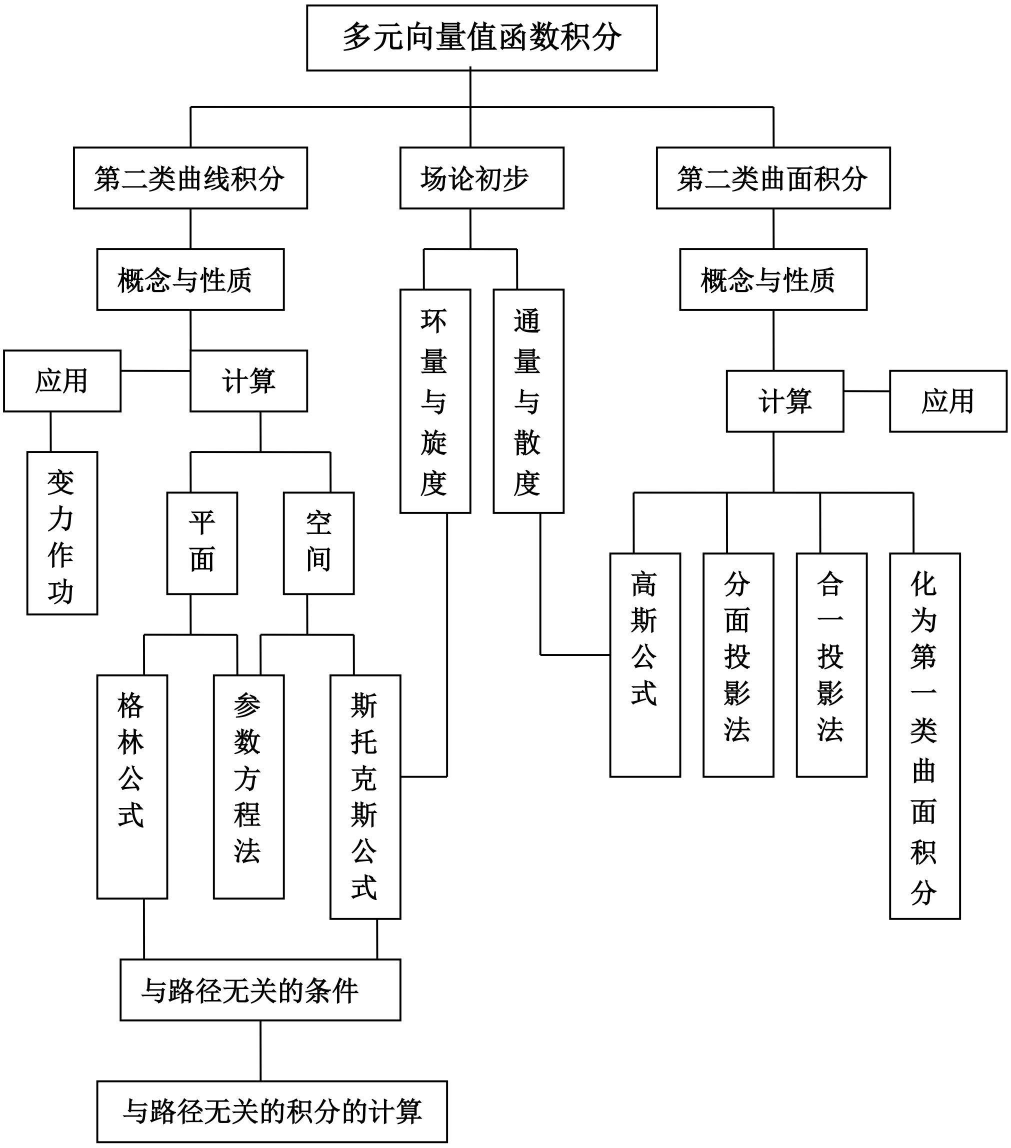
第七章　多元向量值函数积分学



（一）第二类曲线积分

1. 定义

设 L 是一条从点 A 到点 B 的有向光滑曲线，向量值函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

在曲线 L 上有界. 从点 A 到点 B 依次插入 $n-1$ 个分点，将曲线 L 任意划分成 n 个有向小弧段 $\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n$（$\Delta s_i$ 同时表示第 i 个有向小弧段的弧长），在每个有向小弧段 $\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$

上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，作点积

$$\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i \quad (\boldsymbol{i}=1,2,\cdots,\boldsymbol{n}),$$

其中 $\Delta\boldsymbol{s}_i=\boldsymbol{\tau}_0(\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\zeta}_i)\ \Delta s_i$，$\boldsymbol{\tau}_0$ 是曲线 L 在点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 处与曲线 L 方向一致的单位切向量. 作和式

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i,$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\left\{\Delta s_i\right\}$，如果不论对曲线 L 怎样划分，不论点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 在 Δs_i 上怎样选取，当 $\lambda\to 0$ 时，上述和式的极限都存在且为同一常数，则称此极限值为向量值函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在有向曲线 L 上的第二类曲线积分，记为 $\int_L\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{ds}$，即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i=\int_L\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{ds},$$

上式右端是**第二类曲线积分的向量形式**.

由于

$$\mathbf{ds}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z),$$

则有

$$\int_L\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{ds}=\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}y,$$

上式右端是**第二类曲线积分的坐标形式**，第二类曲线积分又称为**对坐标的曲线积分**.

由于

$$\mathbf{ds}=\boldsymbol{\tau}_0\,\mathrm{d}s,\quad \boldsymbol{\tau}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_0$ 是曲线 L 在点 (x,y,z) 处与 L 方向一致的单位切向量，则有

$$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{ds}=\int_L\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}_0\,\mathrm{d}s=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s.$$

这个公式给出了第二类曲线积分与第一类曲线积分的关系.

2. 性质

（1） 设 k_1,k_2 为常数，则

$$\int_L(k_1\boldsymbol{F}_1+k_2\boldsymbol{F}_2)\cdot\mathbf{ds}=k_1\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{ds}+k_2\int_L\boldsymbol{F}_2\cdot\mathbf{ds};$$

（2）若用 L^- 表示与有向曲线段 L 相反方向的有向曲线段，则

$$\int_{L^-}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{ds}=-\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{ds};$$

（3）若 A,B,C 是有向曲线 L 上的任意三点，则

$$\int_{AC}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{ds}=\int_{AB}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{ds}+\int_{BC}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{ds}.$$

3. 平面曲线积分的计算

（1） **基本公式**

设向量值函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}$ 在平面光滑有向曲线 L 上连续.

① L 的参数方程为 $x=x(t),\ y=y(t)$，曲线 L 的起点 A 和终点 B 所对应的 t 值分别为 α 和 β，又 $x'(t),y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$，则

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}\,\mathrm{d}t\,.$$

② L 的方程为 $y=y(x)$，且曲线 L 的起点 A 和终点 B 所对应的坐标 x 分别为 a 和 b，又 $y'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}\,\mathrm{d}x$$

（2）**格林（green）公式**

单连通区域与复连通区域

设 D 是平面区域，如果 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D，则称 D 为平面单连通区域，否则称为复连通区域。

平面区域的有向边界曲线

设 L 是平面区域 D 的边界曲线，规定 L 的正向如下：当观察者沿这个方向行进时，D 内在他近处的部分总在他的左边；按此规定，单连通区域边界的正向为逆时针方向；复连通区域外边界的正向为逆时针方向，内边界的正向为顺时针方向.

格林公式

① 设 D 是由分段光滑的曲线 L 所围成的平面单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

其中 L 为逆时针方向.

② 设 D 是由分段光滑的曲线 L_1(外边界)与 L_2(内边界)所围成的平面复连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则

$$\oint_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\oint_{L_2}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 L_1 为逆时针方向， L_2 为顺时针方向.

（3）**平面曲线积分与路径无关的条件**

设 D 是平面单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则下列四个命题等价：

① 对于 D 内任一分段光滑的简单闭曲线 L，有

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0;$$

② 曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的值在 D 内与曲线的路径无关，只与曲线的起点与终点的位置有关；

③ 在 D 内存在二元函数 $u(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}[u(x,y)]=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

且

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0),$$

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中 $(x_0,y_0)\in D$；

④ $\forall(x,y)\in D$，满足 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

4. 空间曲线积分的计算

（1） **基本公式**

设向量值函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在空间光滑有向曲线 L 上连续. L 的参数方程为 $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$，曲线 L 的起点 A 和终点 B 所对应的 t 值分别为 α 和 β，又 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)\neq 0$，则

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}\mathrm{d}t.$$

（2）**斯托克斯公式**

设 L 为分段光滑的空间有向闭曲线，S 是以 L 为边界的分片光滑的有向曲面，L 的正向与 S 的侧（即法向量的指向）符合右手法则，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在曲面 S (连同边界 L)上具有一阶连续偏导数，则有

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

（3）**空间曲线积分与路径无关的条件**

设G为空间一维单连通区域，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$G$内具有一阶连续偏导数，则下列四个命题等价：

① 对于G内任一分段光滑的简单闭曲线L，有

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=0\,;$$

② 曲线积分$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$ 的值在G内与曲线的路径无关，只与曲线的起点与终点的位置有关；

