Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Конспект лекций

«Преобразования Лапласа и Фурье»

Лектор
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2019

Содержание

1 Как заполнять документ

Сейчас я расскажу, как максимально быстро собрать лекцию, чтобы никому ничего не сломать. Предлагаю также ориентироваться на этот пример (папка `ch0`). Итак, порядок действий:

1. Скачать себе этот архив.
   Он собирается командой `make` или `pdflatex doc`, если вы используете Windows.

2. Создать в корне вашу папку `chНОМЕРГЛАВЫ`.
   В примере папка `ch0`.

3. Заполнить в этой папке три документа: `doc.tex`, `bib.tex`, `set.tex`, положить туда все ваши картинки и все, что вам нужно.

4. Проверить, что все собралось правильно.

5. Отослать мне на почту `kireku@gmail.com` с темой “ВКР” или, если вы умеете, сделать `pull request`.

1.1 doc.tex

Это файл с вашим текстом. Туда вы пишите лекцию.

Я добавил уже ряд математических операторов. Если вы хотите добавить свои смотри раздел про `set.tex`.

Код	Результат
`\sgn`	sgn
`\const`	const
`\T`	T
`\SetN`	$\mathbb{N}$
`\SetZ`	$\mathbb{Z}$
`\SetQ`	$\mathbb{Q}$
`\SetR`	$\mathbb{R}$
`\SetC`	$\mathbb{C}$
`\Prb`	$\mathbb{P}$
`\Ind`	$\mathbb{I}$
`\Exp`	$\mathbb{E}$
`\Var`	$\mathbb{V}\mathrm{ar}$
`\SetX`	$\mathcal{X}$
`\SetP`	$\mathcal{P}$

Также встроены окружения. Они как в книжке Арама, то есть красивые, не используйте другие.

Код	Результат

`\begin{theorem}`
`        Это теорема.`
`\end{theorem}`
	Теорема 1.1. *Это теорема.*

`\begin{definition}`
`        Это определение`
`        \textit{сходимости}.`
`\end{definition}`
	Определение 1.1. Это определение *сходимости.*

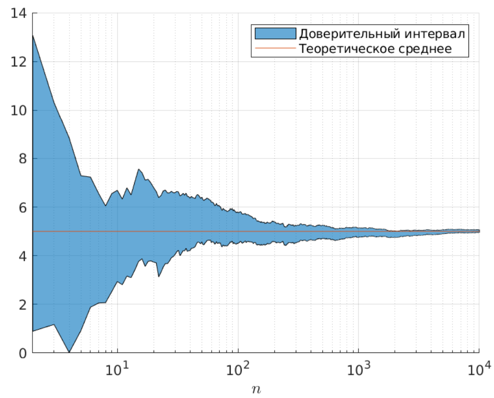
`\begin{lemma}`
`        Это лемма.`
`\end{lemma}`
	Лемма 1.1. *Это лемма.*

`\begin{assertion}`
`        Это утверждение.`
`\end{assertion}`
	Утверждение 1.1. *Это утверждение.*

`\begin{example}`
`        Это пример.`
`\end{example}`
	Пример 1.1. Это пример.

`\begin{proof}`
`        Это доказательство чего-либо.`
`\end{proof}`
	Доказательство. Это доказательство чего-либо. ■

Чтобы добавить картинку, положите ее в вашу папку и укажите полный путь:

Код	Результат
`\includegraphics{ch0/example.eps}`	

Используя метки, обязательно ставьте префикс-название папки:

Код	Результат

`\begin{equation}`
`\label{ch0.square}`
`        x^2 = 0.`
`\end{equation}`
	$$x^2 = 0. \qquad (1.1)$$

1.2 bib.tex

Если вам нужна библиография — сюда можно написать библиографию, она автоматом окажется внизу. Все ссылки, по-прежнему с префиксом.

Содержимое `ch0/bib.tex`
`\bibitem{ch0.voroncov}` `        К.~В.~Воронцов. \textit{\LaTeX в примерах}.~--- М.: МЦНМО, 2005.`

1.3 set.tex

Если вам жизненно не хватает какой-нибудь суперштуки, которую обычно объявляют в начале файла: новую команду, окружение или что-то в этом духе, то напишите сюда. Но все это пишите с каким-нибудь префиксом.

Например, я очень захотел писать прикольные дроби, типа $\nicefrac{3}{4}$ и новый оператор $\operatorname{Kirill}_{x \in \mathcal{X}}$, тогда я должен туда написать:

Содержимое `ch0/bib.tex`
`\usepackage{nicefrac}` `\DeclareMathOperator{\zeroKir}{Kirill}`

Но вообще, если вы не уверены, что все не перестанет компилиться, то не стоит подключать пакеты. Пакеты будут действовать на весь документ в целом.

1.4 Заключение

Вообще, было бы круто, чтобы все получилось примерно одинаково и красиво. В библиографии есть книжка хорошая по Латеху, если кому нужна.

1.5 Список приславших

1. Абрамова
2. Авалиани
3. Егоров

2 Преобразование Лапласа-Фурье

2.1 Некоторые сведения из ТФКП

Перед тем, как приступить непосредственно к преобразованиям Фурье, вспомним, для начала, курс ТФКП.

