



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Конспект лекций

# «Преобразования Лапласа и Фурье»

*Лектор*  
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2019

## Содержание

<b>1</b>	<b>Как заполнять документ</b>	<b>3</b>
1.1	doc.tex . . . . .	3
1.2	bib.tex . . . . .	5
1.3	set.tex . . . . .	5
1.4	Заключение . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Свойства преобразования Фурье</b>	<b>6</b>

# 1 Как заполнять документ

Сейчас я расскажу, как максимально быстро собрать лекцию, чтобы никому ничего не сломать. Предлагаю также ориентироваться на этот пример (папка `ch0`). Итак, порядок действий:

1. Скачать себе этот архив.  
*Он собирается командой `make` или `pdflatex doc`, если вы используете Windows.*
2. Создать в корне вашу папку `chНОМЕРГЛАВЫ`.  
*В примере папка `ch0`.*
3. Заполнить в этой папке три документа: `doc.tex`, `bib.tex`, `set.tex`, положить туда все ваши картинки и все, что вам нужно.
4. Проверить, что все собралось правильно.
5. Отослать мне на почту `kireku@gmail.com` с темой “ВКР” или, если вы умеете, сделать `pull request`.

## 1.1 doc.tex

Это файл с вашим текстом. Туда вы пишете лекцию.

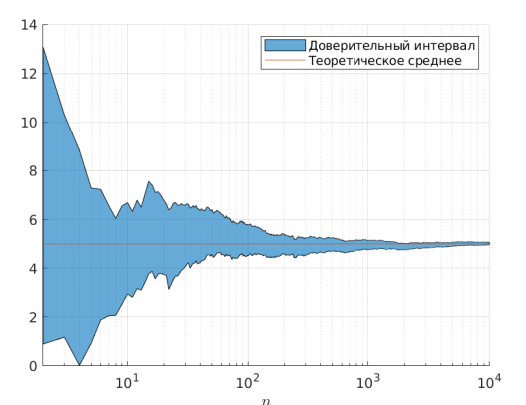
Я добавил уже ряд математических операторов. Если вы хотите добавить свои смотри раздел про `set.tex`.

Код	Результат
<code>\sgn</code>	$\operatorname{sgn}$
<code>\const</code>	$\operatorname{const}$
<code>\T</code>	$\mathbb{T}$
<code>\SetN</code>	$\mathbb{N}$
<code>\SetZ</code>	$\mathbb{Z}$
<code>\SetQ</code>	$\mathbb{Q}$
<code>\SetR</code>	$\mathbb{R}$
<code>\SetC</code>	$\mathbb{C}$
<code>\Prb</code>	$\mathbb{P}$
<code>\Ind</code>	$\mathbb{I}$
<code>\Exp</code>	$\mathbb{E}$
<code>\Var</code>	$\mathbb{V}\operatorname{ar}$
<code>\SetX</code>	$\mathcal{X}$
<code>\SetP</code>	$\mathcal{P}$

Также встроены окружения. Они как в книжке Арама, то есть красивые, не используйте другие.

Код	Результат
<pre>\begin{theorem}   Это теорема. \end{theorem}</pre>	<p><b>Теорема 1.1.</b> <i>Это теорема.</i></p>
<pre>\begin{definition}   Это определение   \textit{сходимости}. \end{definition}</pre>	<p><b>Определение 1.1.</b> Это определение <i>сходимости</i>.</p>
<pre>\begin{lemma}   Это лемма. \end{lemma}</pre>	<p><b>Лемма 1.1.</b> <i>Это лемма.</i></p>
<pre>\begin{assertion}   Это утверждение. \end{assertion}</pre>	<p><b>Утверждение 1.1.</b> <i>Это утверждение.</i></p>
<pre>\begin{example}   Это пример. \end{example}</pre>	<p><b>Пример 1.1.</b> Это пример.</p>
<pre>\begin{proof}   Это доказательство чего-либо. \end{proof}</pre>	<p><b>До к а з а т е л ь с т в о.</b> Это доказательство чего-либо. ■</p>