③ 在G内存在三元函数$u(x,y,z)$，使

$$\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\,,$$

且

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=u(x,y,z)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)}=u(x_1,y_1,z_1)-u(x_0,y_0,z_0)\,,$$

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\\&=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\,\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

其中$(x_0,y_0,z_0)\in G$；

④ $\forall(x_0,y_0,z_0)\in G$，满足 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$，即 $\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z},\ \dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}.$

5. 应用

变力沿曲线作功 设空间有一力场，一质点在场力

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y.z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

作用下，沿光滑有向曲线L所作的功为

$$\int_L\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{ds}=\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,.$$

（二）第二类曲面积分

1. 定义

设S为一光滑有向曲面，指定它的一侧，设向量值函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y.z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

在曲面S上有界，将曲面S任意划分成n个有向小曲面$\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$（$\Delta S_i$同时表示第$i$个有向小曲面的面积），在每个有向小曲面$\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$上任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，作点积

$$\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

其中 $\Delta\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{n}_0(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\ \Delta S_i$， $\boldsymbol{n}_0$ 是曲面在点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 处指向给定一侧的单位法向量. 作和式

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i\text{，}$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta S_i\ \text{的直径}\}$，如果不论对曲面 S 怎样划分，不论点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 在 ΔS_i 上怎样选取，当 $\lambda\to 0$ 时，上述和式的极限都存在且为同一常数，则称此极限值为向量值函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在有向曲面 S 上的第二类曲面积分，记为 $\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}$， 即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i=\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}\text{，}$$

上式右端是**第二类曲面积分的向量形式**.

由于曲面微元向量 $\mathbf{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

则有

$$\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{S}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上式右端是**第二类曲面积分的坐标形式**，第二类曲面积分又称为**对坐标的曲面积分**.

由于曲面微元向量 $\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S,\quad \boldsymbol{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，

其中 $\boldsymbol{n}_0$ 是曲面在点 (x,y,z) 处指向给定一侧的单位法向量，则有

$$\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{S}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

这个公式给出了第二类曲面积分与第一类曲面积分的关系.

2．性质

（1） 设 k_1,k_2 为常数，则

$$\iint\limits_{S}(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{F}_2)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{k}_1\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}_1\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{k}_2\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}_2\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}\text{；}$$

（2）若用 S^- 表示与有向曲面 S 指向相反的另一侧，则

$$\iint\limits_{S^-}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=-\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}\text{；}$$

（3）若将有向曲面 S 分为两块有向曲面 S_1 与 S_2，且 S_1, S_2 与 S 同侧，则

$$\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{S_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}+\iint\limits_{S_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}\text{.}$$

3．计算

（1）**分面投影法**

若有向曲面 S 的方程为 $z=z(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$， $z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，$R(x,y,z)$ 在 S 上连续，则有

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若曲面 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正向的夹角为锐角，即 S 取上侧，则上式右端取“+”号，否则取“−”号；

若有向曲面 S 的方程为 $x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz},x(y,z)$ 在 D_{yz} 上具有一阶连续偏导数，$P(x,y,z)$ 在 S 上连续，则有

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

若曲面 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴正向的夹角为锐角，即 S 取前侧，则上式右端取“+”号，否则取“−”号；

若有向曲面 S 的方程为 $y=y(z,x),\ (z,x)\in D_{zx},\ y(z,x)$ 在 D_{zx} 上具有一阶连续偏导数，$Q(x,y,z)$ 在 S 上连续，则有

$$\iint_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x;$$

若曲面 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 y 轴正向的夹角为锐角，即 S 取右侧，则上式右端取“+”号，否则取“−”号；

（2）**合一投影法**

若有向曲面 S 的方程为 $z=z(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$， $z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，

$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在 S 上连续，则有

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\pm\iint_{D_{xy}}\boldsymbol{F}[x,y,z(x,y)]\cdot\boldsymbol{n}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 $\boldsymbol{n}(x,y)=(-z_x,-z_y,1)$，若曲面 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正向的夹角为锐角，即 S 取上侧，则右端取“+”号，否则取“−”号.

类似地，若有向曲面 S 的方程为 $x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$，或 $y=y(z,x),\ (z,x)\in D_{zx}$，则可将第二类曲面积分化为 yOz 面上或 zOx 面上的二重积分.

（3）高斯（Gauss）公式

设空间区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 S 所围成，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint\!\!\!\!\oint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V.$$

其中 S 是空间区域 Ω 的边界曲面的外侧.

（4）化为第一类曲面积分

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{dS}$$

$$=\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S=\iint_S[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\,\mathrm{d}S$$

4．应用

流量问题　设空间区域的速度场为

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=P(x,y.z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

S 为区域内一有向光滑曲面，函数 $P(x,y.z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 S 上连续，则在单位时间内流体通过曲面流向指定一侧的流量为

$$\iint_S \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathbf{dS}=\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

（三）场论初步

1．向量场的通量与散度

设有向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 通过有向曲面 S 指定一侧的通量为

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{dS}=\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S$$

其中 $\boldsymbol{n}_0$ 为 S 上任一点 (x,y,z) 处的单位法向量，$\boldsymbol{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，

向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 在点 $\boldsymbol{M}(x,y,z)$ 的散度为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}|_M=\lim_{\Delta V\to M}\frac{\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{A}(M)\cdot\mathbf{dS}}{\Delta V}\,,$$

其中 ΔV 是包含点 M 的任意有界闭区域，S 为 ΔV 的边界，S 分片光滑，$\boldsymbol{n}_0$ 是 S 的单位法向量，ΔV 同时又表示空间区域的体积。

散度的计算公式

设向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在 Ω 内具有一阶连续偏导数，则 $\forall(x,y,z)\in\Omega$ 有，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,,$$

其中 $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ 称为向量微分算子.

通量与散度的关系

高斯公式揭示了向量场的散度与通量的关系，即若空间有界闭区域 Ω 由分片光滑的曲面 S 所包围，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 有连续的一阶偏导数，则

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{A} \,\mathrm{d}V = \oiint_{S} \boldsymbol{A}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}\,.$$

2．**向量场的环量与旋度**

向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(z,y,z)\boldsymbol{j}+R(z,y,z)\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线 L 的环量为

$$\oint_{L} \boldsymbol{A}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = \oint_{L} \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{\tau}_0 \,\mathrm{d}s$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_0$ 为 L 上任意点 (x,y,z) 处与指定方向一致的单位切向量， $\boldsymbol{\tau}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

旋度及其计算公式

设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 在 Ω 上具有连续的一阶偏导数，则 $\forall M(x,y,z)\in\Omega,\ \boldsymbol{A}(x,y,z)$ 点 M 在旋度为

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

环量与旋度的关系

斯托克斯公式揭示了向量场的旋度与环量的关系，即

$$\iint_{S} \mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \int_{L} \boldsymbol{A}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}\,.$$

其中公式左端的 $\mathbf{d}\boldsymbol{S}$ 为有向曲面微元， $\mathbf{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，右端的 $\mathbf{d}\boldsymbol{s}$ 为有向曲线微元， $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$.

3．**梯度、散度、旋度的关系式**

设 $u(x,y,z)$ 为数量场， $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 为向量场，则有

① $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\nabla^2 u=\Delta u$；

其中 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为拉普拉斯算子.

② $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)=\mathbf{0}$；

② $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})=0$.

三、典型例题

例 7.1　计算曲线积分 $\int_L (x+2y)\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$，其中 L 是从点 $(0,1)$ 沿曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\,(x\geq 0)$ 到点 $(1,0)$。

分析　方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 表示的曲线是星形线，如果将方程写为 $y=y(x)$，则积分太复杂，所以用星形线的参数方程 $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$ 计算较为方便. 由于题设 $x\geq 0$， L 从点 $(0,1)$ 沿

星形线到点 $(1,0)$，所以对应起点 $t=\frac{\pi}{2}$，对应终点 $t=0$.

解 星形线 L 的参数方程为：$x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,$，t 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 0，

$$\int_L (x+2y)\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}[(\cos^3 t+2\sin^3 t)(-3\cos^2 t\sin t)+3\sin^2 t\cos^4 t]\,\mathrm{d}t$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos^5 t\sin t+2(1-\sin^2 t)\sin^4 t-(1-\cos^2 t)\cos^4 t]\,\mathrm{d}t$$

$$=3\left[\frac{1}{6}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}+3\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{32}\pi$$

例 7.2 在过点 $O(0,0)$ 与 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1+y^3)\,\mathrm{d}x+(2x+y)\,\mathrm{d}y$ 的值最小。

分析 先求曲线积分，由于积分值是 a 的函数，所以再对 a 求极值.

