

竞赛论坛

“同心协力”策略研究

毛紫阳, 王 丹, 吴孟达

(国防科技大学 文理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 针对“同心协力”拓展项目中队员的协同控制问题, 建立了在理想条件下的最优策略模型, 以及在非精确控制条件下的鼓面倾斜模型, 讨论了稳定性要求对最优策略的影响, 给出当球跳动方向偏离竖直方向后, 鼓的控制方法及效果. 最后对2019年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛B题的参赛论文予以简要评述.

关键词: 刚体运动; 牛顿第二定律; 常微分方程; 牛顿-欧拉运动方程

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2020)01-0040-09

1 问题的提出

“同心协力”(又称“同心鼓”)是一项团队协作能力拓展项目. 该项目的道具是一面牛皮双面鼓, 鼓身中间固定多根绳子, 绳子在鼓身上的固定点沿圆周呈均匀分布, 每根绳子长度相同. 团队成员每人牵拉一根绳子, 使鼓面保持水平. 项目开始时, 球从鼓面中心上方竖直落下, 队员同心协力将球颠起, 使其有节奏地在鼓面上跳动. 颠球过程中, 队员只能抓握绳子的末端, 不能接触鼓或绳子的其他位置(图1).

项目所用排球的质量为 270 g, 鼓面直径为 40 cm, 鼓身高度为 22 cm, 鼓的质量为 3.6 kg. 队员人数不少于 8 人, 队员之间的最小距离不得小于 60 cm. 项目开始时, 球从鼓面中心上方 40 cm 处竖直落下, 球被颠起的高度应离开鼓面 40 cm 以上, 如果低于 40 cm, 则项目停止. 项目的目标是使得连续颠球的次数尽可能多.

试建立数学模型解决以下问题:

1) 在理想状态下, 每个人都可以精确控制用力方向、时机和力度, 试讨论这种情形下团队的最佳协作策略, 并给出该策略下的颠球高度.

2) 在现实情形中, 队员发力时机和力度不可能做到精确控制, 存在一定误差, 于是鼓面可能出现倾斜. 试建立模型, 描述队员的发力时机和力度与某一特定时刻鼓面倾斜角度的关系. 设队员人数为 8, 绳长为 1.7 m, 鼓面初始时刻是水平静止的, 初始位置较绳子水平时下降 11 cm. 表 1 中给出了队员们的不同发力时机和力度, 求 0.1 s 时鼓面的倾斜角度.

3) 在现实情形中, 根据问题 2 的模型, 你们在问题 1 中给出的策略是否需要调整? 如果需要, 如何调整?



图1 “同心协力”示意图

(图片来源: <https://yjs.syu.edu.cn/—mediafile/yjs/2017/10/26/32yuesec78.png>)

收稿日期: 2020-03-07

基金项目: 国防科技大学数学建模创新实践基地资助项目

通讯作者: 毛紫阳, E-mail: maoziyang@163.com

©1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

4)当鼓面发生倾斜时,球跳动方向不再竖直,于是需要队员调整拉绳策略.假设人数为10,绳长为2 m,球的反弹高度为60 cm,相对于竖直方向产生 1° 的倾斜角度,且倾斜方向在水平面的投影指向某两位队员之间,与这两位队员的夹角之比为1:2.为了将球调整为竖直状态弹跳,请给出在可精确控制条件下所有队员的发力时机及力度,并分析在现实情形中这种调整策略的实施效果.

