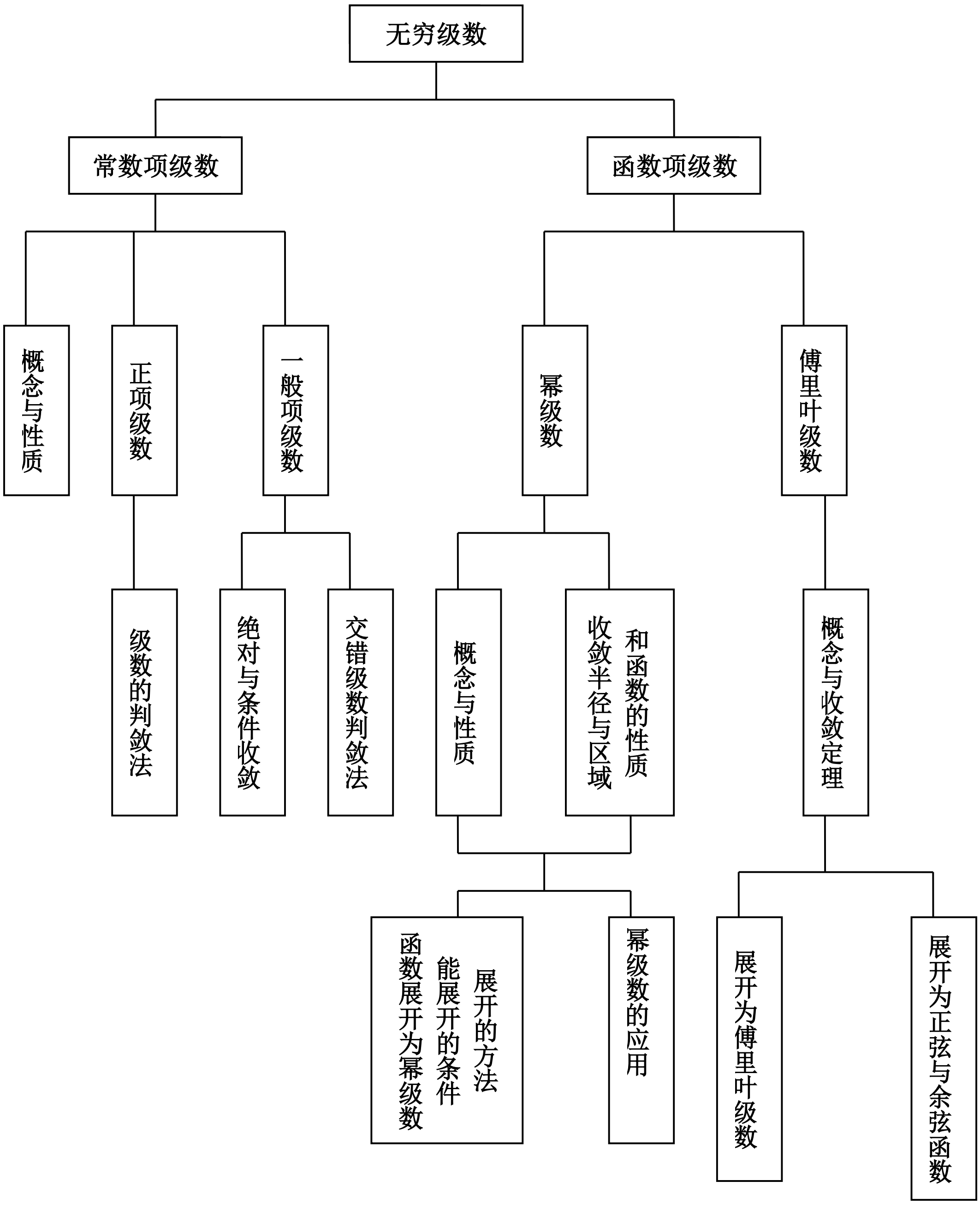
第八章 无穷级数



(一) 常数项级数

1、常数项级数的基本概念

(1)、给定一个数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

由这个数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为常数项无穷级数，记为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$， u_n称为常数项级数的一般项。

(2)、由无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的前n项部分和构成的数列$\{S_n\}$有极限S，即$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是收敛的，并称$S$是级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的和，记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots 。$$

称$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的余项。如果部分和数列$\{S_n\}$没有极限，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是发散的。

(3)、若$u_n \geq 0 \ (n = 1,2,\cdots)$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数。

(4)、设$u_n > 0 \ (n = 1,2,\cdots)$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$或$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$是交错级数。

(5)、设u_n是任意实数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是任意项级数，其中各项绝对值所构成的级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$称为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的绝对值级数。

(6)、设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是任意项级数，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛；如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛。

2、常数项级数的基本性质

(1)、如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，其和为S，则它的各项同乘以一个常数k后，所得的级数$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$也收敛，其和为$kS$。

(2)、设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均收敛，其和分别为S和σ，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$也收敛，其和为$S \pm \sigma$。

(3)、在级数的前面部分去掉或加上有限项，不改变级数的敛散性；然而，在收敛的条件下，其级数的和一般要改变。

(4)、如果一个级数收敛，加括号后的级数也收敛；反之不然，即如果加括号后的级数收敛，原级数未必收敛.

