Maillages pour le Calcul Scientifique

Annabelle Collin, Cécile Dobrzynski, Algiane Froehly

Plan

Première partie : Maillage : définitions et notions principales

I. Qu'est ce qu'un maillage ?
II. À quoi ça sert un maillage ?
III. Différents types de maillage
IV. Maillages pour la simulation numérique

Deuxième partie : Génération de maillage

I. Pourquoi construire un maillage est difficile ?
II. Schéma général de construction de maillage
III. Méthode de Delaunay
IV. Méthode frontale
V. Méthode octree/quadtree
VI. Comparaison des 3 méthodes

Première partie: Maillages : Définitions et notions principales

- Qu'est ce qu'un maillage ?
- À quoi ça sert un maillage ?
- Différents types de maillage
- Maillages pour la simulation numérique

Qu'est-ce qu'un maillage ?

Un **maillage** est une partition de l'espace ou d'un domaine en cellules élémentaires.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$, T_h est un maillage de Ω si :

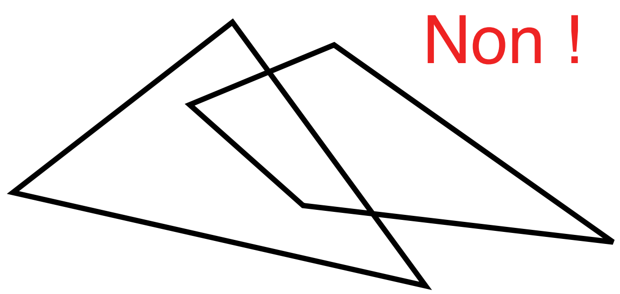
(H$_1$) $\Omega = \overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{K \in T_h}}} K,$

(H$_2$) l'intérieur de tout élément K de T$_h$ est non vide,

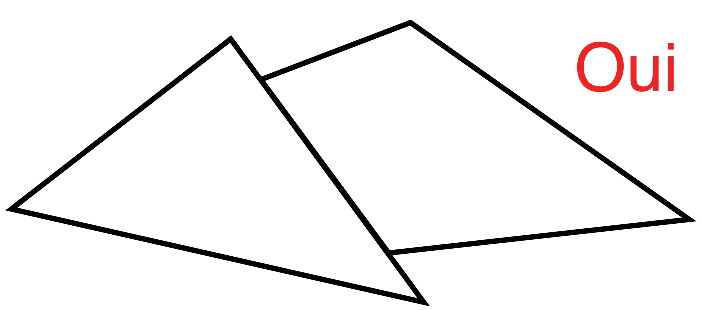
(H$_3$) l'intersection de l'intérieur de 2 éléments est vide.

(H$_1$) : les éléments recouvrent Ω mais les K peuvent être de tous types

(H$_3$) : cette hypothèse interdit les chevauchements



Non !



Oui !

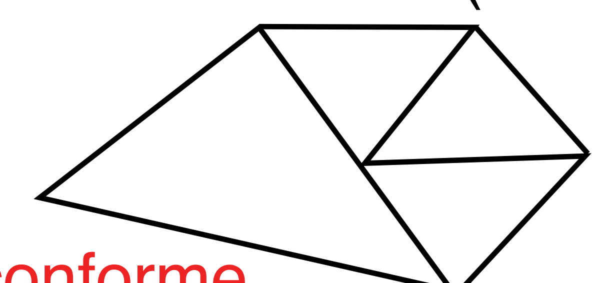
Qu'est-ce qu'un maillage ?

Un **maillage** est une partition de l'espace ou d'un domaine en cellules élémentaires.

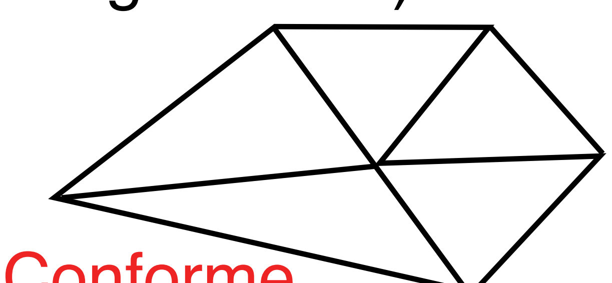
> Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$, T_h est un maillage de Ω si :
>
> $$(H_1)\quad \Omega = \overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{K\in T_h}}} K,$$
>
> (H_2) l'intérieur de tout élément K de T_h est non vide,
>
> (H_3) l'intersection de l'intérieur de 2 éléments est vide.

Un maillage est dit **conforme** si l'intersection de deux éléments distincts K et K' est soit :

- l'ensemble vide
- un simplex commun à K et K' (noeud, arête ou triangle en 3D)



Non conforme



Conforme

QU'EST-CE QU'UN MAILLAGE ?

Un **maillage** est une partition de l'espace ou d'un domaine en cellules élémentaires.

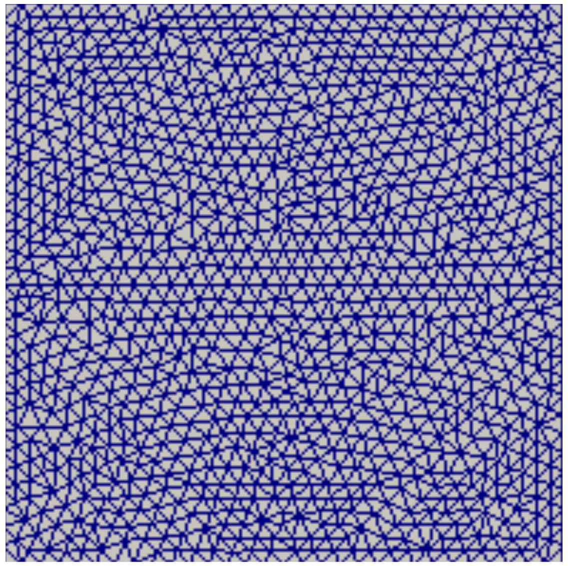
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$, T_h est un maillage de Ω si :

$$(H_1) \quad \Omega = \overbrace{\bigcup_{K \in T_h} K}^{\circ},$$

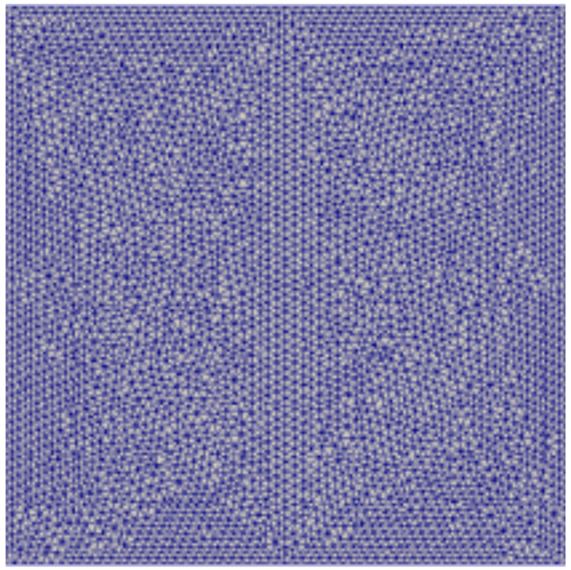
(H_2) l'intérieur de tout élément K de T_h est non vide,

(H_3) l'intersection de l'intérieur de 2 éléments est vide.

Remarque : Le h de T_h correspond à la taille caractéristique de l'élément.



h



h/2

À QUOI ÇA SERT UN MAILLAGE ?

Problèmes réels
Phénomènes physique ou biologique

↓

Formulation mathématique des problèmes :
mise en équation et modélisation

↓

Méthode de résolution numérique
sur ordinateur

! La méthode numérique dépend du choix du maillage !

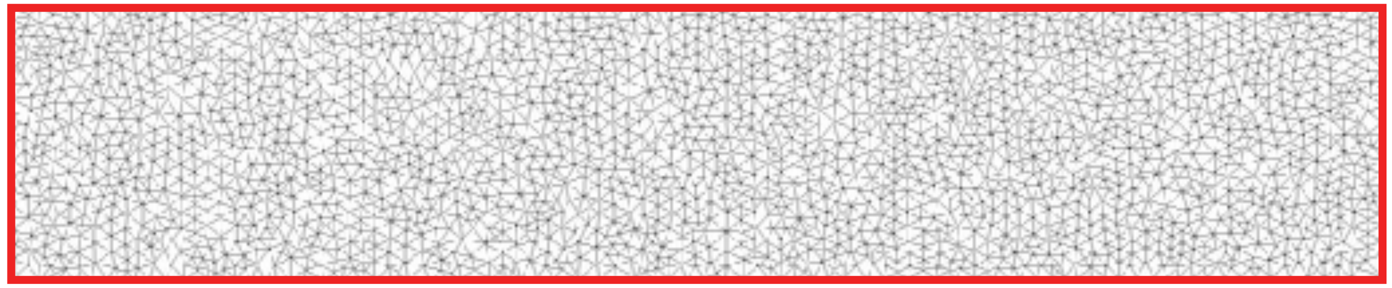
↓

Résultats

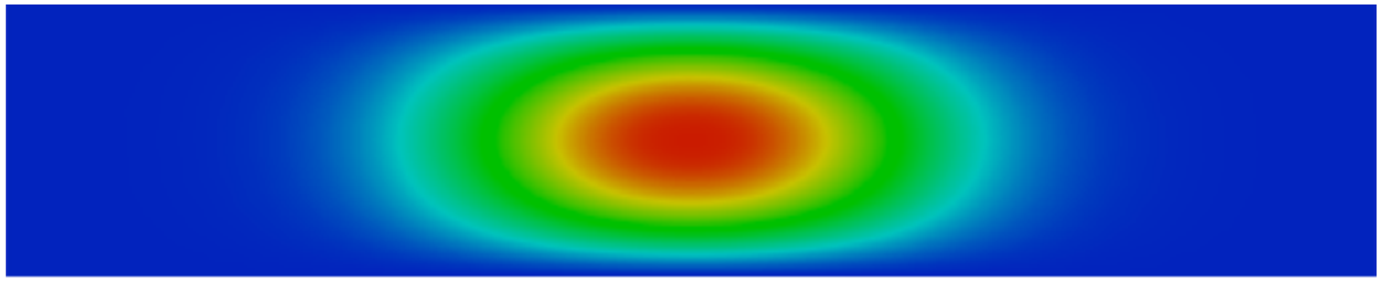
À QUOI ÇA SERT UN MAILLAGE ?