表1 发力时机和用力大小取值表

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8	鼓面倾角/ $(^\circ)$
1	发力时机/s	0	0	0	0	0	0	0	0	
	用力大小/N	90	80	80	80	80	80	80	80	
2	发力时机/s	0	0	0	0	0	0	0	0	
	用力大小/N	90	90	80	80	80	80	80	80	
3	发力时机/s	0	0	0	0	0	0	0	0	
	用力大小/N	90	80	80	90	80	80	80	80	
4	发力时机/s	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	
	用力大小/N	80	80	80	80	80	80	80	80	
5	发力时机/s	-0.1	-0.1	0	0	0	0	0	0	
	用力大小/N	80	80	80	80	80	80	80	80	
6	发力时机/s	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0	
	用力大小/N	80	80	80	80	80	80	80	80	
7	发力时机/s	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	
	用力大小/N	90	80	80	80	80	80	80	80	
8	发力时机/s	0	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	
	用力大小/N	90	80	80	90	80	80	80	80	
9	发力时机/s	0	0	0	0	-0.1	0	0	-0.1	
	用力大小/N	90	80	80	90	80	80	80	80	

此问题是2019年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛B题.

2 理想条件下的最佳策略

为简化问题,做以下假设:

- 1)忽略空气阻力的影响.
- 2)鼓与球的作用视为弹性碰撞.
- 3)不考虑绳子的形变.
- 4)关于颠球方式的假设

- 所有绳子在水平面上的投影通过鼓的投影的圆心.
- 所有队员手的高度相同.
- 所有队员施力的方向为水平方向,即,手沿水平方向运动,靠近鼓或远离鼓.

5)鼓与球碰撞后,鼓的运动较复杂,但对下一次碰撞没有直接影响.因此,假设每次颠球,鼓都是从特定位置由水平静止状态开始向上运动,直至碰撞,不讨论碰撞后鼓回到水平静止状态的运动过程.

6)在由初始位置到鼓、球碰撞的颠球过程中,绳上的拉力不变.

在理想条件下,如果所有队员能够对鼓实施精确控制,球与鼓碰撞过程中,鼓面保持水平,两者质心连线与水平面垂直,那么碰撞后,球的速度竖直向上,做上抛运动.

2.1 球的飞行过程

设球碰撞后速度大小为 v_b ,方向向上,若以碰撞点为原点,那么球上升最大高度 h_b 、球到达最高点所用的时间 t_b 与速度 v_b 满足下列关系:

$$h_b = \frac{1}{2}gt_b^2, \quad (1)$$

$$v_b = gt_b, \quad (2)$$

若 v_b 已知, 则 $t_b = \frac{v_b}{g}$, $h_b = \frac{v_b^2}{2g}$. 若给定球的反弹高度 h_b , 则应有 $v_b = \sqrt{2gh_b}$, $t_b = \sqrt{2h_b/g}$, 碰撞后球回落到碰撞点所需要的时间为 $T_b = 2t_b = 2v_b/g = 2\sqrt{2h_b/g}$.

2.2 鼓与球的碰撞过程

假设球与鼓的碰撞是完全弹性碰撞, 并且球与鼓的运动方向均在两者质心连线上, 即, 将两者的碰撞视为在同一直线上的完全弹性碰撞.

设速度向上为正, 向下为负. 球质量为 m_1 , 碰撞前、后球的速度分别为 v_1 和 v'_1 , v_1 方向向下, 为负值, v'_1 方向向上, 为正值. 鼓的质量为 m_2 , 碰撞前、后鼓的速度分别为 v_2 和 v'_2 , 则由能量守恒和动量守恒可得:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2, \quad (3)$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2, \quad (4)$$

由式(3)和式(4)可解得

$$v'_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad (5)$$

$$v'_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

假设球自碰撞点以上高度 h_b 自由落下(或, 上一次碰撞球的反弹高度 h_b), 记 $k = m_2/m_1$, 则

$$v'_1 = \frac{(1-k)v_1 + 2kv_2}{k+1}, \quad (7)$$

$$v'_2 = \frac{(k-1)v_2 + 2v_1}{k+1}, \quad (8)$$

$$h_b = \frac{v'^2_1}{2g}. \quad (9)$$

若要求球弹起恢复到下落时的高度, 即保持 $h'_b = h_b$, 颠球高度不变, 则 $v'_1 = -v_1$, 由式(7)、式(9)可得:

$$v_2 = -\frac{v_1}{k} = \frac{\sqrt{2gh_b}}{k}, \quad (10)$$

$$h'_b = h_b = \frac{k^2v_2^2}{2g}. \quad (11)$$

2.3 鼓的运动

假设所有队员手的高度相同, 将鼓从静止的初始位置(向下偏离)向上拉起. 以手的高度(绳水平)所在水平平面为 $x-y$ 平面建立坐标系. 设绳长为 l , 绳与水平方向的夹角为 α_0 , 则鼓初始位置下垂的距离为 $z_0 = -l\sin\alpha_0$, 即鼓的初始位置三维坐标为 $(0, 0, z_0)$.

假设上述颠球过程中有 n 名队员, 绳上的拉力均为 F 且保持不变. 所有队员的水平拉力之和为 0, 合力的方向竖直向上. 鼓的质量为 m_2 , 绳长为 l , 由牛顿第二定律, 鼓位置为 $(0, 0, z(t))$, 如图 2 所示, 则 $z(t)$ 满足以下微分方程:

$$m_2 \frac{d^2z}{dt^2} = -nF \frac{z}{l} - m_2g, \quad z(0) = z_0, \quad z'(0) = 0. \quad (12)$$

若令 $A = \frac{n}{lm_2}$, 则上述微分方程的解为:

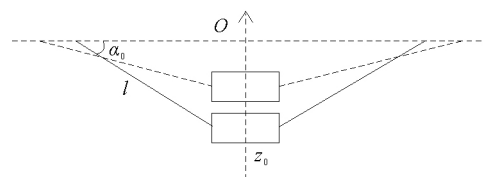


图 2 鼓运动示意图

$$z(t) = \left(z_0 + \frac{g}{AF}\right) \cos(\sqrt{AF}t) - \frac{g}{AF}. \quad (13)$$

上述函数的周期为 $2\pi/\sqrt{AF}$, 实际颠球时, 鼓从开始运动直到与球碰撞的过程中, 显然 $z(t)$ 关于 t 是单调递增的, 即施力时间 T_a 至多不能超过周期的一半, 即 $T_a < \frac{\pi}{\sqrt{AF}}$.

由式(13)可解得速度 $v(t)$ 为:

$$v(t) = \frac{dz}{dt} = -\left(z_0 + \frac{g}{AF}\right) \sqrt{AF} \sin(\sqrt{AF}t). \quad (14)$$

假设鼓在上升过程中的最大速度点处与球碰撞, 则施力时间 T_a 应为 $1/4$ 周期, 即 $T_a = \frac{\pi}{2\sqrt{AF}}$.

虽然碰撞后鼓恢复至水平静止状态的过程不讨论, 但仍然需要时间, 可假设施力时间 T_a 小于球的下落时间 t_b , 不妨设

$$T_a = qt_b = q\sqrt{\frac{2h_b}{g}}, \quad (15)$$

其中, 比例系数 q 满足 $0 < q \leq 1$. 所以 $T_a = \frac{\pi}{2\sqrt{AF}} = q\sqrt{\frac{2h_b}{g}}$, 解得

$$AF = \frac{g\pi^2}{8q^2h_b}, \quad (16)$$

$$F = \frac{g\pi^2}{8Aq^2h_b} = \frac{g\pi^2 m_2}{8q^2nh_b}. \quad (17)$$

由式(14)可求得碰撞时鼓的速度为

$$v(T_a) = -\left(z_0 + \frac{g}{AF}\right) \sqrt{AF}.$$

由式(10), 碰撞时, 鼓的速度与球相对于鼓面的下落高度 h_b 应满足 $v(T_a) = \frac{\sqrt{2gh_b}}{k}$, 即

$$-\left(z_0 + \frac{g}{AF}\right) \sqrt{AF} = \frac{\sqrt{2gh_b}}{k},$$

所以

$$z_0 = -\frac{g}{AF} - \frac{\sqrt{2gh_b}}{k\sqrt{AF}} = -\frac{8q^2h_b}{\pi^2} - \frac{\sqrt{2gh_b}}{k} \cdot \sqrt{\frac{8q^2h_b}{g\pi^2}} = -4h_b \left(\frac{2q^2}{\pi^2} + \frac{q}{k\pi}\right). \quad (18)$$