3、常数项级数收敛的必要条件

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

4、正项级数的判敛法

(1)、正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件是它的前n项和数列$\{S_n\}$有界。

(2)、比较判敛法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，且存在自然数N和正数k，使得$u_n \leqslant k v_n$ $(n = N+1, N+2, \cdots)$，则有如下结论：

（i）如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

（ii）如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

值得注意的是，通常用作比较判敛法的两个级数是几何级数和$p-$级数，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{发散}, & |q| \geqslant 1. \end{cases} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛}, & p > 1; \\ \text{发散}, & p \leqslant 1. \end{cases}$$

比较判别法的极限形式：

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 < l < +\infty),$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛或同时发散。

(3)、比值判敛法(达朗贝尔判别法)

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho \quad (0\le\rho\le+\infty).$$

则当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；当 $\rho=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛，也可能发散。

(4)、根值判敛法(柯西判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho \quad (0\le\rho\le+\infty),$$

则当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；当 $\rho=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛，也可能发散。

5、交错级数的判敛法

莱布尼茨判别法 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足如下条件:

(1) $u_n\ge u_{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 是收敛的，且其和 $S\le u_1$，其余项 R_n 的绝对值 $|R_n|\le u_{n+1}$。

6、任意项级数的判敛法

任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的判敛法为:

(1)、$\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 是否成立，若成立进行下一步判定，否则级数发散。

(2)、判定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 是否收敛，若收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，否则进行下一步判定。

(3)、利用莱布尼茨判别法或根据定义和性质来判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是否收敛，若收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，否则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

值得注意的是，当利用比值判敛法和根值判敛法判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$的敛散性时，有如下结论：

如果满足$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$，则当$\rho<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛；当$\rho>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；当$\rho=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$可能绝对收敛，可能条件收敛，也可能发散.

（二）、幂级数

1、函数项级数的基本概念

(1)、给定一个区间I上定义的函数列

$$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots,$$

则由这个函数列构成的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

称为定义在区间I上的函数项级数.

(2)、设$x_0\in I$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛，则称$x_0$是函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点；如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$发散，则称$x_0$是函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的发散点．全体收敛点的集合称为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域.

(3)、设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域是$D$，则对$\forall x\in D$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛，其和记为$S(x)$，即$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$。$S(x)$是$x$的函数，一般称$S(x)$为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和函数，或称函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛于$S(x)$.

(4)、形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

的函数项级数称为幂级数，其中$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$称为幂级数的系数.

2、幂级数的收敛区域

(1)、阿贝尔定理：如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0\ (x_0\neq 0)$点收敛，则当$|x|<|x_0|$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛；如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0$点发散，则当$|x|>|x_0|$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散.

(2)、收敛区域：如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个完全确定的正数 R 存在，使得

(i) 当 $|x|<R$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；

(ii) 当 $|x|>R$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散；

(iii) 当 $|x|=R$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可能收敛，也可能发散.

此时幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区域是下列区域之一。

$$(-R,R),\ (-R,R],\ [-R,R),\ [-R,R].$$

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x=0$ 点收敛，规定 $R=0$，收敛区间只有一点 $x=0$；如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对一切 x 值均收敛，规定 $R=+\infty$，收敛区间为 $(-\infty,\ +\infty)$.

R 称为收敛半径。

(3)、收敛半径的确定

设幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho,$$

则有

(i) 当 $\rho\neq 0$ 时，$R=\dfrac{1}{\rho}$；

(ii) 当 $\rho=0$ 时，$R=+\infty$；

(iii) 当 $\rho=+\infty$ 时，$R=0$.

3、幂级数的基本性质

(1)、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内是连续的(如果幂级数在左(右)端点收敛，则和函数 $S(x)$ 在该点右(左)连续)，即对收敛区间内任一点 x_0，均有

$$\lim_{x\to x_0} S(x)=S(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n.$$

(2)、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内是可积的，且对 $\forall x\in(-R,R)$，均有逐项积分公式

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

上式右端的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径(在端点的敛散性可能改变).

(3)、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内是可导的，且对 $\forall x\in(-R,R)$，均有逐项求导公式

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

上式右端的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径(在端点的敛散性可能改变).

4、函数展开为幂级数

(1)、两种幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的**泰勒级数**.

当 $x_0=0$ 时，幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为函数 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**.

(2)、函数能展开为幂级数的条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $N(x_0,\delta_0)$ 内具有任意阶导数， 则函数 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad \forall x\in N(x_0,\delta_0).$$

(3)、函数展开为幂级数的方法

直接展开法和间接展开法。

(4)、常用函数的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1);$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\quad x\in(-1,1];$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\quad x\in(-1,1).$$

(三)傅里叶级数

1、基本概念

(1)、基本的函数序列:

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots,$$

它称为三角函数系.

(2)、设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，如果三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ 的系数由

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx & (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx & (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

确定，则称三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ 是函数 $f(x)$ 的傅里叶级数，记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

常数 a_0，a_n，b_n $(n=1,2,\cdots)$ 称为函数 $f(x)$ 的傅里叶系数.