解 曲线 L 的方程为 $y=a\sin x$，x 从 0 到 π，有

$$I(a)=\int_0^{\pi}[(1+a^3\sin^3 x)+(2x+a\sin x)a\cos x]\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi+2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,\mathrm{d}x+2a\int_0^{\pi}x\cos x\,\mathrm{d}x+a^2\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi+\frac{4a^3}{3}+2ax\sin x\Big|_0^{\pi}-2a\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x+\frac{a^2}{2}\sin^2 x\Big|_0^{\pi}=\pi+\frac{4a^3}{3}-4a.$$

由于 $I'(a)=4a^2-4=4(a^2-1)=0$，可得驻点 $a=\pm1$，因为 $a>0$，所以将 $a=-1$ 舍去，而 $I''(a)=8a,\ I''(1)=8>0$，故 $a=1$ 为极小值点，又因驻点惟一，故为最小值点，从而所求的曲线为 $y=\sin x$.

评注 这是一道第二类曲线积分与一元函数极值的综合题.

例 7.3 计算曲线积分 $I=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，，其中曲线 L 为以下几种情况：

(1) L 是沿椭圆 $4x^2+y^2=4$，其方向为逆时针方向；

(2) L 是沿圆周 $(x-1)^2+y^2=a^2\ (a>0,a\neq1)$，其方向为逆时针方向；

(3) L 是沿曲线 $(x-1)^2+(y-1)^2=1\ (y\geq1)$ 从点 $A(0,1)$ 到点 $B(2,1)$；

(4) L 是从点 $A(-1,0)$ 经点 $B(1,0)$ 到点 $C(-1,2)$ 的路径，AB 为下半圆周，$\overline{BO}$ 为直线段.

分析 在第(1)小题中，虽然椭圆 $4x^2+y^2=4$ 包含原点，但由于曲线方程可代入被积函数，从而可以化解奇点问题.

在第(2)小题中，对于圆周 $(x-1)^2+y^2=a^2\ (a>0,a\neq1)$，当 $a<1$ 时，原点不在圆内，可以用格林公式：当 $a>1$ 时，原点为奇点，即在原点处，P，Q、$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 均不连续，不能直

接用格林公式，需要作挖去奇点的辅助椭圆 L_ε （充分小，顺時针方向），此时，由外闭曲线 L (逆時针)与内闭曲线 L_ε (顺時针)围成的区域(不含奇点)为复连通区域，利用复连通区域的格林公式可求解.

在第(3)小题中， L 是沿曲线 $(x-1)^2+(y-1)^2=1\ (y\geq 1)$ 从点 $A(0,1)$ 到点 $B(2,1)$， 由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关，可选择路径为直线段 $y=1$(x 从 0 到 2)简化计算.

在第(4)小题中，虽然积分与路径无关，但不能选择直线段 $\overline{AC}$ 为路径，只能有两种方法解决：一种方法是作有向线段 $\overline{CA}$，再作挖去奇点的辅助椭圆(充分小)，利用复连通区域的格林公式求解；另一种方法是选择平行于坐标轴的四条直线段(非闭路)作为路径，从而简化计算.

解 (1) $I=\dfrac{1}{4}\int_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\iint\limits_D[1-(-1)]\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1\cdot 2=\pi$.

(2) 这里 $P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$， $Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad (x,y)\neq(0,0)\ ,$$

由 $L:(x-1)^2+y^2=a^2$ 所围成的平面区域记为 D ,

当 $a<1$ 时， $(0,0)\notin D$, $\displaystyle\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$;

当 $a>1$ 时， $(0,0)\in D$, $(0,0)$ 为奇点，在 D 内作一小椭圆 $L_1:4x^2+y^2=\varepsilon^2$ ($\varepsilon>0$,充分小），使得 $L_1\subset D$, 其方向为顺时针方向，于是

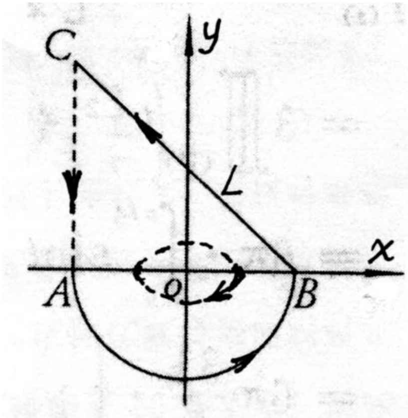
$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}+\oint_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_{L+L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

从而 $\displaystyle\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_{L_1^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}==\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_1^-}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_D 2\mathrm{d}\sigma=\frac{2}{\varepsilon^2}\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=\pi$

其中為逆时针方向.

(3) 由 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$(x,y)\neq(0,0)$ 知曲线积分与路径无关，选择路径为直线段 $\overline{AB}: y=1,\ x$ 从 0 到 2，于是

$$I=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\int_{\overline{AB}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=-\int_0^2\frac{1}{4x^2+1}\mathrm{d}x$$



$$=-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{1+(2x)^2}\mathrm{d}(2x)=-\frac{1}{2}\arctan(2x)\Big|_0^2=-\frac{1}{2}\arctan 4 .$$

(4) 作有向线段 $\overline{CA}: x=-1$，y 从 2 到 0，再在闭路 $L+\overline{CA}$ 内作一小椭圆 $L_\varepsilon: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$ ($\varepsilon>0$,充分小)，其方向为顺时针方向（如图所示），由 L 、$\overline{CA}$ 与 L_ε 所围成的平面复连通区域记为 D，由格林公式得

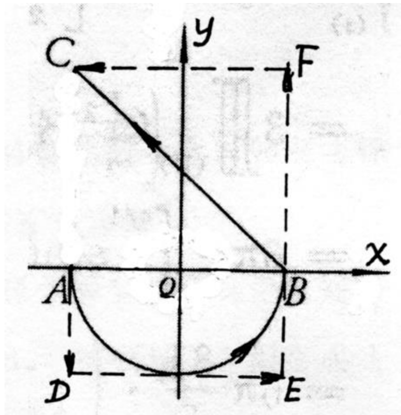
$$\oint_{L+\overline{CA}+L_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0,$$

$$\int_{\overline{CA}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=-\int_2^0\frac{1}{4+y^2}\mathrm{d}y=\int_0^2\frac{1}{4+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{8}$$

$$\oint_{L_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_\varepsilon}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=-\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}\mathrm{d}\sigma=-\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=-\pi ,$$

故 $$I=\int_L=\oint_{L+\overline{CA}+L_\varepsilon}-\int_{\overline{CA}}-\oint_{L_\varepsilon}==0-\frac{\pi}{8}-(-\pi)=\frac{7\pi}{8}$$

[另解] 由 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$(x,y)\neq(0,0)$ 知曲线积分与路径无关，选择路径为直线段 $\overline{AD}\to\overline{DE}\to\overline{EF}\to\overline{FC}$，如图所示.



$\overline{AD}$: $x=-1,\ y$ 从 0 到 -1，$\mathrm{d}x=0$，

$$\int_{\overline{AD}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=-\int_0^{-1}\frac{1}{4+y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2},$$

$\overline{DE}: y=-1,\ x$ 从 -1 到 1，$\mathrm{d}y=0$，

$$\int_{\overline{DE}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4x^2+1}\mathrm{d}x=\arctan 2,$$

$\overline{EF}$: $x=1,\ y$ 从 -1 到 2，$\mathrm{d}x=0,$

$$\int_{\overline{EF}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\int_{-1}^{2}\frac{1}{4+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2},$$

$\overline{FC}: y=2,\ x$ 从 1 到 -1，$\mathrm{d}y=0,$

$$\int_{\overline{FC}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\int_{1}^{-1}\frac{-2}{4x^2+4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_{L}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\left(\int_{\overline{AD}}+\int_{\overline{DE}}+\int_{\overline{EF}}+\int_{\overline{FC}}\right)\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$

$$=\arctan 2+\arctan\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}=\frac{7\pi}{8}.$$

评注 (1) 如果取 $\overline{AC}:\ x=-1\ (y:0\to 2),\ \mathrm{d}x=0$，则

$$\int_{L}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\int_{\overline{AC}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=-\int_{0}^{2}\frac{1}{4+y^2}\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{8}.$$

很容易犯这样的错误，因为闭路 $ABCA$ 包围的区域含有原点，在原点处，P，Q、$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 均不连续，四个等价命题不成立，由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 不能推出积分与路径无关.

(2) 在计算的最后一步利用了公式 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

(3) 因为曲线积分 $\int_{L}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$ 被积函数的分母为 $4x^2+y^2$，所以作挖去奇点的辅助曲线(充分小)选择椭圆 $L_{\varepsilon}:4x^2+y^2=\varepsilon^2$，是为了后面对曲线 L_{ε} 上的积分简单. 如果分母改变，则挖去奇点的辅助曲线也要相应地改变.

(4) 这是一道被积函数满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 的综合题，由于原点为奇点，四种积分曲线不同，因此有不同的解决方法.

例 7.4 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有一阶连续导数，计算曲线积分

$$I=\int_{L}\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

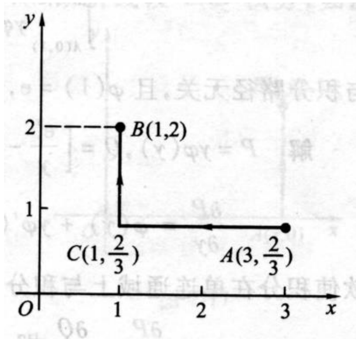
其中 L 是从点 $A\left(3,\frac{2}{3}\right)$ 到 $B(1,2)$ 的直线段.