由式(15)、式(17)及式(18)可知, 颠球高度 h_b 、施力时间 T_a 及其与下落时间的比值 q 、绳上拉力 F 、鼓向下偏移距离 z_0 等 5 个量只有 3 个自由度. 并且, 可以用 h_b 和 q 表示其他 3 个量. 而当 q 确定时, 其他 3 个量关于 h_b 都是单调的.

3 非精确控制条件下鼓面倾斜模型

在现实情况中, 队员发力时机和力度不可能做到完全精确, 必然存在一定的误差, 于是鼓面可能出现倾斜.

3.1 牛顿-欧拉运动方程

颠球过程中, 将鼓视为刚体, 在多个力的共同作用下, 做平移及三维旋转运动, 可用牛顿-欧拉运动方程描述:

$$\begin{cases} \mathbf{F} - (0, 0, m_2g)^T = m_2 \ddot{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \end{cases}$$

其中: \mathbf{F} 为绳上拉力的合力; m_2 为鼓的质量; \mathbf{x} 为鼓的位置; $\boldsymbol{\omega}$ 为角速度矢量; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为角加速度; \mathbf{M} 为合力矩; \mathbf{I} 为惯量矩阵.

3.2 鼓面倾斜角

由于鼓身在颠球过程中会倾斜, 因此建立两套坐标系: 大地坐标系与鼓身坐标系. 初始时刻两个坐标系重合.

假设队员 i 在每次颠球过程中施加在绳上的力为 $F_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$. 以鼓心 O 为原点, 建立鼓身直角坐标系 O_{xyz} , 每条绳子的连接点固定在鼓身上, 且等距分布, 因此连接点在鼓身坐标系下的坐标不变, 为 $(r \cos \gamma_i, r \sin \gamma_i, 0)$, 其中, r 为鼓半径, $\gamma_i = 2\pi(i-1)/n$.

绳子另外一端在大地坐标系下仅在 $x-y$ 平面内移动, z 坐标为 0.

将绳子两个端点坐标统一转化至同一个坐标系下, 即可得到力矢量 $F_i(t)$ 的表达式.

鼓的倾斜状态使用姿态角描述 (Tait-Bryan angles), $\theta = (\varphi, \theta, \psi)^T$, 三个分量分别为绕三个坐标轴旋转的角度 (roll, pitch, yaw), 相应的角速度为 $\dot{\theta} = (\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T$. 但是, 角速度矢量 $\omega \neq \dot{\theta}$. ω 是一个矢量, 指向旋转的轴, 而 $\dot{\theta}$ 只是三个角度对时间的微分. 两者的关系如下:

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \dot{\theta},$$

其中, ω 是鼓身坐标系下的角速度矢量.

从鼓身坐标系到大地坐标系, 按照 “ZYX” 的顺序依次旋转三个角度, 相应的转换矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix},$$

给定的鼓身坐标系下的矢量 v , 在大地坐标系下相应的矢量为 Rv .

在鼓身坐标系下, $F_i(t)$ 关于 O 的力矩矢量为:

$$M_O(F_i(t)) = r \times F_i(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r \cos \gamma_i & r \sin \gamma_i & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

则合力矩为

$$M_O(F) = \sum_{i=1}^n M_O(F_i(t)). \quad (19)$$

根据合力矩, 可以得到其大小, 以及所在方位.

由牛顿-欧拉运动方程, 可以得到力矩与角速度、角加速度之间的关系:

$$M = I\varepsilon + \omega \times I\omega, \quad (20)$$

其中: ω 为角速度矢量; ε 为角加速度; M 为合力矩; I 为惯量矩阵.