Чтобы добавить картинку, положите ее в вашу папку и укажите полный путь:

Код	Результат
<pre>\includegraphics{ch0/example.eps}</pre>	

Используя метки, обязательно ставьте префикс-название папки:

Код	Результат
<pre>\begin{equation} \label{ch0.square} x^2 = 0. \end{equation}</pre>	$x^2 = 0. \quad (1.1)$

## 1.2 bib.tex

Если вам нужна библиография — сюда можно написать библиографию, она автоматом окажется внизу. Все ссылки, по-прежнему с префиксом.

Содержимое ch0/bib.tex
<pre>\bibitem{ch0.voroncov} К.~В.~Воронцов. \textit{\LaTeX в примерах}.~--- М.: МЦНМО, 2005.</pre>

## 1.3 set.tex

Если вам жизненно не хватает какой-нибудь суперштуки, которую обычно объявляют в начале файла: новую команду, окружение или что-то в этом духе, то напишите сюда. Но все это пишите с каким-нибудь префиксом.

Например, я очень захотел писать прикольные дроби, типа  $\frac{3}{4}$  и новый оператор  $\text{Kirill}_{x \in \mathcal{X}}$ , тогда я должен туда написать:

Содержимое ch0/bib.tex
<pre>\usepackage{nicefrac} \DeclareMathOperator{\zeroKir}{Kirill}</pre>

Но вообще, если вы не уверены, что все не перестанет компилироваться, то не стоит подключать пакеты. Пакеты будут действовать на весь документ в целом.

## 1.4 Заключение

Вообще, было бы круто, чтобы все получилось примерно одинаково и красиво. В библиографии есть книжка хорошая по Латеху, если кому нужна.

## 2 Преобразование Лапласа-Фурье

### 2.1 Некоторые сведения из ТФКП

Перед тем, как приступить непосредственно к преобразованиям Фурье, вспомним, для начала, курс ТФКП.

Вспомним как задается функция комплексной переменной:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

Производная в точке  $z_0$ :

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad \text{где } \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

1.  $\Delta z = \Delta x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \Rightarrow \exists u_x, v_x : \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{\dots\} = u'_x + iv'_x$$

2.  $\Delta z = i\Delta y$ :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} \Rightarrow \exists u_y, v_y : \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \{\dots\} = -iu'_y + v'_y$$

Условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

Напомним, что интеграл от функции комплексного переменного вводится (так же, как и в действительной области) как предел последовательности интегральных сумм; функция при этом определена на некоторой кривой  $\Gamma$ , кривая предполагается гладкой или кусочно-гладкой:

$$\sum_{j=1}^N f(\xi_j) \Delta z_j \longrightarrow \int_{\Gamma} f(z) dz; \quad \Delta z_j = z_j - z_{j-1}, \quad \Gamma : z = z(t), \quad dz = z'(t)dt, \quad t \in [t_0, t_1]$$

Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) z'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} [(u'_x - v'_y) + i(v'_x + u'_y)] dt = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy$$

Среди интегралов в комплексном анализе важное место в теории и практике интегрирования и приложениях занимает интеграл вида  $\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ , зависящий от  $\zeta$ .

В частности, полагая  $f(z)$  аналитической в замкнутой области  $\gamma$ , получаем, что для любой точки аналитичности функция может быть записана в виде интеграла

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Аналитическая функция имеет производные любого порядка, для которых справедлива формула

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Теперь дадим определение ряда Лорана необходимого для последующего повествования

**Определение 2.1.** Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (2.1)$$

называется рядом Лорана функции  $f(z)$ , если его коэффициенты вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

*Замечание 2.1.*  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$  – правильная часть ряда Лорана и  $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n$  – главная часть ряда Лорана. При этом, ряд Лорана считается сходящимся тогда и только тогда, когда сходятся его правильная и главная части.