Вспомним как задается функция комплексной переменной:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z = x + iy$$

Производная в точке z_0:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad \text{где } \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

1. $\Delta z = \Delta x$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \Rightarrow \exists u_x, v_x : \lim_{\Delta x \to 0} \{\ldots\} = u'_x + iv'_x$$

2. $\Delta z = i\Delta y$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y_0) + iv(x_0, y_0 + \Delta y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} \Rightarrow \exists u_y, v_y : \lim_{\Delta y \to 0} \{\ldots\} = -iu'_y + v'_y$$

Условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

Напомним, что интеграл от функции комплексного переменного вводится (так же, как и в действительной области) как предел последовательности интегральных сумм; функция при этом определена на некоторой кривой Γ, кривая предполагается гладкой или кусочно-гладкой:

$$\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)\Delta z_j \longrightarrow \int_\Gamma f(z)dz; \quad \Delta z_j = z_j - z_{j-1},\ \Gamma : z = z(t),\ dz = z'(t)dt,\ t \in [t_0, t_1]$$

Тогда

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[(u'_x - v'_y) + i(v'_x + u'_y)\right] dt = \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma vdx + udy$$

Среди интегралов в комплексном анализе важное место в теории и практике интегрирования и приложениях занимает интеграл вида $\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, зависящий от ζ.

В частности, полагая $f(z)$ аналитической в замкнутой области γ, получаем, что для любой точки аналитичности функция может быть записана в виде интеграла

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Аналитическая функция имеет производные любого порядка, для которых справедлива формула

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\, i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Теперь дадим определение ряда Лорана необходимого для последующего повествования

Определение 2.1. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{2.1}$$

называется рядом Лорана функции $f(z)$, если его коэффициенты вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Замечание 2.1. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ – правильная часть ряда Лорана и $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ – главная часть ряда Лорана. При этом, ряд Лорана считается сходящимся тогда и только тогда, когда сходятся его правильная и главная части.

Важное место в изучении и применении теории функций комплексного переменного занимает исследование их поведения в особых точках, где нарушается аналитичность функции. В частности, это точки, где функция не определена.

Одной из таких особых точек является полюс.

Определение 2.2. Говорят, что изолированная точка $z_0 \in \overline{C}$ функции $f(z)$ называется полюсом, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Замечание 2.2. Номер старшего члена главной части ряда Лорана функции в ее разложении в окрестности полюса называется порядком полюса. Главная часть ряда Лорана в случае полюса порядка и записывается следующим образом:

а) в случае $z_0 \in \mathbb{C}$ в виде $\sum_{k=-n}^{-1} c_k (z - z_0)^n$, или $\sum_{k=1}^{n} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$, подробнее:

$$c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot z, \quad c_n \neq 0.$$

б) в случае $z_0 = \infty$ в виде:

$$c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot z, \quad c_n \neq 0.$$

Определение 2.3. Вычетом функции f(z) в изолированной особой точке z_0 ($z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$) называется интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz$, где γ — контур, принадлежащий окрестности точки z_0 и охватывающий ее.

Теорема 2.1 (Основная теорема о вычетах). *Если функция f(z) – аналитическая в $\overline{D}$ за исключением конечного числа особых точек $z_k \in D$, то справедливо равенство (где C — граница области D):*

$$\oint\limits_{C} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z), \quad z_k \in D. \tag{2.2}$$

Утверждение 2.1. *Вычет функции в изолированной особой точке равен коэффициенту c_{-1} при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки, т.е. при* $\dfrac{1}{z-z_0}$ *для* $z_0 \in \mathbb{C}$, *и этому коэффициенту, взятому с противоположным знаком, для* $z_0 = \infty$:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = c_{-1}, \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}, \quad z_0 = \infty.$$

Утверждение 2.2. *Если* z_0 *полюс порядка* n *функции* $f(z)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, *то*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big[f(z) \cdot (z-z_0)^n \big], \quad z_0 - \Pi(n);$$

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \big[f(z) \cdot (z-z_0) \big], \quad z_0 - \Pi(1).$$

2.2 Применение вычетов для вычисления интеграла вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} R(x)$

Большой интерес представляет возможность применения вычетов для вычисления несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, где интеграл понимается в смысле главного значения, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$ (здесь отрезок $[a,b] = [-R,R]$).

Будем рассматривать функцию $f(x)$, непрерывную на $(-\infty, +\infty)$. Возможность использования вычетов при решении такой задачи основана на том, что отрезок $[-R,R]$ действительной оси рассматривается как часть замкнутого контура C, состоящего из этого отрезка и дуги окружности, а интеграл по контуру записывается в виде суммы:

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz, \text{где } C_R \text{ – дуга окружности } |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ определяется как предел:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \oint\limits_C f(z)\,dz - \lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\,dz\,.$$

Интерес, с точки зрения применения вычетов, представляют интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, где функция $f(x)$ такова, что $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$. Классы таких функций выделяются, и для всех функций рассматриваемого класса устанавливается формуа $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \oint\limits_C f(z)dz$.

Мы же, далее, рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, где $f(x) = R(x)e^{i\lambda x}$ и $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $m - n \geqslant 1$ и $Q_m(x) \neq 0$, $x \in R$, а $R(x)$ принимает действительные значения. Такой интеграл сходится, так как он может быть записан в виде суммы двух сходящихся интегралов:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x\,dx\,.$$

Доказательство возможности применения вычетов к вычислению интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx$ основано на следующем утверждении.

