概率统计 A 参考答案（2016 年 A 卷）

一、填空题

1. $\frac{1}{2}$； 2. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$； 3. $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=4$； 4. $\begin{pmatrix} Z \\ \boldsymbol{P} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0.12 & 0.46 & 0.42 \end{pmatrix}$；

5. 0.63； 6. $\frac{1}{12}$； 7. $\frac{1}{20}$，$\frac{1}{100}$； 8. $\boldsymbol{t}(4)$； 9. $[4.51, 5.49]$

二、论述题

没有固定答案，只要把参数的区间估计的置信区间和假设检验的接收域联系起来就可得 2 分，如果能通过举例具体的说明他们之间的关系（可只就一种情况说明），可得满分。

三、计算题

11. 设 $\boldsymbol{A_i}$ 表示第一次从袋中取出 i 个新球，$\boldsymbol{i}=0,1,2,3,$

B 表示第二次从袋中取出 3 个新球

(1)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) &= \sum_{\boldsymbol{i}=0}^{3} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A_i})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A_i}) \\ &= \frac{\boldsymbol{C}_3^3}{\boldsymbol{C}_{12}^3}\cdot\frac{\boldsymbol{C}_9^3}{\boldsymbol{C}_{12}^3} + \frac{\boldsymbol{C}_3^2\cdot\boldsymbol{C}_9^1}{\boldsymbol{C}_{12}^3}\cdot\frac{\boldsymbol{C}_8^3}{\boldsymbol{C}_{12}^3} + \frac{\boldsymbol{C}_3^1\cdot\boldsymbol{C}_9^2}{\boldsymbol{C}_{12}^3}\cdot\frac{\boldsymbol{C}_7^3}{\boldsymbol{C}_{12}^3} + \frac{\boldsymbol{C}_9^3}{\boldsymbol{C}_{12}^3}\cdot\frac{\boldsymbol{C}_6^3}{\boldsymbol{C}_{12}^3} \\ &= \frac{1\times 84}{220\times 220} + \frac{27\times 56}{220\times 220} + \frac{108\times 35}{220\times 220} + \frac{84\times 20}{220\times 220} \\ &= \frac{7056}{48400} \approx 0.1458\end{aligned}$$
7 分

(2)
$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_3|\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_3)\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}_3)}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})} = \frac{\frac{84\times 20}{220\times 220}}{\frac{7056}{48400}} = \frac{5}{21} \approx 0.2380$$
10 分

12. （1）当 $\boldsymbol{x}<-1$ 时，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=0$；

当 $\boldsymbol{x}\ge 1$ 时，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=1$；

设 $\boldsymbol{I}\subset(-1,1)$ 区间，由已知条件有 $\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{I}|-1<\boldsymbol{x}<1\}=\boldsymbol{k}|\boldsymbol{I}|$，取 $\boldsymbol{I}=(-1,1)$，得 $\boldsymbol{k}=\frac{1}{2}$，

$\boldsymbol{P}\{-1<\boldsymbol{X}<1\}=1-\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=-1\}-\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=1\}=\frac{5}{8}$，当 $-1\le\boldsymbol{x}<1$ 时，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}\le\boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{P}\{-1\le\boldsymbol{X}\le\boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=-1\} + \boldsymbol{P}\{-1<\boldsymbol{X}\le\boldsymbol{x}\} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{\boldsymbol{x}+1}{2}\times\frac{5}{8} = \frac{5}{16}\boldsymbol{x} + \frac{7}{16}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \dfrac{5}{16}x+\dfrac{7}{17}, & -1\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$ 8 分

（2） $P\{X<0\}=F(0^-)=F(0)=\dfrac{7}{16}.$ 10 分

13. （1） $\because \quad 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^2(x^2+Axy)dxdy$

$$=\int_0^1(2x^2+2Ax)dx=\frac{2}{3}+A,$$

3 分

$$\therefore \quad A=\frac{1}{3}$$

（2） 当$0\le x\le 1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^2(x^2+\frac{xy}{3})dy=2x^2+\frac{2}{3}x\,,$$

所以 $f_X(x)=\begin{cases}2x^2+\dfrac{2}{3}x, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当$0\le y\le 2$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1(x^2+\frac{xy}{3})dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y\,,$$

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y, & 0\le y\le 2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 7 分

（3） $P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{1-x}(x^2+\frac{xy}{3})dy$

$$=\int_0^1(\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{6}x^3)dx=\frac{7}{72}$$ 10 分

14. （1） U,V 的分布律分别为$\begin{pmatrix}U\\P\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}V\\P\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

所以U,V 的联合分布律为

$P\{U=0,V=0\}=\dfrac{1}{4}$; $P\{U=0,V=1\}=0$; $P\{U=1,V=0\}=\dfrac{1}{4}$; $P\{U=1,V=1\}=\dfrac{1}{2}$;

4 分

（2）UV 的分布律为$\begin{pmatrix} UV \\ P \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，

所以有 $E(U)=\frac{3}{4},\quad D(U)=\frac{3}{16},\quad E(V)=\frac{1}{2},\quad D(V)=\frac{1}{4},$

$E(UV)=\frac{1}{4},\quad Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{8},$

故 $\rho=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)D(V)}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$ 10 分

15. （1）X 的密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0<x\le\theta; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{\theta} x\cdot\frac{1}{\theta}dx=\frac{\theta}{2}$，令 $E(X)=\overline{X}$，即有 $\frac{\theta}{2}=\overline{X}$，得 θ 的矩估计量为 $2\overline{X}$，又因为 $E(2\overline{X})=2E(\overline{X})=\theta$，所以 $2\overline{X}$ 为 θ 的无偏估计量。 5 分

（2）似然函数为 $L(\theta)=\begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0<x_i\le\theta, \quad i=1,2,\cdots n; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

显然当 $\theta>0$ 时，$L(\theta)$ 是单调减函数，即 θ 越小，$L(\theta)$ 就越大，但 $\theta\ge\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$。所以 $\overline{\theta}=\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 是 θ 的最大似然估计量。又因为 $E(\overline{\theta})=E(\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\})=\frac{\theta}{2}\ne\theta$，所以 $\overline{\theta}=\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 是 θ 的有偏估计量。 10 分

16. 提出假设 $H_0:\mu=500,\quad H_1:\mu\ne 500,$，

选取检验统计量 $U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$， 4 分

由样本数据，得 $\overline{x}=502,\quad U_0=\frac{502-500}{6/\sqrt{9}}=1,\quad u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$，故拒绝域为 $|W|>1.96$，由于 $|U_0|=1<1.96$，所以接受 H_0，故可以认为该机器工作是正常的。

10 分