Важное место в изучении и применении теории функций комплексного переменного занимает исследование их поведения в особых точках, где нарушается аналитичность функции. В частности, это точки, где функция не определена.

Одной из таких особых точек является полюс.

**Определение 2.2.** Говорят, что изолированная точка  $z_0 \in \overline{C}$  функции  $f(z)$  называется полюсом, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

*Замечание 2.2.* Номер старшего члена главной части ряда Лорана функции в ее разложении в окрестности полюса называется порядком полюса. Главная часть ряда Лорана в случае полюса порядка  $k$  и записывается следующим образом:

а) в случае  $z_0 \in \mathbb{C}$  в виде  $\sum_{k=-n}^{-1} c_k (z - z_0)^k$ , или  $\sum_{k=1}^n \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$ , подробнее:

$$c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + c_1 \cdot z, \quad c_n \neq 0.$$

б) в случае  $z_0 = \infty$  в виде:

$$c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + c_1 \cdot z, \quad c_n \neq 0.$$

**Определение 2.3.** Вычетом функции  $f(z)$  в изолированной особой точке  $z_0$  ( $z_0 \in \overline{C}$ ) называется интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$ , где  $\gamma$  – контур, принадлежащий окрестности точки  $z_0$  и охватывающий ее.

**Теорема 2.1** (Основная теорема о вычетах). Если функция  $f(z)$  – аналитическая в  $\overline{D}$  за исключением конечного числа особых точек  $z_k \in D$ , то справедливо равенство (где  $C$  – граница области  $D$ ):

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z), \quad z_k \in D. \quad (2.2)$$

**Утверждение 2.1.** Вычет функции в изолированной особой точке равен коэффициенту  $c_{-1}$  при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки, т.е. при  $\frac{1}{z - z_0}$  для  $z_0 \in \mathbb{C}$ , и этому коэффициенту, взятому с противоположным знаком, для  $z_0 = \infty$ :

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = c_{-1}, \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}, \quad z_0 = \infty.$$

**Утверждение 2.2.** Если  $z_0$  полюс порядка  $n$  функции  $f(z)$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ , то

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z) \cdot (z - z_0)^n], \quad z_0 \in \Pi(n);$$

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot (z - z_0)], \quad z_0 \in \Pi(1).$$

## 2.2 Применение вычетов для вычисления интеграла вида $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} R(x)$

Большой интерес представляет возможность применения вычетов для вычисления несобственных интегралов вида  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ , где интеграл понимается в смысле главного значения, т.е.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$  (здесь отрезок  $[a, b] = [-R, R]$ ).

Будем рассматривать функцию  $f(x)$ , непрерывную на  $(-\infty, +\infty)$ . Возможность использования вычетов при решении такой задачи основана на том, что отрезок  $[-R, R]$  действительной оси рассматривается как часть замкнутого контура  $C$ , состоящего из этого отрезка и дуги окружности, а интеграл по контуру записывается в виде суммы:

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz, \text{ где } C_R - \text{ дуга окружности } |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0.$$

Несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  определяется как предел:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \oint_C f(z) dz - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz.$$

Интерес, с точки зрения применения вычетов, представляют интегралы  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ , где функция  $f(x)$  такова, что  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$ . Классы таких функций выделяются, и для

всех функций рассматриваемого класса устанавливается формула  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \oint_C f(z) dz$ .



Мы же, далее, рассмотрим  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ , где  $f(x) = R(x)e^{i\lambda x}$  и  $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ,  $m - n \geq 1$  и  $Q_m(x) \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , а  $R(x)$  принимает действительные значения. Такой интеграл сходится, так как он может быть записан в виде суммы двух сходящихся интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \lambda x dx.$$

Доказательство возможности применения вычетов к вычислению интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x} dx$  основано на следующем утверждении.

