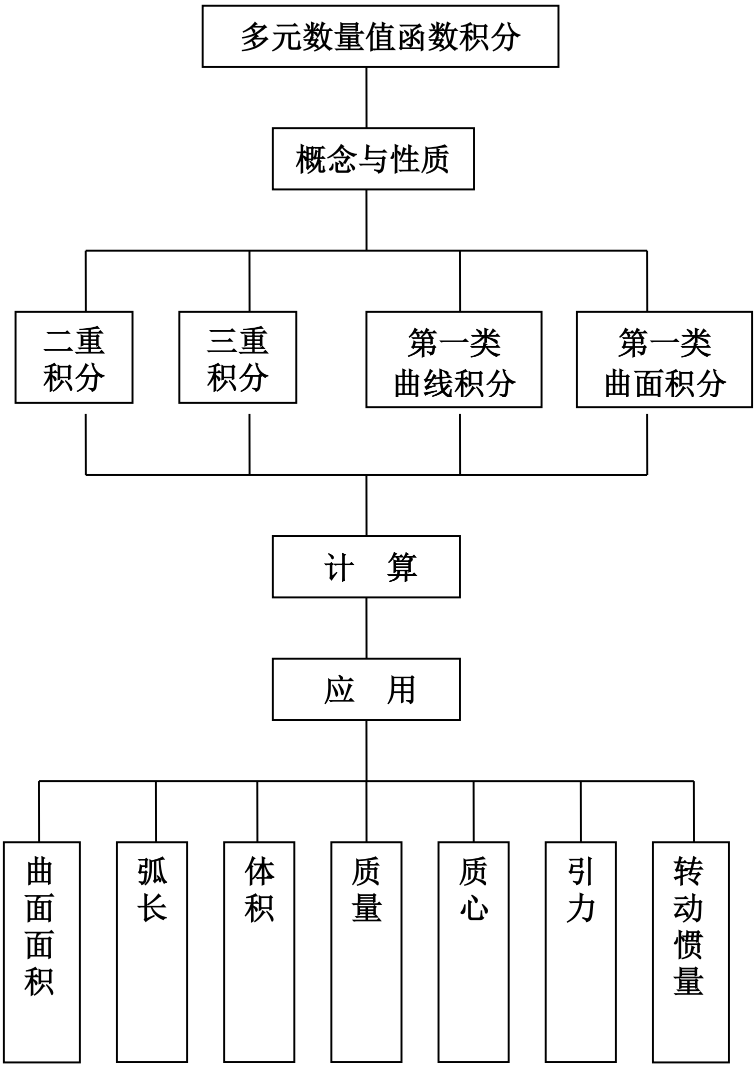
第六章 多元数量值函数积分学



（一）多元数量值函数积分的概念

定义 设 Ω 为一有界闭的几体形体（它可以是曲线段,平面区域、曲面或空间区域等），它是可以度量的（即可以求长度、面积或体积），在 Ω 上定义了一个有界多元数量值函数 $f(M), M \in \Omega$，将此几体形体 Ω 任意分成 n 个小部分 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \cdots, \Delta\Omega_n$ (并用它表示每一小部分的度量)。在每一小部分 $\Delta\Omega_i$ 上任取一点 M_i，作乘积 $f(M_i)\Delta\Omega_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，并作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\Omega_i,$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\Omega_i$ 的直径$\}$，如果不论对 Ω 怎样划分，且不论点 M_i 在 $\Delta\Omega_i$ 上怎样选取，当 $\lambda\to 0$ 时，上述和式都有同一极限值，则称函数 $f(M)$ 在 Ω 上可积，并称此极限值为函数 $f(M)$ 在几体形体 Ω 上的积分，记为 $\int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega$，即

$$\int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\Omega_i,$$

其中 Ω 称为积分区域，$f(M)$ 称为被积函数，$f(M)\,\mathrm{d}\Omega$ 称为被积表达式或积分微元。

根据几体形体（即积分区域）Ω 的不同类型，多元数量值函数积分有以下四种类型:

1. 如果几体形体 Ω 是 xOy 面上的闭区域 D，则 f 就是定义在 D 上的二元函数 $f(x,y)$，f 在平面区域 D 上的积分就称为**二重积分**，在直角坐标系中记为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \text{ 或 } \iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

2. 如果几体形体 Ω 是一空间闭区域 V，则 f 就是定义在 V 上的三元函数 $f(x,y,z)$，f 在空间区域 V 上的积分就称为**三重积分**，在直角坐标系中记为

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V \text{ 或 } \iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

3. 如果几体形体 Ω 是一平面或空间曲线 L，则 f 就是定义在 L 上的二元函数 $f(x,y)$ 或三元函数 $f(x,y,z)$，f 在曲线 L 上的积分就称为**第一类曲线积分**或**对弧长的曲线积分**，在直角坐标系中记为

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s \text{ 或 } \int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

4. 如果几体形体 Ω 是一空间曲面 S，则 f 就是定义在 S 上的三元函数 $f(x,y,z)$，f 在曲面 S 上的积分称为**第一类曲面积分**或**对面积的曲面积分**，记为

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

（二）多元数量值函数积分的性质

1. **线性性** 设 α,β 为常数，则

$$\int_\Omega[\alpha f(M)+\beta g(M)]\,\mathrm{d}\Omega=\alpha\int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega+\beta\int_\Omega g(M)\,\mathrm{d}\Omega;$$

2. **区域可加性** 若闭区域 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，且 Ω_1 与 Ω_2 无公共内点，则

$$\int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega_1} f(M)\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2} f(M)\,\mathrm{d}\Omega$$

3. **保序性** 如果在 Ω 上满足 $f(M)\le g(M)$，则

$$\int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega\le\int_\Omega g(M)\,\mathrm{d}\Omega$$

特别地有

$$\left|\int_{\Omega} f(M)\mathrm{d}\Omega\right| \le \int_{\Omega} |f(M)|\mathrm{d}\Omega$$

4. **估值定理** 设 m, M 分别是 $f(M)$ 在闭几何形体 Ω 上的最小值和最大值，则

$$m\cdot(\Omega\text{的度量}) \le \int_{\Omega} f(M)\mathrm{d}\Omega \le M\cdot(\Omega\text{ 的度量})$$

5 **积分中值定理** 设 $f(M)$ 在闭几何形体 Ω 上连续，则至少存在一点 $M_0\in\Omega$，使得

$$\int_{\Omega} f(M)\mathrm{d}\Omega = f(M_0)\cdot(\Omega\text{的度量})$$

6. **奇、偶函数在对称区域上的积分** 当积分区域 Ω 关于 $x=0$（在平面直角坐标系中表示 y 轴，在空间直角坐标系中表示坐标面 yOz）对称时：

如果被积函数 $f(M)$ 关于变量 x 为奇函数，则 $\int_{\Omega} f(M)\mathrm{d}\Omega = 0$

如果被积函数 $f(M)$ 关于变量 x 为偶函数，则 $\int_{\Omega} f(M)\mathrm{d}\Omega = 2\int_{\Omega_1} f(M)\mathrm{d}\Omega$，

其中 Ω_1 为 Ω 位于 $x>0$ 的一部分。

上述结论中积分区域中的 $x=0$ 可换为 $y=0$ 或 $z=0$，相应地，被积函数 $f(M)$ 就要求关于变量 y 或 z 的奇偶性。

奇、偶函数在对称区域上的应用，可以简化重积分、第一类曲线积分和曲面积分的计算.

7. **轮换性与轮换对称性** 与定积分类似，多元数量值函数积分也是一个极限值(常数)，且其值仅与积分区域及被积函数有关，而与积分变量的记号无关。如果将表示积分区域 Ω 的方程中的 x, y, z 依次轮换 $x\to y\to z\to x$，从而得到新的积分区域记为 Ω_1，同时将被积函数 $f(x,y,z)$ 中的 x, y, z 也依次轮换 $x\to y\to z\to x$，则 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 上的积分值不变，即

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_1} f(y,z,x)\mathrm{d}\Omega$$

如果 $\Omega_1=\Omega$，则称**区域 Ω 具有轮换对称性**。

如果 $f(y,z,x)=f(x,y,z)$，则称**被积函数 $f(x,y,z)$ 具有轮换对称性**

对于二重积分，若将平面区域 D 的边界曲线方程中的 x 与 y 互换（也称 x 与 y 轮换）后得到新的积分区域记为 D_1，同时将被积函数中的 x 与 y 互换，则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(y,x)\mathrm{d}\sigma$$

例如设 D 由直线 $x=1, y=0, y=x$ 围成，x 与 y 互换后，得到新的积分区域 D_1 由直线 $x=0, y=1, x=y$ 围成，于是

$$\iint_D x^2\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} y^2\,\mathrm{d}\sigma$$

对于三重积分有类似的结论，例如设 $\Omega: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le R^2$，则区域 Ω 具有轮换对称性，则有

$$\iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}V=\iiint_\Omega y^2\,\mathrm{d}V=\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}V$$

对于第一类曲线积分和曲面积分也有类似的结论.

