2019，1，11，概率考题（答案）

1. (1)

$$P\{X=3\}=\frac{C_1^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10},$$

$$P\{X=4\}=\frac{C_1^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10},\qquad 3\text{ 分}$$

$$P\{X=5\}=\frac{C_1^1C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5},$$

X	**3**	**4**	**5**
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

$$F(x)=\begin{cases}0， & x<3,\\ \frac{1}{10}, & 3\le x<4,\\ \frac{4}{10}, & 4\le x<5,\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}\qquad 5\text{ 分}$$

$$EX=\sum x_k p_k=\frac{45}{10}$$

$$EX^2=\sum x_k{}^2 p_k=\frac{207}{10}\qquad 7\text{ 分}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{207}{10}-\frac{45^2}{10^2}=\frac{1}{5}\qquad 9\text{ 分}$$

2、记 $A=\{X\ge 0\},B=\{Y\ge 0\}$,则

$\{\max(X,Y)\ge 0\}=A\bigcup B,\{X\ge 0,Y\ge 0\}=AB,$ 4 分

从而

$$P\{\max(X,Y)\ge 0\}=P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=P\{X\ge 0\}+P\{Y\ge 0\}-P\{X\ge 0,Y\ge 0\}\qquad 9\text{ 分}$$

$$=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.$$

3、

$P\{x^2+\xi x+1=0\text{有实根}\}$

$=P\{\xi^2-4\ge 0\}$ 3 分

$=P\{|\xi|\geq 2\}=P\{2\leq\xi<6\}$

$=\int_2^6\frac{1}{5}du=\frac{4}{5}=0.8$. 9 分

4、用 A_i 代表"到第 *i* 只箱子"，*i*=1，2，3，用 *B* 代表"取出的球是白球"。 2 分

由全概率公式

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)+P(B|A_3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{53}{120}.$$ 6 分

由贝叶斯公式

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}}{\frac{53}{120}}=\frac{20}{53}.$$ 9 分

5．解 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}<y=P\{\sqrt[3]{X}>1-y\}$$ 3 分

$$=P\{X>(1-y)^3\}$$

$$=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{(1-y)^3}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3\right],$$ 6 分

因此，Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}.$$

9 分

6．（1）$\iint\limits_{全平面}f(x,y)dxdy=1\Rightarrow c=4$ 2 分

（2）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$当0<x<1时,f_X(x)=\int_0^1 4xydy=2x$$

$$当x\leq 0或x\geq 1时,f_x(x)=0$$

$$\therefore f_x(x)=\begin{cases}2x,0<x<1\\0,其它\end{cases}$$

$$同理f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}2y,0<y<1\\0\quad,其它\end{cases}$$

$$当0<x<1,0<y<1时,f(x,y)=f_x(x)\cdot f_Y(y)$$ 4 分

$\therefore$独立

独立，则不相关。 5 分

（注：也可以： $E\left(XY\right)=\int_0^1 dx\int_0^1 4xyxydy=\frac{4}{9}$

其中 D：全平面

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X\left(x\right)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y\left(y\right)dy=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \operatorname{cov}\left(X,Y\right)=EXY-EXEY=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}\bullet\frac{2}{3}=0$$

$$\therefore \rho=0\text{故}X,Y\text{不相关}.$$

）

（3） $F\left(x,y\right)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f\left(x,y\right)dxdy$ 7 分

当$x<0$或$y<0$时, $F\left(x,y\right)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f\left(x,y\right)dxdy=0$

当$0\le x\le 1, y>1$时, $F\left(x,y\right)\int_0^x\int_0^1 4xydxdy=x^2$

当$x>1, 0\le y\le 1, F\left(x,y\right)=\int_0^1\int_0^y 4xydxdy=y^2$

当$x>1, y>1$时, $F\left(x,y\right)=\int_0^1\int_0^1 4xydxdy=1$

$$\therefore F\left(x,y\right)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0\text{或}y<0 \\ x^2y^2 & ,0\le x\le 1\text{且}0\le y\le 1 \\ x^2 & , \quad 0\le x\le 1, y>1 \\ y^2 & , \quad x>1, 0\le y\le 1 \\ 1 & , \quad x>1, y>1 \end{cases}$$ 9 分

7． 解 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{Z+2Y\le z\}=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy.$ 2 分

