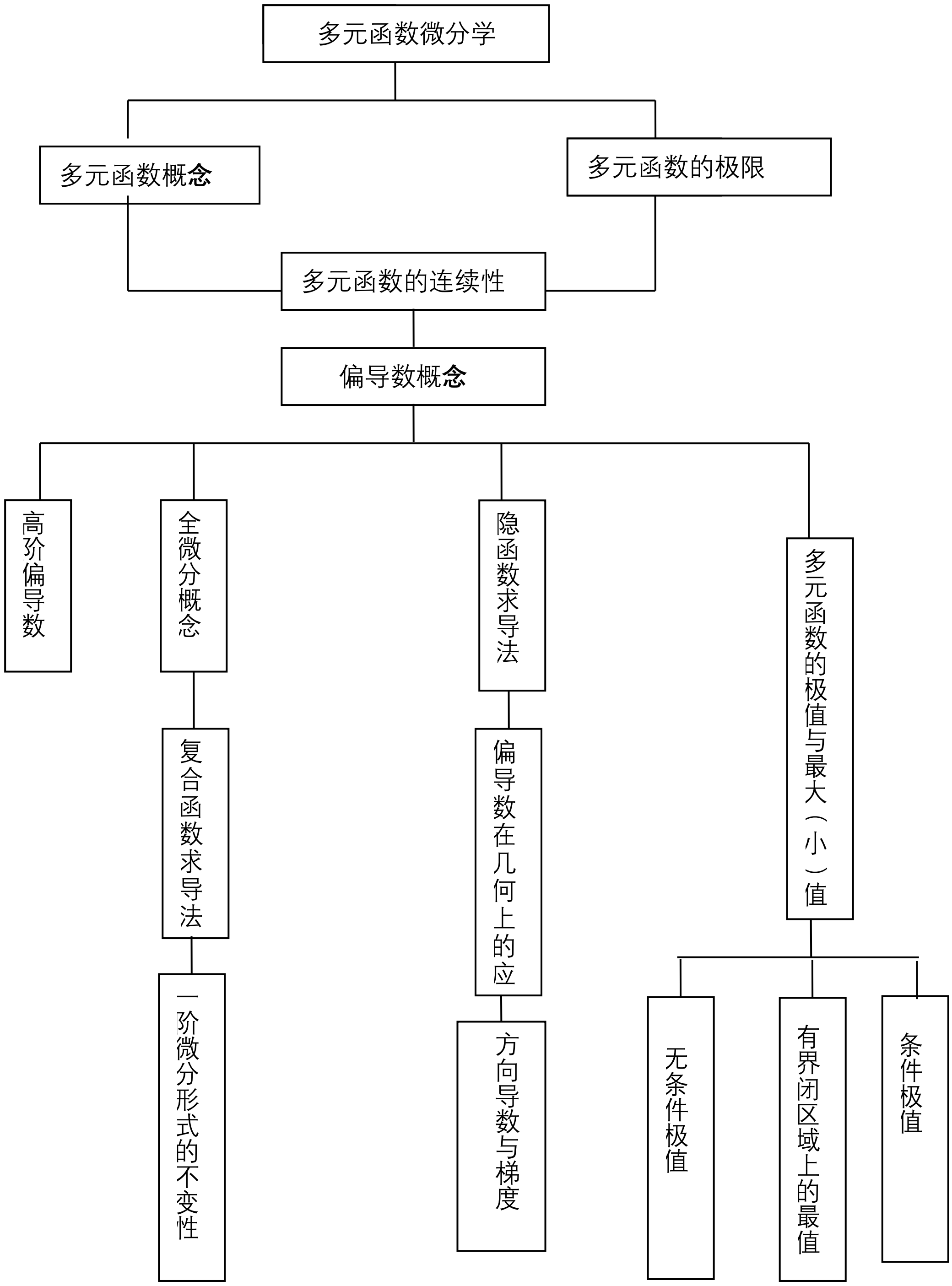
第五章 多元函数微分学



（一） 多元函数的概念

1．二元函数的定义

设有点集 $D \subset R^2$ 与 $Z \subset R$， f 为 D 到 Z 的一个对应规律（或法则），对任意点 $P(x,y) \in D$，由 f 惟一确定的 $z \in Z$ 与之对应，则称 $f: D \to Z$ 为定义在 D 上的一个二元

函数（或点 P 的函数），简记为 $z=f(x,y)$（或 $z=f(P)$）. 其中 x, y 称为自变量，点集 D 称为函数的定义域，记为 D_f； Z 称为值域，记为 Z_f .

2 . 二元函数的极限

设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D_f， $P_0(x_0,y_0)$ 为 D_f 的聚点 . $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|PP_0|<\delta$ 时，有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 或 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$，也将上述极限称为二重极限 .

3 . 二元函数的连续性

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D_f 的聚点，且 $P_0\in D_f$，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续 .

若 P_0 是函数 $f(x,y)$ 的定义域 D_f 的聚点，但 $f(x,y)$ 在 P_0 不连续，则称 P_0 是 $f(x,y)$ 的间断点 .

二元初等函数在其定义区域内是连续函数 .

有界闭区域上的二元函数的性质：

最大值、最小值定理 有界闭区域 D 上的连续函数 $f(x,y)$ 必有最大值和最小值 .

介值定理 设 $f(x,y)$ 是在有界闭区域 D 上的连续函数，且 $f(x_1,y_1)\neq f(x_2,y_2)$，点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 为 D 上两点，μ 为介于 $f(x_1,y_1), f(x_2,y_2)$ 之间的任一数值，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $f(\xi,\eta)=\mu$.

（二） 偏导数

1 . 偏导数的定义

设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义，固定 $y=y_0$，自变量 x 有改变量 Δx，函数相应得到改变量 $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 对 x 的偏导数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \text{或} z_x\Big|_{(x_0,y_0)},\quad f_x(x_0,y_0)$$

类似地定义函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 对 y 的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

还可以记为 $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$ 或 $z_y\Big|_{(x_0,y_0)}$， $f_y(x_0,y_0)$ ．

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处， $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ 均存在，则称它们是 D 上的偏导函数，简称偏导数．

2．偏导数的几何意义

$f_x(x_0,y_0)$ 表示平面曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率．

同理 $f_y(x_0,y_0)$ 表示平面曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=x_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率．

3．高阶偏导数

二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$，它们仍是 x,y 的函数，如果它们的偏导数也存在，再对它们求偏导数，则称为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

其中 $f_{xy}(x,y),\ f_{yx}(x,y)$ 称为二阶混合偏导数．类似地可求三阶、四阶……以至 n 阶偏导数，二阶及二阶以上的偏导数称为高阶偏导数．