Naïvement : une représentation discrète de la géométrie pour l'ordinateur

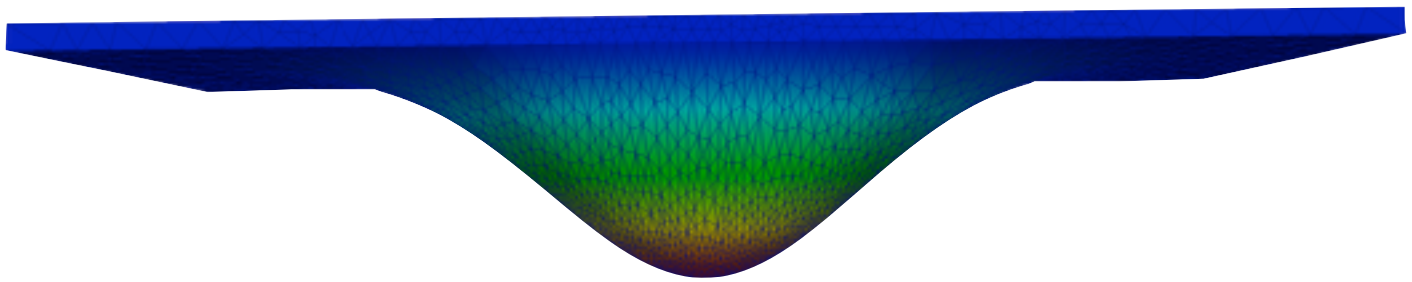
Géométrie



Maillage



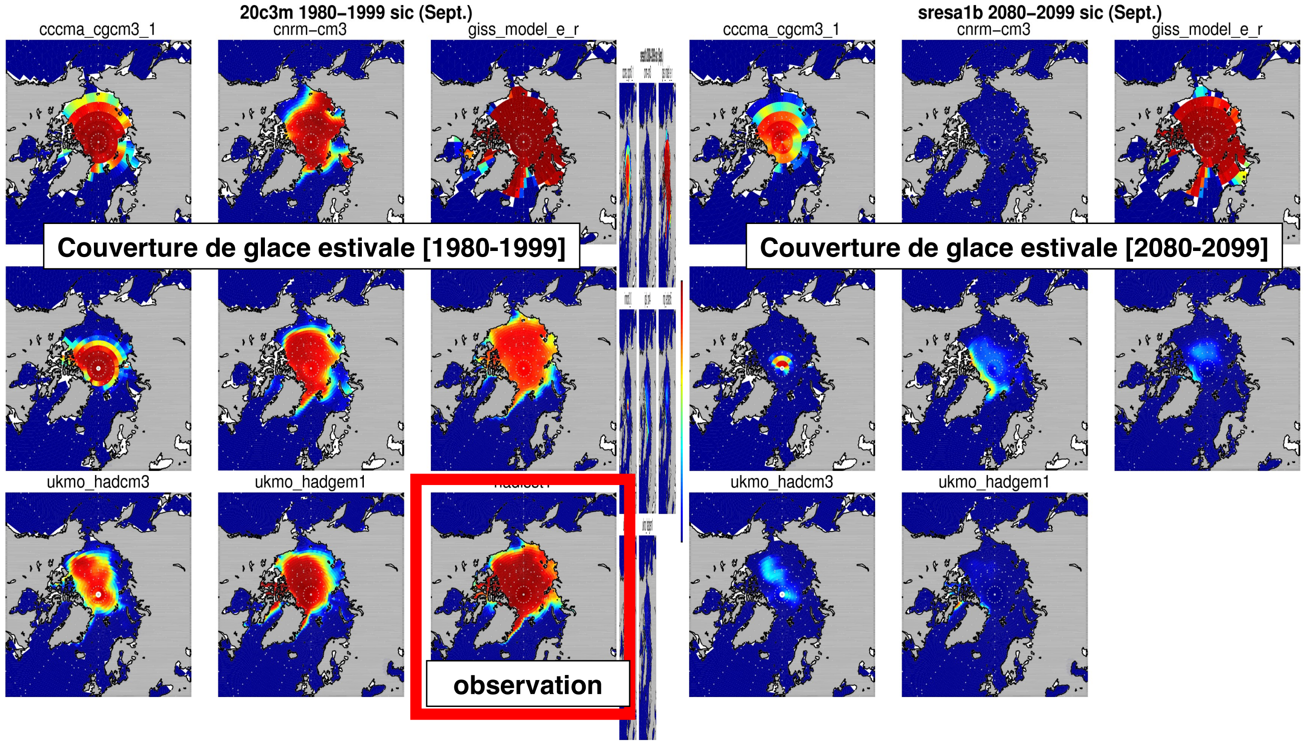
Déplacements calculés



Maillage déformé

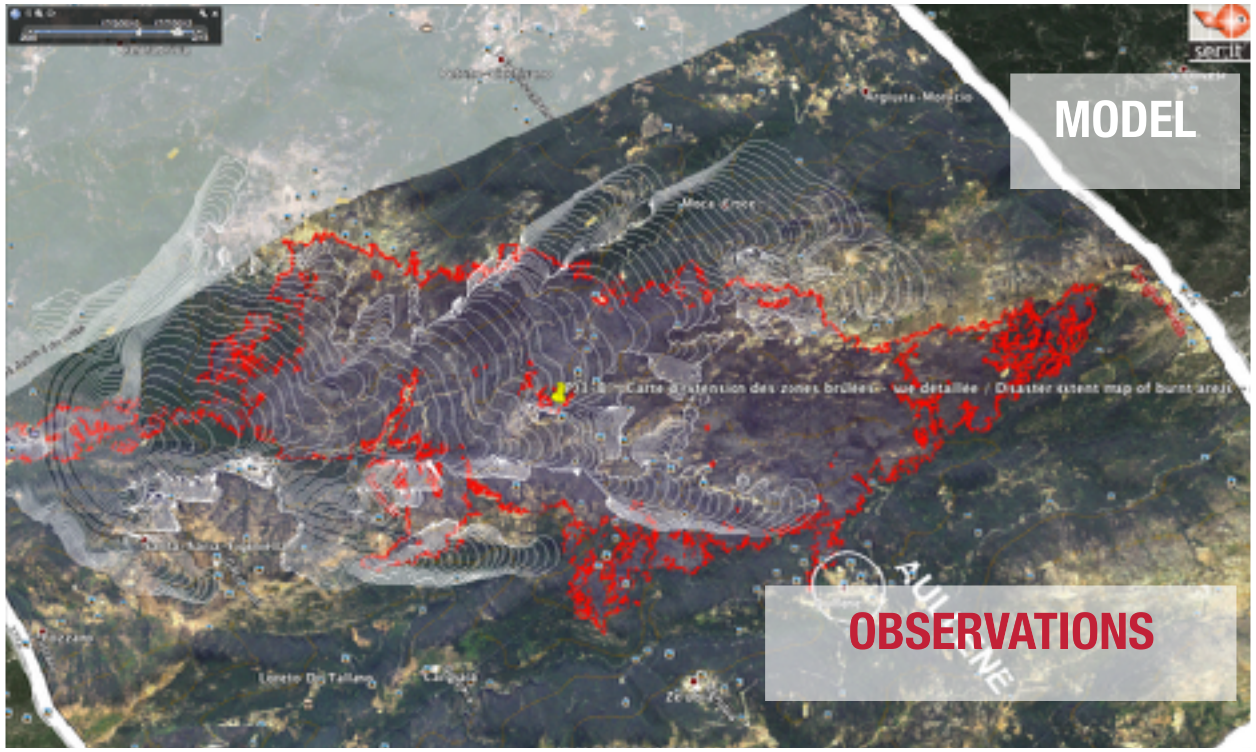
À QUOI ÇA SERT UN MAILLAGE ?

Exemples environnementaux de simulation numérique

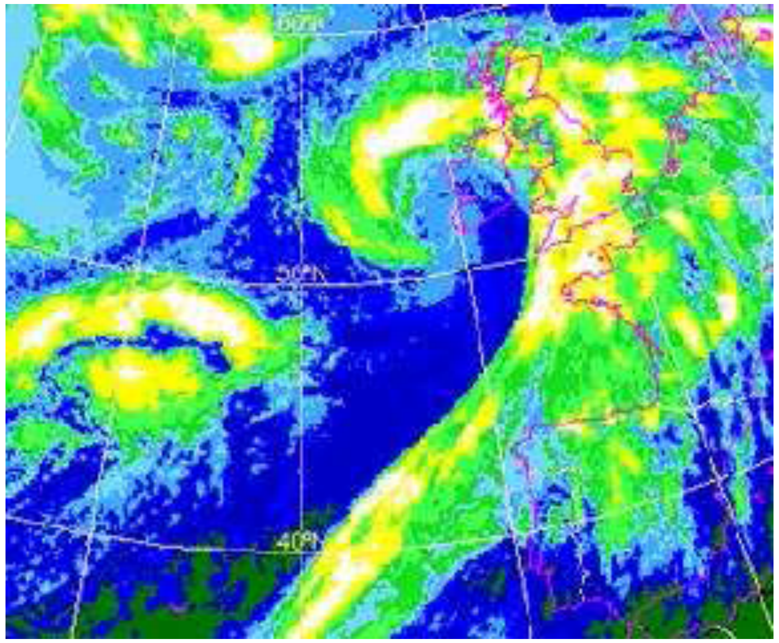


D. Swingedouw, CEA Saclay

Disparition de la glace de mer en été



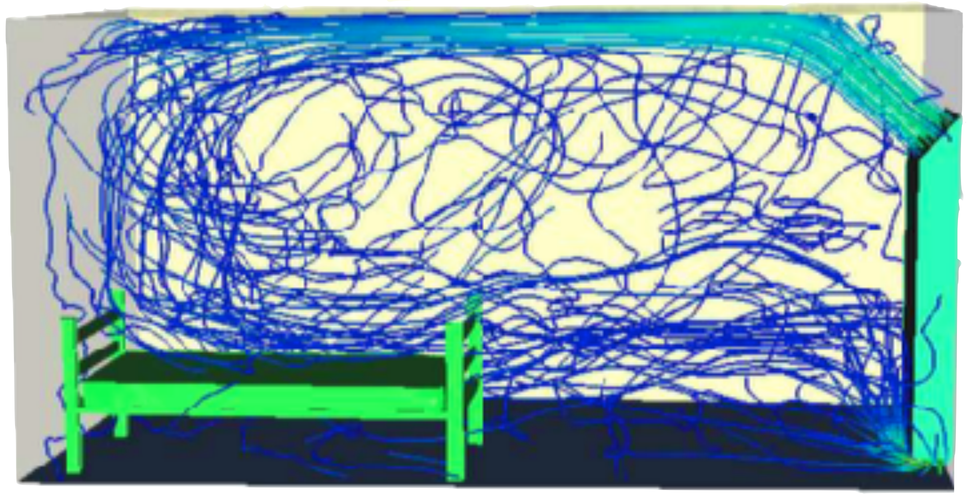
M. Rochoux, CERFACS



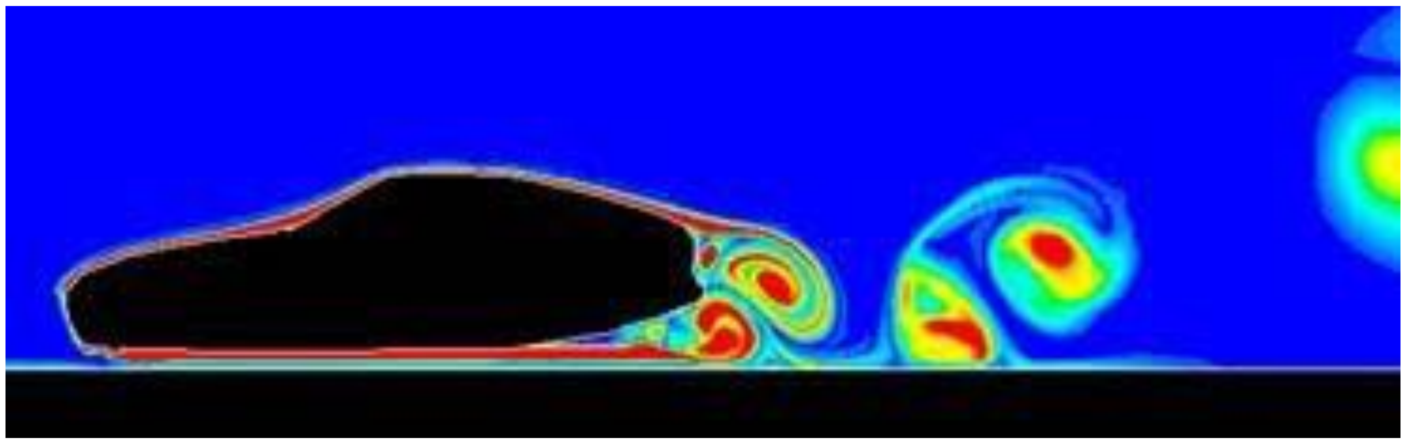
Site Météo France

À QUOI ÇA SERT UN MAILLAGE ?

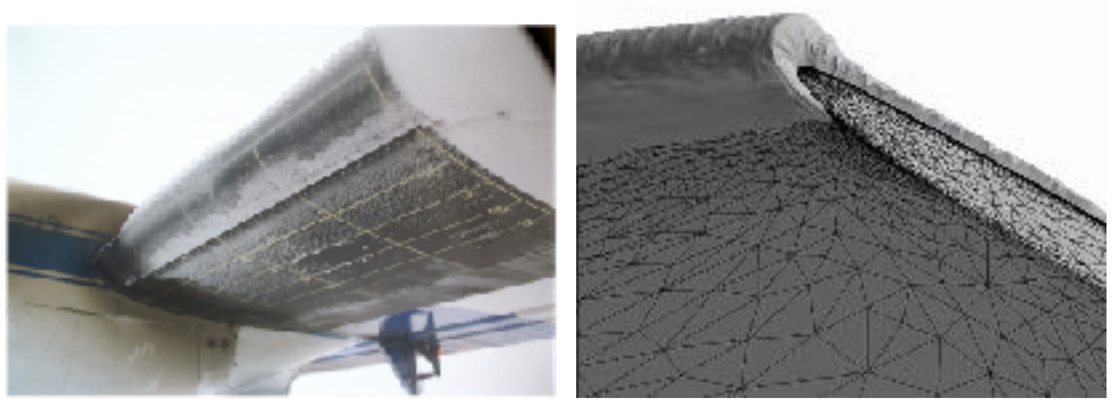
Exemples industriels de simulation numérique



