

## 高压油管压力控制的连续模型

蔡志杰<sup>1, 2, 3</sup>

(1. 复旦大学 数学科学学院, 上海 200433; 2. 上海市现代应用数学重点实验室, 上海 200433;  
3. 非线性数学模型与方法教育部重点实验室, 上海 200433)

**摘要:** 建立了高压油管压力变化的连续模型, 给出使得压力变化稳定的控制模型以及相应的计算方法.

**关键词:** 高压油管; 压力; 常微分方程组; 控制模型

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2020)03-0053-08

### 1 问题的提出

2019年全国大学生数学建模竞赛A题对一种简化的柴油机高压共轨管问题进行研究<sup>[1-2]</sup>. 图1给出了这种简化的高压燃油系统的工作原理. 燃油经过高压油泵从A处进入高压油管, 再由喷口B喷出. 燃油进入和喷出的间歇性工作过程会导致高压油管内压力的变化, 使得所喷出的燃油量出现偏差, 从而影响发动机的工作效率.

赛题要求解决以下3个问题:

**问题1** 高压油管的内腔长度为500 mm, 内直径为10 mm, 供油入口A处小孔的直径为1.4 mm, 通过单向阀控制供油时间的长短, 单向阀每打开一次后就要关闭10 ms. 喷油器每秒工作10次, 每次

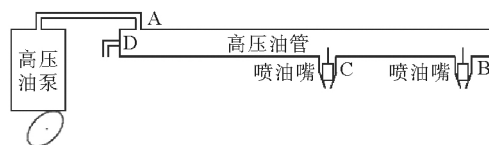


图1 高压油管示意图

工作时喷油时间为2.4 ms. 只有一个喷油器B, 喷油器工作时从喷油嘴B处向外喷油的速率如图2所示. 高压油泵在入口A处提供的压力恒为160 MPa, 高压油管内的初始压力为100 MPa. 如果要将高压油管内的压力尽可能稳定在100 MPa左右, 如何设置单向阀每次开启的时长? 如果要将高压油管内的压力分别在2 s、5 s和10 s内从100 MPa调整到150 MPa, 单向阀开启的时长应如何调整?

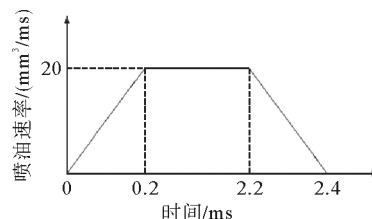


图2 喷油速率示意图

**问题2** 在实际工作过程中, 高压油管A处的燃油来自高压油泵的柱塞腔出口, 喷油由喷油嘴的针阀控制. 凸轮驱动柱塞上

下运动, 凸轮边缘曲线与角度的关系见表1. 柱塞向上运动时压缩柱塞腔内的燃油, 当柱塞腔内的压力大于高压油管内的压力时, 柱塞腔与高压油管连接的单向阀开启, 燃油进入高压油管内. 柱塞腔内直径为5 mm, 柱塞运动到上止点位置时, 残余容积与油管容积之和为 $20 \text{ mm}^3$ . 柱塞运动到下止点时, 低压燃油会充满柱塞腔, 低压燃油的压力为0.5 MPa. 喷油器喷嘴结构如图3所示, 针阀直径为2.5 mm, 密封座为半角为 $9^\circ$ 的圆锥, 最下端喷孔的直径为1.4 mm. 针阀升程为0时, 针阀关闭; 针阀升程大于0时, 针阀开启, 燃油向喷孔流动, 通过喷孔喷出. 在一个喷油周期内针阀升程与时间的关系由表2给出. 在问题1中给出的高

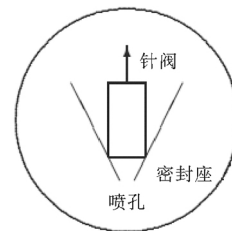


图3 喷油器喷嘴示意图

收稿日期: 2020-04-24

通讯作者: 蔡志杰, E-mail: zhijiecai@163.com

压油管尺寸和初始压力下, 确定凸轮的角速度, 使得高压油管内的压力尽量稳定在 100 MPa 左右。

表 1 凸轮边缘曲线

极角/rad	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
极径/mm	7.239 0	7.238 9	7.238 5	7.237 9	7.237 1	7.236 0
极角/rad	...	6.23	6.24	6.25	6.26	6.27
极径/mm	...	7.235 6	7.236 8	7.237 7	7.238 4	7.238 8

