



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Конспект лекций

«Преобразования Лапласа и Фурье»

Лектор
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2019

Содержание

| | | |
|----------|--------------------------------------|----------|
| 1 | Как заполнять документ | 3 |
| 1.1 | doc.tex | 3 |
| 1.2 | bib.tex | 5 |
| 1.3 | set.tex | 5 |
| 1.4 | Заключение | 5 |
| 2 | Свойства преобразования Фурье | 6 |

1 Как заполнять документ

Сейчас я расскажу, как максимально быстро собрать лекцию, чтобы никому ничего не сломать. Предлагаю также ориентироваться на этот пример (папка `ch0`). Итак, порядок действий:

1. Скачать себе этот архив.
Он собирается командой `make` или `pdflatex doc`, если вы используете Windows.
2. Создать в корне вашу папку `chНОМЕРГЛАВЫ`.
В примере папка `ch0`.
3. Заполнить в этой папке три документа: `doc.tex`, `bib.tex`, `set.tex`, положить туда все ваши картинки и все, что вам нужно.
4. Проверить, что все собралось правильно.
5. Отослать мне на почту `kireku@gmail.com` с темой “ВКР” или, если вы умеете, сделать `pull request`.

1.1 doc.tex

Это файл с вашим текстом. Туда вы пишете лекцию.

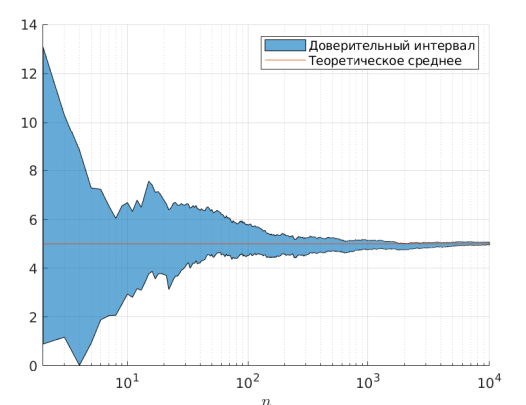
Я добавил уже ряд математических операторов. Если вы хотите добавить свои смотрите раздел про `set.tex`.

| Код | Результат |
|---------------------|-------------------------------|
| <code>\sgn</code> | sgn |
| <code>\const</code> | const |
| <code>\T</code> | \mathbb{T} |
| <code>\SetN</code> | \mathbb{N} |
| <code>\SetZ</code> | \mathbb{Z} |
| <code>\SetQ</code> | \mathbb{Q} |
| <code>\SetR</code> | \mathbb{R} |
| <code>\SetC</code> | \mathbb{C} |
| <code>\Prb</code> | \mathbb{P} |
| <code>\Ind</code> | \mathbb{I} |
| <code>\Exp</code> | \mathbb{E} |
| <code>\Var</code> | $\mathbb{V}\operatorname{ar}$ |
| <code>\SetX</code> | \mathcal{X} |
| <code>\SetP</code> | \mathcal{P} |

Также встроены окружения. Они как в книжке Арама, то есть красивые, не используйте другие.

| Код | Результат |
|---|--|
| <pre>\begin{theorem} Это теорема. \end{theorem}</pre> | Теорема 1.1. <i>Это теорема.</i> |
| <pre>\begin{definition} Это определение \textit{сходимости}. \end{definition}</pre> | Определение 1.1. Это определение <i>сходимости</i> . |
| <pre>\begin{lemma} Это лемма. \end{lemma}</pre> | Лемма 1.1. <i>Это лемма.</i> |
| <pre>\begin{assertion} Это утверждение. \end{assertion}</pre> | Утверждение 1.1. <i>Это утверждение.</i> |
| <pre>\begin{example} Это пример. \end{example}</pre> | Пример 1.1. Это пример. |
| <pre>\begin{proof} Это доказательство чего-либо. \end{proof}</pre> | До к а з а т е л ь с т в о. Это доказательство чего-либо. ■ |

Чтобы добавить картинку, положите ее в вашу папку и укажите полный путь:

| Код | Результат |
|--|--|
| <pre>\includegraphics{ch0/example.eps}</pre> |  |

Используя метки, обязательно ставьте префикс-название папки:

| Код | Результат |
|--|------------------------|
| <pre>\begin{equation} \label{ch0.square} x^2 = 0. \end{equation}</pre> | $x^2 = 0. \quad (1.1)$ |

1.2 bib.tex

Если вам нужна библиография — сюда можно написать библиографию, она автоматом окажется внизу. Все ссылки, по-прежнему с префиксом.

| Содержимое ch0/bib.tex |
|--|
| <pre>\bibitem{ch0.voroncov} К.~В.~Воронцов. \textit{\LaTeX в примерах}.~--- М.: МЦНМО, 2005.</pre> |

1.3 set.tex

Если вам жизненно не хватает какой-нибудь суперштуки, которую обычно объявляют в начале файла: новую команду, окружение или что-то в этом духе, то напишите сюда. Но все это пишите с каким-нибудь префиксом.