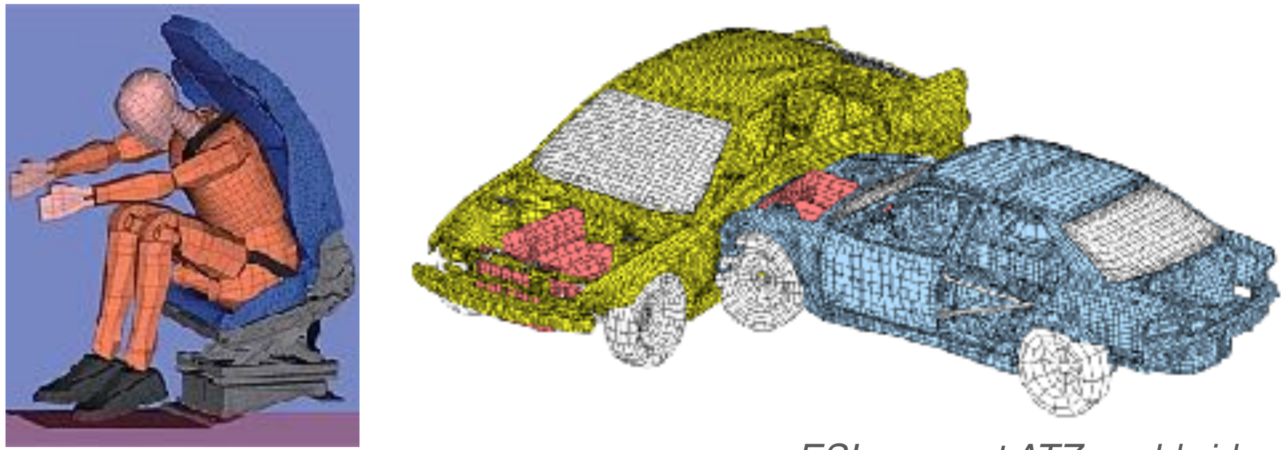
C. Dobrzynski, IMB, Inria



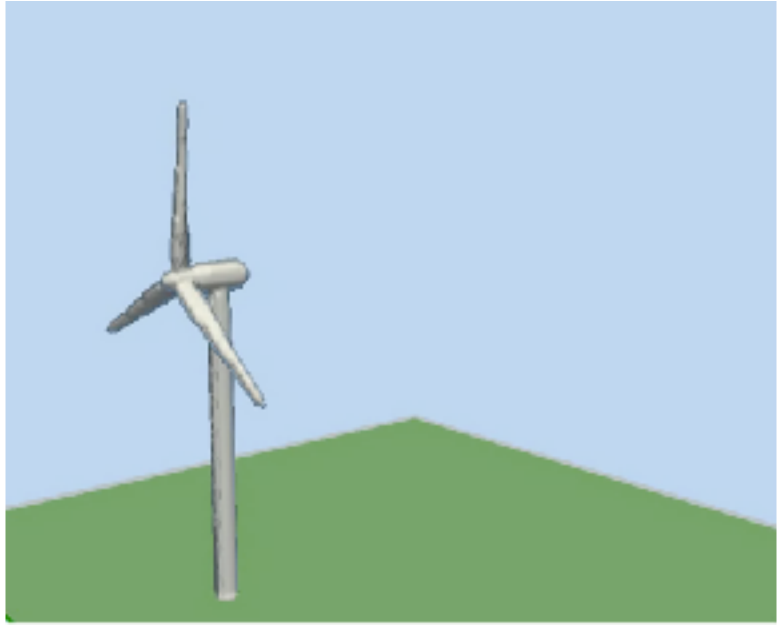
Site du FETES, centrale Marseille



H. Beaugendre, IMB, Inria



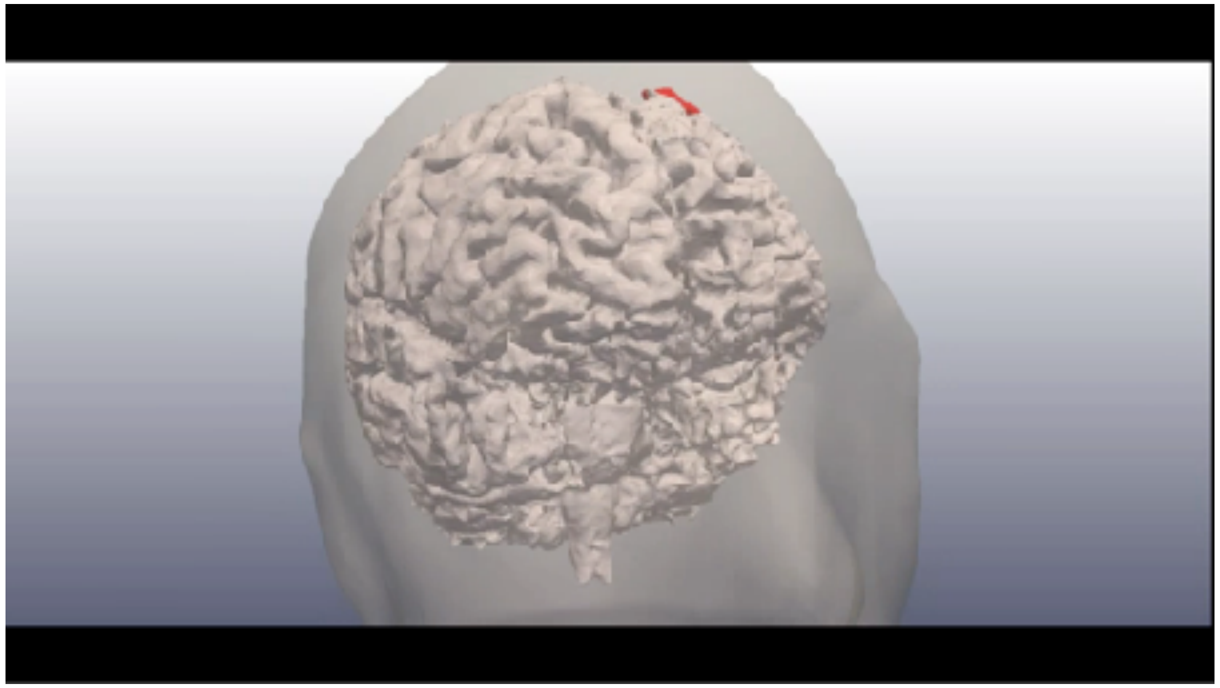
ESI group et ATZ worldwide



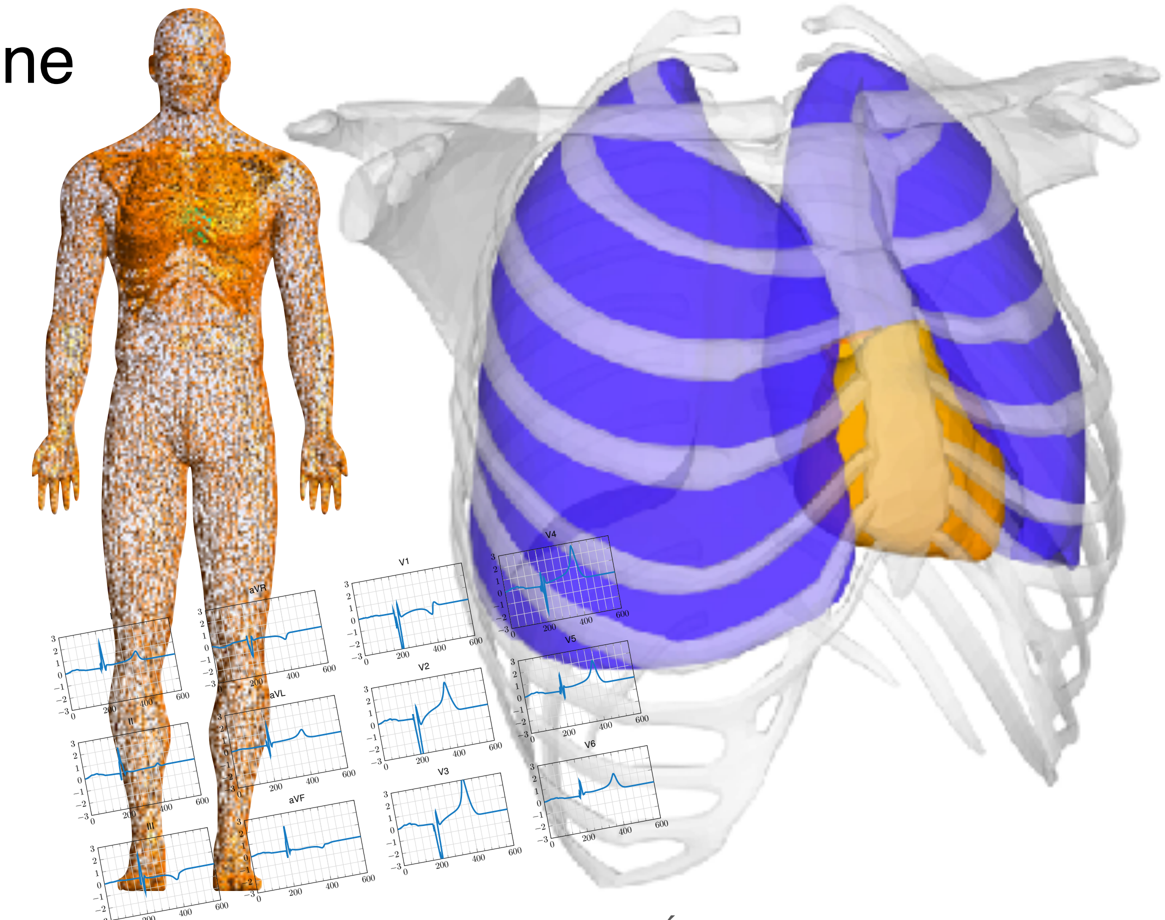
M. Bergmann, Inria

À QUOI ÇA SERT UN MAILLAGE ?

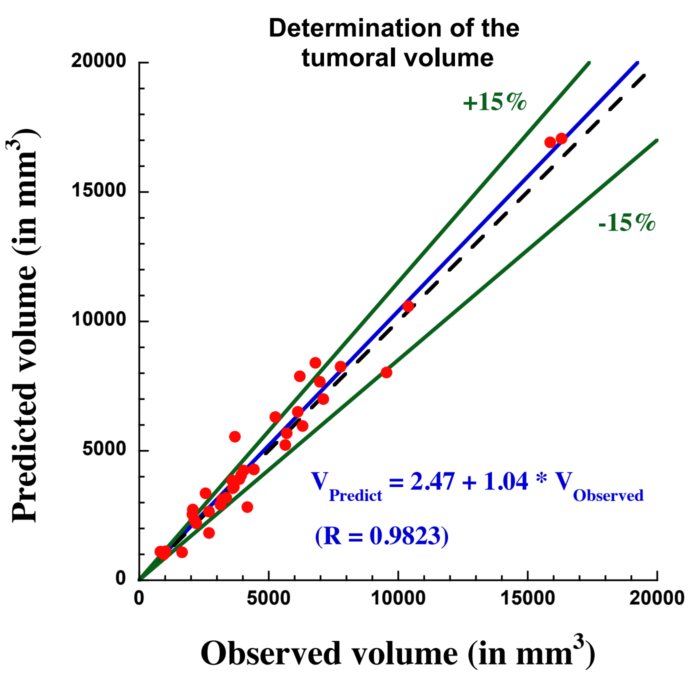
Exemples de simulation numérique en médecine

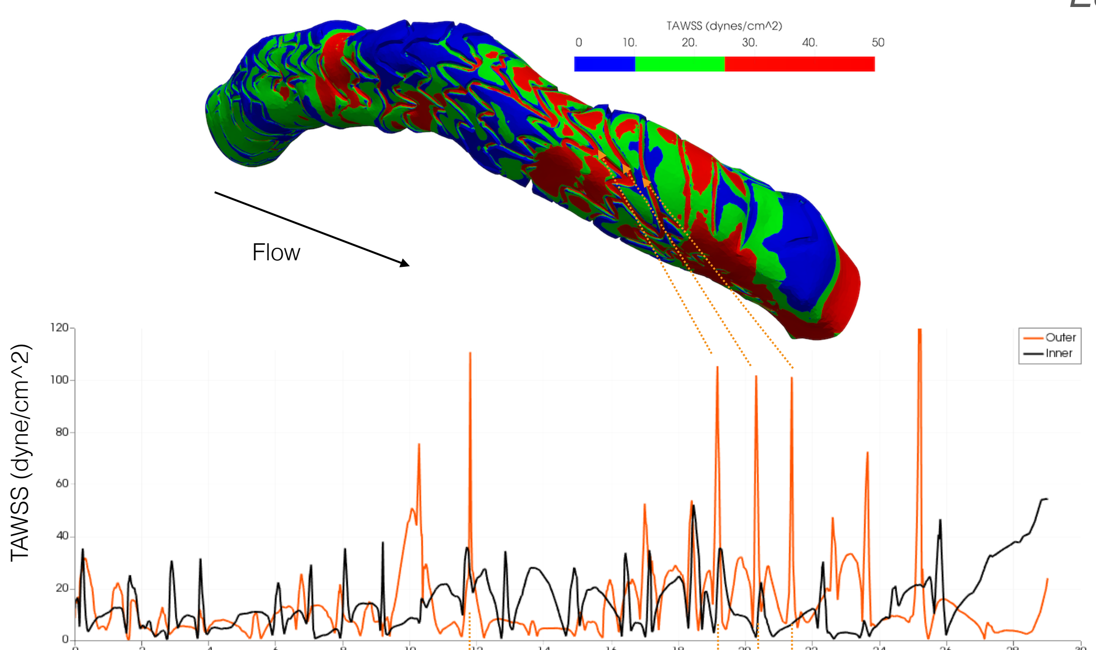


Équipe Monc, Inria



Équipes Reo et M3disim, Inria





A. Lefieux, Emory Atlanta

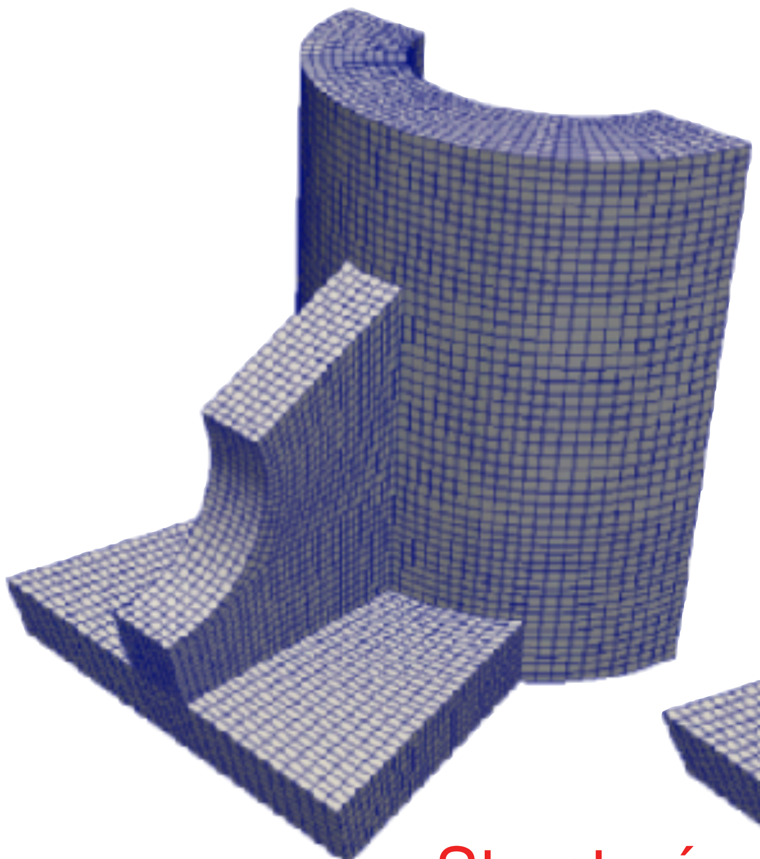
DIFFÉRENTS TYPES DE MAILLAGE

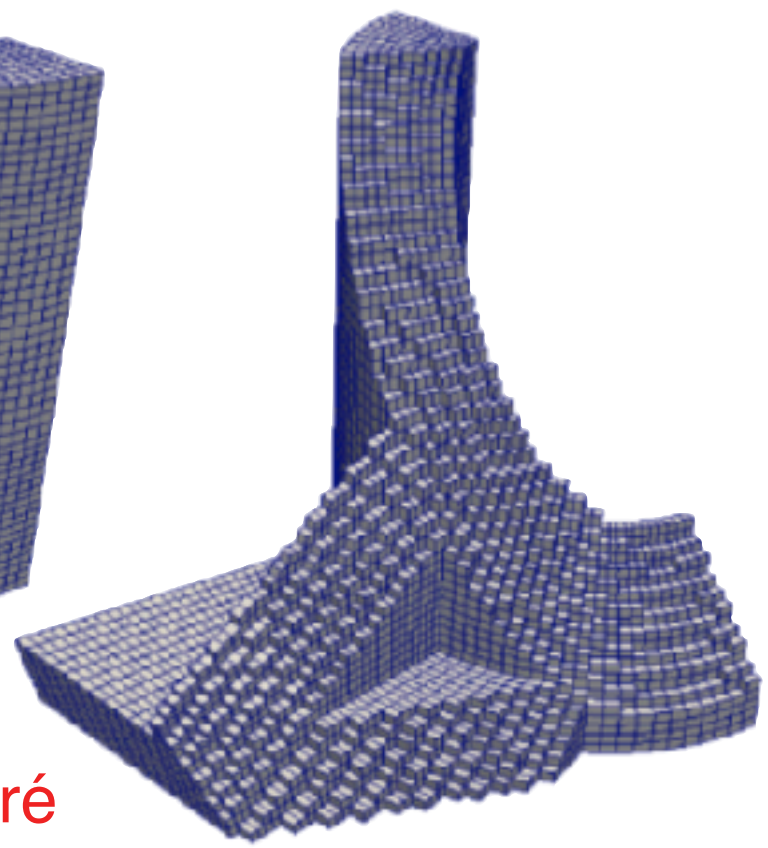
La **connectivité** d'un élément (au sens de noeud, arête, cellule …) est la liste des ses voisins.

Un **maillage structuré** est un maillage à connectivité fixe. Le maillage est alors défini par sa seule liste de noeuds.

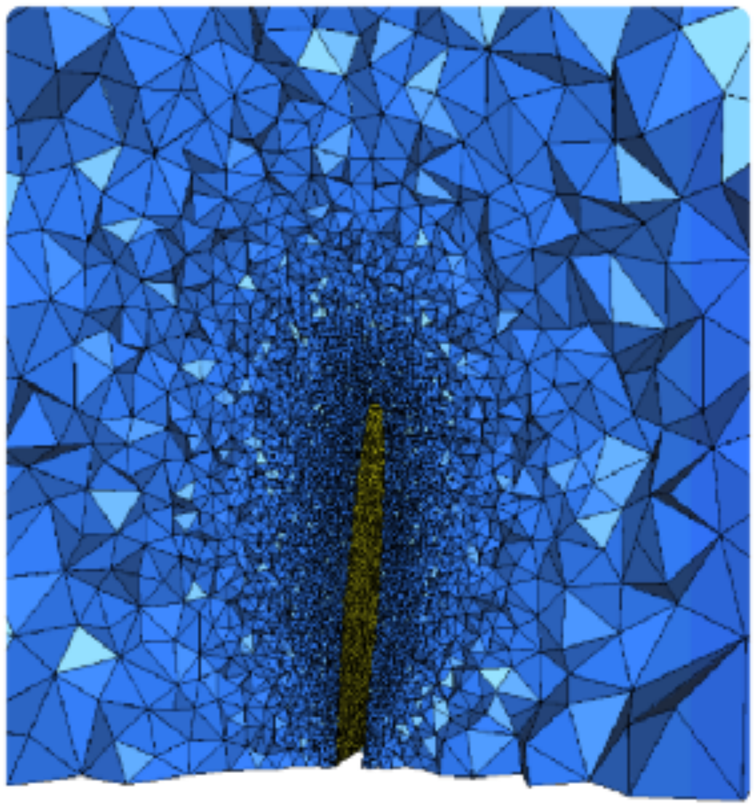
Rapidement :

- Structuré : grille (noeuds toujours adjacents aux mêmes éléments)
- Non-structuré : les autres





