概率统计 A 参考答案（A 卷）

一、填空题

1. $\frac{2}{15}$； 2. $\frac{9}{64}$； 3. $\ln 2$； 4. $\frac{1}{2}$； 5. 2； 6. 0.1587；

7. $\begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i}, x_i > 0; \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \lambda^n e^{-n\lambda\bar{x}}, x_i > 0; \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$ 8. F(1,n-1); 9. -1; 10. $\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

二、计算题

11. 当 $x \notin (0,2)$ 时，$f_Y(y) = 0, y \notin (1,9)$；……………………………….3 分

当 $x \in (0,2)$ 时，$y = 2x^2 + 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow x_y' = \frac{1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{y-1}}$, …………6 分

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \cdot |x_y'| = \frac{1}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{y-1}}, y \in (1,9)$$

所以，$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{y-1}}, y \in (1,9) \\ 0, \quad y \notin (1,9) \end{cases}$ 。……………………………….10 分

12. 设 $A_i (i=1,2,3)$ 分别表示取到甲、乙、丙三个盒子，B 表示取到黑球，….2 分

（1）$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i) = \frac{1}{3}(\frac{14}{20} + \frac{5}{30} + \frac{8}{50}) = \frac{77}{225} \approx 0.342$；……..6 分

（2） $P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{14}{20}}{\frac{77}{225}} = \frac{15}{22} \approx 0.682$ 。……10 分

13. $E(X^2) = E^2(X) + D(X) = 4, \quad E(Y^2) = E^2(Y) + D(Y) = 16,$

$E(XY) = Cov(X,Y) - E(X)\cdot E(Y) = \rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)} = -0.5\times 2\times 4 = -4,$

………………..…..6 分

$W = a^2X^2 + 6aXY + 9Y^2$，

$$E(W) = E(a^2X^2 + 6aXY + 9Y^2) = a^2E(X^2) + 6aE(XY) + 9E(Y^2)$$
$$= a^2 \times 4 + 6a \times (-4) + 9 \times 16 = 4[(a-3)^2 + 27]$$

故 当 $a = 3$ 时，$E(W)$ 取得最小值，最小值为 108。 …………………10 分

14. (1) $\because\ \iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x Axdy=A\int_0^1 x^2dx=\frac{A}{3}=1$， $\therefore\ A=3$；

……………..2 分

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3x^2,\quad x\in[0,1]$，

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2),\quad y\in[0,1]$，

所以， $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & x\in[0,1]\\ 0, & 其他\end{cases}$， $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), & y\in[0,1]\\ 0, & 其他\end{cases}$， ……….8 分

（3） 因为当$0<x<1,0<y<1$时，$f_X(x)\neq f_Y(y)$，所以X与Y不独立。

……………………10 分

15. 总体 X 的分布率为：$P\{X=x\}=C_3^x p^x(1-p)^{3-x},\quad x=0,1,2,3$

$E(X)=3p,\quad \overline{X}=\frac{0+2+1+2+3}{5}=\frac{8}{5}$，

令$E(X)=\overline{X}$，有$3p=\frac{8}{5}\Rightarrow p=\frac{8}{15}$，故$p$的矩估计值为$\frac{8}{15}$； …………4 分

似然函数为： $L(p)=(1-p)^3\cdot[3p^2(1-p)]^2\cdot 3p(1-p)^2\cdot p^3=27p^8(1-p)^7$

取对数 $\ln L(p)=\ln 27+8\ln p+7\ln(1-p)$

令 $\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{8}{p}-\frac{7}{1-p}=0$，解得$p=\frac{8}{15}$，故$p$的最大似然估计值为$\frac{8}{15}$。

…………...…..10 分

16. 据题可知置信区间为: $(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}})$ …………3 分

$1-\alpha=0.9\Rightarrow\alpha=0.1\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.05}(8)=1.8595$，

$\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=50-1.8595\cdot\frac{1.1}{\sqrt{9}}\approx 49.32,\quad \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}})=50+1.8595\cdot\frac{1.1}{\sqrt{9}}\approx 50.68$

所以μ的置信区间为$(49.32,\quad 50.68)$。 ………………….10 分

17. (1) 检验假设 $H_0:\sigma^2=1,\quad H_1:\sigma^2\neq 1$，

取检验统计量： $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=(n-1)S^2$，

拒绝域为：

$$\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(9) = 2.7, \quad \text{或} \quad \chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(9) = 19.023,$$

因为 $\chi^2 = (n-1)S^2 = 9 \times 1.2^2 = 12.96 \notin (2.7, 19.023)$，

故接受 H_0，即可以认为排出的污水中动植物油浓度的方差为 1； ………5 分

（2）检验假设 $H_0^{'}: \mu = 10, \quad H_1^{'}: \mu \ne 10$，

取检验统计量： $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{\overline{X} - 10}{S/\sqrt{n}}$，

拒绝域为： $|T| \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(9) = 2.2622$，

因为 $T = \dfrac{\overline{X} - 10}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{10.8 - 10}{1.2/\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{3} < 2.2662$，

故接受 $H_0^{'}$，即可以认为排出的污水中动植物油的平均浓度为 10；

综上所述，可以认为该工厂的生产是正常的。 …………………………….10 分