上述关于轮换性与轮换对称性的恰当应用，可以简化重积分、第一类曲线积分和曲面积分的计算.

［注］假设以上性质中的积分都存在.

（三）多元数量值函数积分的计算

1. 二重积分计算法

（1）直角坐标系下的计算法

面积元素：$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

1° 当 $D=\{(x,y)\mid y_1(x)\le y\le y_2(x), a\le x\le b\}$ 时，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

上式称为先对 y 后对 x 的累次积分或二次积分（如图 6-1 所示）。

2° 当 $D=\{(x,y)\mid x_1(y)\le x\le x_2(y), c\le y\le d\}$ 时，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

上式称为先对 x 后对 y 的累次积分或二次积分（如图 6-2 所示）。

（2）极坐标系下的计算法

直角坐标与极坐标的关系：$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \end{cases} (0\le r<+\infty, 0\le\theta\le 2\pi)$

面积元素：$\mathrm{d}\sigma=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

1° 当极点在 D 的外部时，$D=\{(r,\theta)\mid r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta), \alpha\le\theta\le\beta\}$，则（图 6-3）

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,\mathrm{d}r$$

2° 当极点在 D 的内部时，$D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le r(\theta), 0\le\theta\le 2\pi\}$（见图 6-4），则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, \sin\theta) r\,\mathrm{d}r$$

3° 当极点在 D 的边界上时（见图 6-5），$D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le r(\theta), \alpha\le\theta\le\beta\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$

2. 三重积分计算法

（1）直角坐标系下的计算法

体积元素： $\mathbf{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

1° “先一后二”法（“平面投影法”）

设 V 在 xOy 面上的投影区域是 D，又当 $(x,y)\in D$ 时， $z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$，则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

计算外层二重积分在直角坐标系下进行。

2° “先二后一”法（“截面法”）

设 V 介于两平面 $z=c, z=d(c<d)$ 之间，$\forall z\in[c,d]$，过 z 作与 xOy 面平行的平面，与 V 相截得一截面区域 $D(z)$（见图 6-6），则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_c^d \mathrm{d}z\iint_{D(z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

计算内层二重积分在直角坐标系下进行.

（2）柱坐标系下的计算法

直角坐标与柱坐标的关系： $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta, & (0\le r<+\infty, 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<+\infty,)\\ z=z.\end{cases}$

体积元素： $\mathrm{d}V=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint_V f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\ r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

柱面坐标系实际上是平面上的极坐标加上空间中的竖坐标 z 构成. 因此，在柱坐标系下计算三重积分，一般是化为先对 z，再对极坐标 r， θ 的三次积分.

1° “先一后二”法

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_{z_1(r\cos\theta,r\sin\theta)}^{z_2(r\cos\theta,r\sin\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z$$

2° “先二后一”法

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_c^d \mathrm{d}z\iint_{D(z)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

（3）球坐标系下的计算法

直角坐标与球坐标的关系： $\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, & (0\le\rho<+\infty, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi)\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$

体积元素：$\mathrm{d}V=\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_V f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

在球坐标系下计算三重积分，一般是化为先对ρ，再对φ，最后对θ的三次积分.

3. 第一类曲线积分计算法

（1）若平面曲线L的方程为参数方程$x=x(t),y=y(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\ \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t\ .$$

（2）若平面曲线L的方程为$y=y(x)\ \ (a\le x\le b)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

（3）若平面曲线L的方程为$x=x(y)\ \ (c\le y\le d)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f[x(y),y]\ \sqrt{x'^2(y)+1}\,\mathrm{d}y$$

（4）若平面曲线L的方程为极坐标方程$r=r(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta]\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

（5）若空间曲线L的方程为参数方程$x=x(t),y=y(t),z=z(t)\ \ (\alpha\le t\le\beta)$，则

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\ \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

4．第一类曲面积分计算法

如果曲面S的方程为$z=z(x,y)$，S在xOy面上的投影区域为D_{xy}，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果曲面S的方程为$x=x(y,z)$，S在yOz面上的投影区域为D_{yz}，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

如果曲面S的方程为$y=y(z,x)$，S在zOx面上的投影区域为D_{zx}，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

［注］以上计算方法中都略去了关于被积函数可积的相关条件.

（四）多元数量值函数积分的应用

1．几何应用

（1）平面区域D的**面积** $S=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma.$

（2）空间区域V的**体积** $V=\iiint\limits_V \mathrm{d}V.$

（3）曲线的**弧长**

1° 若平面曲线L的方程为参数方程$x=x(t), y=y(t)(\alpha\le t\le\beta)$，则曲线$L$的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

2° 若平面曲线L的方程为$y=y(x)\ (a\le x\le b)$，则曲线L的弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

3° 若平面曲线L的方程为$x=x(y)\ (c\le y\le d)$，则曲线L的弧长为

$$s=\int_c^d\sqrt{1+x'^2(y)}\,\mathrm{d}y$$

4° 若平面曲线L的方程为极坐标方程$r=r(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta)$，则曲线$L$的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

5° 若空间曲线L的方程为参数方程$x=x(t), y=y(t), z=z(t), (\alpha\le t\le\beta)$，则曲线$L$的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

（4）**曲面的面积**

如果曲面S的方程为$z=z(x,y)$，S在xOy面上的投影区域为D_{xy}，则曲面S的面积为

$$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

如果曲面S的方程为$x=x(y,z)$，S在yOz面上的投影区域为D_{yz}，则曲面S的面积为

$$S=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

如果曲面S的方程为$y=y(z,x)$，S在zOx面上的投影区域为D_{zx}，则曲面S的面积为

$$S=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

2．物理应用

（1）**质量**　设几何体Ω的密度函数为$\mu(M)$，则Ω的质量为

$$m=\int_{\Omega}\mu(M)\,\mathrm{d}\sigma.$$

（2）**质心**　设几何体Ω的密度函数为$\mu(M)$，则Ω的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\int_{\Omega}x\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega},\ \bar{y}=\frac{\int_{\Omega}y\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega},\ \bar{z}=\frac{\int_{\Omega}z\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega}.$$

特别地，均匀物体的形心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\int_{\Omega}x\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\mathrm{d}\Omega},\ \bar{y}=\frac{\int_{\Omega}y\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\mu\,\mathrm{d}\Omega},\ \bar{z}=\frac{\int_{\Omega}z\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\mathrm{d}\Omega}.$$

（3）**转动惯量**　设几何体Ω的密度函数为$\mu(M)$，则Ω对三个坐标轴的转动惯量分别为

$$I_x=\int_{\Omega}(y^2+z^2)\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega,$$
$$I_y=\int_{\Omega}(z^2+x^2)\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega,$$
$$I_z=\int_{\Omega}(x^2+y^2)\mu(M)\,\mathrm{d}\Omega,$$

如果几何体位于xOy面上，则$z=0$.

（4）**引力**　设几何体Ω的密度函数为$\mu(M)$，则Ω对Ω外一点$P(x_0,y_0,z_0)$处质量为m的质点的引力$\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$为

$$\boldsymbol{F}_x=G\int_{\Omega}\frac{\mu(M)m(x-x_0)}{r^3}\,\mathrm{d}\Omega,$$
$$\boldsymbol{F}_y=G\int_{\Omega}\frac{\mu(M)m(y-y_0)}{r^3}\,\mathrm{d}\Omega,$$
$$\boldsymbol{F}_z=G\int_{\Omega}\frac{\mu(M)m(z-z_0)}{r^3}\,\mathrm{d}\Omega,$$

其中G为引力常数，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

如果几何体位于xOy面上，则$z=0$.

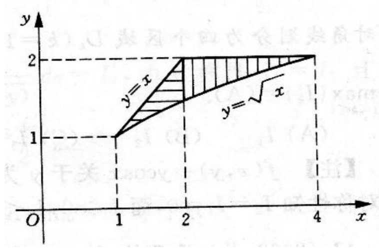
［注］以上应用中都略去了关于被积函数可积的相关条件.

典型例题

例 6.1　计算二重积分$I=\iint\limits_{D}\sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$其中 D是由曲线$y=\sqrt{x}$和直线$y=x$，$y=2$所围成的平面区域.

分析　根据被积函数$f(x,y)=\sin\frac{\pi x}{2y}$的特点，选择直角坐标下先对$x$后对$y$的二次积分.

