诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

湖南大学课程考试试卷

课程名称：概率统计 A；课程编码：GE03004；试卷编号：A；考试时间：120 分钟

一、填空题（每题 3 分，共 18 分）

1、在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码，则最小号码为 5 的概率为（ $\frac{1}{12}$ ）.

2、设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=A(\frac{1}{2})^k, k=1,2,3,4$，则 $P\{\frac{3}{2}<X<\frac{7}{2}\}=$（ 0.4 ）.

3、设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 2 和 -2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 -0.5，则根据切比雪夫不等式有 $P\{|X+Y|\geq 6\}\leq$（ $\frac{1}{12}$ ）.

4、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 已知，σ^2 未知。从该总体中抽取容量为 4 的样本 X_1,X_2,X_3,X_4，则 $Y=\frac{X_3-X_4}{\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(X_i-\mu)^2}}$ 服从的分布为（ $t(2)$ ）（要写出自由度）.

5、设总体 $X\sim N(0,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为来自该总体的一组简单随机样本，则 $Y=\frac{9X_1^2}{\sum_{i=2}^{10}X_i^2}$ 服从的分布为（ $F(1,9)$ ）（要写出自由度）.

6、有一组来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本，其样本均值为 5. 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为（ $(4.412,5.588)$ ）.

（$\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95$）

二、计算题（7 题-9 题每题 6 分，10 题-11 题每题 8 分，共 34 分）

7、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1,\\ 0,\ \ 其他,\end{cases}$ 用 Y 表示 X 的 3 次独立重复观察中事件 $\{X\le\frac{1}{2}\}$ 出现的次数，求 $P\{Y\le 1\}$ 的值.

解：由题可知 $Y\sim B(3,p)$，这里 $p=P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4}$ ....分

故 $P\{Y\le1\}=P\{Y=0\}+P\{Y=1\}=(\frac{3}{4})^3+3\cdot\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{32}$. ....分

8、设 X 和 Y 为两个随机变量，且 $P\{X\ge0,Y\ge0\}=\frac{2}{5}, P\{X\ge0\}=P\{Y\ge0\}=\frac{3}{5}$，求 $P\{\max\{X,Y\}\ge0\}$ 的值.

解：$P\{\max\{X,Y\}\ge0\}=1-P\{\max\{X,Y\}<0\}=1-P\{X<0,Y<0\}$

$$=1-[1-P\{(X\ge0)\cup(Y\ge0)\}]$$

$$=P\{X\ge0\}+P\{Y\ge0\}-P\{X\ge0,Y\ge0\}$$ ....分

$$=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$ ....分

9、设 $W=(2X-Y)^2, E(X)=E(Y)=0, D(X)=4, D(Y)=9, \rho_{XY}=0.5$，求 $E(W)$ 的值.

解：因为 $E(X^2)=E^2(X)+D(X)=4,\quad E(Y^2)=9$

$$E(XY)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}+E(X)E(Y)=0.5\times2\times3=3$$ ....分

所以 $E(W)=E((2X-Y)^2)=E(4X^2-4XY+Y^2)=4E(X^2)-4E(XY)+E(Y^2)$

$$=4\times4-4\times3+9=13$$ ....分

10、设 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度.

解：因为 $X \sim N(0,1)$，所以 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

而 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X^2+1\le y\}=P\{X^2\le \frac{y-1}{2}\}$

当 $y\le 1$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\le \frac{y-1}{2}\}=0$，所以 $f_Y(y)=0$，...........分

当 $y>1$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\le \frac{y-1}{2}\}=P\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le \sqrt{\frac{y-1}{2}}\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

所以 $$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}$$

故 $$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1,\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$$ ....分

11、设 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}x, 0\le x\le 2, \max\{0,x-1\}\le y\le \min\{1,x\},\\ 0,\quad 其他\end{cases}$，求 X 和 Y 的边缘概率密度.