Утверждение 2.3 (Лемма Жордана)**.** *Пусть функция f(z) непрерывна в области* $D\,:\,|z| \geqslant R_0$, $\operatorname{Im} z \geqslant -a$ *и* $\lim\limits_{R\to\infty} \max_{C_R} |f(z)| = 0$, *где* C_R *– дуга окружности* $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geqslant -a$. *Тогда для любого* $\lambda > 0$ *справедливо равенство*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)\,dz = 0.$$

Для рассматриваемых в данном пункте интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx$ функция $f(z) = R(z)$ удовлетворяет лемме Жордана. Подводя итог приведенным рассуждениям, запишем следующее утверждение.

Утверждение 2.4. *Пусть* $R(x)$ *– рациональная функция, не имеющая особых точек на действительной оси (т.е.* $Q(x) \neq 0$ *для* $x \in \mathbb{R}$*), для которой точка* $z = \infty$ *– нуль порядка не ниже первого (т.е.* $m - n \geqslant 1$*). Тогда справедливы формулы:*

1. *при* $\lambda > 0$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \big[R(z)e^{i\lambda z}\big], \quad \operatorname{Im} z_k > 0;$$

2. *при* $\lambda < 0$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx = -2i\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \big[R(z)e^{i\lambda z}\big], \quad \operatorname{Im} z_k < 0;$$

2.3 Ряды и преобразование Фурье

Пусть $f(t)$ – периодическая с периодом $T = 2\pi$, $t \in [-\pi, \pi]$.

$$f(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kt + b_k \sin kt\right],$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\;dt, k = 0, 1, \ldots,$$
$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\;dt, k = 1, 2, \ldots.$$

Запишем ряд в наних обозначениях

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikt},\quad c_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt,\ c_0=a_0,\ c_k=a_k+ib_k,$$

$c_ke^{ikt}+c_{-k}e^{-ikt}=[a_k-ib_k][\cos kt+i\sin kt]+[a_k+ib_k][\cos kt-i\sin kt]=2a_k\cos kt+2b_k\sin kt.$
Далее, сделаем небольшую замену

$$f(t)\longrightarrow f(s),\ s\in[-T/2,T/2],\ t=\frac{2\pi s}{T}\Rightarrow f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikt}.$$

Тогда

$$f(s)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{\frac{2\pi is}{T}},\quad c_k=\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(s)e^{\frac{-2\pi isk}{T}}ds.$$

Пусть теперь

$$f_T(t)=f(t),\ \text{но продолженное по периоду}\ t\in[-T/2,T/2]\,,\ f(t)\in(\infty,+\infty).$$

$$f_T(t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}c_{k,T}e^{\frac{2\pi it}{T}},\quad c_{k,T}=\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{\frac{-2\pi itk}{T}}ds.$$

Пусть $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \Delta\lambda>0$ и $k:\lambda\leqslant\dfrac{2\pi k}{T}<\lambda+\Delta\lambda\ \Rightarrow\ \dfrac{T\lambda}{2\pi}\le k<\dfrac{T\lambda}{2\pi}+\dfrac{T\Delta\lambda}{2\pi}$, значит

$$k\approx\frac{T\Delta\lambda}{2\pi},\quad c_{k,T}\approx c_{\lambda,T}=\frac{1}{T}\underbrace{\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-i\lambda t}}_{=F_T(\lambda)}$$

В итоге получим

$$f_T(t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{F_T(\lambda)}{T}e^{\frac{2\pi ikt}{T}}\approx\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{F_T(\lambda)}{T}e^{-\lambda t}\frac{T}{2\pi}\Delta\lambda\xrightarrow{\Delta\lambda\to0}$$

$$\xrightarrow{\Delta\lambda\to0}\boxed{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda=f(t)}\ \text{– **обратное преобразование Фурье**}$$

$$\boxed{F_T(\lambda)\xrightarrow{T\to\infty}F(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt}\ \text{– **прямое преобразование Фурье**}$$

Другие формы преобразования Фурье, встречающиеся в литературе

$$F(\lambda)=\frac{1}{g}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega\lambda t}dt,\quad f(t)=\frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\omega\lambda t}d\lambda,\quad gh=\frac{2\pi}{|\omega|}$$

1. $\omega = \pm 1; \quad g = 1,\ h = 2\pi.$
2. $\omega = \pm 2\pi; \quad g = h = 1.$
3. $\omega = \pm 1; \quad g = h = \sqrt{2\pi}.$

3 Свойства преобразования Фурье

В этом разделе мы опишем основные свойства преобразования Фурье и докажем наиболее интересные из них. Прежде всего, напомним внешний вид преобразования:

$$F[f](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\, dt,$$

где $f \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$, то есть функция f интегрируема по Риману (Лебегу) на всей числовой прямой и выполнено условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

Замечание 3.1. Принадлежность функции f классу L_1 гарантирует существование ее преобразования Фурье $F[f]$.

Для начала выпишем свойства, которые напрямую следуют из определения: линейность, масштабируемость и сдвиг. Мы не будем долго на них останавливаться.