解　积分区域 D 如图所示，



$D=\{(x,y)\,|\,y\le x\le y^2,1\le y\le 2\}$，抛物线与两条直线的交点分别为 $(1,1)$，$(2,2)$，$(4,2)$，于是

$$I=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_1^2\left[y\cos\frac{\pi x}{2y}\right]_{x=y}^{x=y^2}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2\left(y\cos\frac{\pi}{2}y-0\right)\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)\,.$$

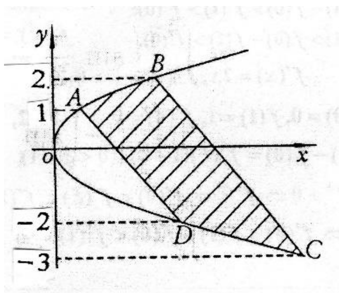
评注　如果本题先对 y 后对 x 积分，就会变成先求 $\int\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$，这样的不定积分的原函数不能用初等函数表示；因此，选择二次积分次序，不仅关系到二重积分计算是否简单，而且关系到该二重积分能否计算出来.

例 6.2　计算二重积分 $I=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y^2=x$ 和直线 $x+y=2$，$x+y=6$ 所围成的平面区域.

分析　积分区域 D 如图所示，根据积分区域的特点，选择直角坐标下先对 x 后对 y 的二次积分，并且需要分为三个区域上的二重积分.

解　直线与抛物线的交点为

$A(1,1)$，$B(4,2)$，$C(9,-3)$，$D(4,-2)$，



$$D_1=\{(x,y)\,|\,y^2\le x\le 6-y,-3\le y\le -2\}$$

$$D_2=\{(x,y)\,|\,2-y\le x\le 6-y,-2\le y\le 1\}$$

$$D_3=\{(x,y)\,|\,y^2\le x\le 6-y,1\le y\le 2\}$$

$$I=\int_{-3}^{-2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{6-y}(x+y)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{1}\mathrm{d}y\int_{2-y}^{6-y}(x+y)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{6-y}(x+y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-3}^{-2}\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=6-y}\mathrm{d}y+\int_{-2}^{1}\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right]_{x=2-y}^{x=6-y}\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=6-y}\mathrm{d}y$$

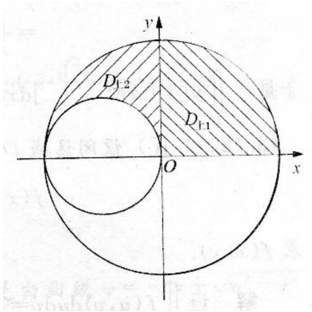
$$=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-2}\left[36-(y^2+y)^2\right]\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(36-4)\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\left[36-(y^2+y)^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-2}(36-y^4-2y^3-y^2)\mathrm{d}y+48+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}(36-y^4-2y^3-y^2)\mathrm{d}y=\frac{1919}{30}$$

评注　如果积分区域的边界是直线或非圆的曲线，一般选择直角坐标下计算二重积分；选择积分次序不仅要考虑被积函数的特点，而且要考虑积分区域的特点。

例 6.3　计算二重积分 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域.

分析 1 由于积分区域 D 关于 x 轴（$y=0$）对称，函数 $f(x,y)=y$ 关于 y 是奇函数，函数 $f=\sqrt{x^2+y^2}$ 关于 y 是偶函数，所以可以化为上半区域的二重积分. 根据积分区域的特点，选择极坐标下的二次积分，并且需要将上半区域分为两部分 $D_{上1},D_{上2}$，如图所示.



解 1 由于积分区域 D 关于 x 轴（$y=0$）对称，$f(x,y)=y$ 关于 y 是奇函数，所以

$$\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma=0$$

由于 $f=\sqrt{x^2+y^2}$ 关于 y 是偶函数，所以可以化为上半区域的二重积分；

圆 $x^2+y^2=4$ 的极坐标方程为 $r=2$，圆 $(x+1)^2+y^2=1$ 的极坐标方程为 $r=-2\cos\theta$，于是

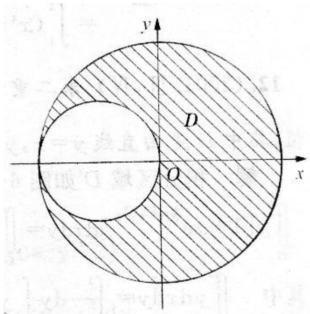
$$D_{上1}=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}\qquad D_{上2}=\left\{(r,\theta)\,|\,-2\cos\theta\le r\le 2,\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\right\}$$

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=2\left(\iint_{D_{上1}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_{上2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma\right)$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-2\cos\theta}^2 r^2\,\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\pi+\frac{16}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$\overset{\pi-\theta=\alpha}{=\!=\!=}\frac{8}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi-\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\alpha\,\mathrm{d}\alpha=\frac{16}{3}\pi-\frac{16}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{9}(3\pi-2)$$

分析 2 由于积分区域 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域，因此，D 可以看成圆域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$ 去掉圆域 $\{(x,y)\,|\,(x+1)^2+y^2\le 1\}$ 的部分. 从而原二重积分可以化为两个二重积分之差.



解 2
$$\iint_{D_{大圆}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r=\frac{16}{3}\pi$$

$$\iint_{D_{小圆}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{16}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$

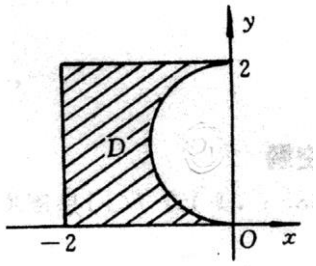
$$\overset{\pi-\theta=\alpha}{=\!=\!=}\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\alpha\,\mathrm{d}\alpha=\frac{16}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{9}$$

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_{大圆}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_{小圆}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{16}{3}\pi-\frac{32}{9}=\frac{16}{9}(3\pi-2)$$

例 6.4 计算二重积分 $\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中区域 D 由直伐 $x=-2, y=0, y=2$ 以及曲线

$x=-\sqrt{2y-y^2}$ 围成.

分析 1　积分区域 D 如图所示，根据积分区域的特点，选择直角坐标下先对 x 后对 y 的二次积分，



解 1　$D=\left\{(x,y)\mid -2\le x\le -\sqrt{2y-y^2},0\le y\le 2\right\}$

$$\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 y\,\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^2 y\,\mathrm{d}y-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=4-\int_0^2 (y-1+1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y$$

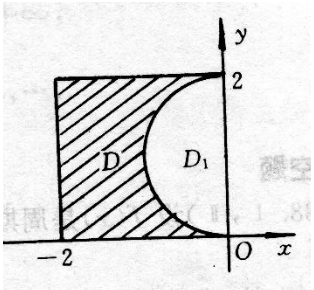
$$=4-\int_0^2 (y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y-\int_0^2\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=4-\int_{-1}^1 u\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}y-\int_{-1}^1\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}y\quad(y-1=u)$$

$$=4-0-\frac{\pi}{2}=4-\frac{\pi}{2}$$

注　定积分 $\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y$ 还可通过换元 $y-1=\sin t$ 加以计算.

分析 2　因为积分区域 D 的边界曲线有圆弧，所以也可以用极坐标计算，只需将区域 D 看成正方形区域 $D\cup D_1$ 去掉半圆域 D_1，如图所示，从而原二重积分可以化为两个二重积分之差.



解 2　$D\cup D_1=\{(x,y)\mid -2\le x\le 0,0\le y\le 2\}$

$$\iint_{D\cup D_1} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_0^2 y\,\mathrm{d}y=4,$$

$$D_1=\left\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 2\sin\theta,\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\right\}$$

$$\iint_{D_1} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r\sin\theta\cdot r\,\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\overset{\theta-\frac{\pi}{2}=\alpha}{=\!=\!=}\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(\alpha+\frac{\pi}{2})\,\mathrm{d}\alpha=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\alpha\,\mathrm{d}\alpha=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

故

$$\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D\cup D_1} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4-\frac{\pi}{2}$$

分析 3　　由均匀物体的形心公式 $\bar{y}=\dfrac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$ 知 $\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\bar{y}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，因此，若

积分区域的面积与形心易求出，则对于线性函数 $f(x,y)=y$，积分计算能简化.

解 3 因为 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4-\frac{\pi}{2}$，$\bar{y}=1$，所以由形心公式

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \bar{y}\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1\cdot(4-\frac{\pi}{2}) = 4-\frac{\pi}{2}$$

评注 由以上各题可以总结出计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的基本方法如下：

(1) 画图：画出积分区域 D 的图形；

(2) 选择坐标系：由 D 的形状及被积函数 $f(x,y)$ 的特点，确定在何种坐标系下计算；

(3) 选择积分次序：若在直角坐标系下计算，则需选择积分次序（先对 y 还是先对 x 积分，其原则是内层积分容易求出）；若在极坐标系下计算，则通常先对 r 后对 θ 积分；

(4) 确定积分上、下限：求出积分区域 D 的边界曲线的交点的坐标，把 D 用不等式组表示，从而确定二次积分的上、下限；

(5) 计算二次积分：将二重积分表示为二次积分，并计算其值；

(6) 在计算过程中，要善于利用被积函数的奇偶性及积分区域的对称性简化计算. 若积分区域的面积与形心易求出，被积函数 $f(x,y)$ 为线性函数，则可利用形心公式简化计算；

例 6.5 设 $\varphi(x)$ 为连续函数，计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$，$a,b$ 为常数.，$R>0$.