解：因为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

所以 当 $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=\int_0^x xdy=x^2$，

当 $1\le x\le 2$ 时，$f_X(x)=\int_{x-1}^1 xdy=2x-x^2$，

故 $$f_X(x)=\begin{cases}x^2, 0\le x\le 1,\\ 2x-x^2, 1\le x\le 2,\\ 0,\quad 其他\end{cases}$$ ....分

因为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

所以 当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_y^{y+1}xdx=y+\frac{1}{2}$，

故 $f_Y(y)=\begin{cases} y+\dfrac{1}{2}, 0\le y\le 1, \\ 0, \ \text{其他} \end{cases}$ ....分

三、应用题（每题 12 分，共 48 分）

12、一学生接连参加同一课程的两次考试，第一次及格的概率为 0.6. 若第一次及格则第二次及格的概率为 0.8，若第一次不及格则第二次及格的概率为 0.4.（1）若至少一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率；（2）若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

解：设 A_i 表示该生第 i 次及格，$i=1,2$，

（1）设 B 表示该生取得该资格，

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$$

$$=0.6\times0.8+0.4\times0.4=0.64$$

$$P(B)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2|A_1)$$

$$=0.6+0.64-0.48=0.76$$

..........分

（2）$P(A_1|A_2)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_2)}=\dfrac{0.6\times0.8}{0.64}=0.75$ ....分

13、设长方形的高（以米计）$X\sim U(0,2)$，已知长方形的周长（以米计）为 20，求长方形面积 A 的数学期望与方差.

解：因为 $X\sim U(0,2)$ 所以 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, 0<x<2, \\ 0, \ \text{其他} \end{cases}$，

而 $A=X\cdot(10-X)=10X-X^2$， $E(X)=1, D(X)=\dfrac{1}{3}, E(X^2)=E^2(X)+D(X)=\dfrac{4}{3}$，

$$E(A^2)=E((10X-X^2)^2)=100E(X^2)-20E(X^3)+E(X^4)$$

$$=100\times\frac{4}{3}-20\int_0^2(x^3\cdot\frac{1}{2})dx+\int_0^2(x^4\cdot\frac{1}{2})dx$$

$$=\frac{400}{3}-40+\frac{16}{5}=\frac{1448}{15}$$ ....分

于是，$E(A)=E(10X-X^2)=10E(X)-E(X^2)=10-\frac{4}{3}=\frac{26}{3}$

$$D(A)=E(A^2)-E^2(A)=\frac{1448}{15}-(\frac{26}{3})^2=\frac{964}{45}$$ ....分

14、设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66 分，标准差为 15 分，那么在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？

（$t_{0.025}(35)=2.0301, t_{0.025}(36)=2.0281, t_{0.05}(35)=1.6896, t_{0.05}(36)=1.6883$）

解：设该次考试的考试成绩为 X，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

提出假设　$H_0:\mu=70, H_1\neq 70$

选取检验统计量 $T=\frac{\overline{X}-70}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0为真}{\sim}t(35)$，

由 $t_{0.025}(35)=2.0301$　得拒绝域为 $W=\{|t|>2.0301\}$

而 $|t|=\left|\frac{66-70}{15/\sqrt{36}}\right|=\frac{24}{15}=1.6<2.0301$，

所以接受假设 H_0，即在该显著性水平下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分 ....分

15、设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, x>0,\\ 0,\ 其他\end{cases}$，其中 $\lambda>0$ 为未知参数. $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的一组简单随机样本，分别用矩估计法和极大似然估计法求 λ 的估计量.

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda^2 xe^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}$，令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\frac{2}{\lambda}=\overline{X}$

故 λ 的矩估计量为 $\frac{2}{\overline{X}}$. ....分

（2）似然函数为 $L(\lambda)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i}, x_i>0,\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$

当 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 时， $L(\lambda)>0$ ，且有 $\ln L(\lambda)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$ ，

令 $\frac{d(\ln L(\lambda))}{d\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ ，得 $\lambda=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{2}{\overline{x}}$ ，

故 λ 的极大似然估计量为 $\frac{2}{\overline{X}}$. ....分