当 $z\le 0$ 时， $P\{Z\le z\}=0.$ 4 分

当 $z>0$ 时，

$$P\{Z \le z\} = \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)} dy$$

$$= \int_0^z e^{-x} dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-2y} dy = \int_0^z (e^{-x} - e^{-z}) dx \qquad 7 分$$

$$= 1 - e^{-z} - ze^{-z},$$

所以 $Z = X + 2Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 1 - e^{-z} - ze^{-z}, & z > 0. \end{cases} \qquad 9 分$$

8．解

（1） X 服从二项分布，参数 $n = 100, p = 0.2,$ 2 分

$P\{X = k\} = C_{100}^k 0.2^k 0.8^{100-k}, k = 0,1,\cdots,100.$ 4 分

（2） $EX = np = 20, DX = np(1-p) = 16$

根据棣莫佛-拉普拉斯定理

$$P\{14 \le X \le 30\} = P\left\{\frac{14-20}{4} \le \frac{X-20}{4} \le \frac{30-20}{4}\right\}$$

$$= P\left\{-1.5 \le \frac{X-20}{4} \le 2.5\right\}$$

$$\approx \Phi(2.5) - \Phi(-1.5) \qquad 9 分$$

$$= \Phi(2.5) - [1 - \Phi(-1.5)]$$

$$= \Phi(2.5) + \Phi(1.5) - 1$$

$$= 0.944 + 0.933 - 1 = 0.927.$$

9.（1） $EX = \int_\theta^{+\infty} xe^{-(x-\theta)} dx = e^\theta \int_\theta^{+\infty} xe^{-x} dx = \theta + 1$ 2 分

令 $EX = \overline{X}$ 3 分

$\hat{\theta} = \overline{X} - 1$ 4 分

（2） $$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{\sum (x_i - \theta)}}, & x_i \ge \theta, \\ 0, & x_i < \theta. \end{cases} \qquad 6 分$$

记 $x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$，由题意知只需考虑，$x_{(1)} \ge \theta$

$$L(\theta)=\frac{1}{e^{\sum(x_i-\theta)}}\le\frac{1}{e^{\sum(x_i-x_{(1)})}}$$ 7 分

$L(\theta)=\frac{1}{e^{\sum(x_i-\theta)}}$最大，取等号，故

要使$\max L(\theta)=\frac{1}{e^{\sum(x_i-x_{(1)})}}$ 9 分

故取$\theta=x_{(1)}$，于是

$\hat{\theta}=X_{(1)}=\min\left\{X_1,X_2,\cdots X_n\right\}$

10、

(1) 选$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 2 分

查表$t_{\frac{\alpha}{2}}=t_{0.025}(15)=2.132$

由$P\left\{|T|<t_{0.025}(15)\right\}=0.95$得$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{0.025}(15)\right\}=0.95\Rightarrow$

$P\left\{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(15)<\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(15)\right\}=0.95$ 5 分

故$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(15),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(15))$

（9.7868，10.2132）

(2) 选$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 7 分

查表$t_{\frac{\alpha}{2}}=t_{0.025}(15)=2.132$

由$P\left\{|T|>t_{0.025}(15)\right\}=0.05$得

拒绝域:$\left\{|T|>t_{0.025}(15)\right\}$

代入计算得$\left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{10-9.7}{0.4/\sqrt{16}}\right|=3>2.132$

否定H_0,即认为$\mu \neq 9.7$ 9 分

11.

$X \sim N(0,2^2), Y \sim N(1,3^2), \rho = 0, X, Y,$独立. 2 分

$$\frac{X}{2} \sim N(0,1), \frac{Y-1}{3} \sim N(0,1)$$

$$(\frac{X}{2})^2 \sim \chi^2(1)$$

$$(\frac{Y-1}{3})^2 \sim \chi^2(1)$$ 2 分

$$\frac{(\frac{X}{2})^2}{(\frac{Y-1}{3})^2} \sim F(1,1)$$

即$F = \dfrac{9X^2}{4(Y-1)^2} \sim \mathrm{F}(1,1)$ 5 分

12、

由$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立知，$X_1{}^2, X_2{}^2, \cdots, X_n{}^2$独立 2 分

$$E(X_i^2) = DX_i + (EX_i)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

3 分

$$EY_n = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

即由辛钦大数，则对于任意的正数ε，有

4 分

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

故$Y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$依概率收敛于$\dfrac{1}{2}$ 5 分