**Утверждение 2.3** (Лемма Жордана). Пусть функция  $f(z)$  непрерывна в области  $D : |z| \geq R_0$ ,  $\operatorname{Im} z \geq -a$  и  $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{C_R} |f(z)| = 0$ , где  $C_R$  – дуга окружности  $|z| = R$ ,  $\operatorname{Im} z \geq -a$ . Тогда для любого  $\lambda > 0$  справедливо равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\lambda z} f(z) dz = 0.$$

Для рассматриваемых в данном пункте интегралов  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x} dx$  функция  $f(z) = R(z)$  удовлетворяет лемме Жордана. Подводя итог приведенным рассуждениям, запишем следующее утверждение.

**Утверждение 2.4.** Пусть  $R(x)$  – рациональная функция, не имеющая особых точек на действительной оси (т.е.  $Q(x) \neq 0$  для  $x \in \mathbb{R}$ ), для которой точка  $z = \infty$  – нуль порядка не ниже первого (т.е.  $m - n \geq 1$ ). Тогда справедливы формулы:

1. при  $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x} dx = 2i\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} [R(z)e^{i\lambda z}], \quad \operatorname{Im} z_k > 0;$$

2. при  $\lambda < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x} dx = -2i\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} [R(z)e^{i\lambda z}], \quad \operatorname{Im} z_k < 0;$$

## 2.3 Ряды и преобразование Фурье

Пусть  $f(t)$  – периодическая с периодом  $T = 2\pi$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ .

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kt + b_k \sin kt],$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Запишем ряд в наших обозначениях

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad c_0 = a_0, \quad c_k = a_k + ib_k,$$

$$c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} = [a_k - ib_k][\cos kt + i \sin kt] + [a_k + ib_k][\cos kt - i \sin kt] = 2a_k \cos kt + 2b_k \sin kt.$$

Далее, сделаем небольшую замену

$$f(t) \longrightarrow f(s), \quad s \in [-T/2, T/2], \quad t = \frac{2\pi s}{T} \Rightarrow f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}.$$

Тогда

$$f(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2\pi i s}{T}}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) e^{-\frac{2\pi i s k}{T}} ds.$$

Пусть теперь

$$f_T(t) = f(t), \text{ но продолженное по периоду } t \in [-T/2, T/2], \quad f(t) \in (\infty, +\infty).$$

$$f_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_{k,T} e^{\frac{2\pi i t}{T}}, \quad c_{k,T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-\frac{2\pi i t k}{T}} ds.$$

Пусть  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta\lambda > 0$  и  $k : \lambda \leq \frac{2\pi k}{T} < \lambda + \Delta\lambda \Rightarrow \frac{T\lambda}{2\pi} \leq k < \frac{T\lambda}{2\pi} + \frac{T\Delta\lambda}{2\pi}$ , значит

$$k \approx \frac{T\Delta\lambda}{2\pi}, \quad c_{k,T} \approx c_{\lambda,T} = \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\lambda t} dt}_{=F_T(\lambda)}$$

В итоге получим

$$f_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{F_T(\lambda)}{T} e^{\frac{2\pi i k t}{T}} \approx \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{F_T(\lambda)}{T} e^{-\lambda t} \frac{T}{2\pi} \Delta\lambda \xrightarrow{\Delta\lambda \rightarrow 0} \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = f(t)} - \text{обратное преобразование Фурье}$$

$$\boxed{F_T(\lambda) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt} - \text{прямое преобразование Фурье}$$

Другие формы преобразования Фурье, встречающиеся в литературе

$$F(\lambda) = \frac{1}{g} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega\lambda t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\omega\lambda t} d\lambda, \quad gh = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

1.  $\omega = \pm 1; \quad g = 1, \quad h = 2\pi.$
2.  $\omega = \pm 2\pi; \quad g = h = 1.$
3.  $\omega = \pm 1; \quad g = h = \sqrt{2\pi}.$

### 3 Свойства преобразования Фурье

В этом разделе мы опишем основные свойства преобразования Фурье и докажем наиболее интересные из них. Прежде всего, напомним внешний вид преобразования:

$$F[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt,$$

где  $f \in L_1(-\infty, +\infty)$ , то есть функция  $f$  интегрируема по Риману (Лебегу) на всей числовой прямой и выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty.$$

*Замечание 3.1.* Принадлежность функции  $f$  классу  $L_1$  гарантирует существование ее преобразования Фурье  $F[f]$ .