1. **Линейность.**

$$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2], \qquad \forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}_1,\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. **Сдвиг.**

$$F[f(t - t_0)] = e^{-\lambda t_0} \cdot F[f],$$
$$F[e^{i\lambda_0 t} \cdot f(t)] = F[f] \cdot (\lambda - \lambda_0).$$

3. **Масштабируемость.**

$$F[f(\alpha t)](\lambda) = \frac{1}{|\alpha|} F[f(t)] \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\, \alpha \neq 0.$$

4. **О четности.** Если функция f является четной, то ее образ $F[f]$ будет действительной функцией.

5. **О нечетности.** Если же f — нечетная, то образ $F[f]$ будет чисто мнимой функцией.

Теперь перейдем к более интересным свойствам. Далее каждая теорема, следствие или замечание будут являться свойствами преобразования Фурье. Большая часть из них будет доказана. Для удобства навигации наиболее важные формулы пронумерованы.

Теорема 3.1. *Рассмотрим последовательность функций из класса* L_1*, стремящуюся по норме* L_1 *к некоторой функции* f *из того же класса, то есть*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty},\ f_n \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty) \quad : \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}_1} f \in \mathrm{L}_1.$$

Тогда

$$F[f_n] \rightrightarrows F[f].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем несложные выкладки:

$$\sup_\lambda |F[f_m](\lambda) - F[f_n](\lambda)| =$$

$$= \sup_\lambda \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f_m(t) - f_n(t)) e^{-i\lambda t}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_m(t) - f_n(t)|\, dt < \varepsilon.$$

■

Теорема 3.2. *Преобразование Фурье $F[f]$ есть непрерывная ограниченная функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. На самом деле ограниченность мы нечаянно вывели в предыдущей теореме. Действительно,

$$|F[f](\lambda)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt \right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \mathrm{const}\,.$$

С непрерывностью дела обстоят куда сложнее. Здесь нам придется записать наше преобразование в виде

$$F[f](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t)\, dt - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t)\, dt$$

и сослаться на книгу А. М. Тер–Крикорова, М. И. Шабунина «Курс математического анализа,» где на 645 странице доказана непрерывность каждого из кусочков. ■

Замечание 3.2. Из последней теоремы следует, например, что

$$F[f](\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0.$$

Теперь рассмотрим специальный вид функций, который часто встречается на практике: непрерывные и дифференцируемые функции.

Теорема 3.3. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема, абсолютно интегрируема, и ее производная так же абсолютно интегрируема, то есть*[1]

$$f \in \mathrm{C}^1(-\infty, +\infty) \cap \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty), \; f' \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$$

Тогда

$$F[f'](\lambda) = i\lambda \cdot F[f](\lambda).$$

[1] Теорема ходит в интернете в нескольких вариантах условий: совершенно не понятно, f или f' должна быть непрерывной или интегрируемой. Причем доказательства везде примерно одинаковые. Здесь приведен вариант к.ф.-м.н. доцента И. В. Рублева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим функцию в виде

$$f(t) = f(0) + \int\limits_0^t f'(t)\,dt.$$

Из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ следует существование пределов $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ и $\lim_{t\to-\infty} f(t)$. Они не могут быть отличными от нуля в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$. С помощью интегрирования по частям получаем

$$F[f'](\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-i\lambda t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}\,dt = i\lambda\cdot F[f](\lambda).$$

■

Замечание 3.3. Как следствие, получаем более занятную формулу:

$$\text{Пусть } f\in \mathrm{C}^{k-1}(-\infty,+\infty),\quad \exists f^{(k)} : f^{(k)}\in \mathrm{L}_1(-\infty,+\infty),\ \text{тогда}$$

$$F[f^{(k)}](\lambda) = (i\lambda)^k\cdot F[f]. \tag{3.1}$$

Теорема 3.4. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема, абсолютно интегрируема, и ее производная так же абсолютно интегрируема, то есть*

$$f\in \mathrm{C}^1(-\infty,+\infty)\cap \mathrm{L}_1(-\infty,+\infty),\ f'\in \mathrm{L}_1(-\infty,+\infty)$$

Тогда

$$|F[f](\lambda)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\left|\int\limits_{-T}^{+T} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right| = \frac{f(t)e^{-i\lambda t}}{-i\lambda}\Big|_{-T}^{+T} + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{-T}^{+T} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt.$$

■

Замечание 3.4. Как следствие, получаем более занятную формулу:

$$\text{Пусть } f\in \mathrm{C}^{k-1}(-\infty,+\infty),\quad \exists f^{(k)} : f^{(k)}\in \mathrm{L}_1(-\infty,+\infty),\ \text{тогда}$$

$$F[f](\lambda) \leqslant \frac{C_m}{|\lambda|^m},\quad \text{где } C_m = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f^{(m)}(t)|\,dt. \tag{3.2}$$

Теорема 3.5. *Пусть задана функция f такая, что $\int_{-\infty}^t f(s)\,ds\in \mathrm{L}_1(-\infty,+\infty)$, тогда*

$$F\left[\int_{-\infty}^t f(s)\,ds\right](\lambda) = \frac{1}{i\lambda}F[f](\lambda).$$

Теорема 3.6. *Пусть задана функция f такая, что $t \cdot f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$, тогда*

$$F[f]'(\lambda) = F[-it \cdot f(t)](\lambda).$$

Доказательство.