Structuré



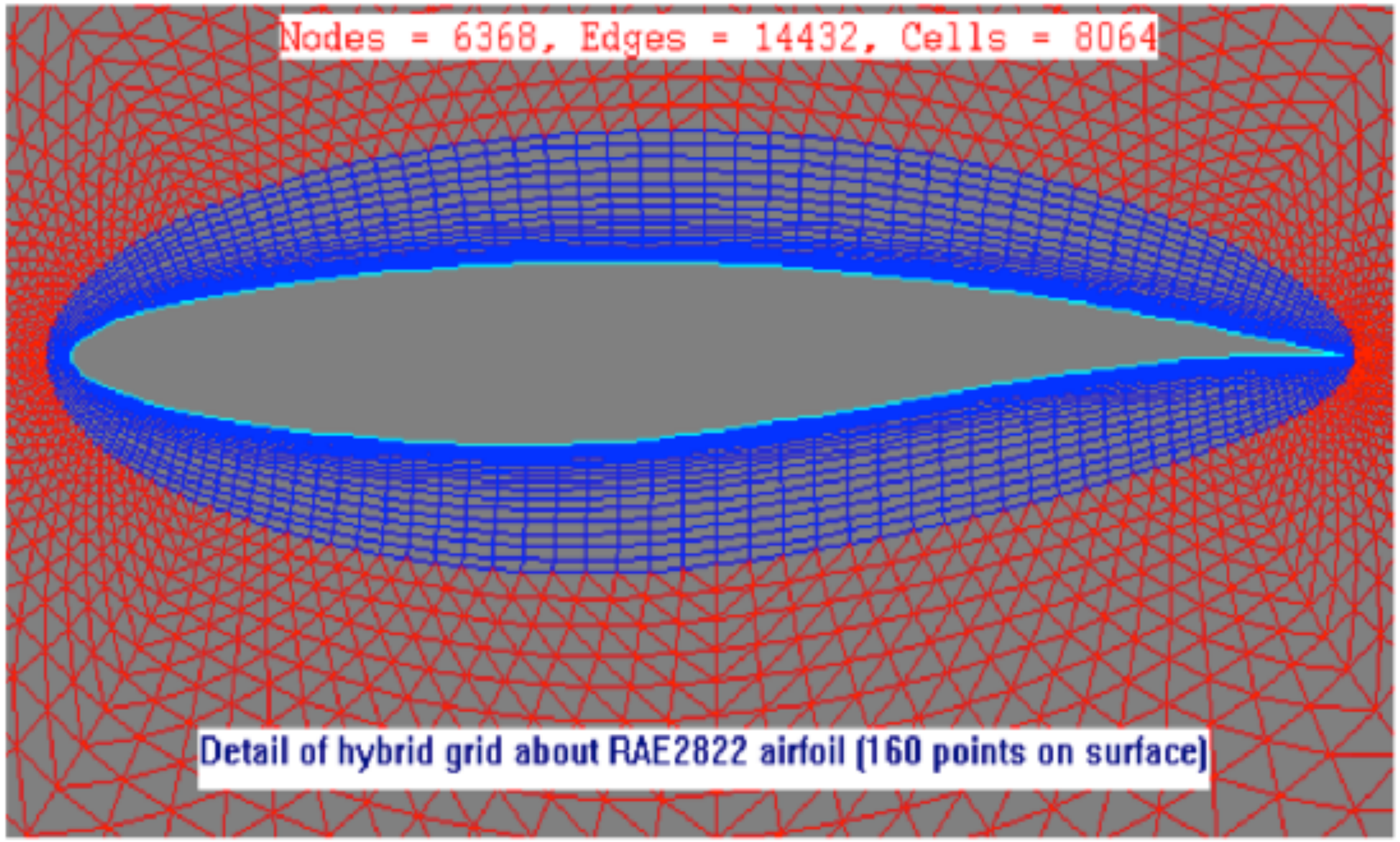
Non-structuré

DIFFÉRENTS TYPES DE MAILLAGE

Trois types de maillage :

- simpliciaux : triangles, tétraèdres

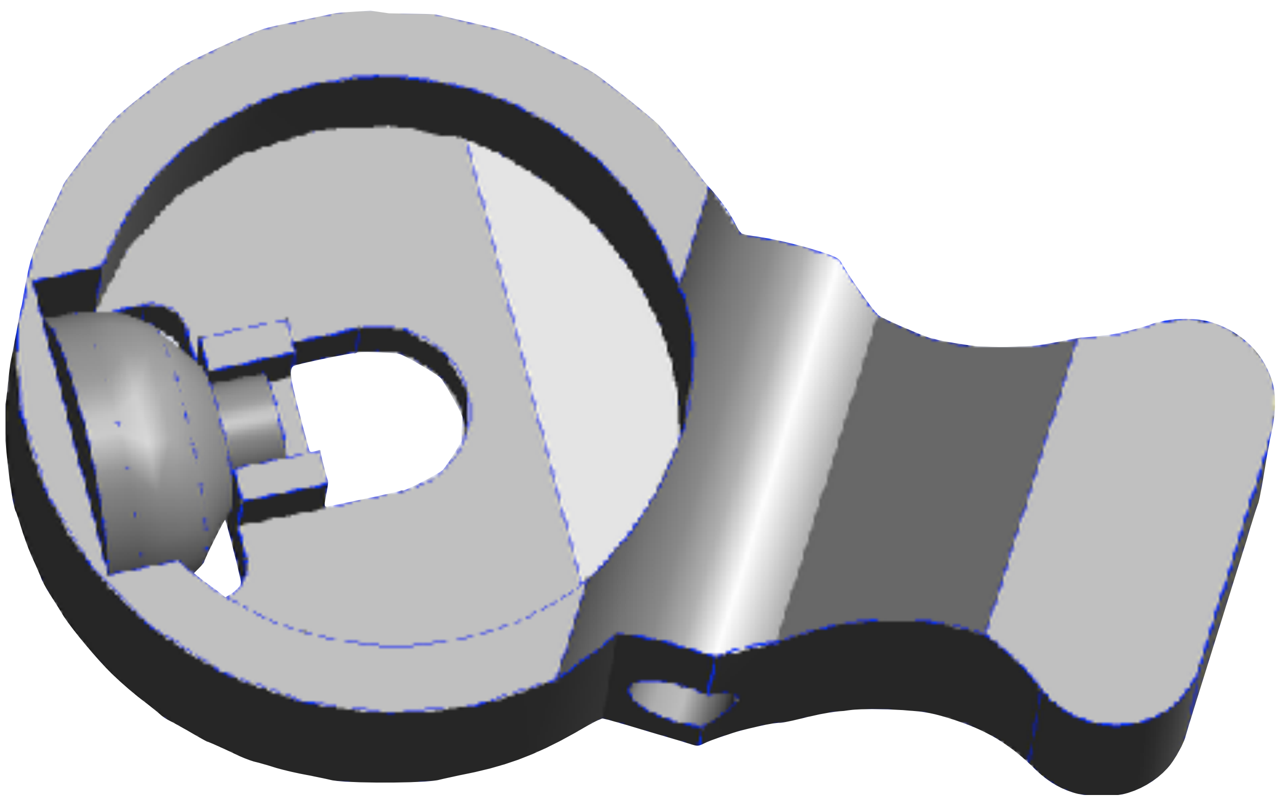
- mixtes / hybrides : différents types d’éléments (contient des éléments structurés et non structurés)

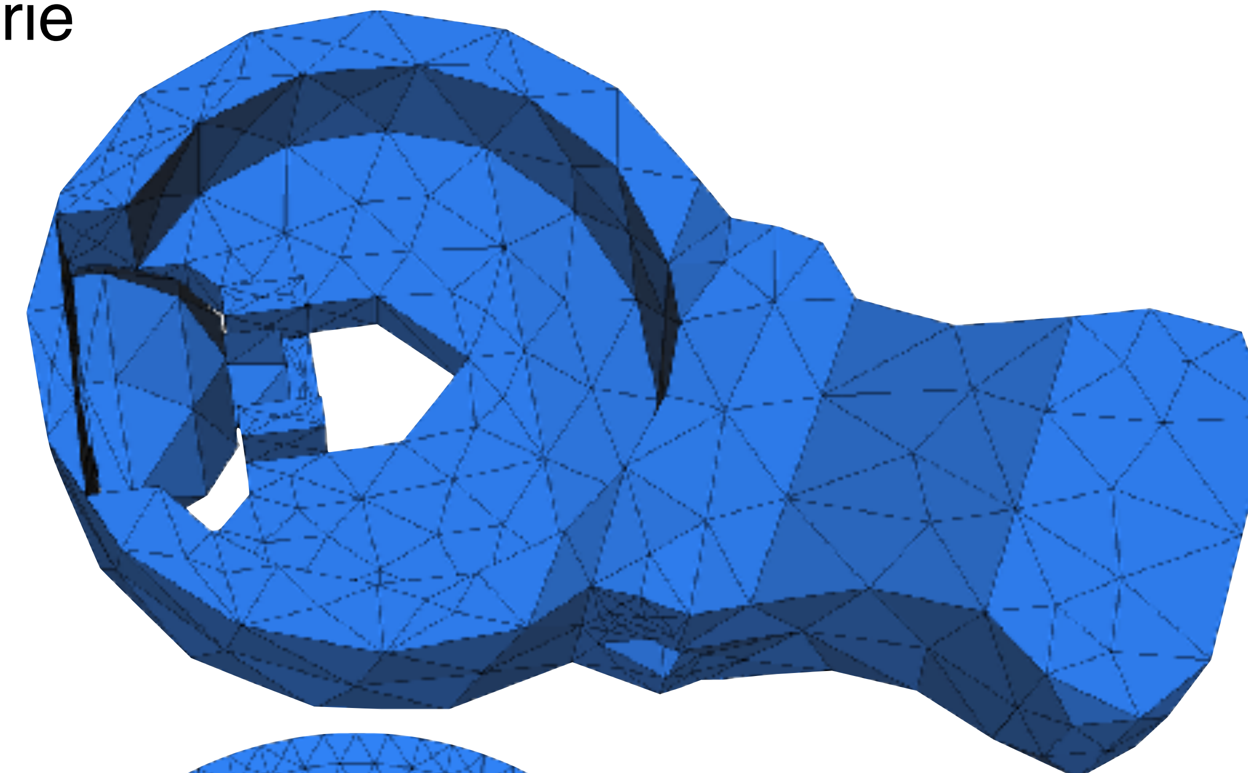


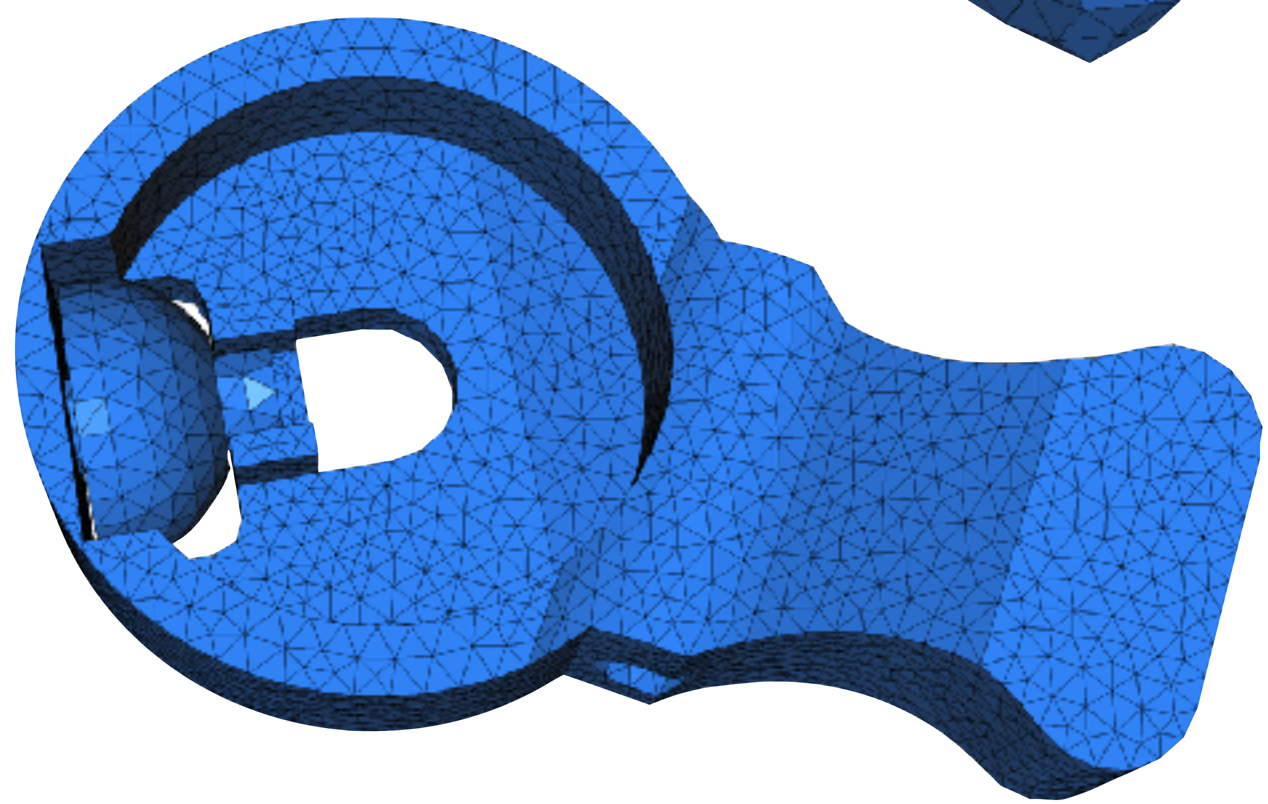
Maillages pour la simulation numérique

Pour être utilisable pour la simulation numérique, les maillages doivent :