分析 容易判定 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，因而曲线积分与路经无关，这时计算曲线积分有两种方法：一是选择计算比较简单的路径，如平行于坐标轴的直线段；二是求出全微分函数 $u(x,y)$；在求 $u(x,y)$ 时，注意到 $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right),\ \mathrm{d}(xy)=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$.

解 1 因为 $P=yf(xy)+\frac{1}{y},\ Q=xf(xy)-\frac{x}{y^2}$，所以

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

由此可见，除 x 轴外处处连续，只要从 $A\left(3,\frac{2}{3}\right)$ 到 $(1,2)$ 的折线段 L 不通过 Ox 轴，曲线积分与积分路径无关.，因此可选择 L 为 $\overline{AC}+\overline{CB}$ （如图所示），于是



$$\overline{AC}: y=\frac{2}{3}\ (x:3\to 1),\ \mathrm{d}y=0$$

$$\int_{\overline{AC}}\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$$

$$=\int_3^1\left[\frac{3}{2}+\frac{2}{3}f\left(\frac{2}{3}x\right)\right]\mathrm{d}x=-3-\frac{2}{3}\int_1^3 f\left(\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x$$

$$\overline{CB}: x=1\ (y:\frac{2}{3}\to 2),\ \mathrm{d}x=0$$

$$\int_{\overline{CB}}\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y=\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left[f(y)-\frac{1}{y^2}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{2}{3}}^{2}f(y)\mathrm{d}y+\left[\frac{1}{y}\right]_{y=\frac{2}{3}}^{y=2}=\int_{\frac{2}{3}}^{2}f(y)\mathrm{d}y-1$$

$$I=\int_{\overline{AC}+\overline{CB}}\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$$

$$=-3-\frac{2}{3}\int_1^3 f\left(\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^{2}f(y)\mathrm{d}y-1=-4+0=-4.$$

其中 $$\frac{2}{3}\int_1^3 f\left(\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x=\int_1^3 f\left(\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}\left(\frac{2}{3}x\right)\overset{y=\frac{2}{3}x}{=\!=\!=}\int_{\frac{2}{3}}^{2}f(y)\mathrm{d}y$$

解 2　由于曲线积分与积分路径无关.，知 $[\frac{1}{y}+yf(xy)]\mathrm{d}x+[xf(xy)-\frac{1}{y^2}]\mathrm{d}y$ 在 D 内必为某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分.　因为

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right),\qquad f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=f(xy)\mathrm{d}(xy)=\mathrm{d}\left(\int_1^{xy}f(t)\mathrm{d}t\right),$$

所以 $$[\frac{1}{y}+yf(xy)]\mathrm{d}x+[xf(xy)-\frac{1}{y^2}]\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}+\int_1^{xy}f(t)\mathrm{d}t\right)$$

故 $$I=\left(\frac{x}{y}+\int_1^{xy}f(t)\mathrm{d}t\right)\Bigg|_{\left(3,\frac{2}{3}\right)}^{(1,2)}=\frac{1}{2}+\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t-\frac{9}{2}-\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t=-4.$$

解 3　由于曲线积分与积分路径无关.，所以将被积函数重新组合得

$$I=\int_L\left(\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right)+f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$$

$$=\int_{A(3,\frac{2}{3})}^{B(1,2)}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}+\int_{A(3,\frac{2}{3})}^{B(1,2)}f(xy)\,\mathrm{d}(xy)$$

$$=\int_{A(3,\frac{2}{3})}^{B(1,2)}\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)+\int_2^2 f(u)\,\mathrm{d}u\ \ (u=xy)=\left[\frac{x}{y}\right]_{(3,\frac{2}{3})}^{(1,2)}=\frac{1}{2}-\frac{9}{2}=-4.$$

评注 解 2 与解 3 计算更简单，故当$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$时，在可能情况下，求出全微分函数$u(x,y)$计算更简单 ； 注意在解 2 中用积分上限函数求全微分函数.

例 7.5 设$Q(x,y)$在xOy平面具有一阶连续偏导数，曲线积分$\int_L 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$与路径无关，并且对任意的$t$，恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

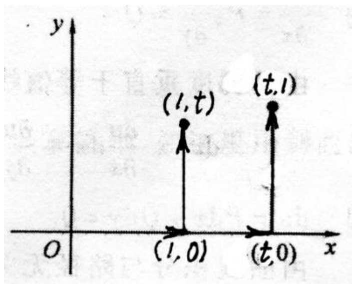
求$Q(x,y)$.

分析 由曲线积分与路径无关的条件$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，容易求出$Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$，为了求$\varphi(y)$,可用两种方法：一是由于积分与路径无关，可以选择平行于坐标轴的直线段，分别计算从$(0,0)$到$(t,1)$的积分与从$(0,0)$到$(1,t)$的积分；二是由四个等价条件知，必存在函数$u(x,y)$, 使得$\mathrm{d}[u(x,y)]=2xy\,\mathrm{d}x+[x^2+\varphi(y)]\,\mathrm{d}y$,利用观察与积分上限函数, 容易求出$u(x,y)$, 于是已知条件可写为$u(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(t,1)}=u(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,t)}$，从而可以求解.

解 由曲线积分与路径无关的条件得$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$, 对$x$积分得$Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$，下面用两种方法求$\varphi(y)$.

方法一 选择平行于坐标轴的折线段，分别计算曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,\mathrm{d}x+[x^2+\varphi(y)]\,\mathrm{d}y$$



$$=\int_{(0,0)}^{(t,0)}2xy\,\mathrm{d}x+[x^2+\varphi(y)]\,\mathrm{d}y+\int_{(t,0)}^{(t,1)}2xy\,\mathrm{d}x+[x^2+\varphi(y)]\,\mathrm{d}y$$

$$=0+\int_0^1[t^2+\varphi(y)]\,\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,\mathrm{d}x+[x^2+\varphi(y)]\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(0,0)}^{(1,0)}2xy\,\mathrm{d}x+[x^2+\varphi(y)]\,\mathrm{d}y+\int_{(1,0)}^{(1,t)}2xy\,\mathrm{d}x+[x^2+\varphi(y)]\,\mathrm{d}y$$

$$=0+\int_0^t[1+\varphi(y)]\,\mathrm{d}y=t+\int_0^t\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

由已知条件有 $$t^2+\int_0^1\varphi(y)\,\mathrm{d}y=t+\int_0^t\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

两端关于 t 求导得 $2t=1+\varphi(t)$， $\varphi(t)=2t-1$，

于是 $$Q(x,y)=x^2+\varphi(y)=x^2+2y-1.$$

方法二 $$2xy\,\mathrm{d}x+[x^2+\varphi(y)]\,\mathrm{d}y=2xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y+\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{d}(x^2y)+\mathrm{d}\left(\int_0^y\varphi(u)\,\mathrm{d}u\right)=\mathrm{d}[x^2y+\int_0^y\varphi(u)\,\mathrm{d}u]$$

因曲线积分与路径无关，由已知条件得

$$\left(x^2y+\int_0^y\varphi(u)\,\mathrm{d}u\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(t,1)}=\left(x^2y+\int_0^y\varphi(u)\,\mathrm{d}u\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(1,t)},$$

即 $$t^2+\int_0^1\varphi(u)\,\mathrm{d}u=t+\int_0^t\varphi(u)\,\mathrm{d}u,$$

两端关于 t 求导得 $2t=1+\varphi(t),\quad \varphi(t)=2t-1,$

因此 $$Q(x,y)=x^2+\varphi(y)=x^2+2y-1.$$

评注 本题在求 $u(x,y)$ 时，利用了积分上限函数求原函数；并且利用了由于定积分是常数，故 $\left(\int_0^1\varphi(u)\,\mathrm{d}u\right)'=0.$

例 7.6 判断 $[(x+y+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}x+[\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}y$ 是否是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，若是，求出这个函数 $u(x,y)$.

分析 由曲线积分与路径无关的四个等价条件知，判断是否是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，需验证 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$；求 $u(x,y)$ 有以下三种方法，即分组凑微分法，特殊路径法，积分法.