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right)'_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty}(-it)f(t)e^{-i\lambda t}\,dt.$$

■

Замечание 3.5. Как следствие:

$$\text{Пусть } f : t^p f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty),\ p = \overline{1, k},\ \text{тогда}$$
$$F[f]^{(k)}(\lambda) = F[(-it)^k \cdot f(t)]. \tag{3.3}$$

Теорема 3.7. *Пусть $t^p f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$ $\forall p$, тогда*

$$F\left[-\frac{1}{it}f(t)\right](\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} F[f](\xi)\,d\xi. \tag{3.4}$$

Теперь поговорим о свойствах преобразования Фурье, связанных с операцией свертки. Напомним, как выглядит эта операция:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)f_2(t-s)ds.$$

Эта операция является билинейной, коммутативной и ассоциативной.

Теорема 3.8. *Пусть $f_1, f_2 \in \mathrm{L}_1$, тогда*

$$F[f_1 * f_2](\lambda) = F[f_1](\lambda) \cdot F[f_2](\lambda). \tag{3.5}$$

Доказательство.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)f_2(t-s)e^{-\lambda t}\,ds\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)e^{-i\lambda s}\left(f_2(t-s)e^{-i\lambda(t-s)}\right)\,ds\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)e^{-i\lambda s}\,ds \cdot F[f_2](\lambda) = F[f_1](\lambda) \cdot F[f_2](\lambda).$$

■

Замечание 3.6. Аналогично доказывается и такой факт:

$$\begin{gathered}\text{Если } F[f_1], F[f_2] \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty),\ \text{то}\\ F[f_1 \cdot f_2](\lambda) = 2\pi \cdot (F[f_1] * F[f_2])(\lambda).\end{gathered} \tag{3.6}$$

4 Теоремы о предельных значениях

Теорема 4.1. *Пусть f – непрерывно дифференцируема; $f(t) \supset F(p)$. Если существует предел $f(+\infty)$, тогда*

$$f(+\infty) = \lim_{p \to 0} pF(p).$$

Доказательство.

$$f'(t) \supset pF(p) - f(+0)$$

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0)$$

что при p стремящемся к нулю стремится к $f(+\infty) - f(+0)$. ■

Контрпримеры:

$$\cos t \supset \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow pF(p) = \frac{p^2}{p^2+1} \overset{p\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\sin t \supset \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow pF(p) = \frac{p}{p^2+1} \overset{p\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Однако, мы знаем, что у синуса и косинуса пределов на бесконечности не существует.

Теорема 4.2. *Пусть f – непрерывно дифференцируема; $f(t) \supset F(p)$. Если существует предел $f(+0)$, то*

$$f(+0) = \lim_{p \to \infty} pF(p).$$

Доказательство.

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0),$$

здесь левая часть равенства при p стремящемся к бесконечности сходится к нулю. ■

Обратимся к предыдущему примеру:

$$\frac{p^2}{p^2+1} \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 1 = \cos(0),$$

$$\frac{p}{p^2+1} \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0 = \sin(0).$$

5 Приложения преобразования Лапласа к исследованию процессов в электрических цепях

Рассмотрим электрическую цепь, включающую в себя индуктивную катушку, сопротивление и конденсатор, рис. 5.1. Обозначим I – ток, E – и $i \supset I, e \supset E$. Переходя к комплексному току $i(t)$, и полагая $i(0) = 0$, можно описать систему следующим образом:

$$U_L = L\frac{di}{dt}, U_R = Ri(t), U_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)dt = e(t)$$

$$pLI + RI + \frac{I}{Cp} = E$$

$$(pL + R + \frac{1}{Cp})I = ZI = E$$

Здесь Z – *импеданс* (операторное сопротивление), а $Y = \frac{1}{Z}$ – *адмитанс*.

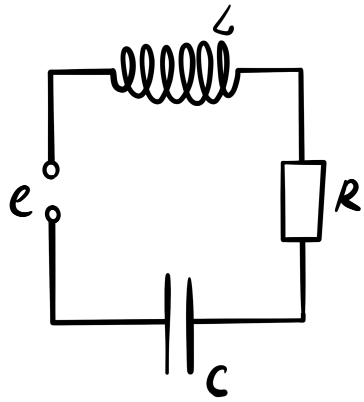


Рис. 5.1: Электрическая цепь, включающая в себя индуктивную катушку, конденсатор и резистор

Теперь рассмотрим цепь с параллельным соединением, рис. 5.2a. Для цепей с параллельным соединением при импедансах $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ верно:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}, Y_2 = \frac{1}{Z_2}, \ldots, \frac{1}{Z_k}, \quad Y = Y_1 + Y_2 + \ldots Y_k.$$

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{Cp}} = \frac{1}{Z_2} = Cp + \frac{1}{R} = \frac{CRp + 1}{R}$$