- représenter suffisamment bien la géométrie



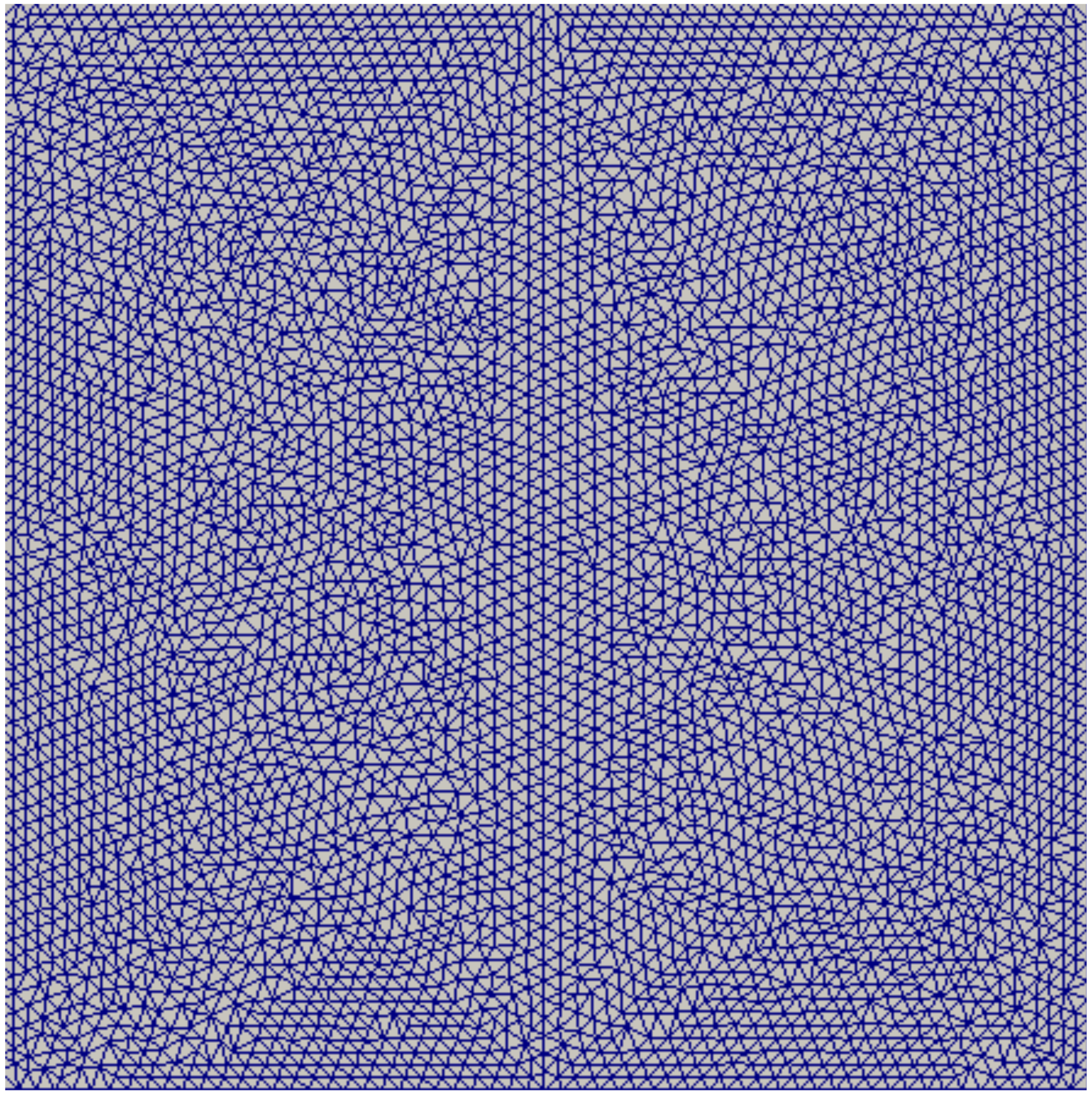


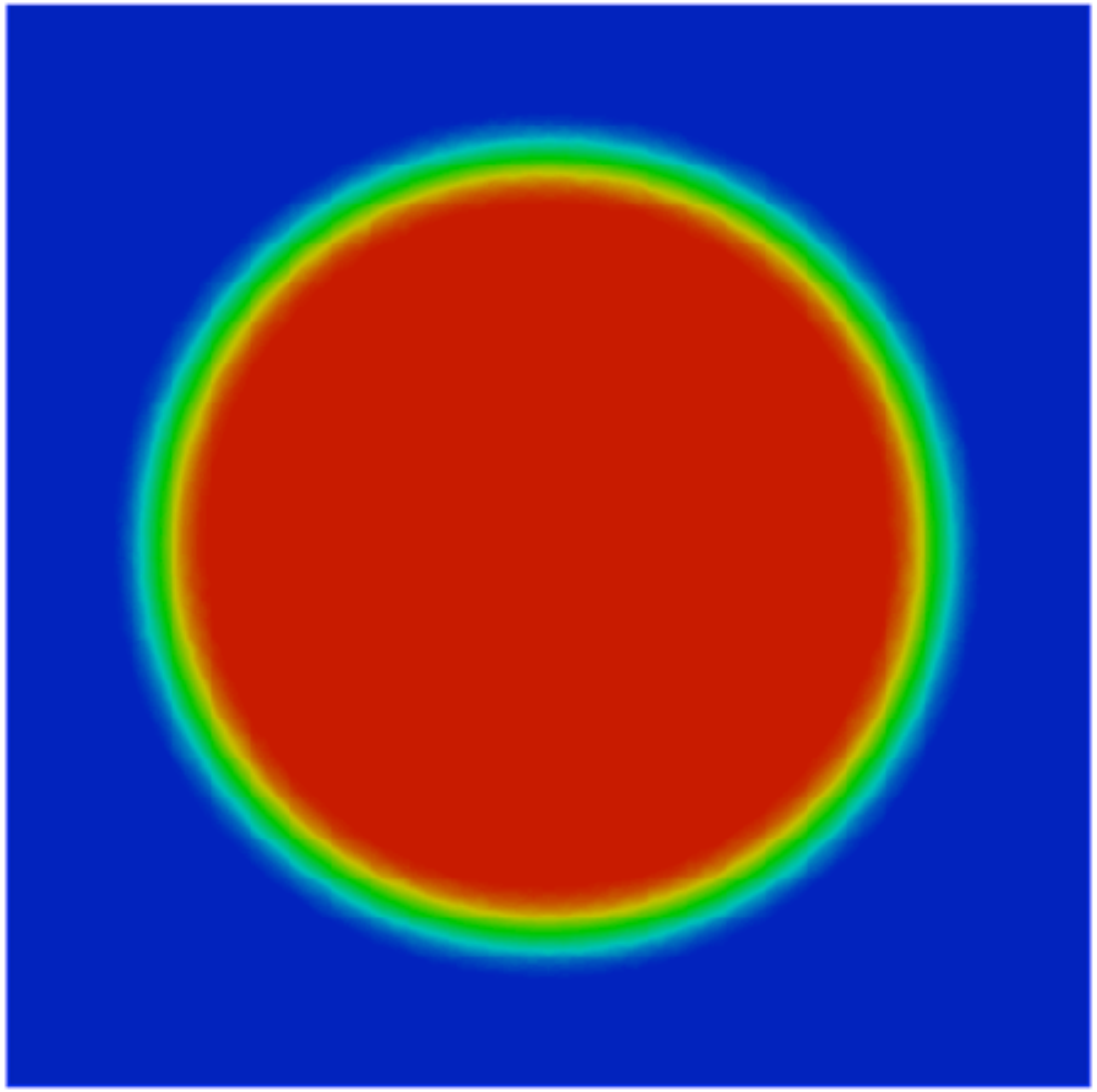


MAILLAGES POUR LA SIMULATION NUMÉRIQUE

Pour être utilisable pour la simulation numérique, les maillages doivent :

- représenter suffisamment bien la géométrie
- comporter suffisamment d'éléments pour calculer précisément

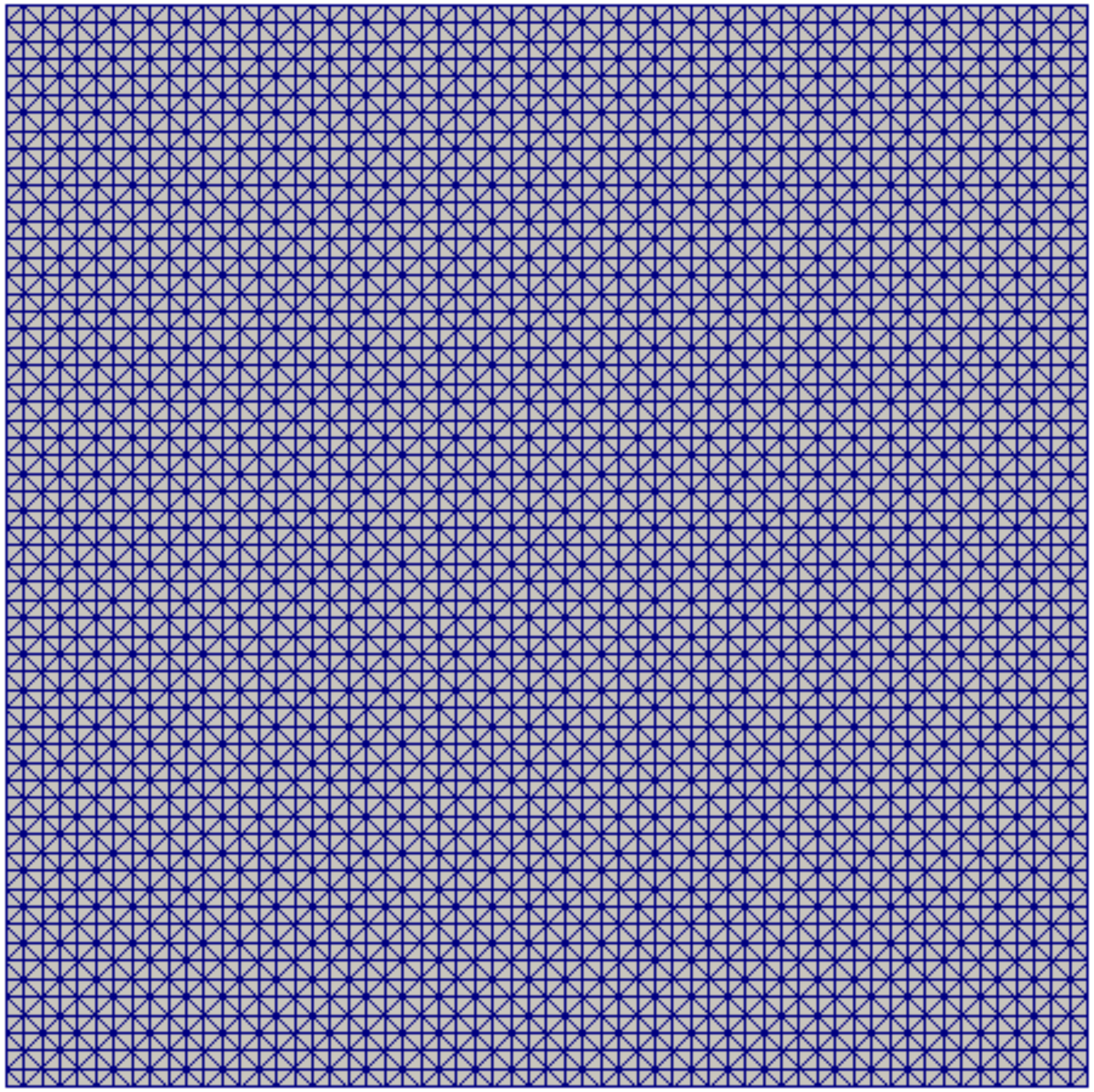


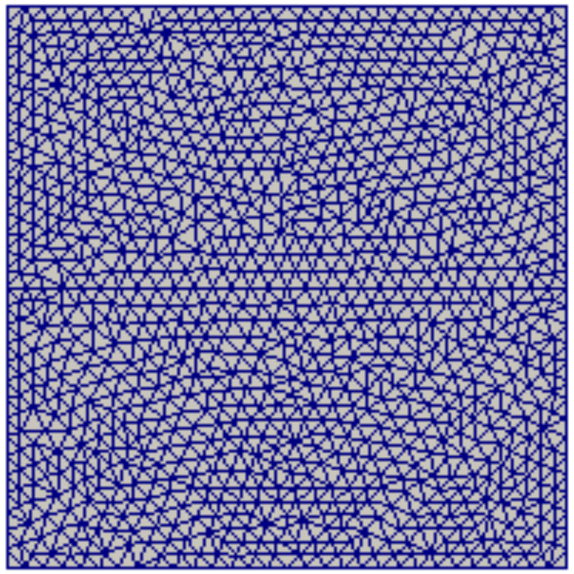


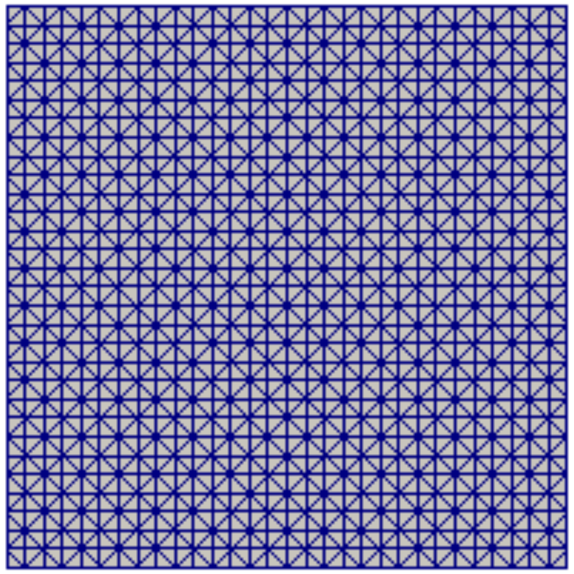
MAILLAGES POUR LA SIMULATION NUMÉRIQUE

Pour être utilisable pour la simulation numérique, les maillages doivent :

- représenter suffisamment bien la géométrie
- comporter suffisamment d'éléments pour calculer précisément



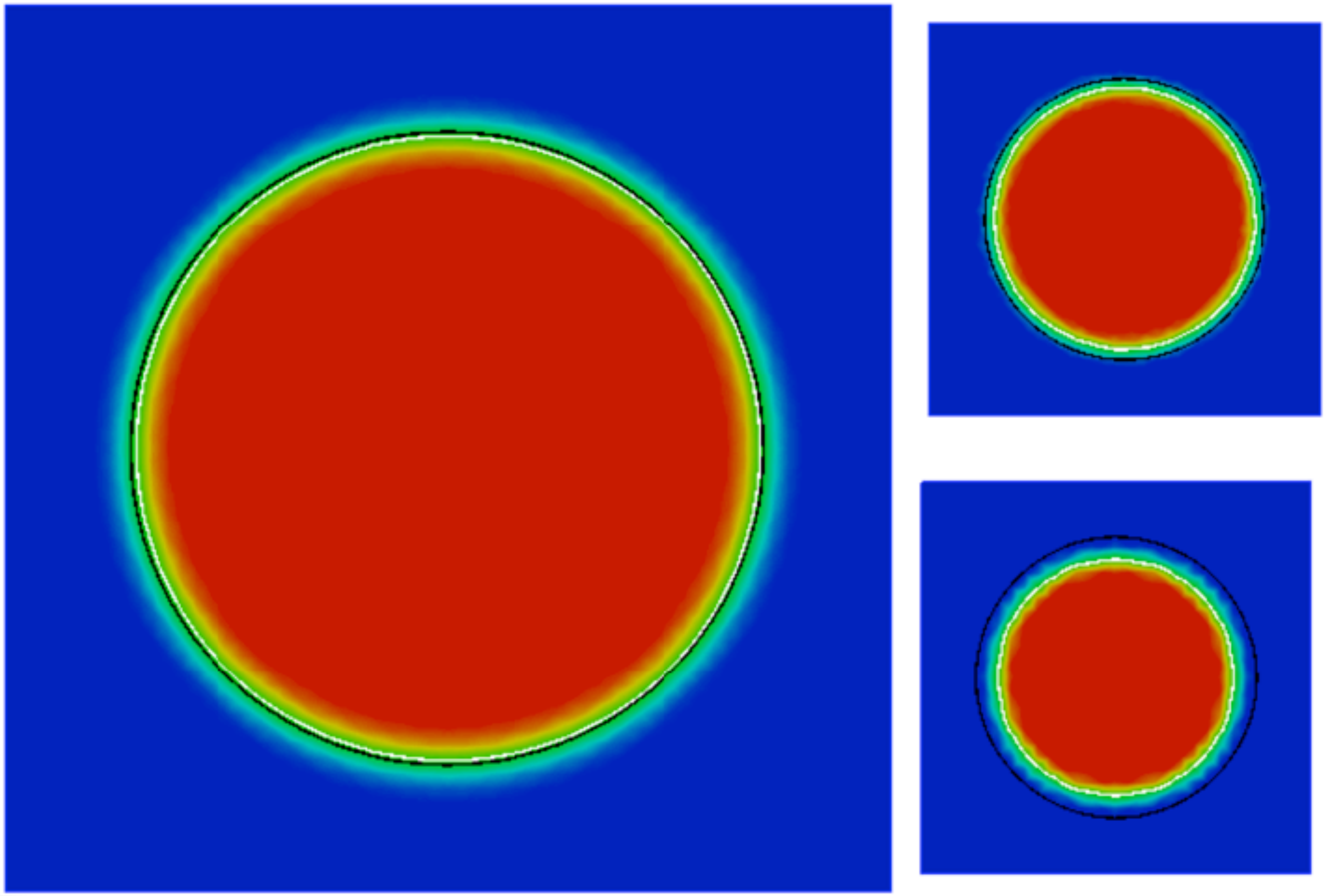




MAILLAGES POUR LA SIMULATION NUMÉRIQUE

Pour être utilisable pour la simulation numérique, les maillages doivent :