分析 若一般二重积分化成累次积分是计算不出结果的，可以看出积分区域关于 x、y 具有轮换对称性，即 $\iint\limits_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}\mathrm{d}\sigma$，因而可简化计算.

解 因为将变量 x 与 y 对换后，积分区域不变，即

$$\left\{(x,y)\,|\,y^2+x^2\le R^2, y\ge 0, x\ge 0\right\} = \left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

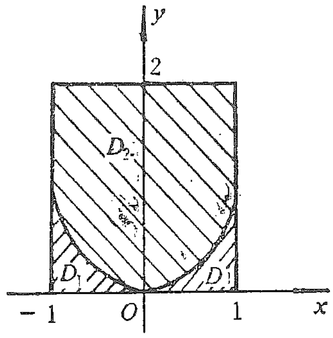
所以积分区域 D 具有轮换对称性，

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}+\frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}\right]\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\iint\limits_D (a+b)\mathrm{d}\sigma = \frac{a+b}{2}\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \frac{a+b}{8}\pi R^2$$

评注 要注意观察积分区域是否具有轮换对称性，例如可利用轮换对称性简化二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma$ 的计算.

例 6.6 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\|\,x|\le 1, 0\le y\le 2\right\}$.

分析 这是带有绝对值的函数的积分，首先要考虑去掉绝对值符号. 令绝对值号内的函数 $y-x^2=0$，曲线 $y-x^2=0$ 将 D 分成两部分 D_1 和 D_2. 在 D_1 上，$y-x^2<0$，在 D_2 上，$y-x^2>0$，所以要将 D 分为 D_1 和 D_2 两部分，如图所示；去掉绝对值符号之后，就能计算积分了.



解 $$I=\iint_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[-\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{y=x^2}^{y=2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}|x|^3\,\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_{0}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{1}x^3\,\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_{0}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$$

评注 计算带有绝对值函数的二重积分，关键是去掉绝对值符号. 一般方法是令绝对值号内的函数为零，得到一条曲线，该曲线将积分区域分为若干区域，在各区域上可确定被积函数符号，从而可以去掉绝对值符号.

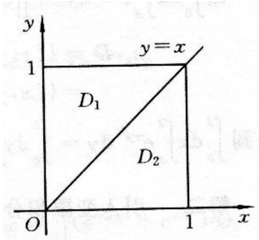
在计算过程中，需注意

$$\int_{-1}^{1}(x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|^3\,\mathrm{d}x,\qquad \int_{-1}^{1}(x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\neq\int_{-1}^{1}x^3\,\mathrm{d}x$$

例 6.7 计算二重积分 $I=\iint_{D}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

分析 与绝对值函数的处理方法类似，需考察在 D 内 x^2 与 y^2 的大小，为此，令括号内的两个函数相等，即 $x^2=y^2\Rightarrow y=x,y=-x$，直线 $y=-x$ 不在区域 D 内，不予考虑；直线 $y=x$ 将 D 分成两部分, 分别考察这两部分 x^2 与 y^2 的大小.

解 令括号内的两个函数相等，即得 $y=x$,，直线 $y=x$ 将 D 分成两部分 D_1 和 D_2. 在 D_1 上，$y^2>x^2$,在 D_2 上，$y^2<x^2$,，如图所示.



$$I=\iint_{D_1}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$=\int_{0}^{1}e^{y^2}\,\mathrm{d}y\int_{0}^{y}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}e^{x^2}\,\mathrm{d}x\int_{0}^{x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{0}^{1}ye^{y^2}\,\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}xe^{x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}xe^{x^2}\,\mathrm{d}x=e-1$$

例 6.8 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\iint\limits_D[\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le n^2\right\}$, , $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

分析 因为在圆域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le n^2\right\}$ 内不同半径的值 $[\sqrt{x^2+y^2}]$ 不同，因此需按整数半径划分为若干个圆环区域，从而在这些圆环区域上积分.

解 将积分域 D 分为 n 个小区域 $D_k: k-1\le\sqrt{x^2+y^2}\le k\quad(k=1,2,\cdots,n)$,

当 $(x,y)\in D_k$ 时, $[\sqrt{x^2+y^2}]=k-1\quad(k=1,2,\cdots,n)$,

于是

$$\iint\limits_D[\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}\sigma=\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{D_k}[\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}\sigma=\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{D_k}(k-1)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k-1)\iint\limits_{D_k}\mathrm{d}\sigma=\sum_{k=1}^{n}(k-1)\pi[k^2-(k-1)^2]=\pi\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3k+1)=\pi\left(2\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+n\right)$$

$$=\left(\frac{2}{6}n(n+1)(2n+1)2-\frac{3}{2}n(n+1)+n\right)\pi=\left(\frac{2}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}n\right)\pi$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\iint\limits_D[\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{2}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}n\right)\pi=\frac{2}{3}\pi$$

评注 对于这些特殊类型的二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\iint\limits_D\mathrm{sgn}(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\iint\limits_D\mathrm{e}^{\max\left\{x^2,y^2\right\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\iint\limits_D[\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 要注意掌握它们的计算方法.

例 6.9 已知 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$, 其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le1, 0\le y\le1\right\}$, 计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xy\,f_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

分析 这是一道涉及偏导数的二重积分，根据偏导数的概念，类似于定积分的分部积分法

$$\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}[f(x)]=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

进行计算.

解 因为 $f(1,y)=f(x,1)=0$, 所以 $f_y(1,y)=f_x(x,1)=0$, 从而

$$I=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 y\ \frac{\partial f_x(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 y\ \mathrm{d}[f_x(x,y)]$$

$$=\int_0^1 x\left[yf_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x[f_x(x,1)-0]\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=0-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x\ \mathrm{d}[f(x,y)]$$

$$=-\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

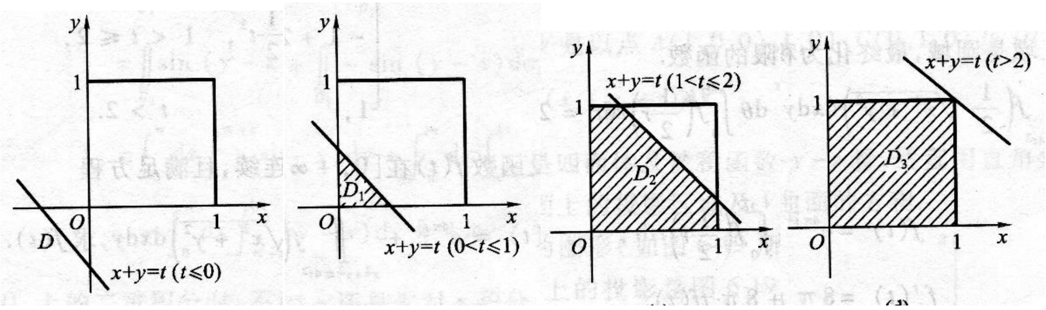
$$=-\int_0^1 f(1,y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=0+a=a\,.$$

评注 在计算过程中，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}[f(x,y)]$ 的右端表示在 $f(x,y)$ 中将 y 看成常量，对 x 的微分，而不是全微分；同理，$\frac{\partial f_x(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}[f_x(x,y)]$ 的右端表示在 $f_x(x,y)$ 中将 x 看成常量，对 y 的微分，也不是全微分.

例 6.10 设 $F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$，

$D=\{(x,y)\,|\,x+y\le t\}$，$(-\infty<t<+\infty)$，求 $F(t)$.

分析 $F(t)$ 是与 t 有关的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，由于积分区域 D 是依赖于 t 值的半平面，显然应把 t 看作变动的参数加以讨论.



(a) (b) (c) (d)

解 对每个确定的 t 值，$x+y=t$ 表示 xOy 面上斜率为 -1 的直线.

当 $t\le 0$ 时，由于在 D（图 (a)）上有 $f(x,y)=0$，故 $F(t)=\iint\limits_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$；

当 $0<t\le 1$ 时，仅在 D 的子集 D_1（图 (b)）上有 $f(x,y)=1$，故

$$F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}1\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}t^2$$

当 $1<t\le 2$ 时，仅在 D 的子集 D_2（图 (c)）上有 $f(x,y)=1$，故

$$F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}1\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2}(2-t)^2=-\frac{1}{2}t^2+2t-1\,;$$

当 $t>2$ 时，仅在 D 的子集 D_3（图 (d)）上有 $f(x,y)=1$，故

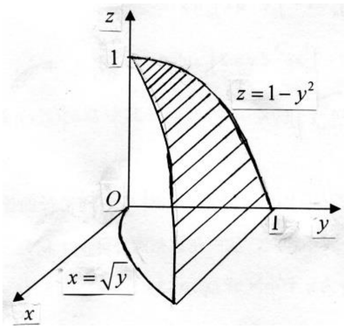
$$F(t)=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_3} 1\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1.$$

从而

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ \dfrac{1}{2}t^2, & 0<t\le 1,\\ -\dfrac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\le 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

评注 当积分区域依赖于参数 t 时，有时需要对参数 t 加以讨论.