2、傅里叶级数的收敛定理

狄利克雷充分条件：设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，如果在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点，而且只有有限个极值点，则函数 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且有

（1）当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，有 $S(x)=f(x)$；

（2）当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，有 $S(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

3、奇偶函数的傅里叶级数

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，当 $f(x)$ 展开成傅里叶级数时，有

（1）若 $f(x)$ 是奇函数，则它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

（2）若 $f(x)$ 是偶函数，则它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n = 0 \quad (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

值得注意的是，如果函数 $f(x)$ 仅在区间 $[0,\pi]$ 上有定义，我们可将函数先进行**奇延拓或偶延拓到区间 $[-\pi,\pi]$，然后再进行周期延拓，可以在**区间 $[0,\pi]$ 将函数 $f(x)$ 展开为正弦级数或余弦级数。

4、任意周期函数的傅里叶级数

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上满足狄利克雷收敛定理的条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

对于 $f(x)$ 是以 $2l$ 的周期的奇(偶)函数，则 $f(x)$ 的傅里叶级数是相应正(余)弦级数。$f(x)$ 在 $[0,l]$ 可以展开为正弦级数或余弦级数。

三、典型例题

例 8.1 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，证明：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，反之不真；

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ 收敛；

(3) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{1+u_n}$收敛。

分析 根据级数收敛的必要条件和正项级数的比较判敛法可以证明本题的结论。

证明 (1)因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，由级数收敛的必要条件可知，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，即存在$N$，

当$n>N$时，有$u_n<\dfrac{1}{2}$。由于$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\dfrac{1}{2}u_n$收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum_{n=1}^{N}u_n^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n^2\le\sum_{n=1}^{N}u_n^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2}u_n$$

收敛。反之不真，例如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散。

(2) 因为$\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}\le\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{1}{n^2}\right)\ (n=1,2,\cdots)$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$收敛。

(3) 由于$u_n\ge 0$，所以$\dfrac{u_n}{1+u_n}\le u_n\ (n=1,2,\cdots)$，因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{1+u_n}$收敛。

评注 若$u_n\ne 1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{1-u_n}$也收敛，事实上，由(1)的证明可知，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{1-u_n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n}{1-u_n}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{u_n}{1-u_n}\le\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n}{1-u_n}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{u_n}{1-\frac{1}{2}}=\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n}{1-u_n}+\sum_{n=N+1}^{\infty}2u_n$$

收敛。

例 8.2 证明级数

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$$

收敛。

分析 根据级数一般项的规律，可以转换为一个数列$\{x_n\}$的敛散性，其中$x_1=\sqrt{2}$，

$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}\quad(n=2,3,\cdots)$。

证明 设$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+x_1}$，$x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2+x_2},\cdots,$

$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}},\cdots$，于是无穷级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sqrt{2} + \sqrt{2-x_1} + \sqrt{2-x_2} + \cdots + \sqrt{2-x_{n-1}} + \cdots$$

其中$u_1 = \sqrt{2}$，$u_n = \sqrt{2-x_{n-1}}$ $(n = 2,3,\cdots)$，注意到

$$x_n\sqrt{2-x_{n-1}} = \sqrt{2+x_{n-1}}\sqrt{2-x_{n-1}} = \sqrt{4-x_{n-1}^2} = \sqrt{4-(2+x_{n-2})}$$

$$= \sqrt{2-x_{n-2}} = u_{n-1}$$

所以有

$$u_n = \sqrt{2-x_{n-1}} = \frac{x_n\sqrt{2-x_{n-1}}}{x_n} = \frac{u_{n-1}}{x_n},$$

即
$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1}{x_n}.$$

而$\{x_n\}$单调增，利用归纳法可知$x_n < 2$ $(n = 1,2,\cdots)$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，极限记为$a$，显然$a > 0$，于是有

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2+x_{n-1}} = \sqrt{2+a}$$

可求得$a = 2$，从而有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{2} < 1,$$

所以级数$\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$收敛。

评注　本题可以推广为：对任意的常数$a > 0$，级数

$$\sqrt{a} + \sqrt{a-\sqrt{a}} + \sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a}}} + \sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}} + \cdots$$

是收敛的。

例 8.3 设$x_n > 0$，$y_n > 0$且$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \le \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$ $(n = 1,2,\cdots)$，证明：

(1) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$收敛；

(2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$发散。

分析　由条件可知，要使用比较判敛法来判别收敛性，而不等式$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \le \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$给出了$x_n$与$y_n$能够比较的可能。

证明　由条件 $x_n>0$， $y_n>0$ 且 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\le\dfrac{y_{n+1}}{y_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，我们有

$$\frac{x_n}{x_1}=\frac{x_2}{x_1}\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}\le\frac{y_2}{y_1}\frac{y_3}{y_2}\cdots\frac{y_n}{y_{n-1}}=\frac{y_n}{y_1},$$