鼓可以近似视为圆筒, 如图 3 所示. 其转动惯量为:

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} m_2 [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2], \quad I_z = \frac{1}{2} m_2 (r_1^2 + r_2^2),$$

若忽略鼓壁的厚度, $r_1 = r_2 = r$, 即视为薄圆柱体, 则可以进一步简化为:

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} m_2 (6r^2 + h^2), \quad (21)$$

$$I_z = m_2 r^2, \quad (22)$$

则惯量矩阵 I 为

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} m_2 (6r^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_2 (6r^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & m_2 r^2 \end{bmatrix}.$$

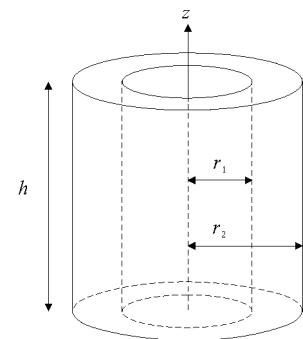


图3 鼓近似视为圆筒示意图

因此,由式(20)可得到角加速度 ε 的表达式 $\varepsilon = I^{-1}(M - \omega \times I\omega)$, 分量形式

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} M_{\varphi} I_x^{-1} \\ M_{\theta} I_y^{-1} \\ M_{\psi} I_z^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_x^{-1}(I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\ I_y^{-1}(I_z - I_x)\omega_x\omega_z \\ I_z^{-1}(I_x - I_y)\omega_x\omega_y \end{bmatrix}.$$

根据初值 $\theta = (0, 0, 0)^T$, $\dot{\theta} = (0, 0, 0)^T$, 可以通过数值积分得到角加速度、角速度以及姿态角, 进一步通过坐标变换, 可求得鼓面与水平面的倾斜角度.

3.3 计算结果

球质量 $m_1 = 0.27$ kg, 鼓质量 $m_2 = 3.6$ kg(则鼓与球质量比 $k = 13.3$), 鼓面直径 $D = 0.4$ m, 鼓高度 $h_2 = 0.22$ m, 重力加速度常数 $g = 9.8$ m/s².

对于 8 人, 每人所在方位为 $(\cos \gamma_i, \sin \gamma_i)$, $\gamma_i = 2\pi(i-1)/8$, 绳长 $l = 1.7$ m, 初始时刻, 鼓面低于绳水平高度 $d_0 = 0.11$ cm, 0.1 s 时刻鼓面倾斜的角度见表 2.

表 2 发力时机和用力大小不同取值下的鼓面倾斜角

序号	参数	1	2	3	4	5	6	7	8	鼓面倾角/(°)
1	时机/s	0	0	0	0	0	0	0	0	0.194
	大小/N	90	80	80	80	80	80	80	80	
2	时机/s	0	0	0	0	0	0	0	0	0.352
	大小/N	90	90	80	80	80	80	80	80	
3	时机/s	0	0	0	0	0	0	0	0	0.151
	大小/N	90	80	80	90	80	80	80	80	
4	时机/s	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0.240
	大小/N	80	80	80	80	80	80	80	80	
5	时机/s	-0.1	-0.1	0	0	0	0	0	0	0.435
	大小/N	80	80	80	80	80	80	80	80	
6	时机/s	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0	0.186
	大小/N	80	80	80	80	80	80	80	80	
7	时机/s	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0.253
	大小/N	90	80	80	80	80	80	80	80	
8	时机/s	0	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0.137
	大小/N	90	80	80	90	80	80	80	80	
9	时机/s	0	0	0	0	-0.1	0	0	-0.1	0.334
	大小	90	80	80	90	80	80	80	80	

关于结果的分析^[2]:

1)第 2 种情形有两人用力较大, 且夹角为 45°, 合力比单人的用力大, 因此, 倾角比第 1 种情况大. 而第 3 种情形有两人用力较大, 且夹角为 135°, 合力比单人的用力小, 因此倾角比第 1 种情形小.