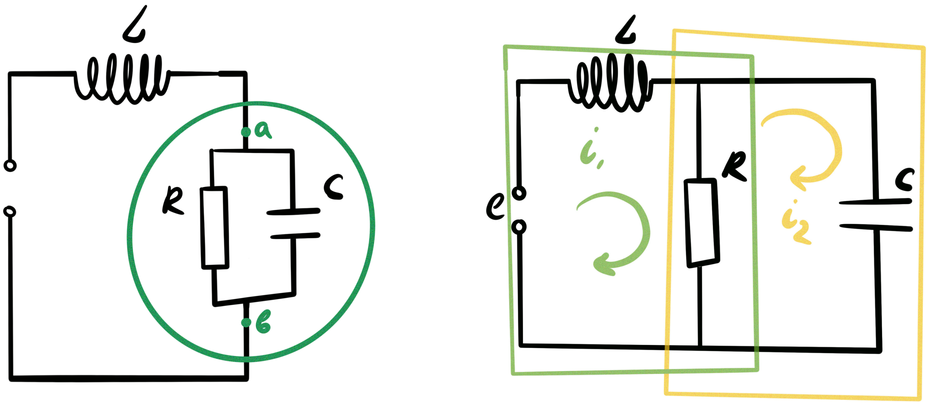
$$Z_2 = \frac{R}{CRp + 1}, Z = pL + \frac{R}{CRp + 1}$$

Можно эту же цепь рассмотреть как двухконтурную, рис. 5.2b, и, опираясь на законы Кирхгофа, получить

$$\begin{cases} pLI_1 + R(I_1 - I_2) = E \\ R(I_2 - I_1) + \frac{1}{Cp}I_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_2(R + \frac{1}{Cp}) - RI_1 = 0$$

$$I_2 = \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}}I_1$$



(a) Рассматриваем как цепь с параллельным соединением

(b) Рассматриваем как двухконтурную цепь

Рис. 5.2: Цепь с параллельным соединением

$$I_1 - I_2 = (1 - \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}})I_1 = \frac{1}{CRp + 1}I_1$$

$$I_1(pL + \frac{R}{CRp+1}) = E = I_1 Z$$

В задачах часто рассматривают случаи

- Постоянного тока
$$e = e_0, E = \frac{e_0}{p}$$
- Переменного тока
$$e = e_0 \sin(wt), E = \frac{e_0 w}{p^2 + w^2}$$

Решим конкретную задачу, рис. 5.3:

$$(Lp + R + \frac{1}{Cp})I = \frac{e_0}{p}$$

$$I = \frac{e_0}{p}\Big(\frac{1}{Lp + R + 1/Cp}\Big) = \frac{e_0 C}{CLp^2 + RCp + 1} = \frac{e_0}{L(p + \frac{R}{2L})^2 - \frac{R^2}{4L} + \frac{1}{C}} =$$

$$= \Big\{\text{пусть } D = C^2r^2 - 4CL < 0, \text{ тогда корни будут комплексными}\Big\} =$$

$$= \frac{e_0/L}{(p + \frac{R}{2L}^2) + (\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2})} \subset e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{e_0}{L}\frac{\sin\Big(\sqrt{(\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2})}t\Big)}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Рассмотрим цепь с нагрузкой, рис. 5.4a

$$RI + pL(I - I') + RI + \frac{1}{Cp}I = E$$

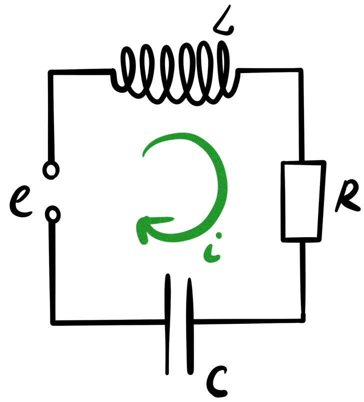
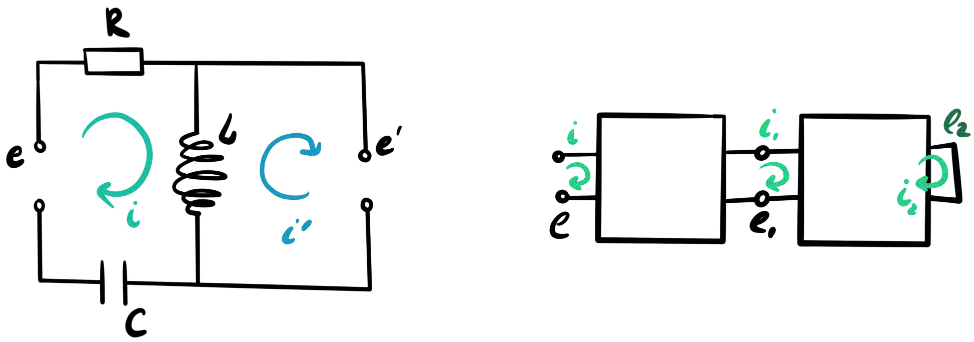


Рис. 5.3: Конкретный пример



(a) Цепь с нагрузкой (b) Можно рассматривать и так

Рис. 5.4: Пример 2

$$pL(I' - I) = -E'$$

$$RI + \frac{1}{Cp}I = E - E'$$

$$\begin{cases} E' = E - RI + \frac{1}{Cp}I \\ I' = I - \frac{E - (R + \frac{1}{Cp})I}{pL} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E' = A(p)E + B(p)I \\ I' = C(p)E + D(p)I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = \tilde{A}(p)E' + \tilde{B}(p)I' \\ I' = \tilde{C}(p)E' + \tilde{D}(p)I' \end{cases}$$