即
$$x_n\le\alpha y_n,$$

其中 $\alpha=\dfrac{x_1}{y_1}>0$ 为常数，所以利用正项级数比较判敛法的推论可知：

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛；

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 发散。

评注　在证明级数收敛时，一些运算技巧有利于推出正确的结论。如本例的分子分母同时剩以一个非零数。

例 8.4 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

分析　由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 可知，当 $x\to0$ 时， $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小，若能进一步确定 $f(x)$ 是 x 的 p 阶或高于 p 阶的无穷小，只要 $p>1$，当 n 足够大时， $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 是 $\dfrac{1}{n}$ 的 p 阶或高于 p 阶的无穷小，就可以证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛了。

证明　由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 与函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶连续导数可知， $f(0)=0$、 $f'(0)=0$，利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}$$

于是有

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|=\frac{|f''(0)|}{2},$$

利用函数极限与数列极限的关系，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right|=\frac{|f''(0)|}{2},$$

由于 $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 至少是 $\frac{1}{n}$ 的 2 阶无穷小，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

评注 本题有效地使用了导数和极限的性质，即根据函数的连续性与极限的性质，来确定函数和它的一阶导数在 $x=0$ 点的值，从而确定了 $f(x)$ 至少是 x 的 2 阶无穷小的结论。

本题还可以利用泰勒公式来估计 $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 至少是 $\frac{1}{n}$ 的 2 阶无穷小。

例 8.5 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛。

分析 根据数列单调减少且有下界，所以数列 $\{a_n\}$ 的极限存在，只要证明数列的极限大于零，利用根值判敛法，就可以给出级数收敛的结论了。

证明 由于正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少且有下界，所以极限存在，记为 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，显然 $a\geq 0$。

若 $a=0$，由莱布尼茨定理可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与题设矛盾，所以 $a>0$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{1+a}<1,$$

利用根值判敛法可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛。

评注 本题还可利用比较判敛法和几何级数的收敛性来判别，事实上，由

$$\frac{1}{1+a_n}<\frac{1}{1+a}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n<\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a}\right)^n,$$

后一个级数是公比小于 1 的几何级数。

例 8.6 设 $\lim_{n\to\infty}nu_n=0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(u_n-u_{n-1})$ 收敛，证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 收敛。

分析　首先要找出两个级数前 n 项和之间的关系。

证明　记 $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n-1})$ 的前 n 项和为 S_n，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和为 T_n，于是有

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) \\
&= (u_1 - u_0) + 2(u_2 - u_1) + \cdots + (n-1)(u_{n-1} - u_{n-2}) + n(u_n - u_{n-1}) \\
&= -u_0 - u_1 - \cdots - u_{n-2} - u_{n-1} + nu_n \\
&= -T_n + nu_n,
\end{aligned}
$$

注意到 $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n-1})$ 收敛，可知 $T_n = nu_n - S_n$ 的极限存在，所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛。

评注　在本题的条件下，还可以证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} ku_n$ 收敛, 其中 k 为常数。事实上，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛，利用收敛级数的性质可得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} ku_n$ 收敛。

例 8.7　设有两条抛物线 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$，记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n，两条抛物线所围成的面积为 S_n，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n}$ 的和。

分析　首先求出交点的横坐标的绝对值 a_n，再利用二重积分计算 S_n，最后计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n}$ 的和。

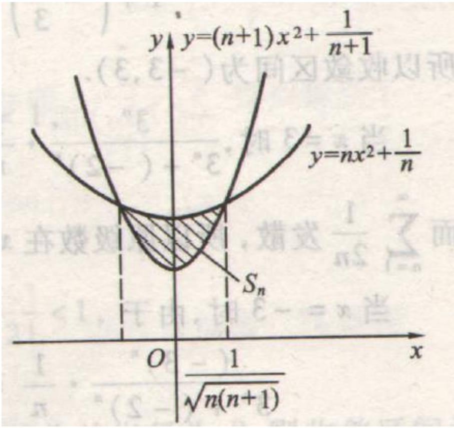


图 8-1

解 如图 8-1 所示，两条抛物线的交点的横坐标是如下方程的解：

$$nx^2+\frac{1}{n}=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1},$$

即交点的横坐标的绝对值为

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{n(n+1)}}.$$

由于所求的面积关于 y 轴对称，我们有

$$\begin{aligned}
S_n&=\iint_{D_n}dxdy\\
&=2\int_0^{a_n}dx\int_{(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}}^{nx^2+\frac{1}{n}}dy\\
&=2\int_0^{a_n}\left[nx^2+\frac{1}{n}-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}\right]dx\\
&=2\int_0^{a_n}\left[\frac{1}{n(n+1)}-x^2\right]dx\\
&=2\left[\frac{a_n}{n(n+1)}-\frac{1}{3}a_n^3\right]=\frac{4}{3}\frac{a_n}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

因此 $\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3n(n+1)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的前 n 项的和为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{a_k}=\frac{4}{3}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right),$$