解 由 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 可知，$[(x+y+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}x+[\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}y$ 是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分。

求 $u(x,y)$ 有以下三种方法：

（1）**分组凑微分法**：因为

$$[(x+y+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}x+[\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}y$$

$$=[(x+1)\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}x+[\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^y-(y+1)\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}y$$

$$=(x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+(y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y)-(\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y)-(y+1)\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{d}(x\mathrm{e}^x)+\mathrm{d}(y\mathrm{e}^x)-\mathrm{d}(x\mathrm{e}^y)-\mathrm{d}(y\mathrm{e}^y)$$

$$=\mathrm{d}(x\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^y-y\mathrm{e}^y).$$

所以 $u(x,y)=x\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^y-y\mathrm{e}^y+C$

$$=(x+y)\mathrm{e}^x-(x+y)\mathrm{e}^y+C=(x+y)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y)+C\,.$$

(2) **特殊路径法**: 利用曲线积分与积分路径无关的条件, 沿折线段 $(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$ 积分，有

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}[(x+y+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y]\mathrm{d}x+[\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y]\mathrm{d}y$$

$$=\left(\int_{(0,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}\right)[(x+y+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y]\mathrm{d}x+[\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x[(x+1)\mathrm{e}^x-1]\mathrm{d}x+\int_0^y[\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^y-(y+1)\mathrm{e}^y]\mathrm{d}y$$

$$=x\mathrm{e}^x-x+y\mathrm{e}^x-(x\mathrm{e}^y-x)-y\mathrm{e}^y+C$$

$$=(x+y)\mathrm{e}^x-(x+y)\mathrm{e}^y+C=(x+y)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y)+C.$$

(3) **积分法：**

设 $\mathrm{d}[u(x,y)]=[(x+y+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y]\mathrm{d}x+[\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y]\mathrm{d}y$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(x+y+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y,$$

由第一式得到

$$u(x,y)=\int[(x+y+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y]\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^y+\varphi(y),$$

上式两边对 y 求偏导数，得到

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^y+\varphi'(y),$$

由上式与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y$ 比较，可知 $\varphi'(y)=-(y+1)\mathrm{e}^y$，所以 $\varphi(y)=-y\mathrm{e}^y+C$，故

$$u(x,y)=x\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^y-y\mathrm{e}^y+C$$

$$=(x+y)\mathrm{e}^x-(x+y)\mathrm{e}^y+C=(x+y)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y)+C.$$

评注 比较三种方法，以分组法求全微分函数 $u(x,y)$ 最简单.

例 7.7 设在上半平面 $D=\{(x,y)\,|\,y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0\,.$$

分析 由曲线积分与路径无关的等价条件知，对 D 内的任意有向简单闭曲线 L

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$$

的充分必要条件是对任意$(x,y)\in D$，有$\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$，因此只要证明这一等式成立就行了.

证　$\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}[y\,f(x,y)]-\dfrac{\partial}{\partial x}[-x\,f(x,y)]=2\,f(x,y)+y\,f_2'(x,y)+x\,f_1'(x,y)$

由已知，对任意的$(x,y)\in D$及$t>0$都有

$$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y),$$

两边对t求导，得

$$x\,f_1'(tx,ty)+y\,f_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y),$$

令$t=1$，得

$$2\,f(x,y)+x\,f_1'(x,y)+y\,f_2'(x,y)=0,\qquad 即\quad \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0,$$

故
$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}\,x-xf(x,y)\,\mathrm{d}\,y=0.$$

评注　本题是一道综合题，涉及到二元复合函数的导数，其难点在于为了得到$yf_2'(x,y)+xf_1'(x,y)$，在等式$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$两边对t求导.

例 7.8　已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，$L$为$D$的正向边界，试证:

（1）$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}\,y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}\,x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\,\mathrm{d}\,y-y\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}\,x$;

（2）$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}\,y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}\,x\ge 2\pi^2$.

证 1　（1）根据格林公式，得

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}\,y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}\,x=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

$$\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\,\mathrm{d}\,y-y\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}\,x=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

由轮换对称性有

$$\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}\,\sigma=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

故
$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}\,y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}\,x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\,\mathrm{d}\,y-y\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}\,x.$$

（2）由于$\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\ge 2$，故由（1）及轮换对称性知

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}\,y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}\,x=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}\,\sigma=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}\,\sigma\ge\iint_D 2\,\mathrm{d}\,\sigma=2\pi^2.$$

证 2　L为从点$(0,0)\to(\pi,0)\to(\pi,\pi)\to(0,\pi)\to(0,0)$的四条折线段

（1）　左边$=\left(\int_{(0,0)}^{(\pi,0)}+\int_{(\pi,0)}^{(\pi,\pi)}+\int_{(\pi,\pi)}^{(0,\pi)}+\int_{(0,\pi)}^{(0,0)}\right)x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}\,y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}\,x$

$$=0+\int_0^{\pi}\pi\,\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}\,y-\int_{\pi}^{0}\pi\,\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}\,x+0=\pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}\,x,$$

$$右边=\left(\int_{(0,0)}^{(\pi,0)}+\int_{(\pi,0)}^{(\pi,\pi)}+\int_{(\pi,\pi)}^{(0,\pi)}+\int_{(0,\pi)}^{(0,0)}\right)x\mathrm{e}^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=0+\int_0^{\pi}\pi\mathrm{e}^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{0}\pi\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x+0=\pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}x.$$

所以 $$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

（2）由于 $\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\geq 2$，故由（1）得

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}x\geq\pi\int_0^{\pi}2\,\mathrm{d}x=2\pi^2.$$

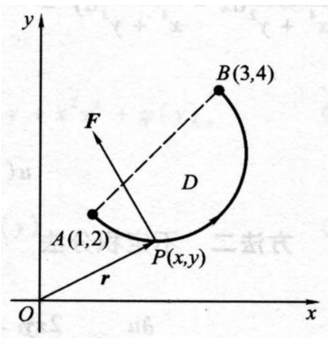
评注　在证法 1 中，利用了二重积分的轮换对称性，即将区域 D 的边界方程的 x 与 y 对换，区域 D 不变，$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\,\mathrm{d}\sigma$，从而有

$$\iint\limits_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\,\mathrm{d}\sigma,\qquad \iint\limits_D\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}\sigma.$$

在证明不等式中，常利用不等式：$x+\dfrac{1}{x}\geq 2\ (x>0)$.

例 7.9　质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 作用，如图所示，$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 $\overline{OP}$，且与 y 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$，求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 作的功 W.

分析　根据第二类曲线积分的物理意义，变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 作的功为 $W=\int_{AB}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{ds}$，因此，关键是要求出力 $\boldsymbol{F}$ 的表达式，即力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 轴与 y 轴的两个分量. 设质点 P 的坐标为 (x,y)，显然 $x>0,y>0,$，则 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$；由题设力 $\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，所以 $|\boldsymbol{F}|=\sqrt{x^2+y^2}$；由题设 $\boldsymbol{F}\perp\overrightarrow{OP}$，所以 $\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{OP}=0$；由题设 $\boldsymbol{F}$ 与 y 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\boldsymbol{F}$ 在 x 轴的投影为负，$\boldsymbol{F}$ 在 y 轴的投影为正；于是，力 $\boldsymbol{F}$ 的表达式必为 $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$..



解 1　设质点 P 的坐标为 (x,y)，显然 $x>0,y>0,$，由题设，根据以上分析，变力 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}.$$

由题设圆的方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=(\sqrt{2})^2$，其参数方程为

$$\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos\theta\\ y=3+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases},\quad\left(-\frac{3}{4}\pi\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\right),$$

故 $$W=\int_{AB}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{ds}=\int_{AB}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta=2(\pi-1)$$

解 2 补上直线段 $\overline{BA}$，直线段 $\overline{BA}$ 的方程为 $y=x+1$ (x 从 3 到 1)，利用格林公式有

$$W=\int_{AB}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\oint_{AB+\overline{BA}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_3^1[-(x+1)+x]\mathrm{d}x$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot(\sqrt{2})^2+\int_3^1\mathrm{d}x=2(\pi-1).$$

评注 本题的关键是要根据已知条件写出力的表达式，要从力的大小与方向来分析.

例 7.10 计算曲面积分 $I=\iint_S 2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 S 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ $(z\geq 0)$ 的外侧.

分析 本题采用分面投影法或合一投影法都较复杂. 虽然曲面 S 不是封闭曲面，但只要补一个平面就可利用高斯公式求解.

解 补有向圆片 $S_1:\begin{cases}z=0\\x^2+y^2\leq 1\end{cases}$，取下侧. 设 S 和 S_1 所围成的闭区域为 Ω. 则由高斯公式得

$$\oiint_{S+S_1}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=6\iiint_\Omega(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V=6\iiint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}V+6\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}V$$

$$=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}r^2\,\mathrm{d}z+6\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\mathrm{d}\sigma\qquad D(z):x^2+y^2\leq 1-z$$

$$=12\pi\int_0^1 r^3(1-r^2)\,\mathrm{d}r+6\pi\int_0^1 z(1-z)\,\mathrm{d}z=2\pi$$

对平面 S_1 的积分用分面投影法，因 S_1 垂直于 yOz 面与 zOx 面，所以

$$\iint_{S_1}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0,\qquad \iint_{S_1}2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=0,$$

又 S_1 取下侧，从而有

$$\iint_{S_1}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0+0-\iint_{D_{xy}}(-3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\pi,$$

故

$$I=\left(\oiint_{S+S_1}-\iint_{S_1}\right)2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi-3\pi=-\pi.$$

评注 (1) 在对非封闭曲面用高斯公式时，需补平面或曲面，对所补平面或曲面积分时，需用分面投影法计算，所以分面投影法是计算第二类曲面积分的基本方法.

(2) 在用高斯公式后得到 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V$，这时已是三重积分，不能将曲面方程 $x^2+y^2+z=1$ 代入被积函数，而得到 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$，应避免犯这样的错误.

例 7.11　计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=1\ (-1\le z\le 1)$ 的外侧.

