Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Конспект лекций

«Преобразования Лапласа и Фурье»

Лектор
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2019

Содержание

1 Как заполнять документ

Сейчас я расскажу, как максимально быстро собрать лекцию, чтобы никому ничего не сломать. Предлагаю также ориентироваться на этот пример (папка `ch0`). Итак, порядок действий:

1. Скачать себе этот архив.
   Он собирается командой `make` или `pdflatex doc`, если вы используете Windows.

2. Создать в корне вашу папку `chНОМЕРГЛАВЫ`.
   В примере папка `ch0`.

3. Заполнить в этой папке три документа: `doc.tex`, `bib.tex`, `set.tex`, положить туда все ваши картинки и все, что вам нужно.

4. Проверить, что все собралось правильно.

5. Отослать мне на почту `kireku@gmail.com` с темой “ВКР” или, если вы умеете, сделать `pull request`.

1.1 doc.tex

Это файл с вашим текстом. Туда вы пишите лекцию.

Я добавил уже ряд математических операторов. Если вы хотите добавить свои смотри раздел про `set.tex`.

Код	Результат
`\sgn`	sgn
`\const`	const
`\T`	T
`\SetN`	$\mathbb{N}$
`\SetZ`	$\mathbb{Z}$
`\SetQ`	$\mathbb{Q}$
`\SetR`	$\mathbb{R}$
`\SetC`	$\mathbb{C}$
`\Prb`	$\mathbb{P}$
`\Ind`	$\mathbb{I}$
`\Exp`	$\mathbb{E}$
`\Var`	$\mathbb{V}\mathrm{ar}$
`\SetX`	$\mathcal{X}$
`\SetP`	$\mathcal{P}$

Также встроены окружения. Они как в книжке Арама, то есть красивые, не используйте другие.

Код	Результат

`\begin{theorem}`
`        Это теорема.`
`\end{theorem}`
	Теорема 1.1. *Это теорема.*

`\begin{definition}`
`        Это определение`
`        \textit{сходимости}.`
`\end{definition}`
	Определение 1.1. Это определение *сходимости.*

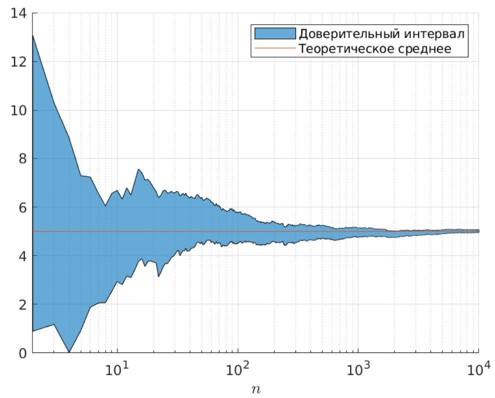
`\begin{lemma}`
`        Это лемма.`
`\end{lemma}`
	Лемма 1.1. *Это лемма.*

`\begin{assertion}`
`        Это утверждение.`
`\end{assertion}`
	Утверждение 1.1. *Это утверждение.*

`\begin{example}`
`        Это пример.`
`\end{example}`
	Пример 1.1. Это пример.

`\begin{proof}`
`        Это доказательство чего-либо.`
`\end{proof}`
	Д о к а з а т е л ь с т в о. Это доказательство чего-либо. ■

Чтобы добавить картинку, положите ее в вашу папку и укажите полный путь:

Код	Результат
`\includegraphics{ch0/example.eps}`	

Используя метки, обязательно ставьте префикс-название папки:

Код	Результат

`\begin{equation}`
`\label{ch0.square}`
`        x^2 = 0.`
`\end{equation}`
	$$x^2 = 0. \tag{1.1}$$

1.2 bib.tex

Если вам нужна библиография — сюда можно написать библиографию, она автоматом окажется внизу. Все ссылки, по-прежнему с префиксом.

Содержимое `ch0/bib.tex`
`\bibitem{ch0.voroncov}` `        К.~В.~Воронцов. \textit{\LaTeX в примерах}.~--- М.: МЦНМО, 2005.`

1.3 set.tex

Если вам жизненно не хватает какой-нибудь суперштуки, которую обычно объявляют в начале файла: новую команду, окружение или что-то в этом духе, то напишите сюда. Но все это пишите с каким-нибудь префиксом.