表 2 针阀运动曲线

时间/ms	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
距离/mm	0	$1.233\ 7 \times 10^{-6}$	$1.973\ 9 \times 10^{-5}$	$9.992\ 8 \times 10^{-5}$	$3.158\ 1 \times 10^{-4}$
时间/ms	...	0.42	0.43	0.44	[0.45, 2]
距离/mm	...	1.932 1	1.972 0	1.995 0	2.000 0
时间/ms	2.01	2.02	2.03	2.04	2.05
距离/mm	1.994 2	1.970 4	1.929 6	1.873 9	1.805 2
时间/ms	...	2.43	2.44	2.45	[2.46, 100]
距离/mm	...	$1.780\ 1 \times 10^{-5}$	$1.000\ 5 \times 10^{-6}$	0	0

问题 3 在问题 2 的基础上, 再增加一个喷油嘴 C, 每个喷嘴喷油规律相同, 喷油和供油策略应如何调整? 为了更有效地控制高压油管的压力, 现计划在 D 处安装一个单向减压阀。单向减压阀出口为直径为 1.4 mm 的圆, 打开后高压油管内的燃油可以在压力下回流到外部低压油路中, 从而使得高压油管内燃油的压力减小。请给出高压油泵和减压阀的控制方案。

赛题还给出了两个经验公式。

1) 燃油的压力变化量与密度变化量成正比, 比例系数为  $E/\rho$ , 其中,  $\rho$  为燃油的密度, 当压力为 100 MPa 时, 燃油的密度为 0.850 mg/mm<sup>3</sup>。E 为弹性模量, 其与压力的关系见表 3。根据这一描述, 压力与密度满足如下方程:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{E}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (1)$$

其中,  $P = P(t)$  为压力。

表 3 弹性模量与压力

压力/MPa	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
弹性模量/MPa	1 538.4	1 540.8	1 543.3	1 545.7	1 548.2	1 550.6
压力/MPa	...	198.0	198.5	199.0	199.5	200.0
弹性模量/MPa	...	3 357.4	3 366.4	3 375.3	3 384.3	3 393.4

2) 进出高压油管的流量为

$$Q = CA \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}, \quad (2)$$

其中:  $Q$  为单位时间流过小孔的燃油量 (mm<sup>3</sup>/ms);  $C = 0.85$  为流量系数;  $A$  为小孔的面积 (mm<sup>2</sup>);  $\Delta P$  为小孔两边的压力差 (MPa);  $\rho$  为高压侧燃油的密度 (mg/mm<sup>3</sup>)。

## 2 单向阀控制模型

### 2.1 高压油管压力变化模型

如图 4 所示, 记高压油泵入口处的压力为  $P_{\text{pump}}$  ( $=160$  MPa), 燃油密度为  $\rho_{\text{pump}}$ , 对方程 (1) 采用分离变量法可得

$$\rho(P) = \rho_0 \exp \left( \int_{P_0}^P \frac{dP}{E(P)} \right), \quad (3)$$

其中:  $P_0 = 100 \text{ MPa}$ ;  $\rho_0 = 0.850 \text{ mg/mm}^3$ . 由表3燃油弹性模量  $E$  与压力  $P$  关系的实验数据, 对式(3)采用数值积分即可得到  $P = 160 \text{ MPa}$  时燃油的密度为

$$\rho_{\text{pump}} = \rho(160) \approx 0.8711 \text{ (mg/mm}^3\text{)}.$$

记  $t$  时刻高压油管内的压力为  $P(t)$ , 由式(2), 单位时间流过小孔进入高压油管的燃油量为

$$Q_{\text{in}}(t) = CA_{\text{in}} \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho_{\text{pump}}}} = CA_{\text{in}} \sqrt{\frac{2(P_{\text{pump}} - P(t))}{\rho_{\text{pump}}}}, \quad (4)$$

单位为  $\text{mm}^3/\text{ms}$ , 其中:  $C$  为流量系数;  $A_{\text{in}}$  为小孔的面积;  $\Delta P = P_{\text{pump}} - P(t)$  为小孔两边的压力差;  $t$  为一个进油周期中的时间.

记单向阀开启后的进油时间为  $t_{\text{in}}$ , 单位为  $\text{ms}$ , 然后关闭  $S_{\text{in}}$ , 则一个进油周期为  $T_{\text{in}} = t_{\text{in}} + S_{\text{in}}$ . 在一个进油周期中, 当  $0 \leq t \leq t_{\text{in}}$  时, 进油量由式(4)给出; 当  $t_{\text{in}} \leq t \leq T_{\text{in}}$  时, 进油量为 0. 另一方面, 在某些参数情况下, 高压油泵的燃油压力可能小于油管中的燃油压力, 此时的进油量应为 0. 因此, 进油量函数可写为

$$Q_{\text{in}}(t) = \begin{cases} CA_{\text{in}} \sqrt{\frac{2\max\{P_{\text{pump}} - P(t), 0\}}{\rho_{\text{pump}}}}, & 0 \leq t - \left[ \frac{t}{T_{\text{in}}} \right] T_{\text{in}} \leq t_{\text{in}}, \\ 0, & t_{\text{in}} \leq t - \left[ \frac{t}{T_{\text{in}}} \right] T_{\text{in}} \leq T_{\text{in}}. \end{cases} \quad (5)$$

