(0)$.

   $$dS = \sqrt{(dx_1^2 + ... + dx_n^2)} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{dt}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2} = |f(\psi(t))|$$

Получили, что $dS = |f(\psi(t)|dt$, длина:

$$l(t) = \int\limits_0^t ds = \int\limits_0^t |f(\psi(t))|dt \geqslant mt.$$

Неподвижная точка $(|f(\psi(t))| = 0) \notin \sum$, т.к. это противоречило бы свойству 2, то есть $|f(\psi(t))| \neq 0, x \in \sum;\ m \leqslant |f(\psi(t))| \leqslant M,\ m > 0$.

Пусть L – длина замкнутой фазовой траектории. Имеем: $l(t)$ возрастает, $l(t) \leqslant L$. Тогда

$$\exists\, T : l(T) = L \Rightarrow L = \int\limits_0^T |f(\psi(t))|dt$$

■

Рассмотрим следующий пример:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = R^2.$$

$\int\limits_0^T \sqrt{x_1^2 + x_2^2}dt = \int\limits_0^T Rdt = RT \Rightarrow\ 2\pi R = RT \Rightarrow T = 2\pi.$

6. *Групповое свойство*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x^0. \end{cases} \qquad x = x(t; x^0) \text{ – решение}$$

Пусть $t_1, t_2 > 0 \Rightarrow\ x(t_1 + t_2; x_0) = x(t_1; x(t_2, x^0)) = x(t_2; x(t_1, x^0))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= x(t; x(t_1; x^0)) \qquad & \varphi_1(0) &= x(0; x(t_1; x^0)) = x(t_1; x^0), \\ \varphi_2(t) &= x(t + t_1; x^0) \qquad & \varphi_2(0) &= x(t_1; x^0). \end{aligned}$$

Получаем, что решения совпадают при $t = 0 \Rightarrow$ совпадут при $t = t_2$, в силу единственности

$$x(t_2; x(t_1, x^0)) = x(t_1 + t_2; x^0)$$

■

7. *Гладкая невырожденная замена переменных*

$\dfrac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_n), x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ x_i = \psi_i(y_1, ..., y_n)$

$\dfrac{dx_i}{dt} = \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{\partial \psi_i}{\partial y_k}\dfrac{dy_k}{dt} = f(\psi(y_1, ..., y_n))$

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \cdots \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \ddots \\ \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_1} \cdots \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Пусть $\exists \left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1} \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)\dfrac{dy}{dt} = f(\psi(y)), \quad \dfrac{dy}{dt} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1} f(\psi(y))$

Теорема 3.1 (Теорема о выпрямлении векторного поля)**.** *Пусть a не особая точка динамической системы*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t),\ i = 1, 2, ..., n$$

Тогда в достаточно малой окрестности точки a, сущесвует невырожденная замена переменных $x_i = \psi_i(y_1, ..., y_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, которая переводит систему в систему вида:

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \quad \frac{dy_2}{dt} = 0, \ \dots\ , \frac{dy_{n-1}}{dt} = 0, \quad \frac{dy_n}{dt} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, будет полагать $|f_n(a)| \neq 0$, т.е. $f_n(a_1, \dots, a_n)$. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_{,n}) \\ x_1(0) = \xi_1, \dots, x_{n-1}(0) = \xi_{n-1}, x_n(0) = a_n \end{cases}$$

Обозначим за a' и ξ'

$$a' = (a_1, \dots, a_{n-1}), \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in U_{a'}$$

Для всех ξ' сопоставим соответствующую траекторию, т.е. $\xi' \longleftrightarrow \psi(t; \xi') = x(t)$. Пусть $y_1 = \xi_1, \dots, y_{n-1} = \xi_{n-1}, y_n = t$ и сделаем следующую замену: $x(t) = \psi(y_n, y')$, $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$.

Проверим, что такая замена переменных невырожденная. В силу задачи Коши имеем:

$$\begin{aligned} &\psi_i(0; \xi') = \psi_i(0, y') = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ &\psi_n(0; \xi') = \psi(0, y') = a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \psi(0; \xi')}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \\ &\frac{\partial \psi_n}{\partial y_k} = 0, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} = \frac{d\psi_n}{dt} = f_n(a) \neq 0 \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_n(a) \end{pmatrix} \Rightarrow \exists\ J^{-1}$$

■

Таким, образом структура фазовой траектории в окрестности любой точки, не являющейся положением равновесия, тривиальна. При подходящем выборе координат фазовая траектория представляет собой пучок параллельных прямых.

