概率统计 A 参考答案（2018 年）

1. 不正确。

2. 因为 $(A+B)-C=(A+B)\overline{C}=A\overline{C}+B\overline{C}$，而 $A+(B-C)=A+B\overline{C}$

一般地 $A\overline{C}+B\overline{C}\neq A+B\overline{C}$，要使其相等需加上 $A\overline{C}=A$或$AC=\phi$ 的条件即可。

3. （1）设 $A_i(i=0,1,2,3)$ 表示第一次取到 i 个新球，B 表示第二次取到 2 个新球。

$$
\begin{aligned}
P(B)&=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)\\
&=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_9^2\cdot C_3^1}{C_{12}^3}+\frac{C_9^1\cdot C_3^2}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_8^2\cdot C_4^1}{C_{12}^3}+\frac{C_9^2\cdot C_3^1}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_7^2\cdot C_5^1}{C_{12}^3}+\frac{C_9^3}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_6^2\cdot C_6^1}{C_{12}^3}\\
&=\frac{22032}{(220)^2}\approx 0.455
\end{aligned}
$$

（2）$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{\dfrac{C_9^1\cdot C_3^2}{C_{12}^3}\cdot\dfrac{C_8^2\cdot C_4^1}{C_{12}^3}}{\dfrac{22032}{(220)^2}}=\dfrac{3024}{22032}\approx 0.137$

3. （1）由分布函数的性质 $F(+\infty)=1$，知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(A+B\cdot e^{-2x})=A=1$，又由于 X 是连续型随机变量，因此 $F(x)$ 连续，而 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(A+B\cdot e^{-2x})=A+B, \lim\limits_{x\to0^-}F(x)=0$，所以有 $A+B=0$，即 $B=-1$，于是 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-2x}, & x\geq 0\end{cases}$

（2）$P\{-\frac{1}{2}\leq X\leq\frac{1}{2}\}=P\{-\frac{1}{2}<X\leq\frac{1}{2}\}=F(\frac{1}{2})-F(-\frac{1}{2})=1-e^{-1}$

（3）$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2e^{-2x}, & x\geq 0\end{cases}$

4. X 的分布律为，$\begin{pmatrix}X\\P\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$，$Y$ 的分布律为，$\begin{pmatrix}Y\\P\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 10\\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$

Y 的分布函数为，$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \frac{1}{8}, & 1\leq y<2\\ \frac{1}{2}, & 2\leq y<5\\ \frac{7}{8}, & 5\leq y<10\\ 1, & y\geq 10\end{cases}$

5. （1）因为$\iint_{R^2} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x Axydy=\frac{A}{8}=1$，所以$A=8$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x \frac{1}{8}xydy=\frac{1}{16}x^3, x\in(0,1)$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^1 \frac{1}{8}xydx=\frac{1}{16}(y-y^3), y\in(0,1)$

所以X的边缘密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{16}x^3, x\in(0,1)\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$

所以Y的边缘密度函数为$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{16}(y-y^3), y\in(0,1)\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$

（3）因为$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以$X$与$Y$不独立。

6. X，Y的概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, x\in[0,a]\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}，\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{a}, y\in[0,a]\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

由于X，Y相互独立，故（X，Y）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}, x\in[0,a], y\in[0,a]\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

方程$t^2+Xt+Y=0$有实根的条件为$\Delta=X^2-4Y\geq 0$，因此所求概率为

$P\{X^2-4Y\geq 0\}$

（1） 当$a\leq 4$时，$P\{X^2-4Y\geq 0\}=\int_0^a dx\int_0^{\frac{x^2}{4}}\frac{1}{a^2}dy=\frac{a}{12}$

（2） 当$a>4$时，$P\{X^2-4Y\geq 0\}=\int_0^a dy\int_{2\sqrt{y}}^a\frac{1}{a^2}dy=1-\frac{4}{3\sqrt{a}}$

7.
$$\begin{aligned}D(X+Y)&=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}\\&=16+25+2\times 0.4\times 4\times 5=57\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(X-Y)&=D(X)+D(Y)-2\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}\\&=16+25-2\times 0.4\times 4\times 5=25\end{aligned}$$