2)第 5 种情形的鼓面倾角比第 4 种情形大, 而第 6 种情形的倾角比第 4 种情形小.

3)第 7 种情形有一人既提前用力且用力较大, 因此倾角比第 1 种情形大, 也比第 4 种情形大.

4)第 4 种情形与第 1 种情形相比, 第 1 种情形有人用力比其他人大 10 N, 影响持续 0.1 s, 第 4 种情形有人提前用力的这段时间用力比其他人大 11.85 N, 影响持续 0.1 s. 因此, 第 4 种情形的倾角比第 1 种情形大.

5)第 5 种情形鼓面的倾斜角比第 2 种情形大.

6)第 6 种情形鼓面的倾斜角比第 3 种情形大.

4 策略调整

第 1 问是讨论在可以精确控制条件下的最优策略, 最常见的优化目标是用用最省或做功最少. 但

在现实条件下,不可能实现精确控制,还需要考虑稳定性的目标,即在第二问的倾斜模型基础上,作鼓面倾斜角度关于各个参数(人数、绳长、颠球高度、用力时机、用力力度、鼓面下移距离等)的敏感性分析,再在量化分析的基础上作出策略选择.

比如,对于 $l=2.0\text{ m}$, $h=0.6\text{ m}$,假设所有人同时用力,但是一个人用力偏大,仿真结果见表 3.在相同力的相对误差或绝对误差下,下偏距离越小(相应地,用力时长更短),对应的倾斜角度也越小.

表 3 一人用力有误差的影响

人数	标准力/N	某人力/N	时机/s	下偏距离/m	倾斜角度/(°)
8	18.14	1.1×18.14	0	0.544	0.313
10	14.51	1.1×14.51	0	0.544	0.254
12	12.09	1.1×12.09	0	0.544	0.214
8	102.72	1.1×102.72	0.203	0.110	0.047
10	82.18	1.1×82.18	0.203	0.110	0.039
12	68.48	1.1×68.48	0.203	0.110	0.033
8	18.14	$18.14+2$	0	0.544	0.342
10	14.51	$14.51+2$	0	0.544	0.342
12	12.09	$12.09+2$	0	0.544	0.342
8	102.72	$102.72+2$	0.203	0.110	0.010
10	82.18	$82.18+2$	0.203	0.110	0.010
12	68.48	$68.48+2$	0.203	0.110	0.010

假设所有队员用力力度的误差服从正态分布 $N(0, \sigma)$,所有队员的用力时机误差服从正态分布 $N(0, \sigma_t)$.对于人数 n ,力度误差的标准差 σ ,时机误差标准差 σ_t ,模拟实验部分统计结果如表 4 所示.

表 4 用力时机与用力大小的影响

时机: 0, 下偏距离 0.544 m		人数: 8, 力度: 18.1 N		人数: 10, 力度: 14.5 N		人数: 12, 力度: 12.1 N	
σ	σ_t	倾角均值/(°)	标准型	倾角均值/(°)	标准型	倾角均值/(°)	标准型
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.0	0.02	0.15	0.08	0.12	0.07	0.12	0.05
0.0	0.06	0.33	0.17	0.29	0.14	0.26	0.12
1.0	0.00	0.45	0.25	0.53	0.30	0.54	0.31
1.0	0.02	0.56	0.31	0.64	0.33	0.69	0.38
1.0	0.06	0.67	0.38	0.69	1.06	0.83	0.47
3.0	0.00	1.54	0.91	1.71	1.06	1.86	1.05
3.0	0.02	1.76	0.88	1.95	1.06	2.24	1.34
3.0	0.06	1.94	1.13	2.09	1.06	2.48	1.33
时机: 0.203, 下偏距离 0.110 m		人数: 8, 力度: 102.7 N		人数: 10, 力度: 82.1 N		人数: 12, 力度: 68.5 N	
σ	σ_t	倾角均值/(°)	标准型	倾角均值/(°)	标准型	倾角均值/(°)	标准型
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.0	0.02	0.22	0.10	0.20	0.10	0.17	0.09
0.0	0.06	0.28	0.14	0.27	0.14	0.23	0.13
1.0	0.00	0.01	0.01	0.02	0.01	0.02	0.01
1.0	0.02	0.22	0.12	0.20	0.12	0.18	0.09
1.0	0.06	0.29	0.14	0.29	0.15	0.27	0.13
3.0	0.00	0.04	0.02	0.04	0.02	0.04	0.03
3.0	0.02	0.22	0.12	0.21	0.11	0.18	0.10
3.0	0.06	0.29	0.14	0.29	0.13	0.28	0.13