喷油器每秒工作 10 次, 则喷油周期为  $T_{\text{out}} = 100 \text{ ms}$ . 记每次喷油时间为  $t_{\text{out}}$ , 类似于进油周期的处理方法, 由图 2 可以得到整个工作过程中喷油速率为

$$Q_{\text{out}}(t) = \begin{cases} 100 \left( t - \left[ \frac{t}{T_{\text{out}}} \right] T_{\text{out}} \right), & 0 \leq t - \left[ \frac{t}{T_{\text{out}}} \right] T_{\text{out}} \leq 0.2, \\ 20, & 0.2 \leq t - \left[ \frac{t}{T_{\text{out}}} \right] T_{\text{out}} \leq t_{\text{out}} - 0.2, \\ 100 \left( t_{\text{out}} - t + \left[ \frac{t}{T_{\text{out}}} \right] T_{\text{out}} \right), & t_{\text{out}} - 0.2 \leq t - \left[ \frac{t}{T_{\text{out}}} \right] T_{\text{out}} \leq t_{\text{out}}, \\ 0, & t_{\text{out}} \leq t - \left[ \frac{t}{T_{\text{out}}} \right] T_{\text{out}} \leq T_{\text{out}}. \end{cases} \quad (6)$$

下面建立高压油管中燃油密度和压力的微分方程模型. 记  $t$  时刻高压油管中燃油的质量为  $m(t)$ , 由质量守恒定律得到

$$\frac{dm}{dt} = \rho_{\text{pump}} Q_{\text{in}}(t) - \rho(t) Q_{\text{out}}(t),$$

其中,  $Q_{\text{in}}(t)$  和  $Q_{\text{out}}(t)$  分别由式(5)和式(6)给出.

而燃油的密度为  $\rho(t) = m(t)/V$ , 其中,  $V$  为高压油管的体积. 因此

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho_{\text{pump}} Q_{\text{in}}(t) - \rho(t) Q_{\text{out}}(t)}{V}. \quad (7)$$

将式(7)代入式(1), 有

$$\frac{dP}{dt} = \frac{E(P) \rho_{\text{pump}} Q_{\text{in}}(t) - \rho(t) Q_{\text{out}}(t)}{\rho V}. \quad (8)$$

记初始时刻高压油管内的压力和燃油密度为

$$t=0: P=P_0, \rho=\rho_0, \quad (9)$$

就得到了高压油管压力变化的常微分方程模型(7)–(9).

高压油泵通过单向阀开关对供油时间的长短进行控制. 进油时间  $t_{\text{in}}$  越长, 高压油管内燃油的质量越大, 燃油密度就越大, 相应的压力也越大, 即压力  $P$  是进油时间  $t_{\text{in}}$  的递增函数. 图 5 给出了进油时

间对高压油管压力和燃油密度的影响。

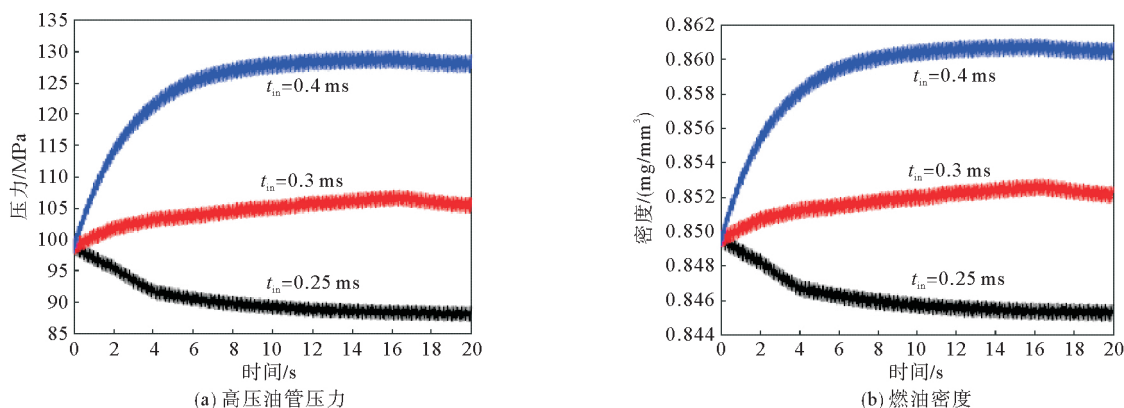


图5 进油时间对高压油管压力和燃油密度的影响

## 2.2 单向阀控制模型

如果要将高压油管内的压力尽可能稳定在  $P^*$  ( $=100$  MPa), 需要调节单向阀每次开启的进油时间  $t_{in}$ . 首先要确定如何描述这里所谓的“稳定”. 因为初始压力就是 100 MPa, 记

$$P_{\max} = \max_{0 \leq t \leq T} P(t), P_{\min} = \min_{0 \leq t \leq T} P(t) \quad (10)$$