Например, я очень захотел писать прикольные дроби, типа $\nicefrac{3}{4}$ и новый оператор $\operatorname{Kirill}_{x \in \mathcal{X}}$, тогда я должен туда написать:

Содержимое `ch0/bib.tex`
`\usepackage{nicefrac}` `\DeclareMathOperator{\zeroKir}{Kirill}`

Но вообще, если вы не уверены, что все не перестанет компилиться, то не стоит подключать пакеты. Пакеты будут действовать на весь документ в целом.

1.4 Заключение

Вообще, было бы круто, чтобы все получилось примерно одинаково и красиво. В библиографии есть книжка хорошая по Латеху, если кому нужна.

2 Свойства преобразования Фурье

В этом разделе мы опишем основные свойства преобразования Фурье и докажем наиболее интересные из них. Прежде всего, напомним внешний вид преобразования:

$$F[f](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt,$$

где $f \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$, то есть функция f интегрируема по Риману (Лебегу) на всей числовой прямой и выполнено условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

Замечание 2.1. Принадлежность функции f классу L_1 гарантирует существование ее преобразования Фурье $F[f]$.

Для начала выпишем свойства, которые напрямую следуют из определения: линейность, масштабируемость и сдвиг. Мы не будем долго на них останавливаться.

1. **Линейность.**

$$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2], \qquad \forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}_1,\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. **Сдвиг.**

$$F[f(t - t_0)] = e^{-\lambda t_0} \cdot F[f],$$
$$F[e^{i\lambda_0 t} \cdot f(t)] = F[f] \cdot (\lambda - \lambda_0).$$

3. **Масштабируемость.**

$$F[f(\alpha t)](\lambda) = \frac{1}{|\alpha|} F[f(t)] \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\, \alpha \neq 0.$$

4. **О четности.** Если функция f является четной, то ее образ $F[f]$ будет действительной функцией.

5. **О нечетности.** Если же f — нечетная, то образ $F[f]$ будет чисто мнимой функцией.

Теперь перейдем к более интересным свойствам. Далее каждая теорема, следствие или замечание будут являться свойствами преобразования Фурье. Большая часть из них будет доказана. Для удобства навигации наиболее важные формулы пронумерованы.

Теорема 2.1. *Рассмотрим последовательность функций из класса* L_1*, стремящуюся по норме* L_1 *к некоторой функции* f *из того же класса, то есть*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty},\ f_n \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty) \quad : \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}_1} f \in \mathrm{L}_1.$$

Тогда

$$F[f_n] \rightrightarrows F[f].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем несложные выкладки:

$$\sup_{\lambda} |F[f_m](\lambda) - F[f_n](\lambda)| =$$

$$= \sup_{\lambda} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_m(t) - f_n(t)) e^{-i\lambda t}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f_m(t) - f_n(t)|\, dt < \varepsilon.$$

■

Теорема 2.2. *Преобразование Фурье $F[f]$ есть непрерывная ограниченная функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. На самом деле ограниченность мы нечаянно вывели в предыдущей теореме. Действительно,

$$|F[f](\lambda)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt \right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \mathrm{const}\,.$$

С непрерывностью дела обстоят куда сложнее. Здесь нам придется записать наше преобразование в виде

$$F[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t)\, dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t)\, dt$$

и сослаться на книгу А. М. Тер–Крикорова, М. И. Шабунина «Курс математического анализа,» где на 645 странице доказана непрерывность каждого из кусочков. ■

Замечание 2.2. Из последней теоремы следует, например, что

$$F[f](\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0.$$

Теперь рассмотрим специальный вид функций, который часто встречается на практике: непрерывные и дифференцируемые функции.