分析　如果用高斯公式，不仅需补上下两个平面，而且原点为奇点，即被积函数在原点没有定义，本题只有一项，所以就用分面投影法，即将曲面积分转化为 yOz 面上的二重积分. 首先，将曲面方程要化为 yOz 面上的二元单值函数 $x=\sqrt{1-y^2}$, $x=-\sqrt{1-y^2}$ (需求两个曲面上的积分)，并代入被积函数；其次，考察曲面所在侧的法向量与 x 轴的正向夹角为锐角时，二重积分前取正号，夹角为钝角时，二重积分前取负号. 最后，在投影区域 $D_{yz}=\{(x,y)\,|\,-1\le y\le 1,-1\le z\le 1\}$ 上计算二重积分.

解　(分面投影法)　将圆柱面分为前、后两部分，记

$$S_{前}\text{：}\ x=\sqrt{1-y^2}\text{，}\ S_{后}\text{：}\ x=-\sqrt{1-y^2}\text{，}\ D_{yz}=\{(x,y)\,|\,-1\le y\le 1,-1\le z\le 1\}\text{，}$$

$$I=\iint\limits_{S_{前}}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{S_{后}}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

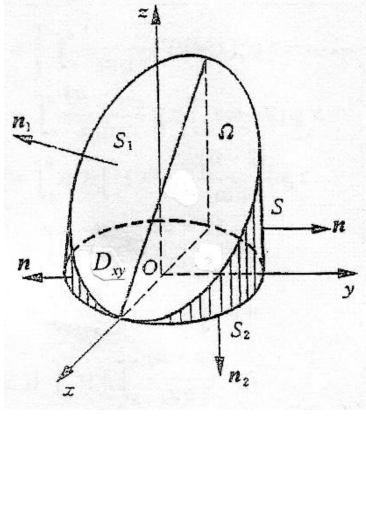
$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{xy}}\frac{-\sqrt{1-y^2}}{1+z^2}(-\mathrm{d}y\mathrm{d}z)=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=8\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\int_0^1\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z=8\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\arctan z\right)\Big|_0^1=8\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}\pi^2$$

评注　用分面投影法计算曲面积分时，一定要注意投影到哪个坐标面，从而曲面方程要化为投影区域上的二元单值函数，并代入被积函数；而且要注意曲面所在侧的法向量与垂直于投影面的坐标轴正向的夹角是锐角还是钝角，从而确定二重积分的符号.

例 7.12　计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

分析　曲面 S 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 的一部分，若用高斯公式计算，则需补上下两个平面；考虑到圆柱面 $x^2+y^2=4$ 垂直于坐标面 xOy，所以 $\iint\limits_{S}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，因而也可以用分面投影法计算 $\iint\limits_{S}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.



解 1　补平面 $S_1: z=2-x$（上侧）和平面 $S_2: z=0,\ x^2+y^2\le 4$(下侧)，设 S, S_1, S_2 所围立体为 Ω，Ω 在

xOy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2 \le 4$，如图所示，

由高斯公式有

$$\oiint_{S+S_1+S_2} -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(-1+1)\,\mathrm{d}V=0\,,$$

对平面 S_1 的积分用分面投影法. 因平面 S_1 垂直于坐标面 zOx ,故

$$\iint_{S_1} -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=0\,,$$

$$\iint_{S_1}(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}(2-x+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=12\pi\,,$$

从而 $$\iint_{S_1} -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=12\pi\,;$$

对平面 S_2 的积分用分面投影法. 因平面 S_2 垂直于坐标面 zOx，故

$$\iint_{S_2} -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=0\,,$$

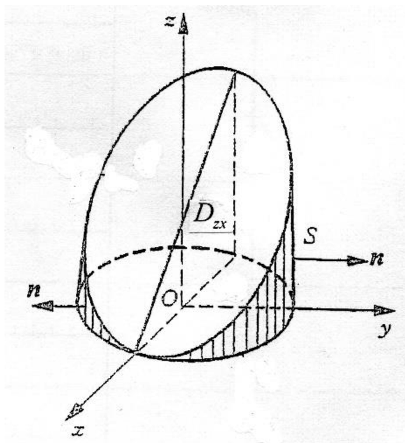
$$\iint_{S_2}(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-4\pi\,,$$

从而

$$\iint_{S_1} -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-4\pi\,,$$

故 $$I=\left(\oiint_{S+S_1+S_2}-\iint_{S_1}-\iint_{S_2}\right)-y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0-12\pi-(-4\pi)=-8\pi\,.$$

解 2 (分面投影法) 如图所示，因平面 S 垂直于坐标面 xOy，故 $\iint_{S}(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$，



将曲面 S 分为两部分 $S_{右}, S_{左}$,其方程分别为

$S_{右}: y=\sqrt{4-x^2}$ (右侧)， $S_{左}: y=-\sqrt{4-x^2}$ (左侧)，

$S_{右}, S_{左}$ 在 zOx 面上的投影为

$$D_{zx}: 0 \le z \le 1-x, -2 \le x \le 2$$

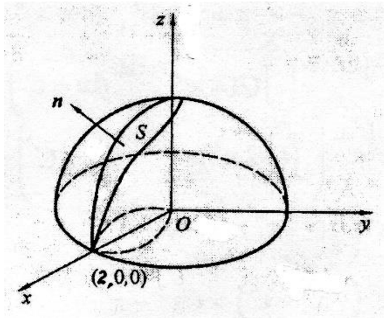
$$\begin{aligned}\iint_{S} -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x&=-\iint_{S_{右}} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-\iint_{S_{左}} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\&=-\iint_{D_{zx}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-\iint_{D_{zx}}(-\sqrt{4-x^2})(-\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x)\\&=-2\iint_{D_{zx}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=-2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{2-x}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}z\\&=-2\int_{-2}^{2}(2-x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=-4\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=-8\pi\end{aligned}$$

其中由对称性及奇函数知 $\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=0$

评注 比较两种方法，由于本题用高斯公式要补两个面，所以直接用分面投影法计算要简单些，可见，并不是任何问题用高斯公式最简单.

例 7.13 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 截下部分的上侧.

分析 本题 S 是球面的一小部分，形状不规则，又非封闭，所以用高斯公式不方便；若用分面投影法计算，需将 S 向三个坐标面分别投影，也比较复杂，所以宜选择合一投影法，由于曲面 S 投影到 xOy 面上是一个圆，所以选择化为 xOy 面上的二重积分，利用公式 $I=\iint\limits_{D_{xy}} \boldsymbol{F}(x,y,z(x,y))\cdot\boldsymbol{n}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 计算.



解 （合一投影法）如图所示，曲面 S 在 xOy 面的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2\le 1\}$，曲面 $S:z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，取上侧，法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴成锐角，于是有

$$\boldsymbol{n}=\left(-z_x,-z_y,1\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},1\right),$$

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2})\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+\sqrt{4-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D_{xy}\text{：}\ 0\le r\le 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}r \quad =8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cdot 2(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-2\sin\theta)\mathrm{d}\theta=8(\pi-2)\,.$$

评注 当用高斯公式和分面投影法计算都比较复杂时，可用合一投影法计算曲面积分，选择投影到哪一个坐标面，取决于曲面方程与投影区域.

例 7.14 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S 2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是平面 $3y-z+1=0$ 被

柱面 $x^2+y^2=4y$ 截下部分的上侧.

分析　由于在面上的投影区域不规则，所以不宜用分面投影法计算；由于曲面 S 是平面的一部分，无法用高斯公式，所以选择合一投影法.

解　（合一投影法）S 是平面 $z=3y+1$ 的一部分，曲面 S 取上侧，法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴成锐角，于是有

$$\boldsymbol{n}=\left(-z_x,-z_y,1\right)=\left(0,-3,1\right),$$

$$I=\iint_{D_{xy}}\boldsymbol{F}[x,y,z(x,y)]\cdot\boldsymbol{n}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\qquad D_{xy}:x^2+(y-2)^2\le 4$$

$$=\iint_{D_{zx}}(2x,-y,-3y-1)\cdot(0,-3,1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_{D_{zx}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-4\pi$$

评注　当用用高斯公式和分面投影法计算较复杂时，一般采用合一投影法.

例 7. 15　计算曲面积分 $I=\iint_S\dfrac{x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(1)　S 为椭球面 $x^2+y^2+4z^2=4$ ，取外侧；

(2)　S 为旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2\ (z\ge 1)$，取上侧.

(3)　S 为球面 $(x-1)^2+y^2+z^2=a^2(a>0,a\ne 1)$ ，取外侧；

(4)　S 为旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2\ (z\ge -2)$，取上侧.

分析　在第(1)小题中，虽然椭球面 $x^2+y^2+4z^2=4$ 包含原点，但由于椭球面方程可代入被积函数，从而可以化解奇点问题.

在第(2)小题中，为了用高斯公式，需补平面 $S_0:z=1\ (x^2+y^2\le 1)$.

在第(3)小题中，对于球面 $(x-1)^2+y^2+z^2=a^2$ ，当 $a<1$ 时，原点不在球面内，可以用高斯公式；当 $a>1$ 时，原点为奇点，即在原点处 $\dfrac{\partial P}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial y},\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 均不连续，不能直接用高斯公式，需要作挖去奇点的辅助椭球面 S_ε （充分小，内侧），使球面 S （外侧）与椭球面 S_ε （内侧）围成的区域不含奇点. .