分别为考察时间段内压力的最大值和最小值, 则

$$\Delta P_{\max} = P_{\max} - P^*, \Delta P_{\min} = P^* - P_{\min} \quad (11)$$

分别表示高压油管内的压力  $P(t)$  与要求达到的稳定压力  $P^*$  之间的最大上偏差和最大下偏差. 如果这两个偏差较小, 就表示压力稳定在  $P^*$ . 但是这个稳定概念中有两个指标, 将它们综合成一个指标以便于使用

$$\max\{\Delta P_{\max}, \Delta P_{\min}\} \quad (12)$$

表示最大上下偏差. 显然, 高压油管内的压力与进油时间  $t_{in}$  有关, 因此单向阀控制模型就归结为: 确定  $t_{in}$ , 使得式(12)达到最小.

记

$$\max P = \Delta P_{\max} - \Delta P_{\min}. \quad (13)$$

由单调性, 即压力  $P(t)$  是进油时间  $t_{in}$  的递增函数, 只要使得  $|\max P|$  最小就可以了. 这样, 稳定就可以用  $|\max P|$  最小来描述. 当  $\max P > 0$  时, 表示上偏差较大; 当  $\max P < 0$  时, 表示下偏差较大. 因此, 可以用二分法来计算单向阀每次开启的最优进油时间  $t_{in}$ . 图6给出了最优进油时间的压力变化图.

从图6可以看到, 开始时压力有明显的下移. 为了避免这个系统偏差, 开始时不喷油, 也就是进油周期与喷油周期的开始时间不必同步, 可以有一个相位差. 记喷油开始时间为  $t_{\text{needle}}$ , 则模型归结为: 确定  $t_{\text{needle}}$  和  $t_{in}$ , 使得  $|\max P|$  最小.

图7给出了最优进油时间和喷油开始时间时的压力变化图, 可以看到开始时的压力偏差明显减小, 整体压力偏差也相应减小.

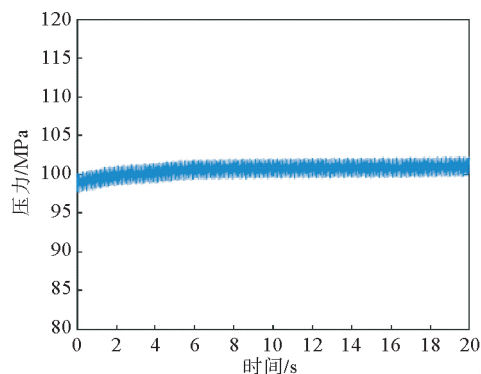


图6 最优进油时间的压力变化图 ( $P^* = 100$  MPa)

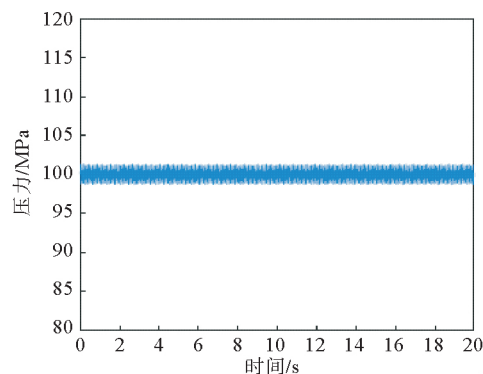


图7 最优进油时间和喷油开始时间的压力变化图 ( $P^* = 100$  MPa)

### 2.3 压力调整控制模型

如果要将高压油管内的压力在  $T_0$  ms 内从  $P_0$  ( $=100$  MPa) 调整到  $P^*$  ( $=150$  MPa), 只要修改一下稳定指标, 2.2 节中的方法仍可以使用. 因为压力从  $P_0$  调整到  $P^*$  需要时间, 因此稳定在  $P^*$  应从  $T_0$  时刻以后算起, 所以只要将式(10)修改为  $P_{\max} = \max_{T_0 \leq t \leq T} P(t)$ ,  $P_{\min} = \min_{T_0 \leq t \leq T} P(t)$ , 稳定指标(13)仍可以使用, 其中使用到的式(11)中  $P^* = 150$  MPa. 图8给出了将压力调整到 150 MPa 的最优进油时间的压力变化图.