一般结论是 σ 和 σ_t 都较小时, 鼓面倾斜角度不大, 可以不用调整团队策略; 而当 σ 和 σ_t 较大时, 鼓面倾斜角度较大, 需要调整团队策略. 一般调整方案是: 在同样 σ 和 σ_t 的条件下, 人数越多, 或鼓面下移距离越小, 则鼓面平均倾斜角度越小.

因鼓下移距离越小所需用力越大, 所以, 可以设定用力的上限, 尽量减少下移距离.

5 倾斜后的调整策略

假设队员平移调整位置的时间与误差均可忽略, 即只考虑队员的用力力度与时机的调整. 力度及时机精确可控时, 可通过问题 2 中得到的鼓面倾斜模型求得各个队员的用力力度与时机.

假设不考虑鼓面倾斜对碰撞的影响, 将控制策略简化为: 当球不是竖直下落时, 使鼓面在相应方位倾斜, 角度是球偏斜角度的一半, 将球反弹后的方向调整为竖直向上.

调整策略有很多, 简单的策略可以尝试只调整 1 号、2 号队员的用力力度或时机, 但是在题目条件下, 有可能无法得到指定的角度, 需要同时调整多个参数. 一种在理想条件下的调整策略是 1 号、2 号队员用力较大, 所有队员的发力时机推迟 0.03 s, 具体结果如表 5 所示.

表 5 倾斜后的调整方案

参数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
时机/s	0.233	0.233	0.233	0.233	0.233	0.233	0.233	0.233	0.233	0.233
大小/N	120.47	101.39	82.18	82.18	82.18	82.18	82.18	82.18	82.18	82.18

而当用力力度与用力时机控制有误差时, 调整策略不能完全达到预期, 一组仿真结果如表 6 所示. 另外, 反弹的方位也会有误差, 这一误差未在表 6 中显示.

6 竞赛论文评述

本节简要评述在论文评阅过程中发现的一些问题.

1) 鼓不动最优

有人认为假设忽略空气阻力, 并且鼓与球为完全弹性碰撞, 那么就没有能量损失, 每次碰撞后球能够反弹到原来的高度, 那么最优策略就是鼓不动, 球可以一直自行跳动.

由于鼓的质量不是无穷大, 碰撞前鼓静止, 即速度 v_2 为 0, 则碰撞后鼓将获得向下的速度. 即使忽略空气阻力, 并且两者为完全弹性碰撞, 由式(6)可得碰撞后鼓的速度不为 0. 而鼓从碰撞后到恢复初始状态之间的运动较复杂, 并且与球的运动没有直接关系, 可以简化或不讨论, 但不能忽略.

2) 关于空气阻力、非弹性碰撞

是否忽略空气阻力, 是否假设完全弹性碰撞, 都是可以的, 不会提高建模的实质难度, 只是计算可能复杂一些.

实际上未做简化, 直接讨论这两个因素或之一的参赛队非常多, 猜测可能与“鼓不动最优”这一误解有关. 如果要考虑这两个因素的影响, 也可以先建立理想模型, 再进行转化, 讨论两者的差异.