例 6.11 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}\dfrac{xz}{(1+y)^2}\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $z=1-y^2,\ x=\sqrt{y}$ 与坐标面 $x=0,\ z=0$ 所围成的空间区域。



分析 根据被积函数与积分区域的特点，应选择直角坐标下“先一后二”进行积分.

解 积分区域如图所示.

$$D_{xy}=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le\sqrt{y},\ 0\le y\le 1\right\}$$

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1-y^2,(x,y)\in D_{xy}\right\}$$

$$I=\iint_{D_{xy}}\frac{x}{(1+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-y^2}z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\frac{x}{(1+y)^2}\left[z^2\right]_0^{1-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\frac{x}{(1+y)^2}(1-y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}x(1-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^1 y(1-y)^2\mathrm{d}y=\frac{1}{48}$$

评注 计算三重积分 $\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 的步骤与二重积分类似. 选取什么坐标系计算，主要根据积分区域 Ω 的边界曲面在哪种坐标系下的方程较简单，常常就取该坐标系计算；同时也要考虑被积函数 $f(x,y,z)$ 在哪种坐标系下计算较简单.

例 6.12 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2,\ z=4(x^2+y^2)$ 与平面 $z=4$ 所围成的空间区域.

分析 由题意积分区域 Ω 是在夹在旋转抛物面 $z=4(x^2+y^2)$（内）与 $z=x^2+y^2$（外）与平面 $z=4$（上）之间的空间闭区域；由于积分区域 Ω 在 xOy 面的投影区域是圆域，所以选择柱坐标计算.

解 1（先一后二）由于竖坐标 z 的变化范围不同，所以需将投影区域 D 划分为两个区域 $D_1: x^2+y^2\le 1\ (r\le 1),\ D_2: 1\le x^2+y^2\le 4\ (1\le r\le 2)$，曲面 $z=x^2+y^2,\ z=4(x^2+y^2)$ 的方程分别为 $z=r^2,\ z=4r^2$，于是，在柱坐标下计算得

$$I=\iint\limits_{D_1} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\int_{r^2}^{4r^2}\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_2} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\int_{r^2}^{4}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(4r^2-r^2)\,r^3\,\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2(4-r^2)\,r^3\,\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\int_0^1 r^5\,\mathrm{d}r+2\pi\int_1^2(4r^3-r^5)\,\mathrm{d}r=10\pi$$

解 2 （先一后二）将积分区域Ω看成空间区域Ω_1去掉空间区域Ω_2而成，Ω_1是由曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=4$围成，Ω_2是由曲面$z=4(x^2+y^2)$与平面$z=4$围成，Ω_1在xOy面的投影区域是$D_1:x^2+y^2\le 4,$ Ω_2在xOy面的投影区域是$D_2:x^2+y^2\le 1$，这样原积分就可化为两个三重积分之差.

$$I=\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}V-\iiint\limits_{\Omega_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_1} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\int_{r^2}^{4}\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_2} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\int_{4r^2}^{4}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(4-r^2)\,r^3\,\mathrm{d}r-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(4-4r^2)\,r^3\,\mathrm{d}r=10\pi$$

解 3 （先二后一）$I=\int_0^4\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\qquad D_z:\dfrac{z}{4}\le x^2+y^2\le z$

$$=\int_0^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sqrt{z}}{2}}^{\sqrt{z}} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\int_0^4\left(z^2-\frac{z^2}{16}\right)\mathrm{d}z=10\pi$$

评注 从上面三种方法比较，“先二后一”法较简单.

例 6.13 计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 2z\right\}$。

分析 1 因为球体具有对称性，所以可以利用被积函数的奇偶性简化计算. 由于积分区域为球体，故选择球坐标进行积分. 方程$x^2+y^2+z^2=2z$即$x^2+y^2+(z-1)^2=1$是球心在$(0,0,1)$，半径为 1 的球面，其球坐标方程为$\rho=2\cos\varphi$.

解 1 由于积分区域Ω关于yOz面($x=0$)及zOx面($y=0$)对称，$f(x,y,z)=x$关于x是奇函数，$f(x,y,z)=y$关于y是奇函数，所以

$$\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}V=0\,,$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^3\,\mathrm{d}\rho=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{3}\pi\,.$$

分析 2 由于积分区域Ω在xOy面的投影为圆域D_{xy}：$x^2+y^2\le 1$，故也可选择柱坐标进行积分. 球面$x^2+y^2+(z-1)^2=1$的上半球面方程为$z=1+\sqrt{1-(x^2+y^2)}=1+\sqrt{1-r^2}$，下半球

面方程为 $z=1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}=1-\sqrt{1-r^2}$.

解 2 同理，$\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}V=0$

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}} z\,\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_0^1 r\left[z^2\right]\Big|_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=4\pi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi\ .$$

分析 3 由于 $0\le z\le 2$，垂直于 z 轴的截面为 $D_z: x^2+y^2\le 2z-z^2$，截面的面积为 $\pi(2z-z^2)$，所以可以用“先二后一”法.

解 3 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V=\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (D_z: x^2+y^2\le 2z-z^2)$

$$=\pi\int_0^2 z(2z-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi\ .$$

分析 4 由于被积函数 $f(x,y,z)=y$ 是线性函数，球体的形心坐标易知，故可利用形心公式 $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V}$ 求解.

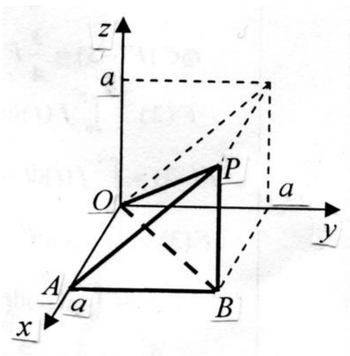
解 4 球体 $\Omega: x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$ 的形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1)$，

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V=\bar{z}\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=1\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4}{3}\pi$$

评注 通过多种解题方法比较，可以提高解题能力.

例 6.14 证明：$\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^y f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2 f(z)\,\mathrm{d}z$

分析 等式左端为三次积分，先对抽象函数 $f(z)$ 无法积分，需要改变积分次序；通过积分上、下限可确定积分区为 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le a, 0\le y\le x,\ 0\le z\le y\}$，由此可知，积分区域 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}: 0\le x\le a, 0\le y\le x$，这是由 x 轴、直线 $x=a$ 与直线 $y=x$ 围成的三角形区域；由 $0\le z\le y$ 可知积分区域的下底面是 $z=0$，上底面是过 x 轴的平面 $z=y$，如图所示，积分区域 Ω 是四面体 $POAB$；为了避开抽象函数 $f(z)$，根据积分区域将三重积分化为先对 x、y 后对 z 的三次积分.



证 由积分上、下限知积分区域为

$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le a, 0\le y\le x,\ 0\le z\le y\}$，

$$\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}V$$

积分区域也可写为

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid y\le x\le a,(y,z)\in D_{yz}\right\}$$

$$D_{yz}=\left\{(y,z)\mid z\le y\le a,0\le z\le a\right\}$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}V=\int_0^a f(z)\mathrm{d}z\int_z^a \mathrm{d}y\int_y^a \mathrm{d}x=\int_0^a f(z)\mathrm{d}z\int_z^a (a-y)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^a f(z)\Big[(a-y)^2\Big]_z^a \mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2 f(z)\mathrm{d}z$$

评注　本题首先由三次积分的上、下限确定三重积分的积分区域，再根据积分区域改变三次积分的积分次序.

例 6.15　计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$

分析　积分区域 Ω 且具有轮换对称性，利用轮换对称性可以简化计算.

解　由轮换对称性有

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}V,$$

$$I=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}V+\frac{1}{b^2}\iiint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}V+\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}V=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R \rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4}{15}\pi R^5\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

评注　由以上结果可推知

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2\mathrm{d}V=\frac{4}{15}\pi R^5\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right),\quad \Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2,$$

这是因为 Ω 关于坐标面的对称性及被积函数的奇偶性，有

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{2xy}{ab}\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}\frac{2yz}{bc}\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}\frac{2zx}{ca}\mathrm{d}V=0.$$

例 6.16　设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le t^2\right\}$，$D(t)=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\right\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的单调性;

(2) 证明：当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

(1) **分析** 要 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的单调性，需讨论 $F'(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的符号；先将积分化为累次积分.