在第(4)小题中，为了用高斯公式，除了补平面 $S_0:z=-2\ (x^2+y^2\le 4)$ 外，同时还需作挖去奇点的辅助椭球面.

解　(1)　将椭球面方程 $S:x^2+y^2+4z^2=4$ 代入被积函数，设椭球面所围立体为 Ω ，S 为外侧，由高斯公式得

$$I=\frac{1}{8}\iint_{S} x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\iiint_{\Omega} 3\ \mathrm{d}V=\frac{3}{2}\pi,$$

其中椭球的体积为 $\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\pi\cdot 2\cdot 2\cdot 1=4\pi$.

(2) 补平面 $S_0: z=1\ (x^2+y^2\le 1)$,取下侧，$(x,y,z)\ne(0,0,0)$ ，

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{-2x^2+y^2+4z^2}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x^2-2y^2+4z^2}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+y^2-8z^2}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

由高斯公式得 $$\oiint_{S+S_0}\frac{x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

对 $S_0: z=1\ (x^2+y^2\le 1)$ (下侧)的积分用分面投影法，

$$\iint_{S_0}\frac{x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\iint_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4)^{\frac{3}{2}}}\qquad D_{xy}: x^2+y^2\le 1$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4)^{\frac{3}{2}}}=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{(r^2+4)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r=-2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

故 $$I=\left(\oiint_{S+S_0}-\iint_{S_0}\right)\frac{x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

(3) 当 $(x,y,z)\ne(0,0,0)$ 时，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,$

讨论：

① 当 $a<1$ 时， 因 S 所围成的立体 Ω 不包含原点，故由高斯公式有

$$I=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=0$$

② 当 $a>1$ 时，因 S 所围成的立体 Ω 包含原点，在原点处 $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ 均不连续，故不能直接用高斯公式；作椭球面 $S_\varepsilon: x^2+y^2+4z^2=\varepsilon^2$ （$\varepsilon>0$ 充分小）,取内侧， 由高斯公式得

$$\oiint_{S+S_\varepsilon}\frac{x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

在椭球面 $S_\varepsilon: x^2+y^2+4z^2=\varepsilon^2$ （内侧）上积分为

$$\iint_{S_\varepsilon}\frac{x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{S_\varepsilon}x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}V=-\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{2}\varepsilon=-2\pi.$$

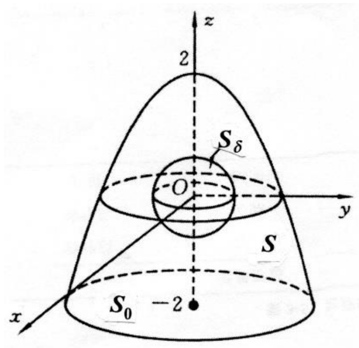
故 $$I=\left(\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1}\right)\frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=0-(-2\pi)=2\pi\,.$$

(4) 如图所示，补平面 $S_0: z=-2\ (x^2+y^2\le 4)$,取下侧,

在 S 内补椭球面 $S_\delta: x^2+y^2+4z^2=\delta^2$（$\delta>0$ 充分小），取内侧,

记 S,S_0,S_δ 所围立体为 Ω ,则由高斯公式，得

$$\iint\limits_{S+S_0+S_\delta}\frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z})\,\mathrm{d}V=0$$



$$\iint\limits_{S_0}\frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+16)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+16)^{\frac{3}{2}}}=4\pi\int_0^2\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+16)^{\frac{3}{2}}}=\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\pi$$

$$\iint\limits_{S_\delta}\frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\delta^3}\iint\limits_{S_\delta}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{\delta^3}\iiint\limits_{\Omega}3dV=-\frac{3}{\delta^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\delta\cdot\delta\cdot\frac{\delta}{2}=-2\pi$$

故 $$I=\left(\iint\limits_{S+S_0+S_\delta}-\iint\limits_{S_0}-\iint\limits_{S_\delta}\right)\frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=0-\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\pi-(-2\pi)=(1+\frac{2}{\sqrt{5}})\pi$$

评注 本题曲面积分的被积函数不变，但对于不同的曲面，用高斯公式处理的方法不同，一要注意利用曲面方程化简被积函数；二要注意积分区域是否为闭区域；三要注意积分闭区域内部是否有奇点.

例 7.16 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S$ ，其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，S 为曲面 $1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\quad(z\ge 0)$ 的上侧.

分析 首先利用两类曲面积分的关系式 $\iint\limits_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S=\iint\limits_S\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}$ ，将 $\iint\limits_S\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S$ 化为第二类曲面积分，为此注意到 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)=\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}_0$,于是

$$\iint\limits_S\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S=\iint\limits_S\frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S=\iint\limits_S\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

其次，注意到 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$, 可用高斯公式计算，但抛物面 $S\ (z\ge 0)$ 开口向下不封闭，又 $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ 在原点不连续，所以作辅助面不能包含原点，为此，既要作辅助面 $z=0$ 使曲

面封闭，又要作辅助面挖去原点.

解　利用 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)=\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{n}_0$ 化为第二类曲面积分

$$\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S=\iint_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

作半球面 $z=\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}$ ($\varepsilon>0$ 充分小)，它与 xOy 面交线为 $\begin{cases}x^2+y^2=\varepsilon^2\\ z=0\end{cases}$，

设 $S_1: z=0\ \left(\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}\le 1,\text{且 } x^2+y^2\ge\varepsilon^2\right), S_2: z=\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}$ 都取下侧，由高斯公式且注意到 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$, 有

$$\iint_{S\cup S_1\cup S_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

因为平面 $S_1: z=0$ 垂直于坐标面 yOz 与 zOx，所以

$$\iint_{S_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

先将曲面方程 $S_2: z=\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}$ (下侧) 代入被积函数，再用合一投影法.

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{-x}{\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}},\frac{-y}{\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}},-1\right)$$

$$\iint_{S_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{S_2}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{D_{xy}}(x,y,\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2})\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}},\frac{-y}{\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}},-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{D_{xy}}\left(\frac{-x^2}{\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}}+\frac{-y^2}{\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}}-\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{r}{\sqrt{\varepsilon^2-r^2}}\mathrm{d}r=-2\pi$$

$$I=\left(\oiint_{S+S_1+S_2}-\iint_{S_1}-\iint_{S_2}\right)\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0+0-(-2\pi)=2\pi$$

评 注　　计 算 $\dfrac{1}{\varepsilon^3}\iint_{S_2}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也 可 用 高 斯 公 式．再 作 辅 助 面

$S_0: z=0\ (x^2+y^2\le\varepsilon^2)$，取上侧，设 S_2 与 S_0 所围成闭区域为 Ω，由高斯公式有

$$\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{S_2+S_0} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}V=-\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{2}{3}\pi\varepsilon^3=-2\pi\,.$$

例 7. 17　设 $\boldsymbol{F}=(x-z,\ x^3+yz,\ 3xy^2)$，求曲面积分 $I=\iint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S$，其中 $\mathbf{rot}\boldsymbol{F}$ 是向量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度，S 是锥面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xOy 平面上方的部分，单位法向量 $\boldsymbol{n}_0$ 指向锥面外.

分析　这是第一类曲面积分，因为

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\,,$$

所以由由两类曲面积分的关系与斯托克斯公式得

$$\iint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S=\iint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

这就转化为 S 的边界曲线 L 上的第二类空间曲线积分，注意 L 的正向与 S 的侧（即法向量的指向）符合右手法则，又注意到 L 是平面曲线，所以可以用格林公式计算.

解　记 $P(x,y,z)=x-z,\ Q(x,y,z)=x^3+yz,\ R(x,y,z)=-3xy^2,$ S 的边界曲线即 xOy 平面上的圆周 $L: z=0, x^2+y^2=4$，由于 L 的正向与 S 的侧（即法向量的指向）符合右手法则，所以 L 取逆时针方向，由斯托克斯公式

$$I=\iint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S=\iint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z,$$

$$=\oint_L (x-z)\,\mathrm{d}x+(x^3+yz)\,\mathrm{d}y-3xy^2\,\mathrm{d}z$$

因为曲线 L 在平面上 $z=0$，所以

$$I=\oint_L x\,\mathrm{d}x+x^3\,\mathrm{d}y$$

记 xOy 平面上 L 围成的平面区域为 D，由格林公式得

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\qquad(D: x^2+y^2\le 4)$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cos^2\theta\cdot r\,\mathrm{d}r=12\pi.$$

评注　注意斯托克斯公式的灵活运用.

例 7.18　计算曲线积分

$$I=\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z,$$

其中空间曲线 Γ 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 与平面 $\frac{x}{2}+z=1$ 的交线，从 z 轴正向往负向看去，曲线 Γ 为逆时针方向。

分析　计算第二类空间曲线积分，主要有两种方法：一是将曲线方程化为参数方程，直接将空间曲线积分化为对参数的定积分；二是利用斯托克斯公式化为第二类曲面积分. 由于从 z 轴正向往负向看去，曲线 Γ 为逆时针方向，故以空间曲线 Γ 为边界的有向曲面 S 的侧与 L 的正向要符合右手法则..