8. （1）因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

当 $a<0$ 时，$P(A)=P\{X>a\}=\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_0^3\frac{1}{9}x^2dx=1$

$$P(B)=P\{Y>a\}=\int_a^{+\infty}f(y)dy=\int_0^3\frac{1}{9}y^2dy=1$$

所以 $P(A\cup B)=1+1-1\cdot 1=1\neq\frac{3}{4}$，不合题意。

当 $a\geq 0$ 时，$P(A)=\int_a^3\frac{1}{9}x^2dx=1-\frac{a^3}{27}$，同理 $P(B)=1-\frac{a^3}{27}$

所以有 $(1-\frac{a^3}{27})+(1-\frac{a^3}{27})-(1-\frac{a^3}{27})\cdot(1-\frac{a^3}{27})=\frac{3}{4}$，解得 $a=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

（2）$E(\frac{1}{X^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(x)dx=\int_0^3\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{9}x^2dx=\frac{1}{3}$

9. 设 $X_i(i=1,2,\cdots,1200)$ 表示第 i 段上的测量误差，X 为总测量误差，则 $X=\sum_{i=1}^{1200}X_i$，

因为 $E(X_i)=0,\quad D(X_i)=\frac{1}{12},\quad i=1,2,\cdots,1200$

所以 $E(X)=0,\quad D(X)=1200\times\frac{1}{12}=100$

由中心极限定理可知 $X\sim N(0,100)$，所以

$$P\{|X|\leq 20\}=P\{\frac{-20}{10}\leq\frac{X}{10}\leq\frac{20}{10}\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1=0.9544$$

10. （1）由题可知，X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{a}{a+1}\cdot(\frac{1}{a+1})^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

则 $E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{a}{a+1}\cdot(\frac{1}{a+1})^k=\frac{a}{(a+1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(\frac{1}{a+1})^{k-1}=\frac{1}{a}$

令 $\overline{X}=E(X)$，得 $a=\frac{1}{\overline{X}}$，故 a 的矩估计量为 $\frac{1}{\overline{X}}$。

（2）似然函数为 $L(a)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}[\frac{a}{a+1}\cdot(\frac{1}{a+1})^{x_i}]=(\frac{a}{a+1})^n\cdot(\frac{1}{a+1})^{n\overline{x}}$

则有 $\ln L(a)=n\ln(\frac{a}{a+1})-n\overline{x}\ln(a+1)$

令 $\frac{d\ln L(a)}{da}=n(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1})-\frac{n\overline{x}}{a+1}=0$，

解得 $a=\frac{1}{\overline{x}}$，故 a 的最大似然估计量为 $\frac{1}{\overline{X}}$。

11. 由题意可知均值差的置信区间为：$(\overline{x}-\overline{y}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot S_\omega\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$

这里 $1-\alpha=0.99 \Rightarrow \alpha=0.01 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0.005$，$t_{0.005}(10)=3.1693$

$$S_{\omega}^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-1}=928$$

所以 $\overline{x}-\overline{y}+t_{0.005}(10)\cdot S_{\omega}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}})=20+3.1693\times\sqrt{928}\times\sqrt{\frac{12}{35}}\approx 76.53$

$$\overline{x}-\overline{y}-t_{0.005}(10)\cdot S_{\omega}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}})=20-3.1693\times\sqrt{928}\times\sqrt{\frac{12}{35}}\approx -36.53$$

两个总体均值差的置信度为 0.99 的置信区间 $(-36.53, 76.53)$。

12. 提出假设 $H_0: \mu \le 53.6, \quad H_1: \mu > 53.6$

选取检验统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

因为 α=0.05，$U_{\alpha}=U_{0.05}=1.645$，故有拒绝域 $W=\{U \mid U \ge 1.645\}$

又因为 $\overline{x}=57.7, \quad U=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{57.7-53.6}{6/\sqrt{10}}\approx 2.161>1.645$

故拒绝 H_0，因此可认为今年的日平均销售额比去年有显著提高。