解 $$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(\rho^2)\rho^2\mathrm{d}\rho}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t f(\rho^2)\rho^2\mathrm{d}\rho}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}$$

$$F'(t)=2\frac{tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2}$$

因为在 $(0,+\infty)$ 内，$f(r^2)>0,\ r>0.\ t-r>0$，所以 $\int_0^t f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r>0$,从而 $F'(t)>0$，故 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

(2) **分析** 因

$$G(t)=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(x^2)\mathrm{d}x}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r},$$

要证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$，只需证明当 $t>0$ 时，$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$,即

$$\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}>0$$

$$\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\cdot\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2>0$$

证 令 $$g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\cdot\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2,$$

则 $$g'(t)=f(t^2)t^2\cdot\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r+\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\cdot f(t^2)-2\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\cdot f(t^2)t$$

$$=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t^2-2tr+r^2)\mathrm{d}r=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\mathrm{d}r>0$$

故 $g(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加. 因为 $g(t)$ 在 $t=0$ 连续，所以当 $t>0$ 時，有 $g(t)>g(0)$；又 $g(0)=0$，故当 $t>0$ 時，有 $g(t)>0$，即当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

评注 这是一道涉及二重积分、三重积分、定积分的性质、积分上限函数求导、积分与变量记号无关、函数的单调性与证明不等式等多个知识点的综合题.

例 6.17 计算由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=az^3(a>0)$ 所围立体的体积。

分析 由曲面方程可知可选择球坐标计算；曲面在球坐标下的方程为 $\rho=a\cos^3\varphi$.不难看出，该曲面有三个特点：一是点的 x,y 坐标可正可负，说明曲面在 xOy 面的投影区域有

$0 \le \theta \le 2\pi$；二是 $z \ge 0$，说明 $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$；三是曲面过原点，说明 $0 \le \rho \le a\cos^3\varphi$.

解 选取球坐标计算，曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2 = az^3 (a>0)$ 在球坐标方程为 $\rho^4 = a(\rho\cos\varphi)^3$，即 $\rho = a\cos^3\varphi.$，于是

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos^3\varphi} \rho^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho$$

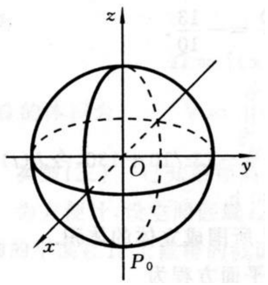
$$= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left[\rho^3\right]_0^{a\cos^3\varphi} \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^9\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{15}\pi a^3$$

评注 虽然积分区域的图画不出来，但是通过分析曲面方程的特点，仍可确定积分限.

例 6.18 设有一半径为 R 的球体，P_0 是球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到点 P_0 的距离的平方成正比(比例系数 $k>0$)，求球体的重心位置.

分析 需要建立直角坐标系，将密度函数表出，从而重心位置才能用坐标表示. 建立坐标系有两种方法，一是将原点取在球心；二是将原点取在球面上定点 P_0，故有两种解法.

解 1 将原点 O 取在球心，射线 OP_0 为 z 轴负向，所建坐标系如图所示；点 P_0 的坐标为 $(0,0,-R)$，球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，密度函数为 $\rho(x,y,z) = k[x^2+y^2+(z+R)^2]$，设的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由于球体的形状与 z 轴对称，且由密度函数知，质量分布也与 z 轴对称，所以球体的重心必在 z 轴上，从而 $\bar{x}=0,\ \bar{y}=0$；设球面所围成的区域记为 Ω，则



$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)\mathrm{d}V} = \frac{\iiint_{\Omega} zk[x^2+y^2+(z+R)^2]\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega} k[x^2+y^2+(z+R)^2]\mathrm{d}V}$$

其中分母为

$$\iiint_{\Omega}[x^2+y^2+(z+R)^2]\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V + 2R\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V + \iiint_{\Omega} R^2\mathrm{d}V$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^R \rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho + 0 + \frac{4}{3}\pi R^5 = \frac{32}{15}\pi R^5$$

分子为

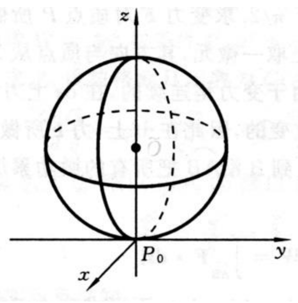
$$\iiint_{\Omega} z[x^2+y^2+(z+R)^2]\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} z[x^2+y^2+z^2+R^2]\mathrm{d}V + 2R\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}V$$

$$= 0 + 2R\int_{-R}^{R} z^2\mathrm{d}z \iint_{D(z)} \mathrm{d}\sigma = 2\pi R\int_{-R}^{R} z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z = \frac{8}{15}\pi R^6$$

计算过程中 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V=0,\ \iiint\limits_{\Omega} z[x^2+y^2+z^2+R^2]\mathrm{d}V=0$，是因为积分区域关于 xOy 面 ($z=0$)对称，且被积函数关于 z 为奇函数. 故

$$\bar{z}=\frac{\frac{8}{15}\pi R^6}{\frac{32}{15}\pi R^5}=\frac{1}{4}R,\quad (\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{1}{4}R).$$

解 2 将原点 O 取在球面上定点 P_0， z 轴正向通过球心，所建坐标系如图所示，球面的方程为 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$， 即 $x^2+y^2+z^2=2Rz$，密度为 $\rho(x,y,z)=k(x^2+y^2+z^2)$,同理有 $\bar{x}=0,\ \bar{y}=0$，则



$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} zk(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} k(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}$$

其中分母为

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho=\frac{32}{15}\pi R^5$$

分子为

$$\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}\rho\cos\varphi\ \cdot\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\cdot\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{8}{3}\pi R^6$$

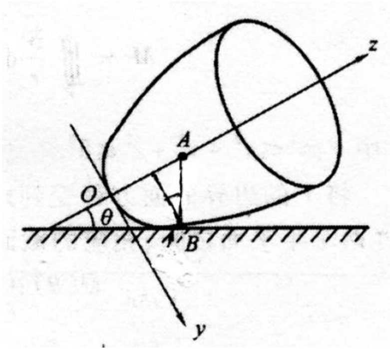
故

$$\bar{z}=\frac{\frac{8}{3}\pi R^6}{\frac{32}{15}\pi R^5}=\frac{5}{4}R,\quad (\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{5}{4}R)$$

评注 在解决应用问题时，一般需要建立坐标系；恰当地建立坐标系可以简化计算，本题第一种解法利用了积分区域的对称性与被积函数的奇偶性简化计算.

例 6.19 有一形状为 $x^2+y^2\le z\le 1$ 的均匀物体，斜放置于水平桌面上，试求物体静止时的位置（即求出物体的轴线与桌面的夹角 θ）.

分析 此物体为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 围成的立体.由曲面方程知，物体的轴线通过 z 轴，由于物体为关于 z 轴对称的旋转体，所以质心在 z 轴上，且容易求出；由于求的是物体的轴线与桌面的夹角 θ，故可以把问题转化为平面问题，建立 yOz 坐标系，如图所示. 物体静止时物体处于稳定平衡状态，此時，旋转抛物面与桌面相切，在平面上就是抛物线 $z=y^2$ 与直线(桌面)相切，且过切点 B 垂直于桌面的法线通过质心 A， 由此可以求出法线的斜率与切线的斜率，利用两个斜率互为负倒数，可以求出切点 B 的坐标，从而求出轴线与桌面的夹角 θ.



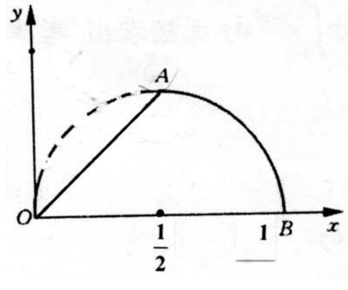
解 由于物体为关于 z 轴对称的旋转体，所以质心在 z 轴上，可设为 $A(0,0,\bar{z})$.

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \mathrm{d}V}=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 z\,\mathrm{d}z}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 \mathrm{d}z}=\frac{2}{3},$$

设切点 B 的坐标为 (y,z)，当物体处于稳定平衡时，切点 $B(y,z)$ 处的法线必过质心 A，由此得法线 BA 的斜率为 $k_1=\dfrac{z-\frac{2}{3}}{y}$；另一方面，抛物线 $z=y^2$ 在切点 $B(y,z)$ 的切线斜率为 $k_2=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=2y$；由 $k_1\cdot k_2=-1$ 得 $z=\dfrac{1}{6}$，从而 $y=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$；故

$$\tan\theta=\frac{\bar{z}-z}{y}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{\sqrt{6}}}=\frac{\sqrt{6}}{2}，\quad 即\ \theta=\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

例 6.20 计算曲线积分 $I=\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$ 。其中 L 是由直线 $y=x$ 与 $y=0$ 及圆周 $x^2+y^2=x\ (y\geq 0)$ 上的一段弧 AB 所围成的闭曲线



分析 L 由三段组成，分别是

$\overline{OA}: y=x\ (0\leq x\leq\frac{1}{2})$

$\overline{OB}: y=0\ (0\leq x\leq 1)$

$AB: x^2+y^2=2x\ (\frac{1}{2}\leq x\leq 1, y\geq 0)$

根据不同的曲线可以用不同的方法求解.