解 1　将空间曲线 Γ 的方程化为参数方程，　圆 $x^2+y^2=4$ 的参数方程为 $x=2\cot t, y=2\sin t,$ 代入 $z=1-\frac{x}{2}$，得曲线 Γ 的参数方程为

$$x=2\cot t,\ \ y=2\sin t,\ \ z=1-\cos t\ \ (0\le t\le 2\pi),$$

于是

$$I=\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\{[2\sin t-(1-\cos t)]\cdot(-2\sin t)+[(1-\cos t)-2\cos t]\cdot 2\cos t+(2\cos t-2\sin t)\cdot\sin t\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(-6+2\sin t+2\cos t)\mathrm{d}t=-12\pi$$

解 2　设以空间曲线 Γ 为边界的有向曲面记为 S，由于从 z 轴正向往负向看去，曲线 Γ 为逆时针方向，所以曲面 S 为上侧. 利用斯托克斯公式有

$$I=\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}$$

$$=-2\iint_S\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中曲面 S 为平面 $z=1-\frac{x}{2}$，其法向量为 $\boldsymbol{n}=(-z_x,-z_y,1)=(\frac{1}{2},0,1)$，用合一投影法得

$$I=-2\iint_{D_{xy}}(1,1,1)\cdot(\frac{1}{2},0,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{D_{xy}}\frac{3}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\cdot\pi\cdot 2^2=-12\pi.$$

评注　除了上述两种常用方法外，还可转化为平面曲线积分来计算，其方法是将空间曲线 Γ 投影到坐标平面得投影曲线 L，从而将空间曲线积分化为平面曲线积分. 以本题为例.

空间曲线 Γ 在坐标平面 xOy 的投影曲线为 $L:x^2+y^2=4$，由 $z=1-\frac{x}{2}$ 得 $\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\mathrm{d}x$，代

入曲线积分，得

$$I=\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{L}[y-(1-\frac{1}{2}x)]\mathrm{d}x+[(1-\frac{1}{2}x)-x]\mathrm{d}y+(x-y)(-\frac{1}{2}\mathrm{d}x)$$

$$=\oint_{L}(\frac{3}{2}y-1)\mathrm{d}x+[(1-\frac{3}{2}x)\mathrm{d}y\text{，}$$

利用格林公式得

$$I=\iint_{D_{xy}}(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\cdot\pi\cdot 2^2=-12\pi\qquad(D_{xy}:x^2+y^2\le 4).$$

例 7.19　计算曲线积分 $I=\int_{AB}\frac{x}{2}\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$，其中 AB 是从 $A(1,0,0)$ 沿圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ y=z\end{cases}$ 的第一卦限部分到点 $B\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$。

分析　本题有两种方法计算：一是参数方程法；二是注意到 $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,$，$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$，则空间曲线积分与路径无关. 只与曲线的始点与终点的坐标有关.

解 1　将 $y=z$ 代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 得 $x^2+2y^2=1$，其参数方程为 $x=\cos t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,$ 故 AB 的参数方程为　$x=\cos t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$，　t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$，代入空间曲线积分得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\cos t(-\sin t)+\frac{1}{2}\sin t\cos t+\frac{1}{2}\sin t\cos t\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}.$$

解 2　注意到　$P(x,y,z)=\frac{x}{2},\ Q(x,y,z)=y,\ R(x,y,z)=z$，

由于

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

所以，空间曲线积分 $\int_{AB}\frac{x}{2}\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$ 与路径无关,且 $\frac{x}{2}\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$ 必是某一函数 $u(x,y,z)$ 的全微分，即 $\frac{x}{2}\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=\mathrm{d}[u(x,y,z)]$，不难看出 $u(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+C$，从而

$$\int_{AB}\frac{x}{2}\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=\int_{(1,0,0)}^{(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}\frac{x}{2}\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$$

$$=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{(1,0,0)}^{(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}=\frac{1}{4}.$$

例 7.20　在变力 $\boldsymbol{F}=yz\,\boldsymbol{i}+zx\,\boldsymbol{j}+xy\,\boldsymbol{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上第一卦限的点$M(\xi,\eta,\zeta)$，问$\xi,\eta,\zeta$取何值时，力$\boldsymbol{F}$所作的功$\boldsymbol{W}$最大？并求出$\boldsymbol{W}$的最大值.

分析　本题需先求出质点由原点沿直线运动到椭球面上第一卦限的点$M(\xi,\eta,\zeta)$时，在变力$\boldsymbol{F}$的作用下所作的功$\boldsymbol{W}(\xi,\eta,\zeta)$，然后再求目标函数$\boldsymbol{W}(\xi,\eta,\zeta)$在条件下$\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}=1$的极值.

解　直线$\overline{OM}$方程为$x=\xi t,\ y=\eta t,\ z=\zeta t,\ t$从0到1，质点由原点沿直线运动点$M(\xi,\eta,\zeta)$力$\boldsymbol{F}$所作的功$\boldsymbol{W}$为

$$W=\int_{\overline{OM}} yz\,\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z=\int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2\,\mathrm{d}t=\xi\eta\zeta\ ,$$

为了求功$\boldsymbol{W}=\xi\eta\zeta$在条件$\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}=1\ (\xi\ge 0,\eta\ge 0,\zeta\ge 0)$下的极值，用拉格朗日乘数法，令

$$F(\xi,\eta,\zeta,\lambda)=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right),$$

由
$$\begin{cases} F_\xi=\eta\zeta+\lambda\dfrac{2\xi}{a^2}=0,\\ F_\eta=\xi\zeta+\lambda\dfrac{2\eta}{b^2}=0,\\ F_\zeta=\xi\eta+\lambda\dfrac{2\zeta}{c^2}=0,\\ F_\lambda=\dfrac{\xi}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

得　$\dfrac{\xi^2}{a^2}=\dfrac{\eta^2}{b^2}=\dfrac{\zeta^2}{c^2}$，　从而　$\dfrac{\xi^2}{a^2}=\dfrac{\eta^2}{b^2}=\dfrac{\zeta^2}{c^2}=\dfrac{1}{3}$，　于是得

$$\xi=\frac{a}{\sqrt{3}},\ \eta=\frac{b}{\sqrt{3}},\ \zeta=\frac{c}{\sqrt{3}},$$

由于驻点$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$惟一，且该实际问题最值存在，该点必为所求的最值点，故质点由原点沿直线运动到点$M\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$时，力$\boldsymbol{F}$所作的功$\boldsymbol{W}$最大，功的最大值为

$$W_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{9}abc.$$

评注　这是一道第二类曲线积分的应用与求条件极值的多个知识点的综合题.

例 7. 21　设$f(r)$二阶可导，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，计算 $\mathrm{div}[\mathbf{grad}\,f(r)]$，并求函数$f(r)$使$\mathrm{div}[\mathbf{grad}\,f(r)]=0$.

分析　div[**grad** $f(r)$]表示先求的梯度(向量) $\mathbf{grad}\, f(r)=\left(\dfrac{\partial f(r)}{\partial x},\ \dfrac{\partial f(r)}{\partial y},\ \dfrac{\partial f(r)}{\partial z}\right)$，再求梯度的散度，即若 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$，则 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$.

解　$\mathbf{grad}\, f(r)=\left(\dfrac{\partial f(r)}{\partial x},\ \dfrac{\partial f(r)}{\partial y},\ \dfrac{\partial f(r)}{\partial z}\right)$

$$=f'(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial r}{\partial y},\ \frac{\partial r}{\partial z}\right)=f'(r)\left(\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r}\right)$$

$$\mathrm{div}[\mathbf{grad}\, f(r)]=\frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f'(r)\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(f'(r)\frac{z}{r}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)\frac{x}{r}\right)=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\frac{r-x\frac{x}{r}}{r^2}=\frac{x^2}{r^2}f''(r)+\frac{f'(r)}{r}-\frac{x^2}{r^3}f'(r).$$

类似地可得

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f'(r)\frac{y}{r}\right)=\frac{y^2}{r^2}f''(r)+\frac{f'(r)}{r}-\frac{y^2}{r^3}f'(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(f'(r)\frac{z}{r}\right)=\frac{z^2}{r^2}f''(r)+\frac{f'(r)}{r}-\frac{z^2}{r^3}f'(r)$$

故
$$\mathrm{div}[\mathbf{grad}\, f(r)]=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0,$$

此为可降价的二阶方程，令 $f'(r)=p(r)$，则 $f''(r)=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$，代入上方程得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}+\frac{2}{r}p=0,$$

分离变量解得
$$p=\frac{C_1}{r^2},$$

即
$$\frac{\mathrm{d}\,f(r)}{\mathrm{d}\,r}=\frac{C_1}{r^2},$$

积分得
$$f(r)=\frac{1}{r}C_1+C_2.$$

评注　注意函数 $f(x,y,z)$ 的梯度 $\mathbf{grad}\, f$ 是向量，向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ 是标量.