于是有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}$。

例 8. 8 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$。

分析 首先根据收敛级数余项趋于零，再根据正项数列的单调性，可证明结论。

证明 记 $u_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\lim_{m\to\infty}u_m=0$。因为数列 $\{a_n\}$ 单调减少，所以有

$$na_n=\frac{n}{n-m}(n-m)a_n<\frac{n}{n-m}\left(a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n\right)<\frac{n}{n-m}\sum_{k=m+1}^{\infty}a_k=\frac{n}{n-m}u_m$$

当 n 为偶数时，取 $m=\frac{n}{2}$，当 n 为奇数时，取 $m=\frac{n-1}{2}$，于是有

$$na_n<\frac{n}{n-m}u_m\le 2u_m,$$

显然，当 $n\to\infty$ 时，有 $m\to\infty$，因为 $\lim_{m\to\infty}u_m=0$，所以有 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$。

评注 本题反之不成立，即在 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，数列 $\{a_n\}$ 单调减少的条件下，若 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$ 成立，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 不一定收敛。例如级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，但

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0.$$

例 8. 9 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 的敛散性。

分析 这是交错级数，观察可发现不绝对收敛，由于 $\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 不是单调减少的，所以不能利用莱布尼茨定理来判别，所以只能利用部分和极限来判别敛散性。

解 因为 $|u_n|=\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}\ge\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 不绝对收敛。

考虑前 $2n$ 项的和，有

$$S_{2n}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

显然可知 $\{S_{2n}\}$ 是单调减少的数列，且

$$S_{2n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}>-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

有下界，所以数列$\{S_{2n}\}$的极限存在，记为S，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$，注意到$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，因此有

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=S$，所以级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$条件收敛。

评注　本题可看出，莱布尼茨定理的条件是判别交错级数收敛的充分条件，而不是必要条件。

例 8. 10 求下列幂级数的收敛域与和函数：

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^{n-1}$；　（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{3^n(n+1)(n+2)}x^{n+1}$.

分析　 由于以上三个幂级数都是标准的幂级数的形式，可以根据求幂级数的收敛半径的方法确定收敛半径，然后确定收敛区域，最后找出幂级数的和函数。

解　（1）因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+1}{2n+1}=1,$$

所以幂级数的收敛半径$R=1$。显然幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$在$x=\pm1$均发散，故幂级数的收敛区域为$(-1,1)$。

这里给出两种求幂级数的和函数的解法：

（解法一）利用几何级数的求和方法以及幂级数的分析性质，有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'+\frac{1}{1-x}$$

$$=2x\left(\frac{1}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}\qquad(-1<x<1).$$

（解法二）利用幂级数的加减性质，有

$$S(x)-xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}x^n=1+2\frac{x}{1-x}=\frac{1+x}{1-x},$$

所以有

$$S(x)=\frac{1+x}{(1-x)^2}\qquad\qquad(-1<x<1).$$

(2) 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{2^n n!}{n^2+1}=0,$$

所以幂级数的收敛半径 $R=\infty$，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^{n-1}$ 的收敛区域为 $(-\infty,\infty)$。

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\frac{1}{x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n-1\right]$$

$$=\frac{x+2}{4}e^{\frac{x}{2}}+\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{x},$$

于是有

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{4}e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}\qquad\qquad(-\infty<x<\infty)$$

(3) 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}\frac{3^n(n+1)(n+2)}{n}=\frac{1}{3},$$

所以幂级数的收敛半径 $R=3$。当 $x=\pm 3$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{3^n(n+1)(n+2)}(\pm 3)^{n+1}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}(\mp 1)^{n+1},$$

于是可知，当 $x=3$ 时，级数是交错级数，利用莱布尼茨判别法可知级数收敛，当 $x=-3$ 时，级数是正项级数，易知级数发散，故幂级数的收敛区域为 $(-3,3]$。

我们使用两种方法来求幂级数的和函数。

（解法一）利用幂级数求导的性质，有

$$[xS(x)]'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{3^n} x^n = x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{3^n}\right)'$$

$$= x\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n\right)' = x\left(\frac{\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{3}}\right)' = \frac{3x}{(3+x)^2}$$

当 $x=0$ 时，有 $xS(x)=0$，$[xS(x)]'=0$，于是有

$$[xS(x)]' = \int_0^x [xS(x)]''dx = \int_0^x \frac{3x}{(3+x)^2}dx$$

$$= 3\ln\frac{3+x}{3} + \frac{9}{3+x} - 3$$

$$xS(x) = \int_0^x \left(3\ln\frac{3+x}{3} + \frac{9}{3+x} - 3\right)dx$$

$$= 3(x+6)\ln\frac{3+x}{3} - 6x$$

即
$$S(x) = \begin{cases} 3\left(1+\frac{6}{x}\right)\ln\frac{3+x}{3} - 6, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad (-3 < x \le 3)$$

（解法二）因为 $\frac{n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1}$，当 $x \neq 0$ 时，有