定理 设函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f_{xy}(x,y),\ f_{yx}(x,y)$ 在区域 D 内连续，则 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ ．

（三） 全微分及其应用

1．定义

如果函数 $z = f(x,y)$ 的全改变量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ 可以表示为

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)$$

其中，A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$，仅与 x, y 有关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$，则称 Δz 的线性主部 $A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y$ 为函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的全微分，记作

$$\mathrm{d}z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y$$

也称函数在点 $P(x,y)$ 处可微．

2．可微的必要条件

定理一 设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微，则该函数在点 $P(x,y)$ 处的两个偏导数必存在，且

$$A(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad B(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

即

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

自变量 $\Delta x, \Delta y$ 的改变量称为自变量的微分 $\mathrm{d}x = \Delta x, \mathrm{d}y = \Delta y$，于是 $z = f(x,y)$ 的全微分记作

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

定理二 若函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微，则函数在该点一定连续．

3．可微的充分条件

定理三 如果函数 $z = f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P(x,y)$ 处连续，则函数在该点可微．

（四） 多元复合函数的求导法则

1．复合函数的链式求导法则

（1）设$u=\varphi(x,y)$及$v=\psi(x,y)$，在点(x,y)处的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$均存在，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v}$ 连续，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在点$(x,y)$处的偏导数均存在，且有链式求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

（2）设$z=f(u,v),u=\varphi(t),v=\psi(t)$，则复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t)]$对$t$的全导数公式为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

（3）设$z=f(u),u=u(x,y)$，则复合函数$z=f[u(x,y)]$的偏导数公式为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$$

（4）设$z=f(u,x,y),u=u(x,y)$，则复合函数$z=f[u(x,y),x,y]$的偏导数公式为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

2．全微分形式不变性

具有一阶连续偏导数的二元函数$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$，其全微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})\mathrm{d}x+(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})\mathrm{d}y\\&=\frac{\partial f}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y)+\frac{\partial f}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y)=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v\end{aligned}$$

因此，不论u,v是自变量还是中间变量，$z=f(u,v)$的一阶全微分形式一样．

（五）隐函数及其微分法

1．一个方程的情形

隐函数存在定理一　设方程$F(x,y)=0$的左端函数$F(x,y)$满足:

（1）在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数；

（2） $F(x_0, y_0)=0$；

（3） $F_y(x_0, y_0)\neq 0$.

则在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内，由方程 $F(x,y)=0$ 惟一确定单值连续且有连续导数的函数 $y=f(x)$，使得 $F(x, f(x))=0$ 且 $y_0 = f(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

隐函数存在定理二 设方程 $F(x,y,z)=0$ 的左端函数 $F(x,y,z)$ 满足：

（1）在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数 $F_x(x,y,z), F_y(x,y,z),$ $F_z(x,y,z)$；

（2） $F(x_0, y_0, z_0)=0$；

（3） $F_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0$.

则在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内，由方程 $F(x,y,z)=0$ 惟一确定单值连续且有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，满足 $z_0 = f(x_0, y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

2．方程组的情形

隐函数存在定理三 设方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0.\end{cases}$ 的左端函数 $F(x,y,u,v), G(x,y,u,v)$ 满足：

（1）在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数；

（2） $F(x_0, y_0, u_0, v_0)=0, G(x_0, y_0, u_0, v_0)=0$

（3）偏导数所组成的函数行列式（或称雅可比行列式）为

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0$$

则在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 的某一邻域内，方程组恒能惟一确定一组单值连续且有连续偏导数的

函数$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，满足条件$u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{J},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{J},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{J},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{J}$$

（六）微分法在几何上的应用

1．空间曲线的切线和法平面

（1）空间曲线$\Gamma: x=x(t), y=y(t), z=z(t)$在$t=t_0$对应点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

（2）空间曲线$\Gamma: y=y(x), z=z(x)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程为

$$x-x_0=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)}$$

法平面方程为

$$(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$$

（3）空间曲线$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)}$$

其中

$$y'(x_0)=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\Big|_{M_0},\quad z'(x_0)=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\Big|_{M_0}$$

法平面方程为

$$(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$$

2．空间曲面的切平面和法线

定义 在空间曲面Σ上过点M_0的所有光滑曲线的切线，如果能组成一个平面，则称这个平面为曲面Σ在点M_0处的切平面，过点M_0且垂直于该点切平面的直线，称为曲面在点M_0处的法线．

（1） 空间曲面Σ的方程$F(x,y,z)=0$，过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(M_0)}$$

（2） 空间曲面Σ的方程$z=f(x,y)$，过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=z-z_0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{-f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{-f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{1}$$

（七）方向导数与梯度

1．方向导数

设函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的某一邻域内有定义，自点P引射线l，并设点$P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$为$l$上的邻近点，记$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，若极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

存在，则该极限称为函数$f(x,y)$在点P沿l方向的方向导数，记为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_P=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

定理 设函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微，则函数$f(x,y)$在点$P(x,y)$处存在沿任意方向l的方向导数，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta$为l的方向余弦．

类似地可以定义三元函数$u=f(x,y,z)$的方向导数，且对可微的三元函数在点$M(x,y,z)$处沿任何方向l的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为$l$的方向余弦．

2．梯度

定义　设函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微，则向量$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$称为函数$f(x,y)$在点$P$处的梯度，记为$\mathrm{grad}f$或$\nabla f$．

方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$等于梯度在$l$方向上的投影，即

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{grad}f\cdot\mathbf{l}^0=\|\mathrm{grad}f\|\cos<\mathrm{grad}f,\mathbf{l}^0>$$

性质　（1）函数沿梯度方向的方向导数最大，即函数沿梯度的方向增长最快，而增长率就是梯度的模$\|\mathrm{grad}f\|$．

（2）在点$P(x,y)$处的梯度垂直于过点$P(x,y)$的等值线$f(x,y)=C$（C为常数）．

类似地可以讨论三元函数$u=f(x,y,z)$在点$M(x,y,z)$处的梯度为

$$\mathrm{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

（八）多元函数的极值与最大（小）值

1．二元函数的极值

定义　如果函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)\in D_f$的空心邻域$N(P_0)-\{P_0\}$内的任意一点(x,y)，有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\text{（或 }f(x,y)>f(x_0,y_0)\text{）}$$

则称函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 有极大（或极小）值 $f(x_0,y_0)$，极大值、极小值统称为极值．点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为函数的极值点．

极值的必要条件:

定理一 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处具有偏导数 f_x，f_y，且在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处取得极值，则必有 $f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$．

极值的充分条件:

定理二 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内存在二阶连续偏导数，且满足

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

则（1）当 $B^2-AC<0$ 时，函数具有极值，又 $A<0$ 时，有极大值；$A>0$ 时，有极小值．

（2） 当 $B^2-AC>0$ 时，函数没有极值．

（3） 当 $B^2-AC=0$ 时，不能判定，需另作讨论．

其中 $A=f_{xx}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0)$．

2． 条件极值 （拉格朗日乘数法）

求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值的步骤如下:

（1） 作辅助函数 $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$．

（2）令
$$\begin{cases}F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0\\F_y=f_y+\lambda\varphi_y=0\\F_z=f_z+\lambda\varphi_z=0\\F_\lambda=\varphi(x,y,z)=0\end{cases}$$

解出可能极值点 (x_0,y_0,z_0) 及 λ．

（3）根据实际问题的意义判断所求得的可能极值点是否为真正的极值点．

可推广到求 $W=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在条件 $\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0(i=1,2,\cdots,m,m<n)$ 下的极值，等价于求函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的无条件极值．

典型例题

例 5. 1．(1) 已知 $f(x,y)=x^2-y^2$，求 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)$；(2)已知 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

分析：直接利用函数的对应规则.

解 (1) $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=(x+y)^2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$；

(2)令$u=x+y,v=\dfrac{y}{x}$,解得$x=\dfrac{u}{1+v},y=\dfrac{uv}{1+v}$

于是$f(u,v)=\left(\dfrac{u}{1+v}\right)^2-\left(\dfrac{uv}{1+v}\right)^2=\dfrac{u^2(1-v)}{1+v}$,即$f(x,y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$.

评注 此类问题需正确理解函数的定义.

例 5.2 设$u(x,y)=y^2\cdot F(3x+2y)$且满足$u(x,\dfrac{1}{2})=x^2$，求$u(x,y)$.

分析 该问题的关键在于求出 $F(3x+2y)$ 的具体表达式。

解 $u(x,\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}F(3x+1)=x^2,F(3x+1)=4x^2$，令$t=3x+1,x=\dfrac{t-1}{3}$，则

$$F(t)=4(\frac{t-1}{3})^2=\frac{4}{9}(t-1)^2,\quad F(3x+2y)=\frac{4}{9}(3x+2y-1)^2$$

$$\therefore\quad u(x,y)=\frac{4y^2}{9}(3x+2y-1)^2.$$

评注 正确使用变量代换成了解决此类问题的关键.

例 5.3 求下列函数的定义域:

$(1)\ f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$

分析 要使表达式$\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$有意义。

解 分母 $\sqrt{x-y^2}\neq0$，从而 $x-y^2>0$．而分子中的 $3-x^2-y^2$ 满足：$-1\le3-x^2-y^2\le1$，即 $2\le x^2+y^2\le4$．所以函数的定义域为 $D_f:\{(x,y)\,|\,x>y^2,2\le x^2+y^2\le4\}$. .

(2) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$；

解　$D_f:\begin{cases}-1\le \dfrac{x}{y^2}\le 1,\\ -1\le 1-y\le 1\end{cases}\Rightarrow D_f:\begin{cases}-y^2\le x\le y^2,\\ y\ne 0,\\ 0\le y\le 2,\end{cases}$ 或 $D_f=\left\{(x,y)\mid -y^2\le x\le y^2, y\ne 0, 0\le y\le 2\right\}$

（3） $z=\ln(y-x^2)+\sqrt{1-y-x^2}$；

解　$D_f:\begin{cases}y-x^2\ge 0,\\ 1-y-x^2\ge 0,\end{cases}\Rightarrow D_f:\begin{cases}y\ge x^2\\ y\le 1-x^2,\end{cases}$ 或 $D_f=\left\{(x,y)\mid y\ge x^2, y\le 1-x^2\right\}$

评注　此类问题的核心是使表达式有意义

例 5. 4 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$；

分析　转化为一元函数的极限，并利用重要极限的方法去计算.

解 (1)由 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e,\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\dfrac{x}{x+y}=1$，所以

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}[(1+\frac{1}{x})^{x}]^{\frac{x}{x+y}}=e$$

评注　　两个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 在多元时仍实用.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$；

分析　用多元函数的夹逼定理.

由于 $\left|\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{\left|x^2y\right|}{x^2+y^2}\le|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0$，所以由极限的夹逼定理，得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0.$$

评注　　夹逼定理在多元时仍实用.

（3） $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

分析　用无穷小量与有界变量之积仍是无穷小量.

解　因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le 1$，而当 $x\to 0$ 时，$e^{-\frac{1}{x^2}}\to 0$，由无穷小量与有界变量之积仍是无

穷小量，得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

评注　无穷小量与有界变量之积仍是无穷小量多元时仍实用.

（4）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

分析：转化为一元函数的极限后可用洛必达法则.

解 作变量替换$u=x^2+y^2$，则当$x\to\infty, y\to\infty$时，$u\to+\infty$，这样把问题转化为一元函数的极限后可用洛必达法则，有

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{e^u}=0\,.$$

（5）$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}$；

分析　转化为一元函数的重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

解　$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}x\cdot\frac{\sin xy}{xy}=a$.

（6）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}$；

分析　转化为一元函数的重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e.$

解　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left(1+xy\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left[\left(1+xy\right)^{\frac{1}{xy}}\right]^{y}=e^2$.

评注　此类求极限的方法一般是转化为一元函数，或是利用无穷小量与有界变量之积仍是无穷小量、或是利用用洛必达法则、或是利用二个重要极限.

例 5.5 讨论下列极限是否存在：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

分析　利用选取两条特殊路径

$P\to P_0$,函数的极限存在但不相等, 则$\lim\limits_{P\to P_0}f\left(P\right)$不存在.

解　取$y=x$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=1$，

取 $y=\frac{1}{2}x$， $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y=\frac{1}{2}x\to0}}\dfrac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}x^2}=0$. 故原极限不存在.

（2） $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$；

分析 选取不同的特殊路径$P\to P_0$,函数的极限存在但不相等, 则$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$不存在.

解（2）让动点(x,y)沿曲线$y=kx^3$趋于$(0,0)$，则有

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx^3\to0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^6}{x^6+k^2x^6}=\frac{k}{1+k^2}$$

k值不同该极限值也不同，所以该极限不存在．

（3） $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}$

分析 选取不同的特殊路径$P\to P_0$,函数的极限存在但不相等, 则$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$不存在.

解 让动点(x,y)沿曲线$x=ky^2$趋于$(0,0)$，则有

$$\lim_{\substack{x=ky^2\to0\\ y\to0}}\frac{x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}=\lim_{y\to0}\frac{k^3y^8}{(k^2y^4+y^4)^2}=\frac{k^3}{(1+k^2)^2}$$

k值不同该极限值也不同，所以该极限不存在．

评注 此类求极限问题关键是利用不路径极限存在但不相等来确定极限不存在.