3) 关于力的假设

- 假设力在竖直方向上的分量大小保持不变

基于这样的假设, 第一问计算方便, 但是随着鼓上升, 绳上的力增加较快, 绳接近水平时, 力趋近

表 6 调整方案的效果

β	σ	σ_t	球反弹倾斜角均值/(°)	标准差
1°	0.0	0.00	0.00	0.00
1°	0.0	0.02	0.03	0.19
1°	0.0	0.06	0.05	0.24
1°	1.0	0.00	0.00	0.02
1°	1.0	0.02	0.02	0.19
1°	1.0	0.06	0.05	0.25
1°	3.0	0.00	0.01	0.06
1°	3.0	0.02	0.02	0.20
1°	3.0	0.06	0.05	0.24

无穷大, 因此要限制用力的时间.

另外, 要控制竖直方向力的大小不变, 则由于绳子角度的变化, 实际用力需要不断变化, 这对于控制者来说, 很难做到精确控制力度大小.

并且, 当鼓面倾斜后还要明确指出, 是竖直方向上的分量大小不变, 还是“垂直”鼓面方向的分量大小不变. 无论哪一种假设, 计算均较复杂.

- 假设绳与鼓身夹角不变

这种情况在实际中较难实现, 特别是鼓面倾斜之后.

- 4) 计算鼓面倾斜角的方法

绝大多数参赛队使用定轴转动模型计算鼓面倾斜角, 也就是将其视为平面转动, 而没有使用牛顿-欧拉运动方程.

还有相当一部分参赛队使用“高度差”“位移差”计算鼓面倾斜角, 将鼓分为若干块, 分别应用牛顿第二定律计算位移, 根据高度差计算鼓面倾斜角. 这种方法无理论依据, 误差较大.

- 5) 绳子方向的变化

在计算鼓面倾斜角时, 没有考虑鼓面倾斜后, 每根绳子与竖直方向的夹角都不相同, 导致计算误差较大.

计算时考虑到这一细节的参赛队非常少.

- 6) 关于第 3 问的理解

几乎所有的参赛队对第 3 问的理解都有偏差, 没有给出好的解答. 最常见的一种错误理解是将第 3 问与第 4 问联系在一起, 认为第 3 问是要求建立调整的一般模型, 第 4 问是针对一种特殊情况给出调整方案. 而第 3 问明确要求“在问题 1 中给出的策略是否需要调整”, 即调整的对象是第 1 问中得到的最佳协作策略. 第 4 问是讨论当球下落方向不竖直时, 如何控制鼓的运动姿态才能将球的运动方向调整回竖直方向, 即调整的对象是队员用力的具体参数. 两者的研究对象不同.

参考文献

[1] MOON F C. Applied Dynamics[M]. Applied Dynamics, Wiley, 1998.

[2] 蔡志杰. 同心协力策略分析 [C]. 2019 年全国大学生数学建模竞赛赛题评讲与经验交流会. 珠海, 2019.11.22—11.24.

The Strategy of " Play Volleyball on a Drum"

MAO Ziyang, WANG Dan, WU Mengda

(College of Liberal Arts and Science, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: In this paper, the optimal collaboration strategy of the " Play volleyball on a drum" team under ideal conditions is built. The model of drum inclination is established under imprecise control. Then, the impact of stability on the optimal strategy under realistic conditions is discussed. And the method of controlling the drum when the ball's jumping direction deviates from the vertical direction is provided. Finally, a brief review of the students' papers submitted for Problem B in CUMCM 2019 is given.

Key words: rigid body motion; Newton's second law; ODE; Newton-Euler equation of motion

作者简介

毛紫阳(1979—), 男, 副教授, 主要研究方向为计算数学和数学建模及其应用.

王 丹(1981—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为图像处理、数学成像和数学建模及其应用.

吴孟达(1956—), 男, 教授, 主要研究方向为不确定信息处理和数学建模及其应用.