Положим

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(p) & \tilde{B}(p) \\ \tilde{C}(p) & \tilde{D}(p) \end{bmatrix} = \tilde{U}.$$

$$\begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \tilde{U}_1 \begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \{E_2 = 0\} = \tilde{U}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

6 Электромеханические аналогии

Рассмотрим Гамильтонову систему, с переменными $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$, на которую действуют внешние силы Q. Внешние силы могут быть следующих типов:

1. *Диссипативные*
$$Q = n - B\dot{q}, \quad B = B^T > 0$$
$$\langle \dot{q}, Q \rangle = -\langle \dot{q}, B\dot{q} \rangle < 0$$
К ним относится сила трения. Можно также ввести *функцию Релея* $R = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, B\dot{q} \rangle$ и тогда $Q = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}}$.

2. *Гироскопические*
$$Q = \Gamma\dot{q}, \quad \Gamma^T = -\Gamma$$
$$\langle \dot{q}, Q \rangle = \langle \dot{q}, \Gamma\dot{q} \rangle = \left\langle \Gamma^T\dot{q}, \dot{q} \right\rangle = \langle \dot{q}, \Gamma\dot{q} \rangle = -\langle \dot{q}, \Gamma \rangle = 0$$

Далее обозначим К – кинетическую энергию системы, П – потенциальную энергию, $\mathrm{E} = \mathrm{K} + \Pi$ – полную энергию системы,

$$\dot{q} = \mathrm{K} - \Pi, \quad \mathrm{K} = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, M\dot{q} \rangle, \Pi = \Pi(q),$$
$$\frac{d\mathrm{E}}{dt} = \sum_j \langle \dot{q}_j, Q_j \rangle$$

Положим $M = M^T$ и $\frac{\partial \mathrm{K}}{\dot{q}} = M\dot{q}$. Запишем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_j Q_j$$
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{q}}\Big) - \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + \sum_j Q_j$$

Воспользуемся соотношением $\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{q}}\Big) = M\ddot{q}$, и пусть П имеет вид $\Pi = \Pi(q) = Cq$. Следовательно, получим $M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = Q_{\text{внешние}}$ или в одномерном случае

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_{\text{внешние}}. \tag{6.1}$$

Проведем аналогию с уравнением

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = e.$$

Если мы вспомним, что $i = \frac{dq}{dt}$, то получим представление аналогичное (6.1):

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R + \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} = e.$$

q	b	m	c	Q	$\text{К} = 1/2m\dot{q}^2$	$R = 1/2b\dot{q}^2$	$\Pi = 1/2cq^2$
q	L	R	$1/$	l	$L/2\dot{q}^2$	$R/2\dot{q}^2$	$1/2Ctq^2$
U	C	$1/R$	$1/L$	di/dt	–	–	–

Таблица 1: Электромеханические аналогии

Кратко выводы можно описать таблицей 1.

Для цепи, иллюстрирующей сложение токов, изображенной на рисунке 6.1, можно выписать следующие соотношения

$$U = L\frac{di}{dt},\, U = Ri,\, i = \frac{U}{R},\, C\frac{dU}{dt} = i,\, i = \frac{1}{L}\int\limits_0^{t_0} U(\tau)d\tau.$$

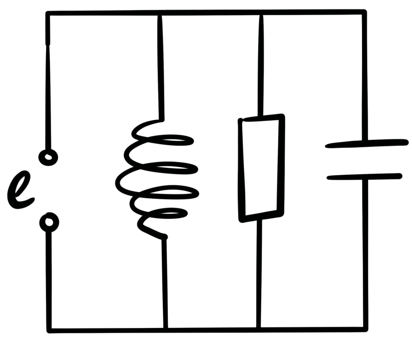


Рис. 6.1: Сложение токов

7 Управляемые и наблюдаемые системы

Рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + D_1 v \\ y = Cx + D_2 v. \end{cases} \tag{7.1}$$

Здесь x – *фазовая переменная*, которую мы наблюдаем, u – *управление*, v – *помеха*, причиной появления которой зачастую являются неточность линеризации или внешние условия. Второе уравнение в данной системе называется *уравнением наблюдения*, и соответственно y – *наблюдением*. Применим преобразование Лапласа, обозначив $x(0) = x^0$, $x \supset X, y \supset Y, v \supset V, u \supset U$.

$$pX - x^0 = AX + BU + D_1 V$$

$$(pI - A)X = x^0 + BU + D_1 V$$

$$X = (pI - A)^{-1}x^0 + (pI - A)^{-1}BU + (pI - A)^{-1}D_1V$$
$$Y = CX + D_2V = C(pI - A)^{-1}x^0 + C(pI - A)^{-1}BU + (C(pI - A)^{-1}D_1 + D_2)V =$$
$$= C(pI - A)^{-1}x^0 + H_{yu}U + H_{yv}V$$

$H_{yu} = C(pI - A)^{-1}B$ принято называть *передаточной функцией (transfer function).*

Пусть наблюдение одномерно $y \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, и удовлетворяет системе

$$\frac{d^ny}{dt^n} + c_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + c_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \ldots c_1\frac{dy}{dt} + c_0y = u. \tag{7.2}$$