例 5.6 讨论下列函数的连续性:

$$(1)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq0\\ 0,\ \ x^2+y^2=0\end{cases};$$

在点$(0,0)$的连续性．

分析 由函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续的定义，要求$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$存在，

且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

解 当自变量沿直线$y=kx$趋于$(0,0)$时，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx\to0}}f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

因此当自变量沿不同的直线$y=kx$（k值不同）趋于$(0,0)$时，函数的极限值不同，因此该

函数在 $(0,0)$ 点的极限不存在，由连续性的定义知， f 在点 $(0,0)$ 不连续．

$$(2)\ f(x,y)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{y}{x}}, & x\neq 0,\\ e^{y}, & x=0.\end{cases}$$

分析　由函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续的定义，若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，

则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.

解　$\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{y}=e^{0}=1=f(0,0)$，$\therefore f(x,y)$ 在（0，0）连续.

评注　此类问题关键是利用函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续的定义，

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.

例 5.7．用定义求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点（0，0）的偏导数，并证明：$f(x,y)$ 在点（0，0）不连续.

分析　用函数连续的定义及偏导数的定义.

解　令 $x=ky^2$，$\lim\limits_{\substack{x=ky^2\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x=ky^2\\ y\to 0}}\dfrac{ky^4}{k^2y^4+y^4}=\dfrac{k}{1+k^2}$，随 k 而变化，$\lim\limits_{\substack{x=ky^2\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在点（0，0）不连续.

但　$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0；$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0.$$

评注　多元函数的极限是否存在、是否连续与函数在该点的偏导数是否存在无关.

例 5.8 已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，试确定常数 a,b 使函数 $z=z(x,y)$ 能满足

方程：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$．

分析　求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 并代入方程，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$，比较系数可求出 a,b.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(\frac{\partial u}{\partial x}+au)e^{ax+by},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=(\frac{\partial u}{\partial y}+bu)e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu)e^{ax+by}$$

代入方程

$$[(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(ab-a-b+1)u]e^{ax+by}=0$$

解得 $a=1,b=1$.

评注 此类问题的关键是正确求出偏导数，然后再分析.

例 5.9 求下列函数的全微分:

(1) $z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$;

分析 求出z_x, z_y, 再作组合：$dz=z_x dx+z_y dy.$

解

$$z_x=\frac{\frac{x-y-x-y}{(x-y)^2}}{1+(\frac{x+y}{x-y})^2}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad z_y=\frac{\frac{x-y+x+y}{(x-y)^2}}{1+(\frac{x+y}{x-y})^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

故所求的全微分是

$$\mathrm{dz}=\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

(2) $z=(x^2+y^2)^{xy}$.

分析 求出z_x, z_y, 再作组合：$dz=z_x dx+z_y dy.$

解 令$u=x^2+y^2$， $v=xy$，则$z=u^v$，由复合函数求导的链式法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2xvu^{v-1}+\ln u\cdot u^v\cdot y$$
$$=2x^2y(x^2+y^2)^{xy-1}+y\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2yvu^{v-1}+\ln u\cdot u^v\cdot x$$
$$=2xy^2(x^2+y^2)^{xy-1}+x\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{xy}$$

所以有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= (2x^2y(x^2+y^2)^{xy-1} + y\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{xy})\mathrm{d}x \\ &+ (2xy^2(x^2+y^2)^{xy-1} + x\ln(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{xy})\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

评注　此类问题的关键是正确求出偏导数 z_x, z_y

例 5. 10 试证函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在，但偏导数在点 $(0,0)$ 不连续，而 f 在点(0,0)可微.

分析　偏导数连续是函数可微的充分条件，偏导数存在是函数可微的必要条件.

用可微的定义证明.

证　由于 $\left|xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le |xy| \le x^2+y^2$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$，所以由极限的夹逼定理，得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$$

即函数在原点连续．当 $x^2+y^2=0$ 时，由偏导数的定义，有

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\quad f_y(0,0)=0$$

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + xy\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

同样有

$$f_y(x,y) = x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

显然有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，但当 (x,y) 沿 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2^{\frac{3}{2}}|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}$$

该极限不存在，所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y)$ 不存在，同样极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_y(x,y)$ 不存在，所以函数的两个偏导数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ 在原点不连续．而

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

由于当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时，$\left|\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\le\frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$，由极限的夹逼定理，得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

由二元函数可微的定义知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微．

评注　由此例可看出，二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有连续的偏导数只是函数在该点可微的充分条件而非必要条件．

例 5.11 求下列函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$（其中 f 均具有二阶连续偏导数）：

（1）$z=f(x^2y,\frac{y}{x})$；

分析　此类抽象函数的高阶偏导数，是利用复合函数求偏导数的公式，

关键是搞清复合关系的结构.

解　令 $u=x^2y, v=\frac{y}{x}$，则 $z=f(x^2y,\frac{y}{x})=f(u,v)$，为书写方便，设

$$f_1=f_u(u,v)=f_u(x^2y,\frac{y}{x}),\quad f_2=f_v(u,v)=f_v(x^2y,\frac{y}{x}),$$

$$f_{11}=f_{uu}(x^2y,\frac{y}{x}),\quad f_{12}=f_{21}=f_{uv}(x^2y,\frac{y}{x})=f_{vu}(x^2y,\frac{y}{x}),\quad f_{22}=f_{vv}(x^2y,\frac{y}{x})\ .$$

则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1-\frac{y}{x^2}f_2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2f_1+\frac{1}{x}f_2$$

进而有二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2yf_1+2xy(2xyf_{11}-\frac{y}{x^2}f_{12})+\frac{2y}{x^3}f_2-\frac{y}{x^2}(2xyf_{21}-\frac{y}{x^2}f_{22})$$

$$=2yf_1+\frac{2y}{x^3}f_2+4x^2y^2f_{11}-\frac{4y^2}{x}f_{12}+\frac{y^2}{x^4}f_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1+2xy(x^2f_{11}+\frac{1}{x}f_{12})-\frac{1}{x^2}f_2-\frac{y}{x^2}(x^2f_{21}+\frac{1}{x}f_{22})$$

$$=2xf_1-\frac{1}{x^2}f_2+2x^3yf_{11}+yf_{12}-\frac{y}{x^3}f_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2(x^2f_{11}+\frac{1}{x}f_{12})+\frac{1}{x}(x^2f_{21}+\frac{1}{x}f_{22})=x^4f_{11}+2xf_{12}+\frac{1}{x^2}f_{22}.$$

评注　此类抽象函数的高阶偏导数问题的关键是将 $f_1=f_u(u,v)=f_u(x^2y,\frac{y}{x})$, $f_2=f_v(u,v)=f_v(x^2y,\frac{y}{x})$ 中的 $f_u(u,v)$，$f_v(u,v)$ 仍视为 x,y 的函数,

对$f_v(u,v)$和$f_u(u,v)$ 再一次使用链式法则.