3.2 Теорема Лиувилля о скорости изменения фазового объема

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f(x), \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \qquad D_t = \{x = x(t;y) \mid y \in D_0\} \\ x(0) &= y, \qquad y \in D_0 \subset \Omega \qquad V_0 = |D_0|,\ V_t = |D_t| \end{aligned} \tag{3.2}$$

Рассмотрим связь $x = x(t;y)$. Введем матрицу

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(t;y)}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1(t;y)}{\partial y_n} \\ & \ddots & \\ \dfrac{\partial x_n(t;y)}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial x_n(t;y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

где $\dfrac{\partial x_i(t;y)}{\partial y_j}$ – матрица чувствительности компонент к изменению начальных данных. Введем также матрицу Якоби

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \ddots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Лемма 3.1 (Уравнение в вариацях). *Пусть задано (3.2), тогда справедливо следующее матричное уравнение*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x(t;y)}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x(t;y)}{\partial y}\right) \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_k(t;y)}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{d}{dt}\left(x_k(t;y)\right) = \frac{\partial}{\partial y_i} f_k(x(t;y)) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_s}\frac{\partial x_s(t;y)}{\partial y_i}.$$

Полученное выражение и есть покомпонентная запись (3.3). ■

Лемма 3.2 (Лиувилля о дифференцировании определителя). *Пусть имеется матрица $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$, тогда*

$$\frac{d}{dt}|A(t)| = |A(t)| \operatorname{tr}\left(\frac{dA(t)}{dt}A^{-1}(t)\right) \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $a_{ij}(t+\Delta t) = a_{ij}(t) + a'_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$, $\dfrac{dA}{dt} = \|a'_{ij}(t)\|$, $i,j = \overline{1,n}$

Обозначим $B = (\dfrac{dA}{dt}A^{-1}) = b_{ij}$, $i,j = \overline{1,n}$

$$|E + B\Delta t| = \begin{vmatrix} 1 + b_{11}\Delta t & \dots & b_{1n}\Delta t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}\Delta t & \dots & 1 + b_{nn}\Delta t \end{vmatrix}$$

Тогда запишем

$$|A(t+\Delta\, t) = |A(t) + \frac{dA}{dt}\Delta\, t + o(\Delta\, t)| = |E + \Delta\, t\frac{dA}{dt}A^{-1}(t) + o(\Delta\, t)A(t)| =$$

$$= |E + \Delta\, t\,\underbrace{(\frac{dA}{dt}A^{-1}(t)}_{B(t)} + o(\Delta\, t)||A(t)| = (1 + \Delta\, t\,\underbrace{(b_{11} + \dots + b_{nn})}_{\mathrm{tr}\ B} + o(\Delta\, t))|A(t)|$$

Получаем

$$\frac{|A(t+\Delta\, t)| - |A(t)|}{\Delta\, t} = \frac{|A(t)|\ \mathrm{tr}\left(\frac{dA}{dt}A^{-1}(t)\right)\Delta\, t + o(\Delta\, t)}{\Delta\, t}.$$

Полученная дробь сходится к (3.4). ■

Теорема 3.2 (Лиувилля)**.** *Пусть задано (3.2)* $\Rightarrow \dfrac{dV_t}{dt} = \displaystyle\int\limits_{D_t} div f(x)dx_t.$

$$div(\underbrace{f_1(x), \dots, f_n(x)}_{\textit{вектор}}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}}_{\textit{скаляр}}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$dx_t = dx_1(t;y)\dots dx_n(t;y) = \{x_1(t;y)\dots x(t;y) \to y_1 \dots y_n\} = \left|\frac{\partial x(t;y)}{\partial y}\right| dy_1 \dots dy_n$$

Выражение для V_t перепишется следующим образом:

$$V_t = \int\limits_{D_t} dx_1(t;y)\dots dx_n(t;y) = \int\limits_{D_0}\left|\frac{\partial x(t;y)}{\partial y}\right| dy_1 \dots dy_n$$

$$\frac{dV_t}{dt} = \int\limits_{D_0}\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial x(t;y)}{\partial y}\right| dy_1\dots dy_n = \{\textit{лемма 3.2}\} = \int\limits_{D_0}\mathrm{tr}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x(t;y)}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x(t;y)}{\partial y}\right)^{-1}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial x(t;y)}{\partial y}\right)dy = \{\textit{лемма 3.1}\} = \int\limits_{D_0}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x(t;y)}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x(t;y)}{\partial y}\right)^{-1}\right)\left(\frac{\partial x(t;y)}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \int\limits_{D_t}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx_t = \int\limits_{D_t}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)dx_t = \int\limits_{D_t} div f(x)dx_t$$

■

Список литературы

[1] К. В. Воронцов. *LaTeX в примерах.* — М.: МЦНМО, 2005.