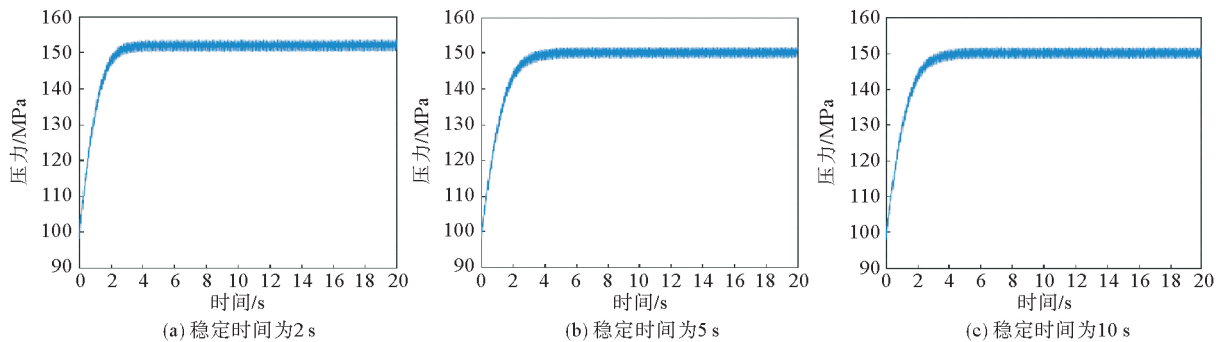


图8 最优进油时间的压力变化图 ( $P^* = 150$  MPa)

### 2.4 两阶段压力调整控制模型

为了进一步减小  $T_0$  后压力的波动, 可以采用两阶段调整控制方案. 首先利用 2.2 节的方法计算得到初始压力  $P_0 = 150$  MPa 时, 最优进油时间和开始进油时间, 将其作为  $T_0$  后的压力调整方案, 相应的压力变化图见图9.

而在  $T_0$  前, 再次使用 2.2 节的方法, 计算使得压力在  $T_0$  时达到 150 MPa 的最优进油时间和开始进油时间, 由此得到两阶段压力调整控制模型. 图10给出了两阶段最优进油时间的压力变化图.

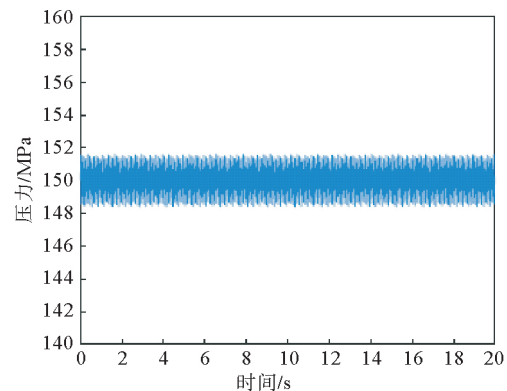


图9 最优进油时间和喷油开始时间的压力变化图 ( $P_0 = 150$  MPa,  $P^* = 150$  MPa)

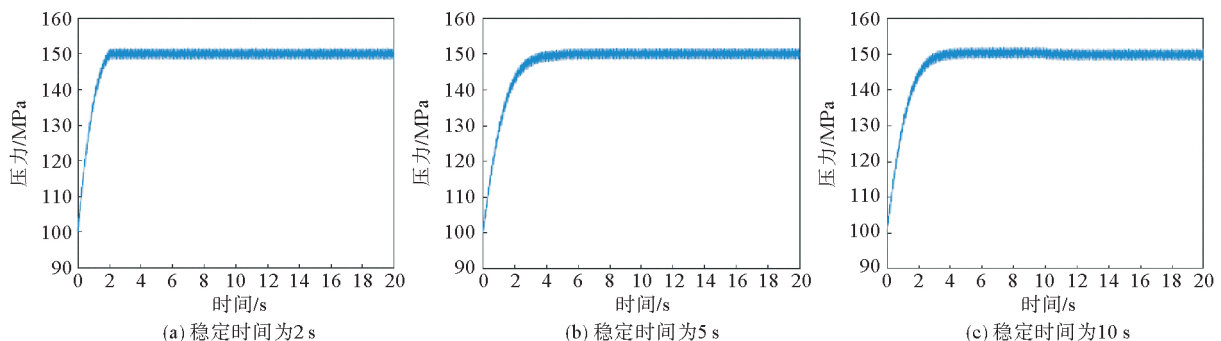


图10 两阶段最优进油时间的压力变化图 ( $P^* = 150$  MPa)

## 3 实际高压油泵和喷油嘴

### 3.1 高压油泵模型

问题2考虑的是由高压油泵通过柱塞的上下运动来供油, 由喷油嘴通过针阀的上下运动来喷油的情形.

由式(3), 采用数值积分, 得到高压油泵中低压燃油的密度为  $\rho_{\text{pump}}^0 \approx 0.8045 (\text{mg}/\text{mm}^3)$ .