（2） $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$.

解 令 $u=\sin x,\ v=\cos y,\ w=e^{x+y}$，则 $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})=f(u,v,w)$，为书写方便,

设

$f_1=f_u(u,v,w)=f_u(\sin x,\cos y,e^{x+y}),\quad f_2=f_v(\sin x,\cos y,e^{x+y}),$

$f_3=f_w(\sin x,\cos y,e^{x+y}),\quad f_{11}=f_{uu}(\sin x,\cos y,e^{x+y}),\quad f_{22}=f_{vv}(\sin x,\cos y,e^{x+y}),$

$f_{33}=f_{ww}(\sin x,\cos y,e^{x+y}),\quad f_{12}=f_{21}=f_{uv}(\sin x,\cos y,e^{x+y})=f_{vu}(\sin x,\cos y,e^{x+y}),$

$f_{13}=f_{31}=f_{uw}(\sin x,\cos y,e^{x+y})=f_{wu}(\sin x,\cos y,e^{x+y}),$

$f_{23}=f_{32}=f_{vw}(\sin x,\cos y,e^{x+y})=f_{wv}(\sin x,\cos y,e^{x+y})$

则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos xf_1+e^{x+y}f_3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\sin yf_2+e^{x+y}f_3$$

进而有二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin xf_1+\cos x(\cos xf_{11}+e^{x+y}f_{13})+e^{x+y}f_3+e^{x+y}(\cos xf_{31}+e^{x+y}f_{33})$$

$$=-\sin xf_1+e^{x+y}f_3+\cos^2 xf_{11}+2\cos xe^{x+y}f_{13}+e^{2x+2y}f_{33},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x(-\sin yf_{12}+e^{x+y}f_{13})+e^{x+y}f_3+e^{x+y}(-\sin yf_{32}+e^{x+y}f_{33})$$

$$=e^{x+y}f_3-\cos x\sin yf_{12}+\cos xe^{x+y}f_{13}-\sin ye^{x+y}f_{32}+e^{2x+2y}f_{33},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\cos y f_2-\sin y(-\sin y f_{22}+e^{x+y}f_{23})+e^{x+y}f_3+e^{x+y}(-\sin y f_{32}+e^{x+y}f_{33})$$
$$=-\cos y f_2+e^{x+y}f_3+\sin^2 y f_{22}-2\sin y e^{x+y}f_{23}+e^{2x+2y}f_{33}$$

评注 此类抽象函数的高阶偏导数问题的关键是将 $f_1=f_u(u,v)=f_u(x^2y,\frac{y}{x})$,

$f_2=f_v(u,v)=f_v(x^2y,\frac{y}{x})$ 中的 $f_u(u,v)$， $f_v(u,v)$ 仍视为 x,y 的函数,

对$f_v(u,v)$和$f_u(u,v)$ 再一次使用链式法则.

例 5.12 已给函数 $f(x,y,z)=x^3y^2z$ 及方程 $x+y+z-3+e^{-3}=e^{-(x+y+z)}$ 确定的隐函数 $x=x(y,z)$，求 $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}$.

分析 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 为 $f[x(y,z),y,z]$对 y 的偏导数 .

解

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2z\frac{\partial x}{\partial y}+2x^3yz \qquad (*)$$

$x=x(y,z)$是由方程确定的隐函数，将方程两端对 y 求偏导，有

$$\frac{\partial x}{\partial y}+1=e^{-(x+y+z)}[-(\frac{\partial x}{\partial y}+1)]$$

解得$\frac{\partial x}{\partial y}=-1$，代入（*）式，故$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}=-3+2=-1$.

评注 认清函数关系是解决这类的关键所在.

例 5.13 设函数$u=f(x,y,z)$有连续偏导数，且$z=z(x,y)$由方程$xe^x-ye^y=ze^z$所确定，求 $\mathrm{d}u$.

分析 在函数$u=f(x,y,z)$中，注意到z是由方程$xe^x-ye^y=ze^z$所确定的

$z=(x,y)$,求出$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

解一 设$F(x,y,z)=xe^x-ye^y-ze^z$，则

$$F_x=(x+1)e^x,\quad F_y=-(y+1)e^y,\quad F_z=-(z+1)e^z$$

故 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x+f_z\frac{\partial z}{\partial x}=f_x+f_z\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}，\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_y+f_z\frac{\partial z}{\partial y}=f_y-f_z\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}$$

所以 $$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=(f_x+f_z\frac{x+1}{z+1}e^{x-z})\mathrm{d}x+(f_y-f_z\frac{y+1}{z+1}e^{y-z})\mathrm{d}y$$

解二 在 $xe^x-ye^y=ze^z$ 两边微分，得

$$e^x\mathrm{d}x+xe^x\mathrm{d}x-e^y\mathrm{d}y-ye^y\mathrm{d}y=(e^z+ze^z)\mathrm{d}z$$

故 $$\mathrm{d}z=\frac{(1+x)e^x\mathrm{d}x-(1+y)e^y\mathrm{d}y}{(1+z)e^z}$$

由 $u=f(x,y,z)$，得 $\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z$，故

$$\mathrm{d}u=(f_x+f_z\frac{x+1}{z+1}e^{x-z})\mathrm{d}x+(f_y-f_z\frac{y+1}{z+1}e^{y-z})\mathrm{d}y$$

评注 利用解二的微分法简单不易错，解一的方法是分析的方法，容易记忆.两种方法各有千秋.

例 5．14．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(x+y,y+z)=0$ 所确定的函数，求 $dz,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

分析 一是用公式法 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.二是用微分法.

解一 $F=f(u,v)=0$，其中 $u=x+y,v=y+z$

有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{f_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{f_u\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+f_v\cdot\frac{\partial v}{\partial z}}=\frac{f_u}{f_v}$，同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{f_u+f_v}{f_v}$

$\therefore dz=-\frac{f_u}{f_v}dx-(1+\frac{f_u}{f_v})dy$.