解 先计算线段 $\overline{OA}: y=x\ (0\leq x\leq\frac{1}{2})$ 上的积分，$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$

$$I_1=\int_{\overline{OA}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4};$$

再计算线段 $\overline{OB}: y=0\ (0\le x\le 1)$ 上的积分，$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}x$

$$I_2=\int_{\overline{OB}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2};$$

最后计算弧 $AB: x^2+y^2=x\ (\frac{1}{2}\le x\le 1, y\ge 0)$ 上的积分，

将 $x^2+y^2=x$ 代入被积函数，得

$$I_3=\oint_{AB}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=\oint_{AB}\sqrt{x}\,\mathrm{d}s;$$

将 AB 的方程改写为 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$,其参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t, \\ y=\frac{1}{2}\sin t, \end{cases}\quad (0\le t\le\frac{\pi}{2})$，

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'(t)}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 t+\frac{1}{4}\cos^2 t}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} I_3&=\oint_{AB}\sqrt{x}\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos t)}\ \cdot\frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{t}{2}}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{t}{2}\ \mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

$$I=I_1+I_2+I_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

评注 （1）弧 AB 上的积分也可用极坐标计算. $AB: x^2+y^2=x\ (\frac{1}{2}\le x\le 1, y\ge 0)$ 的极坐标方程为 $r=\cos\theta\ \ (0\le\theta\le\frac{\pi}{4})$， $\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta$

$$I_3=\oint_{AB}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}r(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

（2）第一类曲线积分的计算要考虑曲线方程的不同形式，曲线方程主要有参数方程、直角坐标方程和极坐标方程三种形式，因而有三个不同的计算公式，但最基本的是参数方程下的计算公式，其他两个都是由它推出来的；第一类曲线积分归结为定积分计算，要注意三点：一是曲线方程可以代入被积函数中，二是正确计算弧微分，三是正确确定积分上、下限.

例 6.21 计算曲线积分 $I=\oint_L[(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2]\mathrm{d}s$，其中 L 是圆周 $x^2+(y-1)^2=1$。

分析 由于积分曲线 L 关于 y 轴 $(x=0)$ 对称，函数 $x\sqrt{x^2+y^2}$ 关于 x 是奇函数，所以 $\oint_L x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=0$，又圆周方程 $x^2+(y-1)^2=1$ 可以改写为 $x^2+y^2=2y$，代入被积函数可以

简化计算.

解 由积分曲线 L 的对称性及被积函数的奇偶性，得

$$\oint_L x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=0,$$

将曲线 L 的方程 $x^2+y^2=2y$ 代入被积函数可得

$$I=\oint_L(\sqrt{y}\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2)\mathrm{d}s=\oint_L(\sqrt{y}\sqrt{2y}+2y)\mathrm{d}s=(2+\sqrt{2})\oint_L y\,\mathrm{d}s,$$

因为 L 的参数方程为

$$x=\cos t,\ y=1+\sin t,\ (0\le t\le 2\pi),$$

所以

$$I=(2+\sqrt{2})\oint_L y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=(2+\sqrt{2})\oint_L(1+\sin t)\mathrm{d}t=2(2+\sqrt{2})\pi.$$

评注 (1) $\oint_L y\,\mathrm{d}s=2\pi$ 还可以由形心公式 $\bar{y}=\dfrac{\oint_L y\,\mathrm{d}s}{\oint_L \mathrm{d}s}$ 得到. 事实上，由于圆周 $x^2+(y-1)^2=1$ 的形心为 $\bar{x}=0,\ \bar{y}=1$，$\oint_L\mathrm{d}s=2\pi$，所以 $\oint_L y\,\mathrm{d}s=\bar{y}\oint_L\mathrm{d}s=2\pi$；

(2) 要注意先简化再计算，化简方法如利用积分曲线的对称性与被积函数的奇偶性，或者将曲线方程代入被积函数等.

例 6.22 计算曲线积分 $\oint_L(x^2+y^2+z)\mathrm{d}s$，其中 L 是圆周：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+y+z=0\end{cases}$

分析 在曲线 L 的方程：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+y+z=0\end{cases}$ 中将 x、y、z 三个变量轮换，L 的方程不变，因此，方程对三个变量 x、y、z 具有轮换对称性，可以简化计算.

解 由于曲线 L 的方程对三个变量 x、y、z 具有轮换对称性，因此有

$$\oint_L x^2\,\mathrm{d}s=\oint_L y^2\,\mathrm{d}s=\oint_L z^2\,\mathrm{d}s,\qquad \oint_L x\,\mathrm{d}s=\oint_L y\,\mathrm{d}s=\oint_L z\,\mathrm{d}s,$$

$$\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{2}{3}R^2\oint_L\mathrm{d}s=\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\oint_L z\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L(x+y+z)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L 0\,\mathrm{d}s=0$$

$$\oint_L(x^2+y^2+z)\mathrm{d}s=\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s+\oint_L z\,\mathrm{d}s=\frac{4}{3}\pi R^3$$

评注 (1) $\oint_L z\,\mathrm{d}s=0$ 也可以由形心公式 $\bar{z}=\dfrac{\oint_L z\,\mathrm{d}s}{\oint_L\mathrm{d}s}$ 得到. 事实上，由于曲线 L $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+y+z=0\end{cases}$ 是过球心(原点)的大圆，所以形心为原点 $(0,0,0)$，故 $\oint_L z\,\mathrm{d}s=\bar{z}\oint_L z\,\mathrm{d}s=0$.

(2) 若把 L 的方程化成参数式，即将 L 的方程 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 消去 z，得曲线在 xOy 面上的投影是一椭圆：$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}R^2$，即 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2=\frac{1}{2}R^2$；令 $\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{1}{\sqrt{2}}R\cos t,$，$\frac{1}{2}x+y=\frac{1}{\sqrt{2}}R\sin t$，$0\le t\le 2\pi$，从而，曲线 L 的参数方程为

$$x=\frac{2}{\sqrt{6}}R\cos t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}R\sin t-\frac{1}{\sqrt{6}}R\cos t,\ z=-\frac{1}{\sqrt{2}}R\sin t-\frac{1}{\sqrt{6}}R\cos t,\ 0\le t\le 2\pi$$

显然，如果用参数方程求解复杂得多.。

例 6.23 设均匀曲线 L 为摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ \ (0\le t\le 2\pi)$ 的一拱，求 L 的弧长及形心坐标 $(\bar{x},\bar{y})$。

分析 若平面曲线 L 的参数方程为 $x=x(t), y=y(t)(\alpha\le t\le\beta)$，则 L 的弧长公式为

$$s=\int_L \mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

因为当 $t=2\pi$ 时，$x=2\pi a$，所以摆线 L 的对称轴为 $x=\pi a$，从而形心坐标 $\bar{x}$ 可以确定.

解 因为 $$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t,$$

所以弧长为

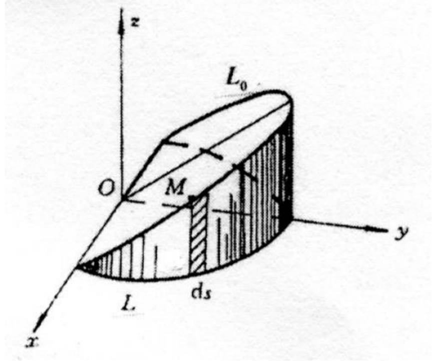
$$s=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a.$$

设形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y})$，因为摆线 L 的对称轴为 $x=\pi a$，所以 $\bar{x}=\pi a$；

$$\bar{y}=\frac{\int_L y\,\mathrm{d}s}{\int_L\mathrm{d}s}=\frac{2a^2}{8a}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t\overset{\frac{t}{2}=u}{=\!=\!=}a\int_0^{\pi}\sin^3 u\,\mathrm{d}u=\frac{2}{3}a.$$

例 6.24 设椭圆柱面 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ 被平面 $z=y$ 与 $z=0$ 所截，求位于第一、二卦限内所截下部分的侧面积.

分析 本题如果利用曲面面积公式计算比较复杂，现用平面曲线积分来求柱面的侧面积.如图所示，设椭圆柱面 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ 与平面 $z=y$ 的交线为 L_0，它在 xOy 面的投影曲线 L（即此椭圆柱面的准线）是 xOy 面上的半个椭圆 $L:\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1\ (y\ge 0)$，运用定积分的微元法，在 L 上任取一弧微元 $\mathrm{d}s$，在 $\mathrm{d}s$ 上的一小片柱面可近似地看作是以 $\mathrm{d}s$ 为底，以交线 L_0 上点 M 的竖坐标 z 为高的长方形面积，从而得到侧面积微元 $z\mathrm{d}s$，于是所求侧面积为



$$S=\int_L z(x,y)\mathrm{d}s$$

这就将求柱面的侧面积问题转化为求准线 L 的平面曲线积分.