Например, я очень захотел писать прикольные дроби, типа $\frac{3}{4}$ и новый оператор $\text{Kirill}_{x \in \mathcal{X}}$, тогда я должен туда написать:

| Содержимое ch0/bib.tex |
|---|
| <pre>\usepackage{nicefrac} \DeclareMathOperator{\zeroKir}{Kirill}</pre> |

Но вообще, если вы не уверены, что все не перестанет компилироваться, то не стоит подключать пакеты. Пакеты будут действовать на весь документ в целом.

1.4 Заключение

Вообще, было бы круто, чтобы все получилось примерно одинаково и красиво. В библиографии есть книжка хорошая по Латеху, если кому нужна.

2 Свойства преобразования Фурье

В этом разделе мы опишем основные свойства преобразования Фурье и докажем наиболее интересные из них. Прежде всего, напомним внешний вид преобразования:

$$F[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt,$$

где $f \in L_1(-\infty, +\infty)$, то есть функция f интегрируема по Риману (Лебегу) на всей числовой прямой и выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty.$$

Замечание 2.1. Принадлежность функции f классу L_1 гарантирует существование ее преобразования Фурье $F[f]$.

Для начала выпишем свойства, которые напрямую следуют из определения: линейность, масштабируемость и сдвиг. Мы не будем долго на них останавливаться.

1. Линейность.

$$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2], \quad \forall f_1, f_2 \in L_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Сдвиг.

$$\begin{aligned} F[f(t - t_0)] &= e^{-i\lambda t_0} \cdot F[f], \\ F[e^{i\lambda_0 t} \cdot f(t)] &= F[f] \cdot (\lambda - \lambda_0). \end{aligned}$$

3. Масштабируемость.

$$F[f(\alpha t)](\lambda) = \frac{1}{|\alpha|} F[f(t)]\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

4. О четности.

Если функция f является четной, то ее образ $F[f]$ будет действительной функцией. Если же f — нечетная, то образ $F[f]$ будет чисто мнимой функцией.

Теперь перейдем к более интересным свойствам. Далее каждая теорема, следствие или замечание будут являться свойствами преобразования Фурье. Большая часть из них будет доказана.

Теорема 2.1. Рассмотрим последовательность функций из класса L_1 , стремящуюся по норме L_1 к некоторой функции f из того же класса, то есть

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f_n \in L_1(-\infty, +\infty) \quad : \quad f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} f \in L_1.$$

Тогда

$$F[f_n] \Rightarrow F[f].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем несложные выкладки:

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda} |F[f_m](\lambda) - F[f_n](\lambda)| &= \\ &= \sup_{\lambda} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_m(t) - f_n(t)) e^{-i\lambda t} dt \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_m(t) - f_n(t)| dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Теорема 2.2. Преобразование Фурье $F[f]$ есть непрерывная ограниченная функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На самом деле ограниченность мы нечаянно вывели в предыдущей теореме. Действительно,

$$|F[f](\lambda)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \text{const}.$$

С непрерывностью дела обстоят куда сложнее. Здесь нам придется записать наше преобразование в виде

$$F[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt$$

и сослаться на книгу А. М. Тер-Крикорова, М. И. Шабунина «Курс математического анализа,» где на 645 странице доказана непрерывность каждого из кусочков. ■

Замечание 2.2. Из последней теоремы следует, например, что

$$F[f](\lambda) \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0.$$

Теперь рассмотрим специальный вид функций, который часто встречается на практике непрерывные и дифференцируемые функции.

Теорема 2.3. Пусть функция f непрерывно дифференцируема, абсолютно интегрируема, и ее производная так же абсолютно интегрируема, то есть¹

$$f \in C^1(-\infty, +\infty) \cap L_1(-\infty, +\infty), f' \in L_1(-\infty, +\infty)$$

Тогда

$$F[f'](\lambda) = i\lambda \cdot F[f](\lambda).$$

¹Теорема ходит в интернете в нескольких вариантах условий: совершенно не понятно, f или f' должна быть непрерывной или интегрируемой. Причем доказательства везде одинаковые. Здесь приведен вариант к.ф.-м.н. доцента И. В. Рублева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим функцию в виде

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(t) dt.$$

Из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ следует существование пределов $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ и $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$. Они не могут быть отличными от нуля в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$. С помощью интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} F[f'](\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\lambda t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-i\lambda t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = i\lambda \cdot F[f](\lambda). \end{aligned}$$

■

Список литературы

- [1] К. В. Воронцов. *L^AT_EX в примерах*. — М.: МЦНМО, 2005.