解二 $f(u,v)=0$ 两端微分，得 $df=f_u\cdot(dx+dy)+f_v\cdot(dy+dz)=0$

解出 $dZ=-\frac{1}{f_v}[f_u\cdot dx+(f_u+f_v)dy]$ $\quad\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_u}{f_v}$，

则 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{f_u}{f_v})=\frac{\partial}{\partial u}(-\frac{f_u}{f_v})\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}(-\frac{f_u}{f_v})\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$=-\frac{f_{uu}\cdot f_v-f_u\cdot f_{vu}}{f_v^2}\cdot 1-\frac{f_{uv}\cdot f_v-f_u\cdot f_{vv}}{f_v^2}\cdot(0+\frac{\partial z}{\partial x})$，<注：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_u}{f_v}$>

$=\dfrac{f_u f_{vu}-f_v f_{uu}}{f_v^2}+\dfrac{f_u f_v f_{uv}-f_u^2 f_{vv}}{f_v^3}$

评注 公式法简单，解二的微分法更易记住.

例 5.15 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\quad x+y+z=0$ 在点 $M_0(1,-2,1)$ 处的切线和法平面方程 .

分析： 在点 M_0 附近两曲面确定了一条光滑的交线 $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$，其切向量是 $\vec{\mathbf{s}}=(1,y'(x),z'(x))|_{M_0}$.

解 将方程组关于 x 求导，得

$$\begin{cases} 2x+2yy'(x)+2zz'(x)=0 \\ 1+y'(x)+z'(x)=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} y'(x)=\dfrac{z-x}{y-z} \\ z'(x)=\dfrac{y-x}{z-y} \end{cases}$$

所以

$$\vec{\mathbf{s}}=(1,\frac{z-x}{y-z},\frac{y-x}{z-y})|_{M_0}=(1,0,-1)$$

曲线在点 M_0 的切线方程和法平面方程分别是

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1},$$

$$(x-1)-(z-1)=0$$

即 $x-z=0$

评注 解决此类问题的关键在于认识到：在点 M_0 附近两曲面确定了一条光滑的交线 $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$，其切向量是 $\vec{\mathbf{s}}=(1,y'(x),z'(x))|_{M_0}$.

评注 求曲线的切向量 $\overrightarrow{\mathbf{s_1}}=(x'(t),y'(t),z'(t))$ 以及锥面上的点 (x,y,z) 的母线方向，成了解决问题的关键 .

例 5.16 过直线 $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求此切平面的方程 .

分析 问题的关键是寻找切点的坐标 .

解 设 $F(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2-27$，设切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在该点的法向量为 $\mathbf{n}=(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}=(6x_0,2y_0,-2z_0)$

过已知直线的平面束方程为

$$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0$$

其法向量为 $(10+\lambda,2+\lambda,-2-\lambda)$，由已知条件可得

$$\begin{cases}\dfrac{10+\lambda}{6x_0}=\dfrac{2+\lambda}{2y_0}=\dfrac{-2-\lambda}{-2z_0}\\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27\\ (10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0\end{cases}$$

解得 $x_0=3,\ y_0=1, z_0=1, \lambda=-1$ 或 $x_0=-3,\ y_0=-17, z_0=-17, \lambda=-19$.

故所求切平面方程为

$$18(x-3)+2(y-1)-2(z-1)=0,$$

$$-18(x+3)-34(y+17)+34(z+17)=0$$

化简得 $9x+y-z-27=0$ 及 $9x+17y-17z+27=0$.

评注 写出过已知直线的平面束方程是问题的关键.

例 5. 17 证明旋转曲面 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})(f'\neq 0)$ 上任一点处的法线与旋转轴相交 .

分析：关键是写出过曲面上任意一点的法线方程.

证一 设 $F(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2})-z$，曲面上任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 曲面在该点的法向量为 $\vec{\mathbf{n}}|_{P_0}=(\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}f',\dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}f',-1)$，

过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}f'}=\frac{y-y_0}{\dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}f'}=\frac{z-z_0}{-1}$$

当 $x=y=0,\ z=z_0+\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}$，即交点为 $(0,0,z_0+\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})})$.

证二 设旋转曲面上任一点处的法线与 z 轴的交点为 $N(0,0,z)$，曲面上任一点

$M_0(x_0,y_0,z_0)$，若混合积$[\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM_0},\vec{\mathbf{n}}]=0$，则结论正确．而

$$[\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM_0},\vec{\mathbf{n}}]=\begin{vmatrix}0 & 0 & z\\ x_0 & y_0 & z_0\\ \dfrac{x_0 f'}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} & \dfrac{y_0 f'}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} & -1\end{vmatrix}=z\begin{vmatrix}x_0 & y_0\\ \dfrac{x_0 f'}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} & \dfrac{y_0 f'}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\end{vmatrix}=0$$

评注　此处的旋转轴 z 轴，直接写出曲面在任意一点的法线方程，再进一步分析法线方程的特点显得更直观.

例 5. 18 设$F(u,v)$处处可微, 试证明曲面$F(lx-mz,ly-nz)=0$上所有切平面均与一条固定直线平行（l,m,n均不为 0）.

分析 设一定向量$\vec{l}=p\mathbf{i}+q\mathbf{j}+r\mathbf{k}$，只要证明$\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{l}=\vec{0}$即可．

证 设$P_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面上任一点，又设$G(x,y,z)=F(lx-mz,ly-nz)$，则曲面在点的法向量为　$\vec{\mathbf{n}}=(G_x,G_y,G_z)=(lF_u,lF_v,-mF_u-nF_v)$．

要使$\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{l}=\vec{0}$，只要使$p,q,r$满足下式即可

$$plF_u+qlF_v-rmF_u-rnF_v=(pl-rm)F_u+(ql-rn)F_v=0$$

由此看出当$p=m,\ q=n,\ r=l$时，上式成立，即$\vec{\mathbf{n}}\perp\vec{l}$．故已知曲面上任一点处的切平面都与一定直线平行（其方向向量取为(m,n,l)）.

评注　解决此类问题的关键是抓住$\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{l}=\vec{0}$.

例 5. 19 求函数$u=e^{xyz}+x^2+y^2$沿曲线$x=t,\ y=2t^2-1,\ z=t^3$在点$M_0(1,1,1)$处切线方向的方向导数．

分析　关键是求出曲线$x=t,\ y=2t^2-1,\ z=t^3$在$M_0(1,1,1)$处切向量的向余弦.

解 点 $M_0(1,1,1)$ 对应的参数 $t=1$，曲线在点 M_0 的切向量为 $\vec{l}=(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t},\frac{\partial z}{\partial t})\big|_{t=1}=\pm(1,4t,3t^2)\big|_{t=1}=\pm(1,4,3)$，其方向余弦为

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{26}},\quad \cos\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{26}},\quad \cos\gamma=\pm\frac{3}{\sqrt{26}}$$

而　$$\frac{\partial u}{\partial x}=yze^{xyz}+2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=xze^{xyz}+2y,\ \frac{\partial u}{\partial z}=xye^{xyz}$$

所以所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,1,1)}\cos\gamma=\pm\frac{8e+10}{\sqrt{26}}$$

评注 写出曲线在点 $M_0(1,1,1)$ 处切线的方向向量是关键.