Для начала выпишем свойства, которые напрямую следуют из определения: линейность, масштабируемость и сдвиг. Мы не будем долго на них останавливаться.

#### 1. Линейность.

$$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2], \quad \forall f_1, f_2 \in L_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

#### 2. Сдвиг.

$$\begin{aligned} F[f(t - t_0)] &= e^{-i\lambda t_0} \cdot F[f], \\ F[e^{i\lambda_0 t} \cdot f(t)] &= F[f] \cdot (\lambda - \lambda_0). \end{aligned}$$

#### 3. Масштабируемость.

$$F[f(\alpha t)](\lambda) = \frac{1}{|\alpha|} F[f(t)]\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

4. **О четности.** Если функция  $f$  является четной, то ее образ  $F[f]$  будет действительной функцией.

5. **О нечетности.** Если же  $f$  — нечетная, то образ  $F[f]$  будет чисто мнимой функцией.

Теперь перейдем к более интересным свойствам. Далее каждая теорема, следствие или замечание будут являться свойствами преобразования Фурье. Большая часть из них будет доказана. Для удобства навигации наиболее важные формулы пронумерованы.

**Теорема 3.1.** Рассмотрим последовательность функций из класса  $L_1$ , стремящуюся по норме  $L_1$  к некоторой функции  $f$  из того же класса, то есть

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f_n \in L_1(-\infty, +\infty) \quad : \quad f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} f \in L_1.$$

Тогда

$$F[f_n] \Rightarrow F[f].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем несложные выкладки:

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda} |F[f_m](\lambda) - F[f_n](\lambda)| &= \\ &= \sup_{\lambda} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_m(t) - f_n(t)) e^{-i\lambda t} dt \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_m(t) - f_n(t)| dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

**Теорема 3.2.** Преобразование Фурье  $F[f]$  есть непрерывная ограниченная функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На самом деле ограниченность мы нечаянно вывели в предыдущей теореме. Действительно,

$$|F[f](\lambda)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \text{const}.$$

С непрерывностью дела обстоят куда сложнее. Здесь нам придется записать наше преобразование в виде

$$F[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt$$

и сослаться на книгу А. М. Тер-Крикорова, М. И. Шабунина «Курс математического анализа,» где на 645 странице доказана непрерывность каждого из кусочков. ■

*Замечание 3.2.* Из последней теоремы следует, например, что

$$F[f](\lambda) \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0.$$

Теперь рассмотрим специальный вид функций, который часто встречается на практике: непрерывные и дифференцируемые функции.

**Теорема 3.3.** Пусть функция  $f$  непрерывно дифференцируема, абсолютно интегрируема, и ее производная так же абсолютно интегрируема, то есть<sup>1</sup>

$$f \in C^1(-\infty, +\infty) \cap L_1(-\infty, +\infty), f' \in L_1(-\infty, +\infty)$$

Тогда

$$F[f'](\lambda) = i\lambda \cdot F[f](\lambda).$$

---

<sup>1</sup>Теорема ходит в интернете в нескольких вариантах условий: совершенно не понятно,  $f$  или  $f'$  должна быть непрерывной или интегрируемой. Причем доказательства везде примерно одинаковые. Здесь приведен вариант к.ф.-м.н. доцента И. В. Рублева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим функцию в виде

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(t) dt.$$

Из сходимости интеграла  $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$  следует существование пределов  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  и  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$ . Они не могут быть отличными от нуля в силу сходимости интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ . С помощью интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} F[f'](\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\lambda t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-i\lambda t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = i\lambda \cdot F[f](\lambda). \end{aligned}$$