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n(n+2)}x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n(n+1)}x^{n+1}$$

$$= \frac{6}{x}\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^{n+1}dx + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n dx$$

$$= \frac{2}{x}\int_0^x \frac{x^2}{3+x}dx - \int_0^x \frac{x}{3+x}dx$$

$$= \frac{2}{x}\left(\frac{x^2}{2} - 3x + 9\ln\frac{3+x}{3}\right) - \left(x - 3\ln\frac{3+x}{3}\right)$$

$$= 3\left(1+\frac{6}{x}\right)\ln\frac{3+x}{3} - 6$$

即 $$S(x)=\begin{cases}3\left(1+\dfrac{6}{x}\right)\ln\dfrac{3+x}{3}-6, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad (-3<x\leq 3)$$

评注 对于幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+k}$，其中$k$为整数，此时可以讨论幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛区域以及求和函数，然后利用$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+k}=x^k\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$来给出所讨论幂级数的收敛区域与和函数。

例 8. 11 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}$的收敛区域。

分析 由于幂级数缺偶次项，所以只能用一般项函数项级数来处理。

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3\left[1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}}|x|^{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}x^2,$$

于是当$\dfrac{1}{3}x^2<1$时，幂级数绝对收敛，$\dfrac{1}{3}x^2>1$幂级数发散，所以收敛半径为$R=\sqrt{3}$。

当$x=\pm\sqrt{3}$时，幂级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-3)^n+2^n}3^n=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-1)^n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n},$$

由于一般项不趋于零，所以数项级数发散，收敛区域为$\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$。

评注 本题不能利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$和$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$来求幂级数的收敛半径，因为$a_{2n}=0$，$a_{2n-1}=\dfrac{n}{(-3)^n+2^n}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$和$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$均不存在。本题也可利用变换$t=x^2$将幂级数变为$x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2(n-1)}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(-3)^n+2^n}t^{n-1}$，来判别幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(-3)^n+2^n}t^{n-1}$的收敛半径，然后就可以用通常求收敛半径的方法了。

例 8. 12 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$的收敛区域与和函数。

分析 这个函数项级数不是我们研究的幂级数的标准形式，可以利用变量替换，变成幂级数的标准形式。

解 令$u=\dfrac{1-x}{1+x}$，于是函数项级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}u^n$。因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2},$$

所以幂级数的收敛半径$R=2$。显然幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}u^n$在$u=\pm 2$均发散，故幂级数的收敛区域为$(-2,2)$。于是有$-2<u=\dfrac{1-x}{1+x}<2$，解不等式可得到，原级数的收敛区域为$(-\infty,-3)\cup\left(-\dfrac{1}{3},\infty\right)$。

再求级数的和函数，我们有

$$S(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}u^n=u\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}u^{n-1}=u\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}u^n\right)'$$

$$=u\left(\frac{-\frac{u}{2}}{1+\frac{u}{2}}\right)'=-\frac{2u}{(2+u)^2}\qquad(-2<u<2)$$

于是有

$$G(x)=S\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-\frac{2\frac{1-x}{1+x}}{\left(2+\frac{1-x}{1+x}\right)^2}=-\frac{2(1-x^2)}{(3+x)^2}\qquad x\in(-\infty,-3)\cup\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$$

评注 本题可以推广到讨论函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n[f(x)]^n$的收敛区域与求函数项级数的和函数。事实上，令$u=f(x)$，函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n[f(x)]^n$就变成为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n u^n$了，根据幂级数的收敛区域，通过求解不等式就可以求出原函数项级数的收敛区域了。通过幂级数的和函数$S(u)$也可以得到原函数项级数的和函数$G(x)=S[f(x)]$。

例 8. 13 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$(-\infty,\infty)$内收敛，其和函数$S(x)$满足

$$S''-2xS'-4S=0,\qquad S(0)=0,\quad S'(0)=1.$$

（i）证明$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n$，　$n=1,2,\cdots$；

（ii）求函数$S(x)$的表达式。

分析　由于对幂级数的求导不会改变幂级数的收敛半径，所以将幂级数以及它的一、二阶导数代入微分方程，可以证明结论（i），由结论（i）可以求出函数$S(x)$的表达式。

证　（i）：由于$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，我们有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}, \qquad S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

代入微分方程，有

$$S''-2xS'-4S=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$=2a_2-4a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n]x^n=0$$

比较系数可得

$$2a_2-4a_0=0$$

$$(n+2)[(n+1)a_{n+2}-2a_n]=0 \quad (n=1,2,\cdots),$$

注意到$S(0)=0$，可得$a_0=0$，所以$a_2=0$，和

$$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n \quad (n=1,2,\cdots).$$

（ii）：由$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n$ $(n=1,2,\cdots)$和$a_2=0$可知，

$$a_2=a_4=\cdots=a_{2n}=0 \quad (n=1,2,\cdots)。$$

由于$S'(0)=1$，可得$a_1=1$及$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n$ $(n=1,2,\cdots)$，我们有

$$a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\frac{1}{n(n-1)}a_{2n-3}=\cdots=\frac{1}{n!}a_1=\frac{1}{n!},$$

注意到$0!=1$，我们有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x^2\right)^n=xe^{x^2}.$$