例 5. 20. 求曲线 $y^2=2mx, z^2=m-x$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线及法平面方程。

分析 将曲线视为 Γ: $\begin{cases}x=x\\ y=y(x)\\ z=z(x)\end{cases}$，求出切线的方向向量:$\vec{S}\ =\{1,y'(x),z'(x)\}_{|M_0}$

解: 将 $y^2=2mx$ 和 $z^2=m-x$ 两边对 x 求导，得

$2yy'=2m, 2zz'=-1$，即 $y'=\dfrac{m}{y}, z'=-\dfrac{1}{2z}$

$\therefore \vec{S}_{\text{切线}}=\{1,\dfrac{m}{y_0},-\dfrac{1}{2z_0}\}=\vec{n}_{\text{法平面}}$

则切线为 $\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{m/y_0}=\dfrac{z-z_0}{-1/2z_0}$

且法平面为 $(x-x_0)+\dfrac{m}{y_0}(y-y_0)-\dfrac{1}{2z_0}(z-z_0)=0$.

评注 关键是将曲线视为Γ:$\begin{cases}x=x\\ y=y(x)\\ z=z(x)\end{cases}$, 此时切线的方向向量为:

$\vec{S}\ =\{1,y'(x),z'(x)\}_{|M_0}$.

例5.54.设$F(u,v)$具有连续偏导数，试证:曲面

$F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$上任意点的切平面相交于一定点.

分析 在曲面$F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$上任取一点$(x,y,z)$,写出该点的切平面方程再进行分析.

解 设切点为(x,y,z), 其过该点的切平面的法向量为$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)$,

$F_x=\dfrac{F_1}{z-c}$, $F_y=\dfrac{F_2}{z-c}$, $F_z=-\dfrac{x-a}{(z-c)^2}F_1-\dfrac{y-b}{(z-c)^2}F_2$,

切平面方程为:

$$\frac{F_1}{z-c}(X-x)+\frac{F_2}{z-c}(Y-y)\quad-\left[\frac{x-a}{(z-c)^2}F_1+\frac{y-b}{(z-c)^2}F_2\right](Z-z)=0,$$

显然切平面过点(a,b,c).

评注 学会分析切平面方程的特点，具体问题具体分析.

例 5.21 函数 $u = xy^2 z$ 在点 $M_0(1,-1,2)$ 处:

（1）求从 M_0 指向 $M_1(2,1,-1)$ 方向的方向导数;

（2）沿什么方向的方向导数为最大？它的最大值是多少？

（1）分析 求函数的方向导数关键是求出所给方向的方向余统弦 $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$，再计算 $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_0} = (\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)\Big|_{M_0}$.

解 $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{l} = (1,2,-3),\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{14}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} = y^2 z\Big|_{M_0} = 2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} = 2xyz\Big|_{M_0} = -4,\quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} = xy^2\Big|_{M_0} = 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}\Big|_{M_0} = (\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)\Big|_{M_0} = -\frac{9}{\sqrt{14}}$$

（2）**分析** 利用公式 $\mathrm{grad}u = (\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k})\Big|_{M_0}$，再求 $\|\mathrm{grad}u\|$.

解 沿梯度 $\mathrm{grad}u = (\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k})\Big|_{M_0} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 方向的方向导数最大，其最大值为: $\max\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0} = \|\mathrm{grad}u\| = \sqrt{21}$.

评注 要理解方向导数和梯度的概念，掌握求方向导数和梯度的方法.

例 5.22 求 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处沿点的向径 r_0 的方向导数，问 a,b,c 具有什么关系时，此方向导数等于梯度的模？

分析 求出函数 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 沿向径 $\overrightarrow{\mathbf{r_0}} = (x_0 y_0, z_0)$ 的方向导数，求出该函数在该点的模，然后进行分析比较.

解 $\because \overrightarrow{\mathbf{r_0}} = (x_0 y_0, z_0),\ \|\overrightarrow{\mathbf{r_0}}\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2},\ \cos\alpha = \frac{x_0}{\|\mathbf{r_0}\|},\ \cos\beta = \frac{y_0}{\|\mathbf{r_0}\|},\ \cos\gamma = \frac{z_0}{\|\mathbf{r_0}\|}$,

$\therefore$ 在点 M 处的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r_0}}\Big|_M=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M\cos\gamma$$

$$=\frac{2x_0}{a^2}\frac{x_0}{\|\vec{\mathbf{r_0}}\|}+\frac{2y_0}{b^2}\frac{y_0}{\|\vec{\mathbf{r_0}}\|}+\frac{2z_0}{c^2}\frac{z_0}{\|\vec{\mathbf{r_0}}\|}=\frac{2}{\|\vec{\mathbf{r_0}}\|}(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2})$$

$$=\frac{2u(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$

∴ 在点 M 处的梯度为

$$\mathrm{grad}u\big|_M=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M\vec{\mathbf{i}}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M\vec{\mathbf{j}}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M\vec{\mathbf{k}}=\frac{2x_0}{a^2}\vec{\mathbf{i}}+\frac{2y_0}{b^2}\vec{\mathbf{j}}+\frac{2z_0}{c^2}\vec{\mathbf{k}}$$

$$\|\mathrm{grad}u\|_M=2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}$$

当 $a=b=c$ 时，$\because \|\mathrm{grad}u\|_M=\dfrac{2}{a^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$，

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r_0}}\Big|_M=\frac{\frac{2}{a^2}(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{2}{a^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r_0}}\Big|_M=\|\mathrm{grad}u\|_M$$

故当 $a=b=c$ 时，此方向导数等于梯度的模．

评注　掌握方向导数和梯度的关系.

例 5.23 求下列函数的极值、极值点：

（1） $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$；

分析　这是无条个极值问题，首先求函数$z=(1+e^y)\cos x-ye^y$的驻点，再求驻点处的A, B, C，利用B^2-AC的符号判断驻点是否为函数的极值点.

解（1）解方程组$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=(\cos x-1-y)e^y=0\end{cases}$ 得驻点 $(2n\pi,0),((2n+1)\pi,-2)$ （n 为整数）．又

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^y)\cos x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^y\sin x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\cos x-2-y)e^y,$$

$$A|_{(2n\pi,0)}=-2<0,\quad B|_{(2n\pi,0)}=0,\quad C|_{(2n\pi,0)}=-1,\quad B^2-AC<0$$

所以 $(2n\pi,0)$ 为极大值点，极大值为 2 .

$$A|_{((2n+1)\pi,-2)}=1+e^{-2},\quad B|_{((2n+1)\pi,-2)}=0,\quad C|_{((2n+1)\pi,-2)}=-e^{-2},\quad B^2-AC>0,$$

所以 $((2n+1)\pi,-2)$ 不是极值点 .