Теорема 2.3. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема, абсолютно интегрируема, и ее производная так же абсолютно интегрируема, то есть*[1]

$$f \in \mathrm{C}^1(-\infty, +\infty) \cap \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty), \ f' \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$$

Тогда

$$F[f'](\lambda) = i\lambda \cdot F[f](\lambda).$$

[1] Теорема ходит в интернете в нескольких вариантах условий: совершенно не понятно, f или f' должна быть непрерывной или интегрируемой. Причем доказательства везде примерно одинаковые. Здесь приведен вариант к.ф.-м.н. доцента И. В. Рублева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим функцию в виде

$$f(t) = f(0) + \int\limits_0^t f'(t)\,dt.$$

Из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ следует существование пределов $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ и $\lim_{t\to-\infty} f(t)$. Они не могут быть отличными от нуля в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$. С помощью интегрирования по частям получаем

$$F[f'](\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-i\lambda t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}\,dt = i\lambda\cdot F[f](\lambda).$$

■

Замечание 2.3. Как следствие, получаем более занятную формулу:

$$\text{Пусть } f\in \mathrm{C}^{k-1}(-\infty,\,+\infty),\quad \exists f^{(k)} : f^{(k)}\in \mathrm{L}_1(-\infty,\,+\infty), \text{ тогда}$$

$$F[f^{(k)}](\lambda) = (i\lambda)^k\cdot F[f]. \tag{2.1}$$

Теорема 2.4. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема, абсолютно интегрируема, и ее производная так же абсолютно интегрируема, то есть*

$$f\in \mathrm{C}^1(-\infty,\,+\infty)\cap \mathrm{L}_1(-\infty,\,+\infty),\ f'\in \mathrm{L}_1(-\infty,\,+\infty)$$

Тогда

$$|F[f](\lambda)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\left|\int\limits_{-T}^{+T} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right| = \frac{f(t)e^{-i\lambda t}}{-i\lambda}\Big|_{-T}^{+T} + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{-T}^{+T} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt.$$

■

Замечание 2.4. Как следствие, получаем более занятную формулу:

$$\text{Пусть } f\in \mathrm{C}^{k-1}(-\infty,\,+\infty),\quad \exists f^{(k)} : f^{(k)}\in \mathrm{L}_1(-\infty,\,+\infty), \text{ тогда}$$

$$F[f](\lambda) \leqslant \frac{C_m}{|\lambda|^m},\quad \text{где } C_m = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f^{(m)}(t)|\,dt. \tag{2.2}$$

Теорема 2.5. *Пусть задана функция f такая, что $\int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds \in \mathrm{L}_1(-\infty,\,+\infty)$, тогда*

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds\right](\lambda) = \frac{1}{i\lambda}F[f](\lambda).$$

Теорема 2.6. *Пусть задана функция f такая, что $t \cdot f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$, тогда*

$$F[f]'(\lambda) = F[-it \cdot f(t)](\lambda).$$

Доказательство.

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right)'_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-it)f(t)e^{-i\lambda t}\,dt.$$

■

Замечание 2.5. Как следствие:

$$\text{Пусть } f : t^p f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty),\ p = \overline{1,k},\ \text{тогда}$$
$$F[f]^{(k)}(\lambda) = F[(-it)^k \cdot f(t)]. \tag{2.3}$$

Теорема 2.7. *Пусть $t^p f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$ $\forall p$, тогда*

$$F\left[-\frac{1}{it}f(t)\right](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} F[f](\xi)\,d\xi. \tag{2.4}$$

Теперь поговорим о свойствах преобразования Фурье, связанных с операцией свертки. Напомним, как выглядит эта операция:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)f_2(t-s)ds.$$

Эта операция является билинейной, коммутативной и ассоциативной.

Теорема 2.8. *Пусть $f_1, f_2 \in \mathrm{L}_1$, тогда*

$$F[f_1 * f_2](\lambda) = F[f_1](\lambda) \cdot F[f_2](\lambda). \tag{2.5}$$

Доказательство.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)f_2(t-s)e^{-\lambda t}\,ds\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)e^{-i\lambda s}\left(f_2(t-s)e^{-i\lambda(t-s)}\right)ds\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)e^{-i\lambda s}\,ds \cdot F[f_2](\lambda) = F[f_1](\lambda) \cdot F[f_2](\lambda).$$

■

Замечание 2.6. Аналогично доказывается и такой факт:

$$\begin{gathered}\text{Если } F[f_1], F[f_2] \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty),\ \text{то}\\ F[f_1 \cdot f_2](\lambda) = 2\pi \cdot (F[f_1] * F[f_2])(\lambda).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Список литературы

[1] К. В. Воронцов. *LaTeX в примерах.* — М.: МЦНМО, 2005.