解　椭圆柱面在 xOy 面上的准线 $L:\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1\ (y\ge 0)$ 的参数方程为

$$x=\sqrt{5}\cos t,\ y=3\sin t\ \ (0\le t\le \pi)$$

由于交线 L_0 上点 M 的竖坐标 $z(x,y)=y$，所以

$$S=\int_L z(x,y)\ \mathrm{d}s=\int_L y\ \mathrm{d}s=\int_0^{\pi}3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\ \mathrm{d}t$$

$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}\ \mathrm{d}(\cos t)=9+\frac{15}{4}\ln 5$$

评注　本题实际上给出了利用平面曲线积分求柱面的侧面积的一般方法，即若柱面 S 是准线为 L，母线平行于 z 轴的柱面介于坐标面 $z=0$ 与曲面 $z=z(x.y)\ (z\ge 0)$ 之间的部分，则柱面 S 的面积，就是曲线积分 $S=\int_L z(x.y)\mathrm{d}s$ 的值.

例 6.25　计算曲面积分 $I=\iint\limits_S |xyz|\ \mathrm{d}S$，其中 S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 截下的部分。

分析　利用曲面的对称性与被积函数的奇偶性，可以化为在第一卦限 S 的积分，从而去掉的绝对值. 曲面 S 在 xOy 面的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$.

解　由曲面 $z=x^2+y^2$ 可知 $z\ge 0$，设 S_1 是 S 在第一卦限的部分，由于曲面关于 yOz 面 $(x=0)$ 与 zOx 面 $(y=0)$ 都对称，　$f(x,y,z)=|xyz|$ 关于 x,y 分别为偶函数，可得

$$I=4\iint\limits_{S_1} xyz\ \mathrm{d}S=4\iint\limits_{D_{xy}} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint\limits_{D_{xy}} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r^2\sqrt{1+4r^2}\ r\mathrm{d}r$$

$$=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\ \mathrm{d}r\ \overset{\sqrt{1+4r^2}=u}{=\!=\!=\!=}\ \frac{1}{32}\int_1^{\sqrt{5}}(u^2-1)^2u\cdot u\mathrm{d}u=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$

评注　第一类曲面积分的计算要注意三点：①要将曲面方程写成显函数 $z=f(x,y)$，并代人被积函数中；②正确计算面积微元 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$；③求出曲面在 xOy 面的投影区域，并正确计算二重积分.　如果显函数为 $y=f(z,x)$ 或 $x=f(y,z)$，则面积微元与投影区域相应地也要变.

例 6.26 设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S,\pi$ 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$ 。

分析 这是一道综合题，由题意可知，解题分三步：第一步求出曲面 S 上任一点 $P(x,y,z)$ 处的切平面方程；第二步求出原点到切平面 π 的距离 $\rho(x,y,z)$ ；第三步将 $\rho(x,y,z)$ 代入被积函数，计算曲面积分

解 由题意知切点为 $P(x,y,z)$， 令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2-1$，则椭球面在点 $P(x,y,z)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=\left(x,y,2z\right)$，设 (X,Y,Z) 为切平面 π 上任一点，则切平面 π 的方程为

$$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0,$$

因为 $x^2+y^2+2z^2=2$，所以代人上式得

$$xX+yY+2zZ=2,$$

原点 $O(0,0,0)$ 到切平面 π 的距离为

$$\rho(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}$$

将椭球面方程 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1\ (z\ge 0)$ 写成显函数 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2-x^2-y^2}$，有

$$D_{xy}:x^2+y^2\le 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{2}\sqrt{2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{2-x^2-y^2}}$$

于是

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{2}\sqrt{2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

所以

$$\iint\limits_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\,\mathrm{d}S$$

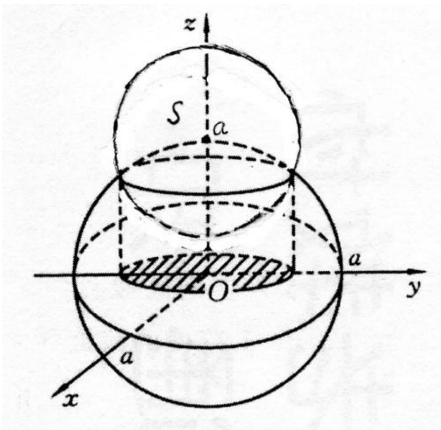
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\iint_{D_{xy}}\sqrt{2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+2\left(2-x^2-y^2\right)}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{2}\sqrt{2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\iint_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)r\,\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\pi.$$

评注 综合题是由多个知识点构成的，只有掌握好每一个知识点，才能正确地完成.

例 6.27 设半径为 R 的球面 S 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 上，问当 R 取何值时，球面 S 在定球面内部的那部分面积最大？并求此最大面积.

分析 本题首先需确定球面 S 的方程；由球面的对称性知，所求问题与球面的位置无关，因此可把球心设在便于计算的点，即定球面与 z 轴与的交点 $(0,0,a)$，于是球面 S 的方程可以确定，并可表为显函数；其次需求 S 在定球面内部的那部分球面在 xOy 面上的投影区域，从而求出 S 在定球面内部的那部分球面面积 $S(R)$；最后求 $S(R)$ 在 $(0,2a)$ 的最大值.



解 由题意，球面 S 的球心可设为 $(0,0,a)$，于是 S 的方程为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$$

从
$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x^2+y^2+(z-a)^2=R^2,\end{cases}$$

消去 z 得 $x^2+y^2=\frac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2)$，于是 S 在定球面内部的那部分球面在 xOy 面上的投影区域为

$$D_{xy}:x^2+y^2\le\frac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2)$$

球面 S 在定球面内的那部分球面的方程为

$$z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

S 在定球面内部的那部分球面的面积为

$$S(R)=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r=2\pi R^2-\frac{\pi}{a}R^3,$$

$$S'(R)=4\pi R-\frac{3\pi}{a}R^2,\quad S''(R)=4\pi-\frac{6\pi}{a}R,$$

令 $S'(R)=0$ 得驻点 $R=\frac{4}{3}a$ ($R=0$ 舍去). 由于 $S''\left(\frac{4}{3}a\right)=-4\pi<0$，故 $R=\frac{4}{3}a$ 为 $S(R)$ 的惟一的极大值点，也是最大值点，即当 $R=\frac{4}{3}a$ 时，球面 S 在定球面内的那部分面积最大，最大面积为

$$S(\frac{4}{3}a)=2\pi(\frac{4}{3}a)^2-\frac{\pi}{a}(\frac{4}{3}a)^3=\frac{32}{27}\pi a^2 .$$

评注 这是一道综合应用题. 关键是求出球面 S 在定球面内部的那部分球面面积与半径 R 的关系.

例 6.28 设有一高度为 $h(t)$ （t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ （设长度单位为 cm，时间单位为 h），已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数为 0.9），问高度为 130cm 的雪堆全部融化需多少时间?

分析 这是一道应用题。雪堆相当于一个由曲面 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ 与平面 $z=0$ 围成的空间立体，首先,需要求出任一时刻 t 这个空间立体的体积 V 与雪堆的表面积 S，在计算过程中，$h(t)$ 是常数；其次，体积减少的速率表示体积 V 对时间 t 的导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$，最后通过 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$ 求出雪堆的高度与时间的关系 $h(t)$.

解 设任一时刻 t，雪堆的体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$，雪堆曲面的方程为

$$z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$$

令 $z=0$ 得到雪堆曲面在 xOy 面上的投影区域为圆域

$$D_{xy}:x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2(t),$$

用“先一后二”法求雪堆的体积，有

$$V(t)=\iiint\limits_V \mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}}\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\left[h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left[h(t)-\frac{2r^2}{h(t)}\right]r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi h^3(t),$$

雪堆曲面的侧面积为

$$S(t)=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D \sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\frac{1}{h(t)}\sqrt{h^2(t)+16r^2}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{13}{12}\pi h^2(t).$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S,$$

所以

$$\frac{\pi}{4}\cdot 3h^2(t)\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-0.9\cdot\frac{13}{12}\pi h^2(t),$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\frac{13}{10},\qquad h(t)=-\frac{13}{10}t+C$$

为求初始高度为 130cm 的雪堆全部融化需多少时间，将 $h(0)=130$ 代入方程得 $C=130,$ 于是雪堆的高度与时间的关系为 $h(t)=130-\frac{13}{10}t,$

全部融化相当于 $h(t)=0$，故得 $t=100\mathrm{h}.$

因此，高度为 130cm 的雪堆全部融化所需时间为 100h。

评注 （1）本题求体积用“先二后一”法更简单，即

$$V=\iiint_V \mathrm{d}V=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint_{D(Z)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{h(t)}\pi\left[\frac{1}{2}h^2(t)-\frac{1}{2}h(t)z\right]\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t),$$

其中 $$D(z):x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2(t)-\frac{1}{2}h(t)z.$$

（2）本题在求体积与侧面积时，相当于求由旋转抛物面 $z=h-\frac{2(x^2+y^2)}{h}$（h 为常数)与坐标面 $z=0$ 所围成的立体的体积及旋转抛物面的表面积.