评注　可以利用无穷级数来求微分方程的解，例如求微分方程 $S''-2xS'-4S=0$ 的通解，可令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ，得到递推公式

$$a_2=2a_0$$

$$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

于是可得

$$a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\frac{1}{n(n-1)}a_{2n-3}=\cdots=\frac{1}{n!}a_1\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$a_{2n}=\frac{2}{2n-1}a_{2(n-1)}=\frac{2^2}{(2n-1)(2n-3)}a_{2(n-2)}=\cdots=\frac{2^n}{(2n-1)!!}a_0\quad(n=1,2,\cdots)$$

于是有

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}\\&=a_0+a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n-1)!!}x^{2n}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}\\&=a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n-1)!!}x^{2n}\right)+a_1xe^{x^2}\text{。}\end{aligned}$$

例 8. 14　将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开为 x 的幂级数。

分析　将函数展开为幂级数时，利用变量替换法先将 $f'(x)$ 展开为 x 的幂级数，然后利用逐项求导获得 $f(x)$ 的幂级数展开式。

解　对 $f(x)$ 求导，有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1\\&=\frac{1}{1-x^4}-1,\end{aligned}$$

利用变量替换法及基本函数的展开式 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ (x\in(-1,1))$ 来将函数 $f'(x)$ 展开为 x 的幂级数，有

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^4)^n-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n},$$

两边对 x 从 0 到 x 积分，注意到 $f(0)=0$，有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{4n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}\qquad (x\in(-1,1)).$$

评注　对于 $\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，利用变量替换法及基本函数 $\ln(1+x)$ 的展开式可以求得函数 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的幂级数展开式。然后利用 $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx$，变量替换法与基本函数 $\frac{1}{1-x}$ 的展开式可以求得函数 $\arctan x$ 的幂级数展开式，通过相应的幂级数展开式相加可求得 $f(x)$ 的幂级数展开式。

例 8.15 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$

(i) 将函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数；

(ii) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和；

(iii) 计算 $f^{(6)}(0)$ 的值。

分析　首先是将函数 $\arctan x$ 展开成 x 的幂级数的幂级数，然后约取因子 x，再乘以 $1+x^2$ 并化简即可；最后利用展开式，当 x 取特殊值时，求出级数的和。

解　(i)：由于　$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

注意到 $x=\pm 1$ 时，级数均收敛，所以上面展开式的收敛区间是 $[-1,1]$。从而有

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}=(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{1-4n^2}x^{2n}\qquad x\in[-1,1].$$

(ii)：由于 $f(1)=\frac{1+1^2}{1}\arctan 1=\frac{\pi}{2}$，所以有

$$\frac{\pi}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{1-4n^2},$$

所以级数的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

(iii)因为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{1-4n^2}x^{2n}\qquad x\in[-1,1],$$

令 $k=6$，可推得 $n=3$，由展开式的唯一性，我们有

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!}=-\frac{2}{1-4\times 9}=\frac{2}{35},$$

即得

$$f^{(6)}(0)=\frac{2\times 6!}{35}=\frac{288}{7}.$$

评注 逐项积分后保持收敛半径不变，但收敛区间的端点的敛散性可能发生了变化。如 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ 的幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$，而 $\arctan x$ 的幂级数的收敛区间为 $[-1,1]$。

例 8.16 设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数，满足狄利克雷收敛定理的条件，它的傅里叶系数为 a_0， a_n， b_n $(n=1,2,\cdots)$，证明

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

分析 根据函数 $f(x)$ 的傅里叶级数的展开式和三角函数系的正交性来证明 $f^2(x)$ 在一个周期上积分的表达式。

证明 由于函数 $f(x)$ 的傅里叶级数的展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

于是有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\right]^2dx\\
&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left[\frac{a_0^2}{4}+2\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\right)^2\right]dx\\
&=\frac{1}{l}\left[\frac{a_0^2}{4}x\bigg|_{-l}^{l}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{la_0a_n}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\bigg|_{-l}^{l}-\frac{la_0b_n}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\bigg|_{-l}^{l}\right)\right.\\
&\quad\left.+\int_{-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\left(a_m\cos\frac{m\pi}{l}x+b_m\sin\frac{m\pi}{l}x\right)dx\right]\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2\cos^2\frac{n\pi}{l}x+b_n^2\sin^2\frac{n\pi}{l}x\right)dx\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right).
\end{aligned}$$

评注 若 $f(x)$ 是奇函数，则

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2 .$$

若 $f(x)$ 是偶函数，则

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 .$$

例 8.17 设 $f(x)$ 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，且满足 $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，将函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开为傅里叶级数。

分析 根据 $f(x)$ 是偶函数，所以仅需要求出 a_n 即可，再根据 $f(x)$ 满足的条件，通过

换元积分，可以求得 $f(x)$ 的傅里叶级数的展开式。

解 由于 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$ 和

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos nxdx\right]$$

对于上式右端第一个积分，令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，第二个积分，令 $x=\dfrac{\pi}{2}+t$，有

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos n\left(\frac{\pi}{2}+t\right)dt\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\cos n\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right]dt.$$