记  $t$  时刻高压油泵中燃油的质量为  $m_{\text{pump}}(t)$ , 由质量守恒定律

$$\frac{dm_{\text{pump}}}{dt} = -\rho_{\text{pump}} Q_{\text{in}}(t).$$

而油泵中燃油的密度为

$$\rho_{\text{pump}}(t) = \frac{m_{\text{pump}}(t)}{V_{\text{pump}}(t)},$$

其中,  $V_{\text{pump}}(t)$  为  $t$  时刻油泵中燃油的体积

$$V_{\text{pump}}(t) = 20 + \frac{1}{4} \pi d_{\text{pump}}^2 h_{\text{pump}}(t),$$

而  $d_{\text{pump}}$  为柱塞腔直径,  $h_{\text{pump}}(t)$  为  $t$  时刻柱塞腔到上止点的高度. 因此

$$\frac{d\rho_{\text{pump}}}{dt} = \frac{1}{V_{\text{pump}}(t)} \frac{dm_{\text{pump}}(t)}{dt} - \frac{m_{\text{pump}}(t)}{V_{\text{pump}}^2(t)} \frac{dV_{\text{pump}}(t)}{dt} = -\frac{\rho_{\text{pump}}(t)}{V_{\text{pump}}(t)} \left( Q_{\text{in}}(t) + \frac{1}{4} \pi d_{\text{pump}}^2 \frac{dh_{\text{pump}}(t)}{dt} \right).$$

由式(1), 油泵中压力的变化满足

$$\frac{dP_{\text{pump}}}{dt} = \frac{E(P_{\text{pump}})}{\rho_{\text{pump}}} \frac{d\rho_{\text{pump}}}{dt} = -\frac{E(P_{\text{pump}})}{V_{\text{pump}}(t)} \left( Q_{\text{in}}(t) + \frac{1}{4} \pi d_{\text{pump}}^2 \frac{dh_{\text{pump}}(t)}{dt} \right).$$

由图 11 可知初始角度为  $\theta_0 = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$  rad

(图 11), 记凸轮旋转的角速度为  $\omega$  (rad/ms), 则  $t$  时刻凸轮的角度为  $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ .

记极径  $r$  与极角  $\varphi$  的关系为  $r = r(\varphi)$ , 当凸轮的旋转角度为  $\theta = \theta(t)$  时, 凸轮最高处的  $y$  坐标为

$$y(\theta) = \max_{0 \leq \varphi < 2\pi} r(\varphi) \sin(\varphi + \theta).$$

记  $y_{\text{max}} = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} y(\theta) = \max_{0 \leq \varphi < 2\pi} r(\varphi)$  表示上止点凸

轮最高处的高度, 即上止点油泵下端的高度, 则  $h_{\text{pump}}(t) = y_{\text{max}} - y(\theta(t))$  表示旋转角度为  $\theta = \theta(t)$  时, 从柱塞腔底部到上止点的高度.

### 3.2 喷油模型

如图 12 所示, 记针阀的直径为  $d_{\text{needle}}$ , 半径为  $r_{\text{needle}}$ , 密封座的半角为  $\alpha$ , 喷孔的直径为  $d_{\text{out}} (=1.4 \text{ mm})$ , 半径为  $r_{\text{out}} = \frac{d_{\text{out}}}{2}$ , 则当针阀升程为  $h_{\text{needle}}$  时, 密封座对应位置的半径为  $r = h_{\text{needle}} \tan \alpha + r_{\text{needle}}$ , 燃油流入小孔的面积  $S = \pi h_{\text{needle}} \tan \alpha (h_{\text{needle}} \tan \alpha + d_{\text{needle}})$ , 而小孔的面积为  $\frac{1}{4} \pi d_{\text{out}}^2$ . 因此  $S_{\text{out}} = \min \left\{ S, \frac{1}{4} \pi d_{\text{out}}^2 \right\}$ . 由式(2), 燃油喷出量为

$$Q_{\text{out}} = C S_{\text{out}} \sqrt{\frac{2P(t)}{\rho(t)}}.$$

### 3.3 实际情形的最终模型

高压油管内压力和密度的变化仍可用式(7)和式(8)来描述, 这样, 对问题 2, 整个数学模型可以归结为

$$\frac{dP_{\text{pump}}}{dt} = -\frac{E(P_{\text{pump}})}{V_{\text{pump}}(t)} \left( Q_{\text{in}}(t) + \frac{1}{4} \pi d_{\text{pump}}^2 \frac{dh_{\text{pump}}(t)}{dt} \right), \quad (14)$$

$$\frac{d\rho_{\text{pump}}}{dt} = -\frac{\rho_{\text{pump}}(t)}{V_{\text{pump}}(t)} \left( Q_{\text{in}}(t) + \frac{1}{4} \pi d_{\text{pump}}^2 \frac{dh_{\text{pump}}(t)}{dt} \right), \quad (15)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{E(P)}{\rho} \frac{\rho_{\text{pump}} Q_{\text{in}}(t) - \rho(t) Q_{\text{out}}(t)}{V}, \quad (16)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho_{\text{pump}} Q_{\text{in}}(t) - \rho(t) Q_{\text{out}}(t)}{V}. \quad (17)$$