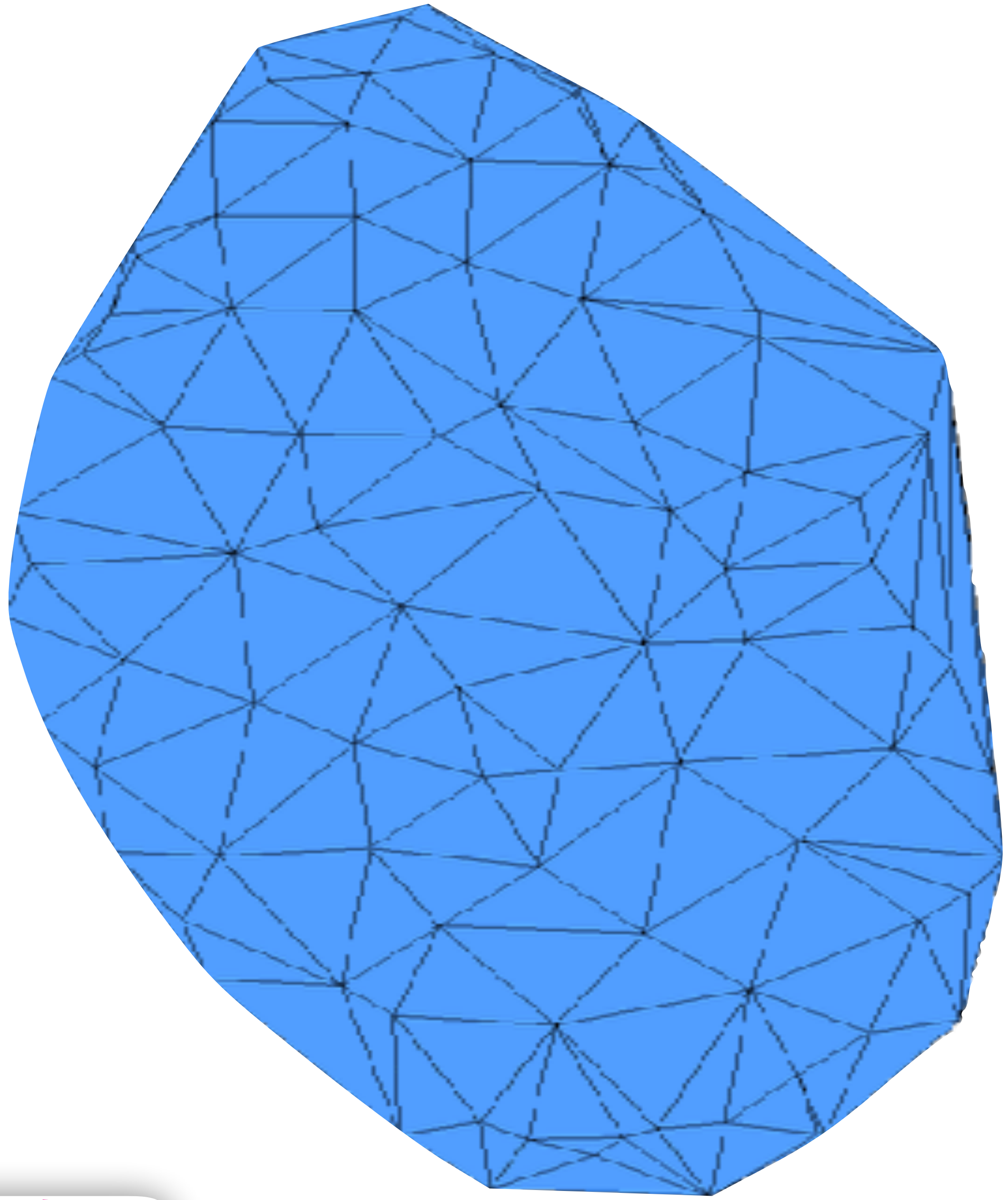
- représenter suffisamment bien la géométrie
- comporter suffisamment d'éléments pour calculer précisément



Maillages pour la simulation numérique

Pour être utilisable pour la simulation numérique, les maillages doivent :

- représenter suffisamment bien la géométrie
- comporter suffisamment d'éléments pour calculer précisément
- avoir des éléments de bonne qualité



Quelques critères de qualité

$$\eta \text{ (ou SICN)} = \frac{V^{\frac{2}{3}}}{\sum (l_a)^2}$$

$$\gamma = \frac{r_{ci}}{r_{cc}}$$

$$\rho = \frac{\min_T l_a}{\max_T l_a},$$

2ème partie: Génération de maillage

I. Pourquoi construire un maillage est difficile ?

II. Schéma général de construction de maillage

III. Méthode de Delaunay
   1. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points
   2. Triangulation de Delaunay contrainte
   3. Difficultés, avantages et inconvénients

IV. Méthode frontale
   1. Méthode
   2. Difficultés, avantages et inconvénients

V. Méthode octree/quadtree
   1. Méthode
   2. Difficultés, avantages et inconvénients

VI. Comparaison des 3 méthodes

Pourquoi construire un maillage est difficile ?

- Beaucoup de contraintes demandées par l'utilisateur :
  - Tailles des éléments (comme vu précédemment)
  - Qualités des éléments (comme vu précédemment)
  - Respect de la géométrie (comme vu précédemment)
  - Type d'éléments (pour que ce soit compatible avec le code !)
- Procédure la plus automatique possible
- Procédure la plus robuste possible (sans maillage on ne peut pas calculer !)
- Vitesse des mailleurs est importante : gros maillages demandent beaucoup de ressources (HPC)
- Beaucoup beaucoup de cas particuliers

Schéma général de construction d'un maillage

- Méthode générale pour les maillages structurés
  - Mailler une géométrie simple
  - La transformer pour obtenir une géométrie voulue

- Méthodes pour les maillages non-structurés
  - Méthode de Delaunay
    - Création d'une boîte englobante
    - Insertion des noeuds de bord et forçage des frontières
    - Suppression de la boite englobante
    - Création de points intérieurs au domaine par rapport à une spécification de taille

  - Méthode frontale
    - Initialisation du front par les entités frontières
    - Création de points intérieurs au domaine par création des éléments « idéaux » issus des entités du front et mise à jour du front

  - Méthode Quadtree - Octree
    - Création d'une boîte englobante
    - Création d'un arbre par rapport à un critère géométrique et/ou une spécification des tailles requises
    - Équilibrage de l'arbre
    - Triangulation des cellules de l'arbre par des motifs prédéfinis

Méthode de Delaunay :
1. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points

a. **Qu'est ce qu'une triangulation de Delaunay ?**

b. **Insertion de points dans une triangulation de Delaunay**

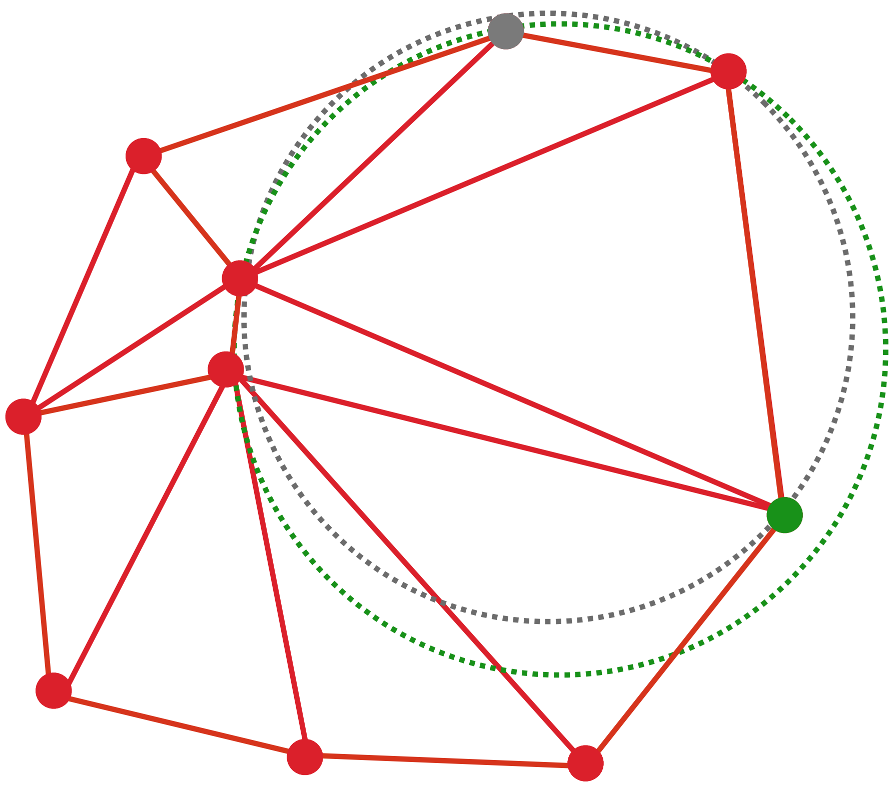
c. **Algorithme**

A. Qu'est ce qu'une triangulation de Delaunay ?

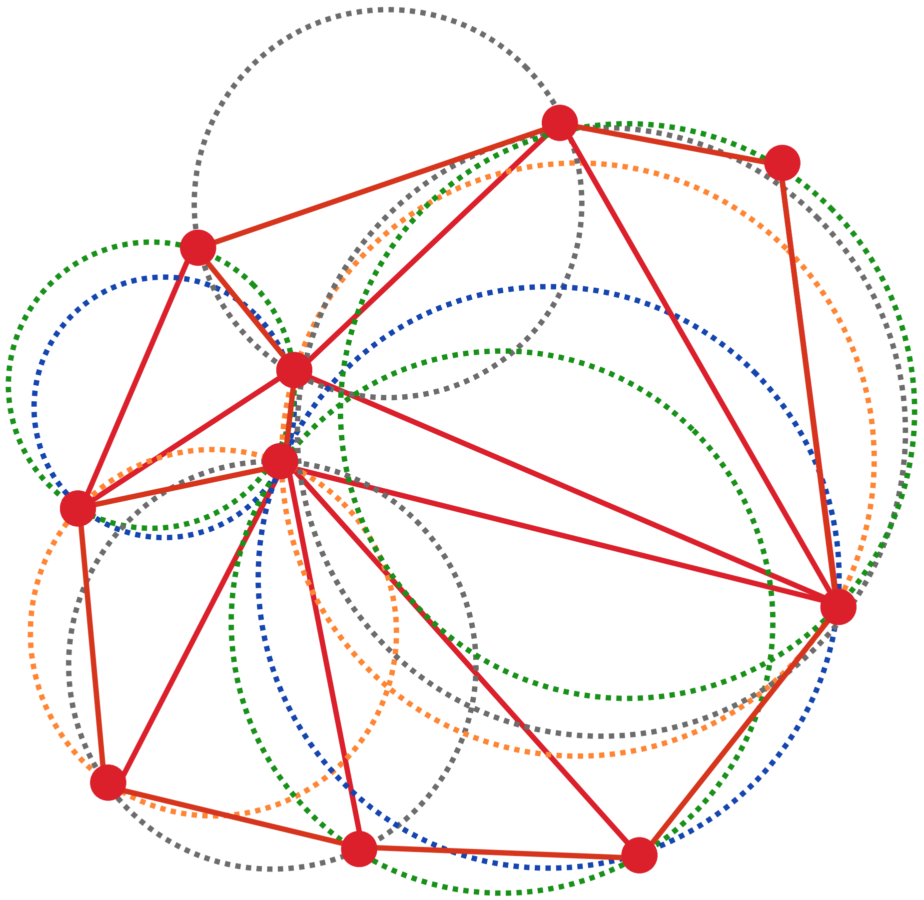
Critère de la boule vide : les boules ouvertes circonscrites aux sommets de la triangulation ne contiennent aucun sommet de la triangulation.

Définition : une triangulation respectant le critère de la boule vide est une triangulation de Delaunay.

Proposition : il y a unicité de la triangulation de Delaunay.



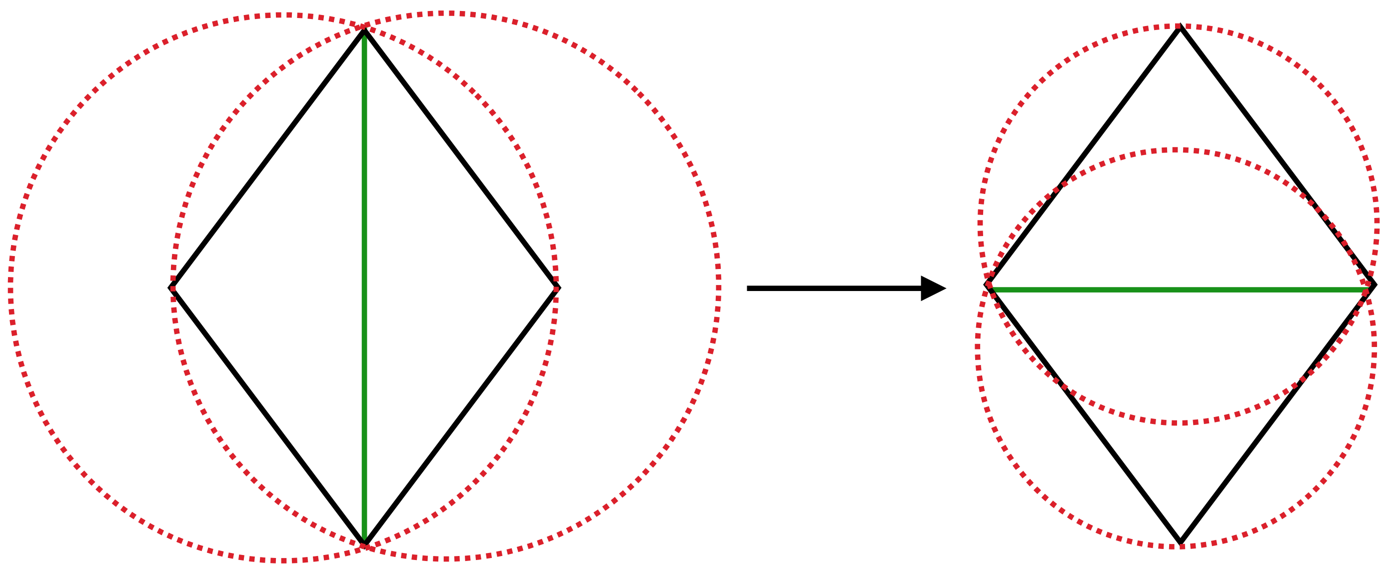
Triangulation quelconque



Triangulation de Delaunay

A. Qu'est ce qu'une triangulation de Delaunay ?

Méthode du retournement : dans le cas d'un quadrilatère la méthode du retournement (méthode *flip*) permet d'obtenir une triangulation de Delaunay du quadrilatère.