（2） $z=x^4+y^4$.

分析 当无条极值判别定理失效时，使用极值的定义.

解 方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3=0\end{cases}$ 得驻点 $(0,0)$.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}=12x^2\Big|_{(0,0)}=0, B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=0, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}=0, B^2-AC=0$$

因此无法使用极值的判定定理 .

用极值的定义可得

$$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x)^4+(\Delta y)^4>0$$

即在点 $(0,0)$ 的邻域内有 $z(x,y)>z(0,0)$，所以 $z=x^4+y^4$ 在点 $(0,0)$ 取得极小值 $z(0,0)=0$.

评注 此类问题的关键在于正确理解无条极值判别定理失效时如何用定义去求极值..

例 5.24 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值 .

分析 应用隐函数求导法则求两个偏导数，并求函数的驻点 . 再求二阶偏导数，利用二元函数取得极值的充分条件 .

解一 方程两端分别对 x,y 求偏导，得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{2}$$

令$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x-3y=0\\ -3x+10y-z=0\end{cases}$，

故 $\begin{cases}x=3y\\ z=y\end{cases}$.

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得 $x=9,\ y=3,\ z=3$，或 $x=-9,\ y=-3,\ z=-3$，方程(1)两边分别对 x,y 求偏导，得

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2(\frac{\partial z}{\partial x})^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

方程(2)两边分别对 y 求偏导，得

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2(\frac{\partial z}{\partial y})^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

所以 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(9,3,3)}=\dfrac{1}{6},B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(9,3,3)}=-\dfrac{1}{2},C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(9,3,3)}=\dfrac{5}{3}$，

故 $B^2-AC=-\dfrac{1}{36}<0$，又 $A=\dfrac{1}{6}>0$，从而点 $(9,3)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地，由 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\dfrac{1}{6},B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(-9,-3,-3)}=\dfrac{1}{2},C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\dfrac{5}{3}$，

可知 $B^2-AC=-\dfrac{1}{36}<0$，又 $A=-\dfrac{1}{6}<0$，所以点 $(-9,-3)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

解二 令 $F(x,y,z)=x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18$，应用隐函数求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x-6y}{-2y-2z}=\frac{x-3y}{y+z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-6x+20y-2z}{-2y-2z}=\frac{-3x+10y-z}{y+z}$$

由 $\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$ 解得 $x=3y, z=y$，与原式联立解得驻点为 $P_1(9,3), P_2(-9,-3)$ ．再求二阶偏导数

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_1}=\frac{1}{(y+z)^2}[y+z-(x-3y)\frac{\partial z}{\partial x}]\Big|_{P_1}=\frac{1}{4y^2}\cdot 2y\Big|_{P_1}=\frac{1}{6},$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{P_1}=\frac{1}{(y+z)^2}[-3(y+z)-(x-3y)(1+\frac{\partial z}{\partial y})]\Big|_{P_1}=\frac{1}{4y^2}\cdot(-6y)\Big|_{P_1}=-\frac{1}{2},$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_1}=\frac{1}{(y+z)^2}[(10-\frac{\partial z}{\partial y})(y+z)-(-3x+10y-z)"(1+\frac{\partial z}{\partial y})]\Big|_{P_1}$$
$$=\frac{1}{4y^2}\cdot 20y\Big|_{P_1}=\frac{5}{3}$$

于是 $B^2-AC=-\frac{1}{36}<0$，又 $A=\frac{1}{6}>0$，从而点 $P_1(9,3)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$ ．

对于驻点 P_2 类似地可求得 $A=-\frac{1}{6},\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{5}{3}$，

于是 $B^2-AC=-\frac{1}{36}<0$，又 $A=-\frac{1}{6}<0$，所以点 $P_2(-9,-3)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$ ．

评注 注意隐函数求极值的问题的思想和方法.

例 5. 25 某厂生产两种型号的钢笔，甲种每支售价 10 元，乙种每支 9 元，而生产甲种笔 x 支，乙种笔 y 支的总费用为 $400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)$，问两种笔的产量各为多少时，利润最大？

分析 产品的利润是指其销售收入与总费用之差．这是一个无条件极值问题．

解 当甲种笔的产量为 x，乙种笔的产量为 y 时，产品的利润函数为

$$f(x,y)=10x+9y-400-2x-3y-0.01(3x^2+xy+3y^2)$$
$$=-0.03x^2-0.01xy-0.03y^2+8x+6y-400$$

其中 $x>0, y>0$ ．解方程组 $\begin{cases} f_x=-0.06x-0.01y+8=0 \\ f_y=-0.01x-0.06y+6=0 \end{cases}$，得驻点 $(120,80)$ ．在该驻点处 $A=f_{xx}\big|_{(120,80)}=-0.06<0, B=f_{xy}\big|_{(120,80)}=-0.01, C=f_{yy}\big|_{(120,80)}=-0.06$，从而有 $B^2-AC=-0.0035<0$，所以函数在该驻点取得最大值，即生产甲种笔 120 支，乙种笔 80 支时，利润最大，为 320 ．

评注 求函数$z=f(x,y)$的极值的一般步骤是：

第一步：求驻点令$f_y(x,y)=0$，$f_x(x,y)=0$,得驻点(x_0,y_0);
第二步：对每一个驻点(x_0,y_0)求出二阶偏导数的值A,B,C;
第三步：定出B^2-AC的符号，再判定是否是极值.
若$B^2-AC=0$，一般用极值的定义来求.

例 5.26 在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$内嵌入有最大体积的长方体，求它的体积．

分析 长方体的顶点在椭球面上，若设长方体在第一卦限的顶点为(x,y,z)，由对称性知，该长方体体积为$V=8xyz$，问题变成求函数$V=8xyz$在条件$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$下的极值问题．

解 由拉格朗日乘数法，设

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$$

令 $\begin{cases} F_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0 \\ F_y=zx+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0 \\ F_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0 \\ F_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$，解得 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$．

由问题存在最大值，故上述的惟一可能极值点即为所求，所以当长、宽、高分别为$\dfrac{2a}{\sqrt{3}},\dfrac{2b}{\sqrt{3}},\dfrac{2c}{\sqrt{3}}$时，长方体的体积最大，其最大体积为$V=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}abc$．

评注 写出目标函数$V=8xyz$是该问题的关键所在.