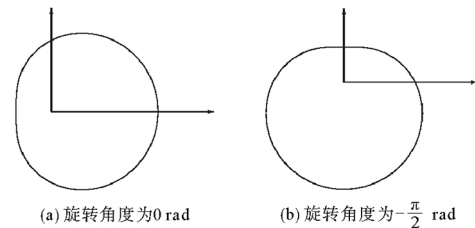


图 11 凸轮曲线示意图

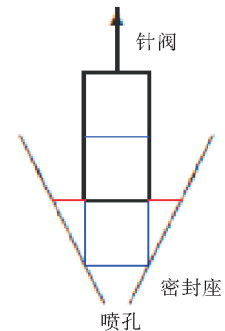


图 12 燃油流入小孔的面积

图 13 给出了凸轮的旋转角度对高压油管压力的影响图.

### 3.4 实际情形的控制模型

凸轮的旋转角度与针阀升程之间存在相位差. 凸轮的初始角度为  $-\frac{\pi}{2}$ , 相应的针阀升程对应的初始时间记为  $t_{\text{needle}}$ , 则针阀的实际升程与  $t_{\text{needle}}$  有关,  $t$  时刻针阀的实际升程为  $h_{\text{needle}}(t+t_{\text{needle}})$ . 因此, 喷油量  $S_{\text{out}}$  也与  $t_{\text{needle}}$  有关

$$S_{\text{out}}(t) = \min \left\{ \pi h_{\text{needle}}(t+t_{\text{needle}}) \tan \alpha (h_{\text{needle}}(t+t_{\text{needle}}) \tan \alpha + d_{\text{needle}}), \frac{1}{4} \pi d_{\text{out}}^2 \right\}.$$

这样, 控制模型归结为: 确定凸轮旋转的角速度  $\omega$  和针阀升程的初始时间  $t_{\text{needle}}$ , 使得  $|\max P|$  达到最小.

图 14 给出了最优凸轮角速度和喷油开始时间的压力变化图.

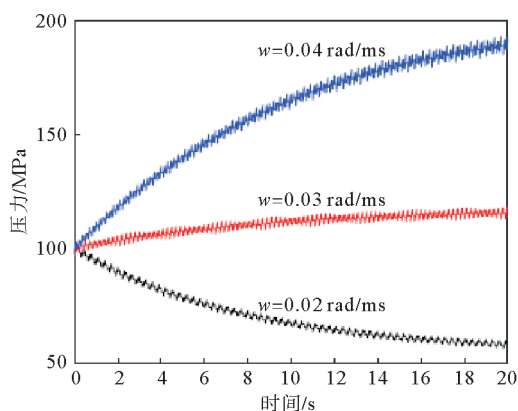


图 13 凸轮的旋转角度对高压油管压力的影响图

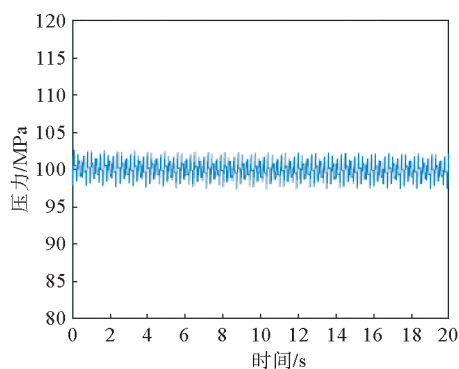


图 14 最优凸轮角速度和喷油开始时间的压力变化图

### 3.5 喷油模型的改进

上面的燃油流入面积是大多数参赛队采用的模型, 有参赛队给出了更合理的模型, 参见图 15.

燃油流入小孔的最小面积是圆台的侧面积. 圆台的侧面积公式为

$$S = \pi l(R+r),$$

其中:  $l$  为圆台母线长度;  $r$  为上底的半径;  $R$  为下底的半径.

圆台母线长度为  $l = h_{\text{needle}} \sin \alpha$ , 上底的半径为  $r = r_{\text{needle}}$ , 下底的半径为  $R = r_{\text{needle}} + h_{\text{needle}} \sin \alpha \cos \alpha$ , 因此

$$S = \pi h_{\text{needle}} \sin \alpha (h_{\text{needle}} \sin \alpha \cos \alpha + d_{\text{needle}}).$$

图 16 给出了针阀面积用圆台侧面积计算时, 最优凸轮角速度和喷油开始时间下的高压油管压力变化图.