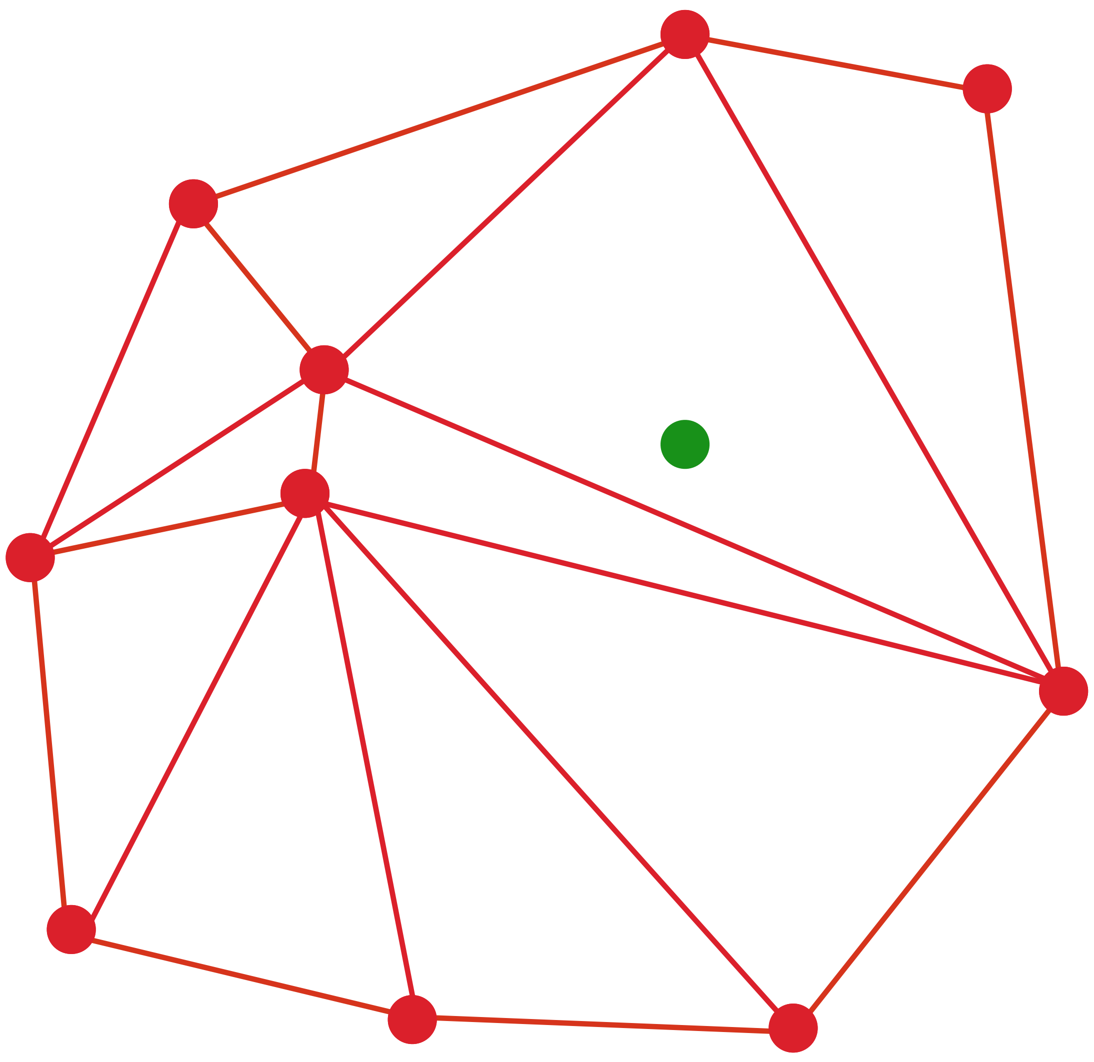
Lemme : Soit T une triangulation, si le critère de la boule vide est vrai pour chaque configuration de 2 éléments adjoints de T alors le critère est vrai partout et T est la triangulation de Delaunay.

B. Insertion de points dans une triangulation de Delaunay

Soit une triangulation de Delaunay d'une enveloppe convexe de points, l'objectif est d'insérer le point P (sur l'exemple en vert).

Par exemple pour **raffiner** le maillage suivant un critère de raffinement.

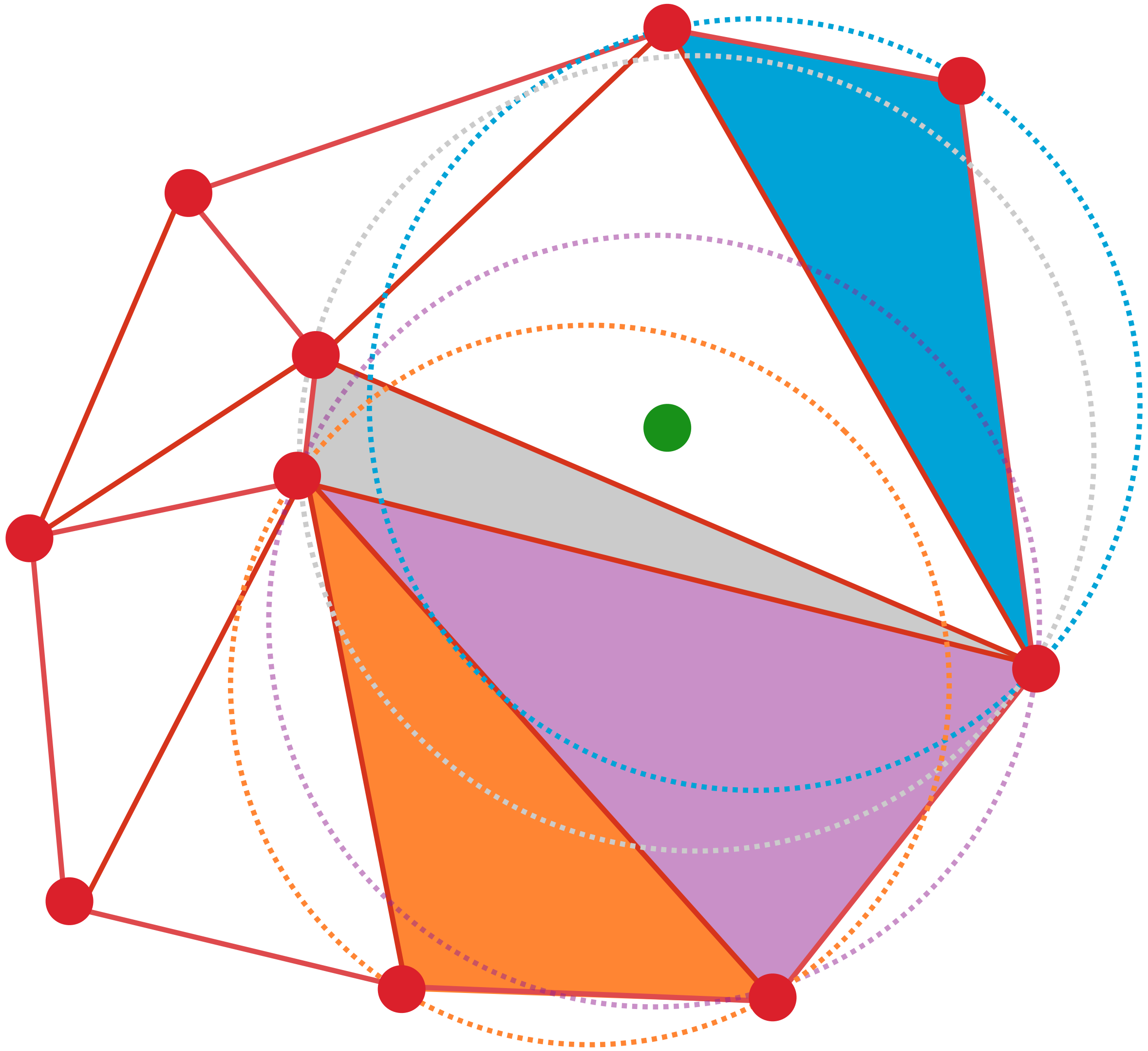
La méthode présentée ici est la méthode incrémentale :
$T_{i+1} = T_i - C_p + B_p$



B. Insertion de points dans une triangulation de Delaunay

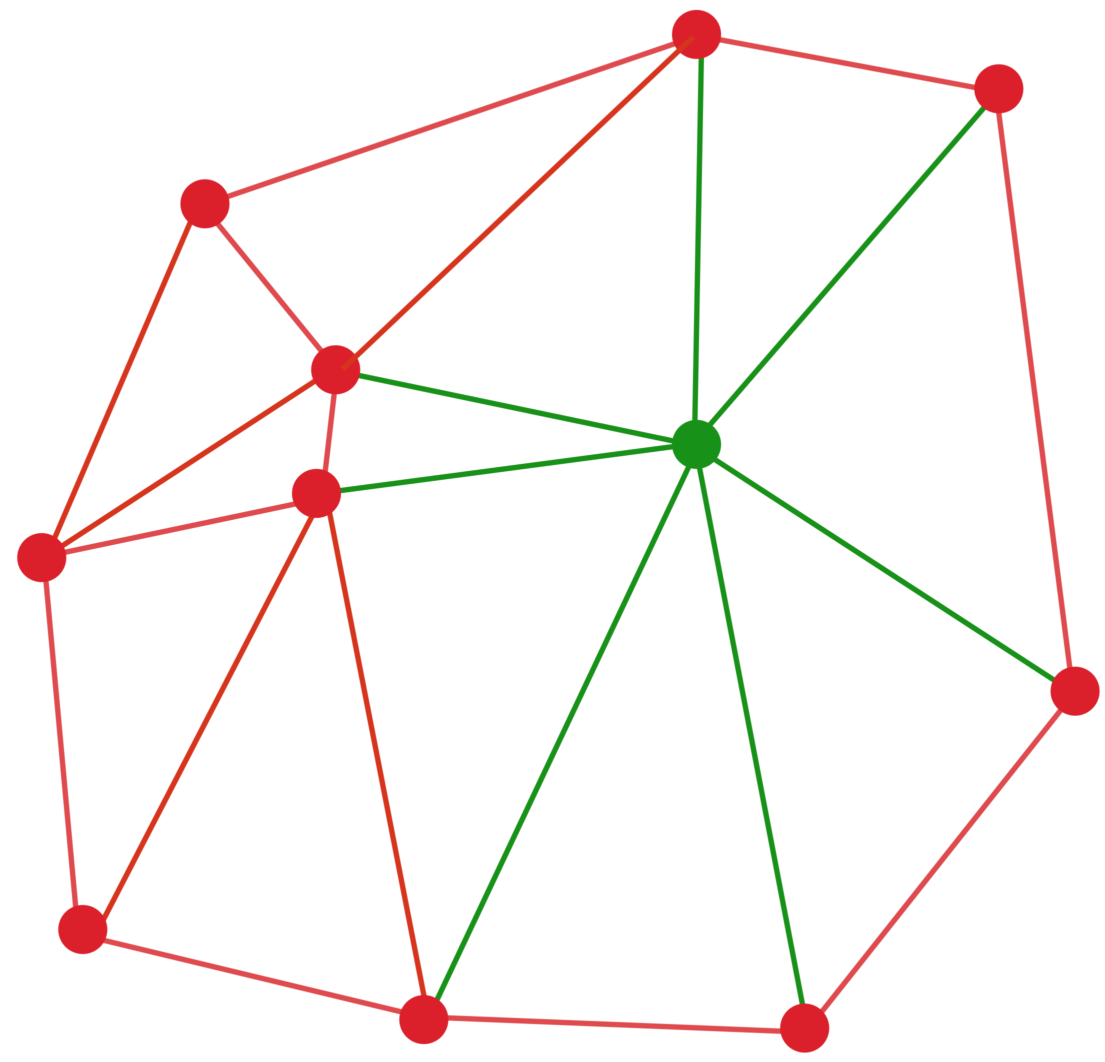
Méthode incrémentale : $T_{i+1} = T_i - C_p + B_p$

1) Retirer l'intérieur de la cavité C_p qui est l'ensemble des triangles dont le cercle circonscrit contient le point à insérer



Méthode incrémentale : $T_{i+1} = T_i - C_p + B_p$

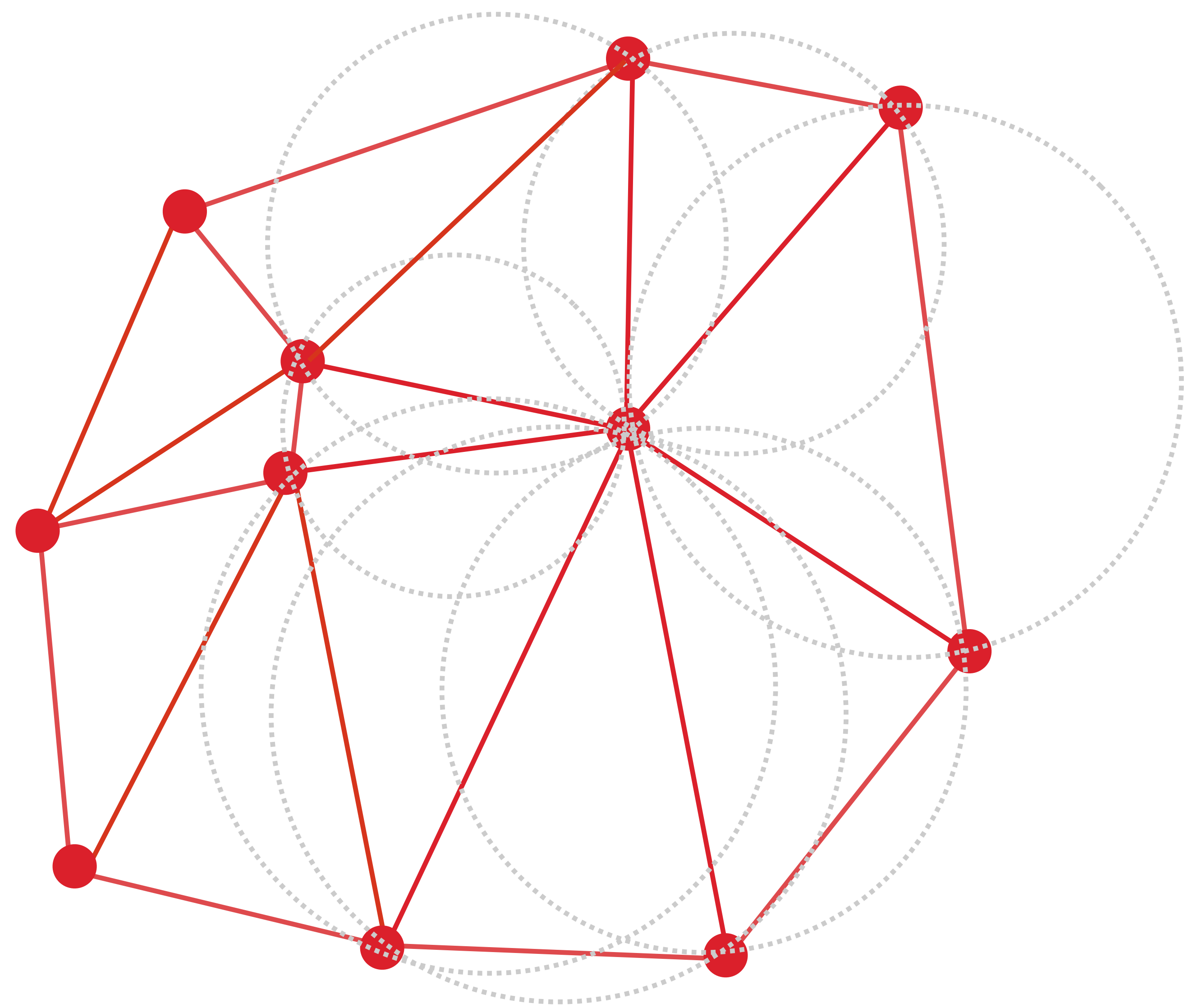
2) Construire la boule B_p qui est l'ensemble des éléments formés en joignant le point à insérer aux arêtes externes de la cavité C_p