■

*Замечание 3.3.* Как следствие, получаем более занятную формулу:

Пусть  $f \in C^{k-1}(-\infty, +\infty)$ ,  $\exists f^{(k)} : f^{(k)} \in L_1(-\infty, +\infty)$ , тогда

$$F[f^{(k)}](\lambda) = (i\lambda)^k \cdot F[f]. \quad (3.1)$$

**Теорема 3.4.** Пусть функция  $f$  непрерывно дифференцируема, абсолютно интегрируема, и ее производная так же абсолютно интегрируема, то есть

$$f \in C^1(-\infty, +\infty) \cap L_1(-\infty, +\infty), f' \in L_1(-\infty, +\infty)$$

Тогда

$$|F[f](\lambda)| \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\left| \int_{-T}^{+T} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right| = \frac{f(t) e^{-i\lambda t}}{-i\lambda} \Big|_{-T}^{+T} + \frac{1}{\lambda} \int_{-T}^{+T} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

■

*Замечание 3.4.* Как следствие, получаем более занятную формулу:

Пусть  $f \in C^{k-1}(-\infty, +\infty)$ ,  $\exists f^{(k)} : f^{(k)} \in L_1(-\infty, +\infty)$ , тогда

$$F[f](\lambda) \leq \frac{C_m}{|\lambda|^m}, \quad \text{где } C_m = \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(m)}(t)| dt. \quad (3.2)$$

**Теорема 3.5.** Пусть задана функция  $f$  такая, что  $\int_{-\infty}^t f(s) ds \in L_1(-\infty, +\infty)$ , тогда

$$F \left[ \int_{-\infty}^t f(s) ds \right] (\lambda) = \frac{1}{i\lambda} F[f](\lambda).$$

**Теорема 3.6.** Пусть задана функция  $f$  такая, что  $t \cdot f(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$ , тогда

$$F[f]'(\lambda) = F[-it \cdot f(t)](\lambda).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right)'_{\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it) f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

■

*Замечание 3.5.* Как следствие:

Пусть  $f : t^p f(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$ ,  $p = \overline{1, k}$ , тогда

$$F[f]^{(k)}(\lambda) = F[(-it)^k \cdot f(t)]. \quad (3.3)$$

**Теорема 3.7.** Пусть  $t^p f(t) \in L_1(-\infty, +\infty) \forall p$ , тогда

$$F \left[ -\frac{1}{it} f(t) \right] (\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} F[f](\xi) d\xi. \quad (3.4)$$

Теперь поговорим о свойствах преобразования Фурье, связанных с операцией свертки. Напомним, как выглядит эта операция:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) f_2(t-s) ds.$$

Эта операция является билинейной, коммутативной и ассоциативной.

**Теорема 3.8.** Пусть  $f_1, f_2 \in L_1$ , тогда

$$F[f_1 * f_2](\lambda) = F[f_1](\lambda) \cdot F[f_2](\lambda). \quad (3.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) f_2(t-s) e^{-i\lambda t} ds dt &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) e^{-i\lambda s} \left( f_2(t-s) e^{-i\lambda(t-s)} \right) ds dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) e^{-i\lambda s} ds \cdot F[f_2](\lambda) = F[f_1](\lambda) \cdot F[f_2](\lambda). \end{aligned}$$

■

*Замечание 3.6.* Аналогично доказывается и такой факт:

$$\begin{aligned} \text{Если } F[f_1], F[f_2] \in L_1(-\infty, +\infty), \text{ то} \\ F[f_1 \cdot f_2](\lambda) = 2\pi \cdot (F[f_1] * F[f_2])(\lambda). \end{aligned} \quad (3.6)$$

## Список литературы

- [1] К. В. Воронцов. *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X в примерах*. — М.: МЦНМО, 2005.