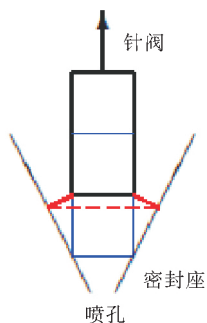


图 15 燃油流入小孔的面积 (圆台侧面积)

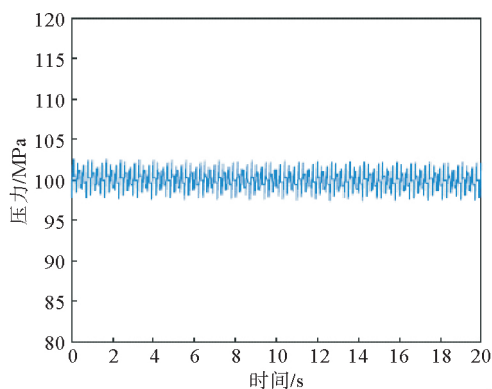


图 16 最优凸轮角速度和喷油开始时间的压力变化图 (圆台侧面积)

#### 4 两个喷油嘴和带减压阀的情形

对两个喷油嘴的情形, 模型仍由式(14)一式(17)给出, 只需对喷口面积  $S_{\text{out}}$  进行修改

$$S_{\text{out}} = S_{\text{out}}^1 + S_{\text{out}}^2,$$

其中,

$$S_{\text{out}}^i(t) = \min \left\{ \pi h_{\text{needle}}(t + t_{\text{needle}}^i) \tan \alpha (h_{\text{needle}}(t + t_{\text{needle}}^i) \tan \alpha + d_{\text{needle}}), \frac{1}{4} \pi d_{\text{out}}^2 \right\}, \quad (18)$$

而  $t_{\text{needle}}^i$  分别为两个喷嘴相应针阀升程对应的初始时间.

图 17 给出了两个喷油嘴时最优凸轮角速度和喷油开始时间的压力变化图.

如果增加了一个减压阀, 与上面类似, 只需修改喷口的面积  $S_{\text{out}}$

$$S_{\text{out}} = S_{\text{out}}^1 + S_{\text{out}}^2 + S_{\text{valve}},$$

其中,  $S_{\text{out}}^i$  由式(18)给出,

$$S_{\text{valve}} = \frac{1}{4} \pi d_{\text{valve}}^2,$$

而  $d_{\text{valve}}$  为减压阀的直径.

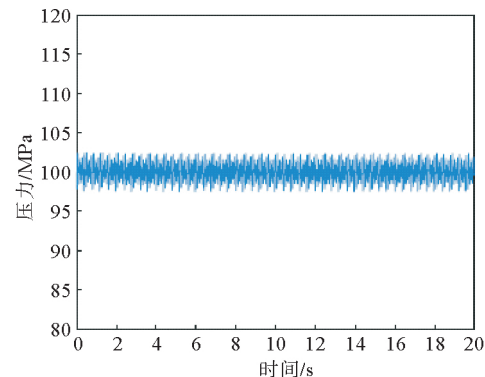


图 17 最优凸轮角速度和喷油开始时间的压力变化图 (两个喷油嘴的情形)

#### 5 总结

本文针对几种不同情形, 建立了高压油管中压力和密度变化的常微分方程模型, 考察了进油时间对压力变化的影响, 给出了使得压力稳定的控制策略. 为了进一步减小压力的变化幅度, 在控制模型中增加了一个控制变量 (进油与喷油的相位差), 使得压力的变化更加平稳.

#### 参考文献

- [1] 全国大学生数学建模竞赛组委会. 2019 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛赛题[EB/OL]. (2019-09-12). [http://www.mcm.edu.cn/html\\_cn/node/b0ae8510b9ec0cc0deb2266d2de19ecb.html](http://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/b0ae8510b9ec0cc0deb2266d2de19ecb.html).
- [2] 周义仓, 陈磊. 柴油机供喷油过程的压力变化与控制[J]. 数学建模及其应, 2020, 9(1): 33-39.

### Continuous Models for Pressure Control of High Pressure Fuel Tubing

CAI Zhijie<sup>1, 2, 3</sup>

(1. School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China;

2. Shanghai Key Laboratory of Contemporary Applied Mathematics, Shanghai 200433, China;

3. Key Laboratory of Nonlinear Mathematical Models and Methods of Ministry of Education, Shanghai 200433, China)

**Abstract:** In this paper, the continuous models for the pressure of high pressure tubing are established, and the control models stabilized the pressure and the corresponding computation methods are given.

**Key words:** high pressure tubing; pressure; ordinary differential equations; control model

#### 作者简介

蔡志杰(1968—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 应用数学专业, 主要研究方向是工业应用数学和应用偏微分方程.