当 $n=2k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 时，有

$$\cos n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\cos n\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos(k\pi-2kt)-\cos(k\pi+2kt)$$

$$=(-1)^k\cos 2kt-(-1)^k\cos 2kt=0,$$

当 $n=2k+1$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 时，有

$$\cos n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\cos n\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos\left(k\pi-(2k+1)t+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(k\pi+(2k+1)t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=(-1)^k\cos\left(\frac{\pi}{2}-(2k+1)t\right)-(-1)^k\cos\left(\frac{\pi}{2}+(2k+1)t\right)$$

$$=2(-1)^k\sin(2k+1)t$$

所以有

$$a_{2k}=0\ (k=0,1,2,\cdots),$$

$$a_{2k+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)2(-1)^k\sin(2k+1)tdt.$$

上式再作变换 $t=\dfrac{\pi}{2}-x$，有

$$a_{2k+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)2(-1)^k \sin(2k+1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)2(-1)^k \sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-(2k+1)x\right)dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}-(2k+1)x\right)dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2k+1)x dx \quad (k=0,1,2,\cdots),$$

于是可得 $f(x)$ 的傅里叶级数的展开式为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos(2k+1)x,$$

其中

$$a_{2k+1}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2k+1)x dx \quad (k=0,1,2,\cdots,x\in[-\pi,\pi])。$$

评注　$f(x)$ 的傅里叶级数的展开式为余弦级数，而系数为函数 $f(x)$ 与余弦函数的乘积在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的积分。

例 8.18　将定义在区间 $[5,15]$ 上的函数 $f(x)=10-x$ 展开为以 10 为周期的傅里叶级数。

分析　可以利用以 T 为周期的周期函数的积分性质 $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$ 来将函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数，其中 a 为任意实数；也可以采用将区间转换为以 0 为中心的对称区间来将函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数。

解法一：将函数 $f(x)$ 以周期 10 延拓到整个数轴，此时有

$$a_0=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos\frac{2n\pi}{10}xdx,$$

利用换元积分，令 $t=10-x$，有

$$a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5} t\cos\frac{n\pi}{5}tdt=0 \ (n=1,2,\cdots);$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\frac{2n\pi}{10}xdx \\
&= \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}t\sin\frac{n\pi}{5}tdt \\
&= (-1)^{n-1}\frac{10}{n\pi}\ (n=1,2,\cdots)\text{；}
\end{aligned}
$$

所以函数 $f(x)=10-x$ 的傅里叶级数为

$$
10-x=10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}x \qquad x\in(5,10).
$$

解法二：首先将区间$[5,15]$变换为对称区间$[-5,5]$，可令$t=x-10$，则$x=10+t$，可将函数 $f(x)$ 转换为

$$
f(x)=f(10+t)=F(t)=-t\text{，}\quad t\in[-5,5].
$$

显然$F(t)$是奇函数，于是有$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$和

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{5}\int_0^5(-t)\sin\frac{n\pi}{5}tdt = \frac{2}{n\pi}\int_0^5 td\cos\frac{n\pi}{5}t \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[t\cos\frac{n\pi}{5}t\Big|_0^5-\int_0^5\cos\frac{n\pi}{5}tdt\right] \\
&= (-1)^n\frac{10}{n\pi}\quad (n=1,2,\cdots)\text{，}
\end{aligned}
$$

所以函数$F(t)$的傅里叶级数为

$$
-t=10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}t \qquad t\in(-5,5)\text{，}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
10-x &= 10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}(x-10) \\
&= 10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}x \qquad x\in(5,10).
\end{aligned}
$$

评注 若将定义在区间上的函数 $f(x)$ 变换为对称区间上$\left[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}\right]$上的函数$F(t)$，仅需作变换$t=x-\frac{b+a}{2}$，可以获得

$$F(t)=f\left(t+\frac{b+a}{2}\right)\quad t\in\left[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}\right].$$

例 8.19 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是具有二阶连续导数的函数，且

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\,,$$

其中 $a_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数，证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。

分析 根据函数 $f(x)$ 的傅里叶系数的积分表达式，对 $a_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 进行估计，再利用比较判敛法来证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。

证明 由于 $f''(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续，所以存在正数 M，使得

$$|f(x)|\le M\,,\quad |f'(x)|\le M\,,\quad |f''(x)|\le M\quad(\forall x\in[-\pi,\pi]).$$

因为 $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\ (n=0,1,2,\cdots)$，于是有

$$|a_0|=\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\right|\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx\le 2M\quad(\forall x\in[-\pi,\pi]);$$

$$\begin{aligned}
|a_n|&=\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\right|=\frac{1}{n\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)d\sin nx\right|\\
&=\frac{1}{n\pi}\left|f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nxdx\right|\\
&=\frac{1}{n^2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)d\cos nx\right|\\
&=\frac{1}{n^2\pi}\left|f'(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nxdx\right|\\
&\le\frac{1}{n^2\pi}\left[\left|(-1)^n(f'(\pi)-f'(-\pi))\right|+\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|dx\right]\\
&\le\frac{2(1+\pi)M}{n^2\pi}<\frac{4M}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots)
\end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<2M+4M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。

评注 由于 $f''(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续，可知 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上也连续，

在闭区间连续的函数必有最大值和最小值，所以它们的绝对值有界。