Сведем ее к системе (7.1):

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \frac{dy}{dt} \\ \ldots \\ x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{cases} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad (y = x_1) \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \ldots \\ \dot{x}_n = -c_{n-1}x_n - c_{n-2}x_{n-1} - \ldots - c_0x_1 + u. \end{cases} \tag{7.3}$$

Возвращаясь к многомерной системе, для y справедливо:

$$\begin{cases} y = \underline{C^Tx}, \quad (C = C^T) \\ \frac{dy}{dt} = \underline{C^TAx} + C^TBu \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \underline{C^TA^2x} + C^TABu + C^TB\frac{du}{dt} \\ \ldots \\ \frac{d^ny}{dt^n} = \underline{C^TA^nx} + C^TA^{n-1}Bu + \ldots C^TB\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}. \end{cases} \tag{7.4}$$

По теореме Гамильтона-Кэли A имеет разложение $A^n = c_0I + c_1A + \ldots c_{n-1}A^{n-1}$. С тем, чтобы избавиться от подчеркнутых слагаемых домножим первое из уравнений системы (7.4) на $-c_0$, второе на $-c_1$, третье на $-c_2$, далее на аналогичные коэффициенты вплоть до предпоследнего уравнения, а затем сложим их все. Тогда мы сможем продолжить равенство из уравнения (7.2):

$$u = \beta_0u + \beta_1\frac{du}{dt} + \ldots \beta_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}.$$

Положив $x^0 = 0$ и исключив помеху, получим $Y = H_{yu}U$. Различные схемы управления можно увидеть на рисунках 7.1a, 7.1b.

Для передаточной функции $H = H_{yu} = C(pI - A)^{-1}$ вводят понятие *частотной характеристики,* определяемой как $H(iw), w \in \mathbb{R}$. $|H(iw)|$ называют *коэффициентом усиления.*

Рассмотрим управление вида

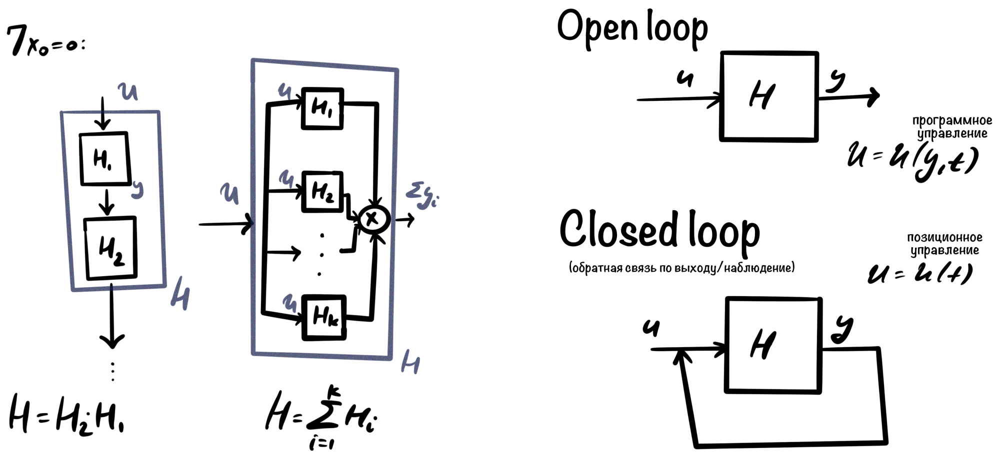
$$u(t) = ae^{iwt}, \quad a \in \mathbb{R}^{n\times 1}, w \in \mathbb{R},$$

и будем считать A устойчивой матрицей (это верно, например, если все собственные ее значения имеют отрицательную вещественную часть). Справедлива теорема

Теорема 7.1. *Пусть A устойчивая матрица, $\bar{y}(t) = H(iw)ae^{iwt}$. Тогда*

$$\|y(t) - \bar{y}(t)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где $y(t)$ – выход при $u(t) = ae^{iwt}$ (устойчивый режим).



(a) Различное соединение блоков (b) Замкнутая и разомкнутая система

Рис. 7.1: Различные управляемые системы

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$y(t) = Ce^{At}x^0 + C\int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}Bae^{iwt}d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{t \to \infty, Ce^{At}x^0 \xrightarrow{t\to\infty} 0\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ce^{At}\int\limits_0^t e^{-A\tau}Be^{iwt}ad\tau = Ce^{At}\int\limits_0^t e^{(iwI-A)\tau}d\tau Ba =$$

$$= C\big[e^{iwI} - e^{-At}\big]\big[iwI - A\big]^{-1}Ba \xrightarrow{t\to\infty} C\big[iwI - A\big]^{-1}Bae^{iwt} = H(iw)ae^{iwt}$$

Здесь мы воспользовались следующим преобразованием:

$$\int\limits_0^t e^{(iwI-A)\tau}d\tau = \left\{ \frac{e^{(iwI-A)\tau}}{(iwI-A)}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \right\} = \big[e^{(iwI-A)t} - I\big](iwI-A)^{-1},$$

справедливость этой формулы доказывается прямым дифференцированием. ■

Список литературы

[1] К. В. Воронцов. *LaTeX в примерах.* — М.: МЦНМО, 2005.