B. Insertion de points dans une triangulation de Delaunay

Méthode incrémentale : $T_{i+1} = T_i - C_p + B_p$

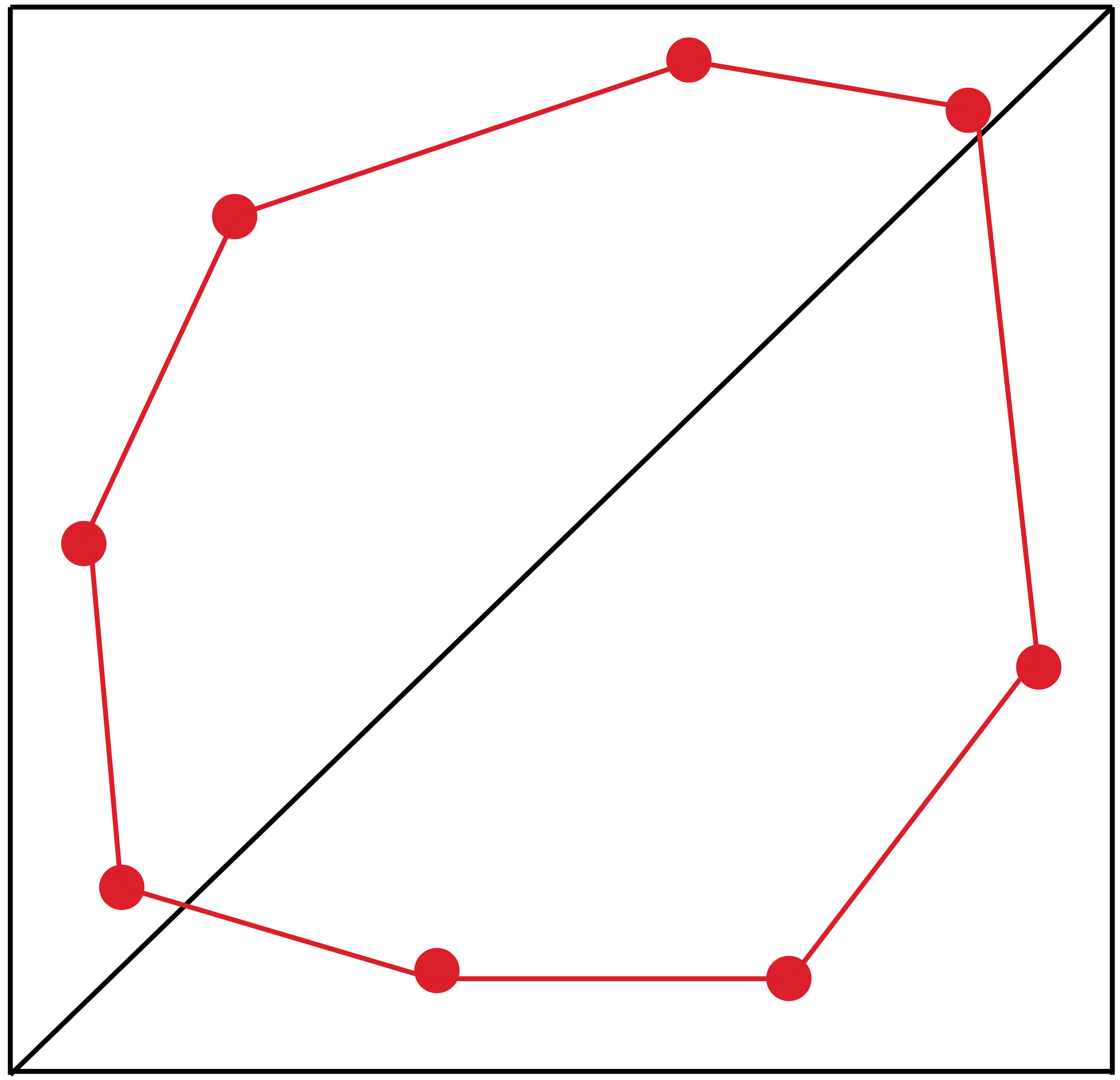
Théorème : Si T_i est une triangulation de Delaunay alors T_{i+1} construit par la méthode incrémentale est une triangulation de Delaunay.



C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

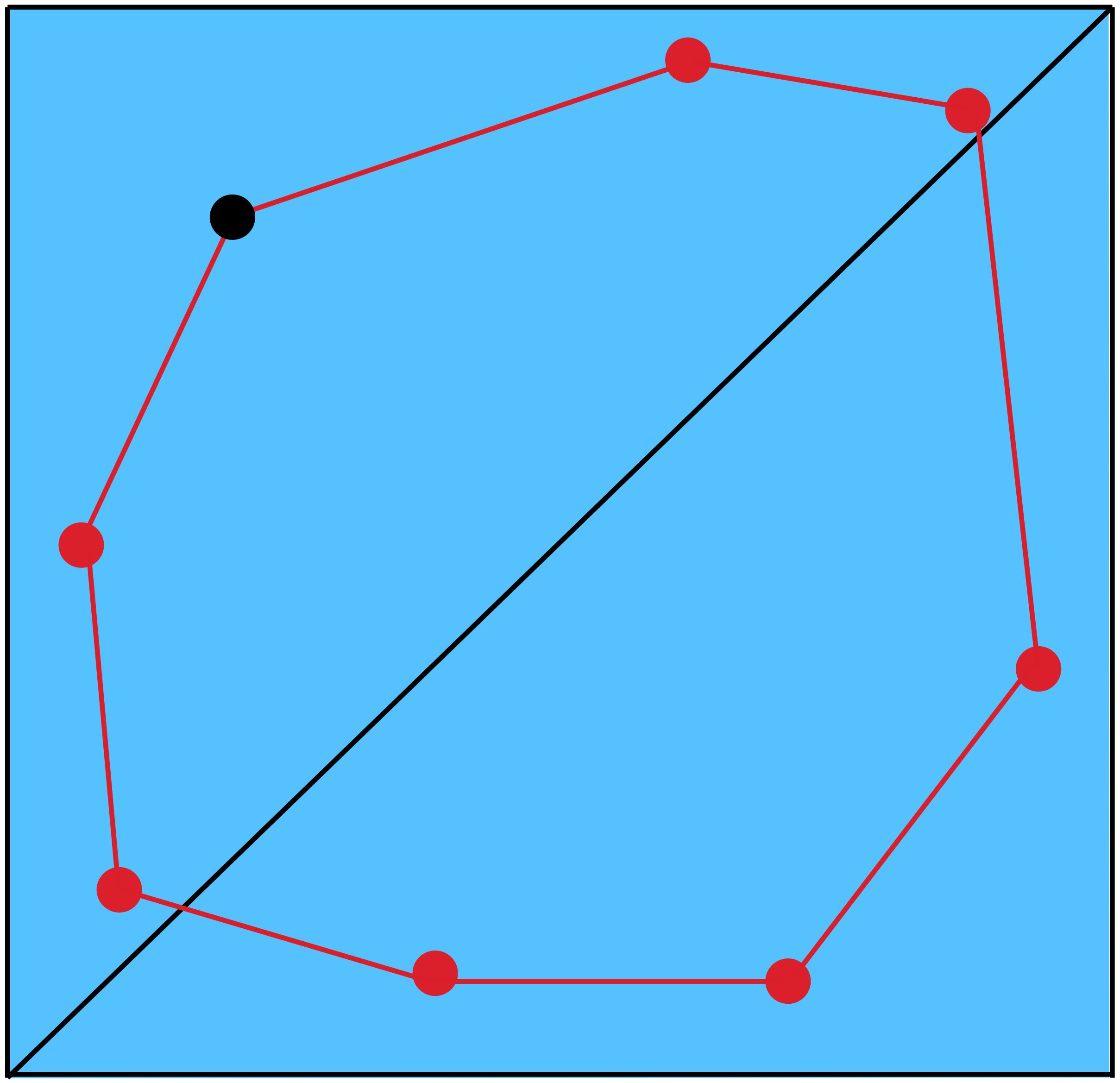


c. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

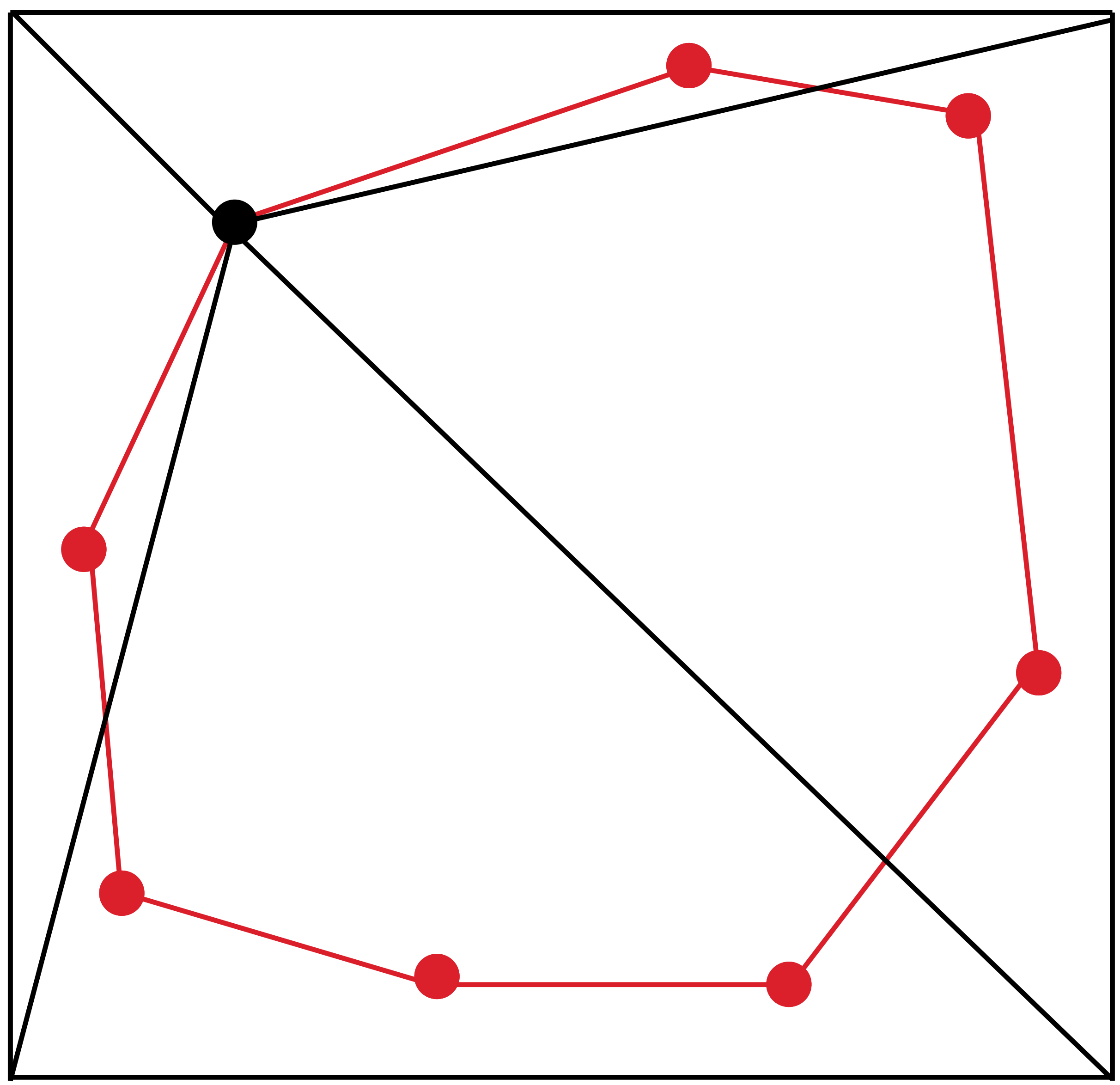
Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)



C. TRIANGULATION DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ENSEMBLE DE POINTS : ALGORITHME

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

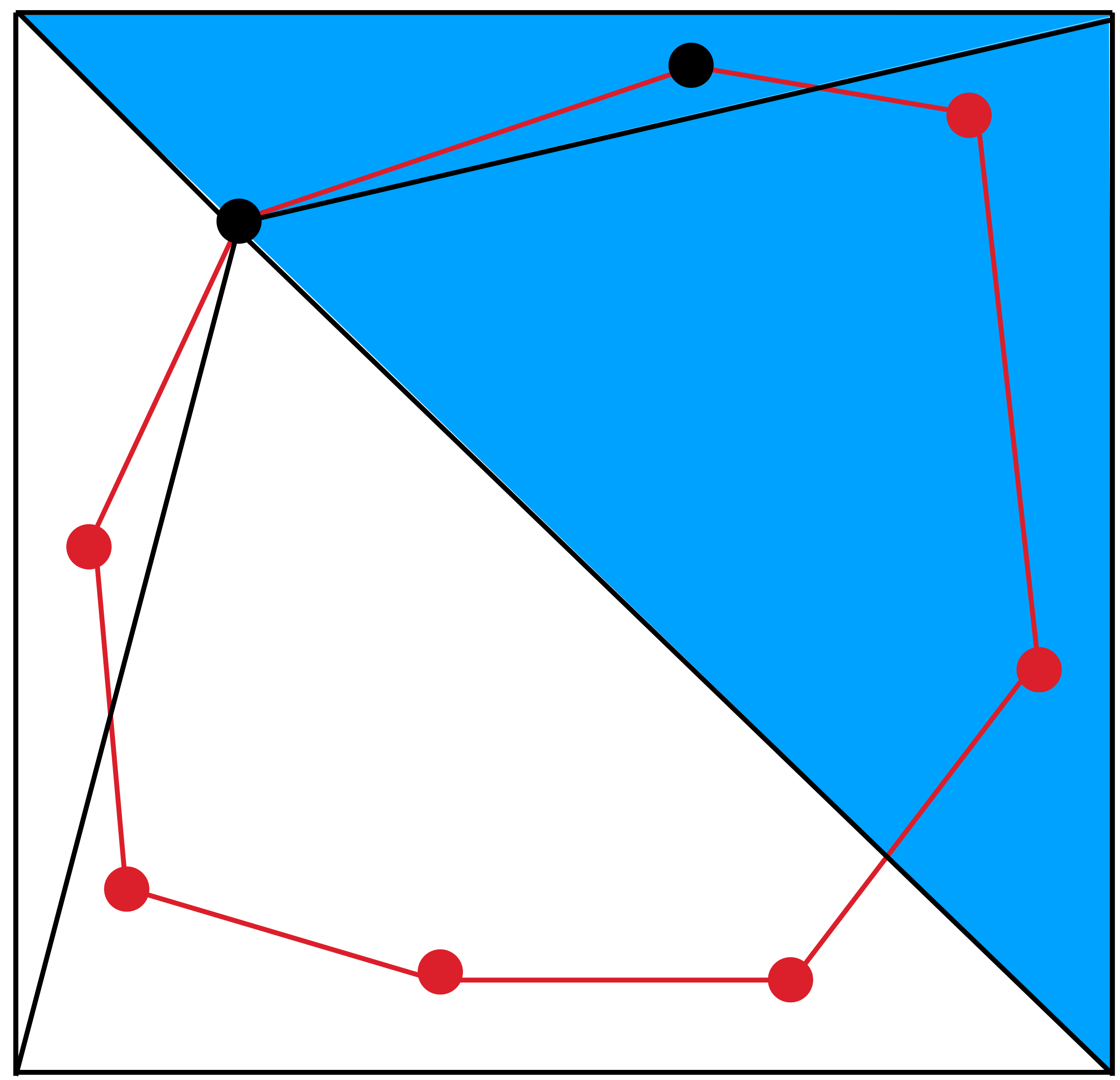


c. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

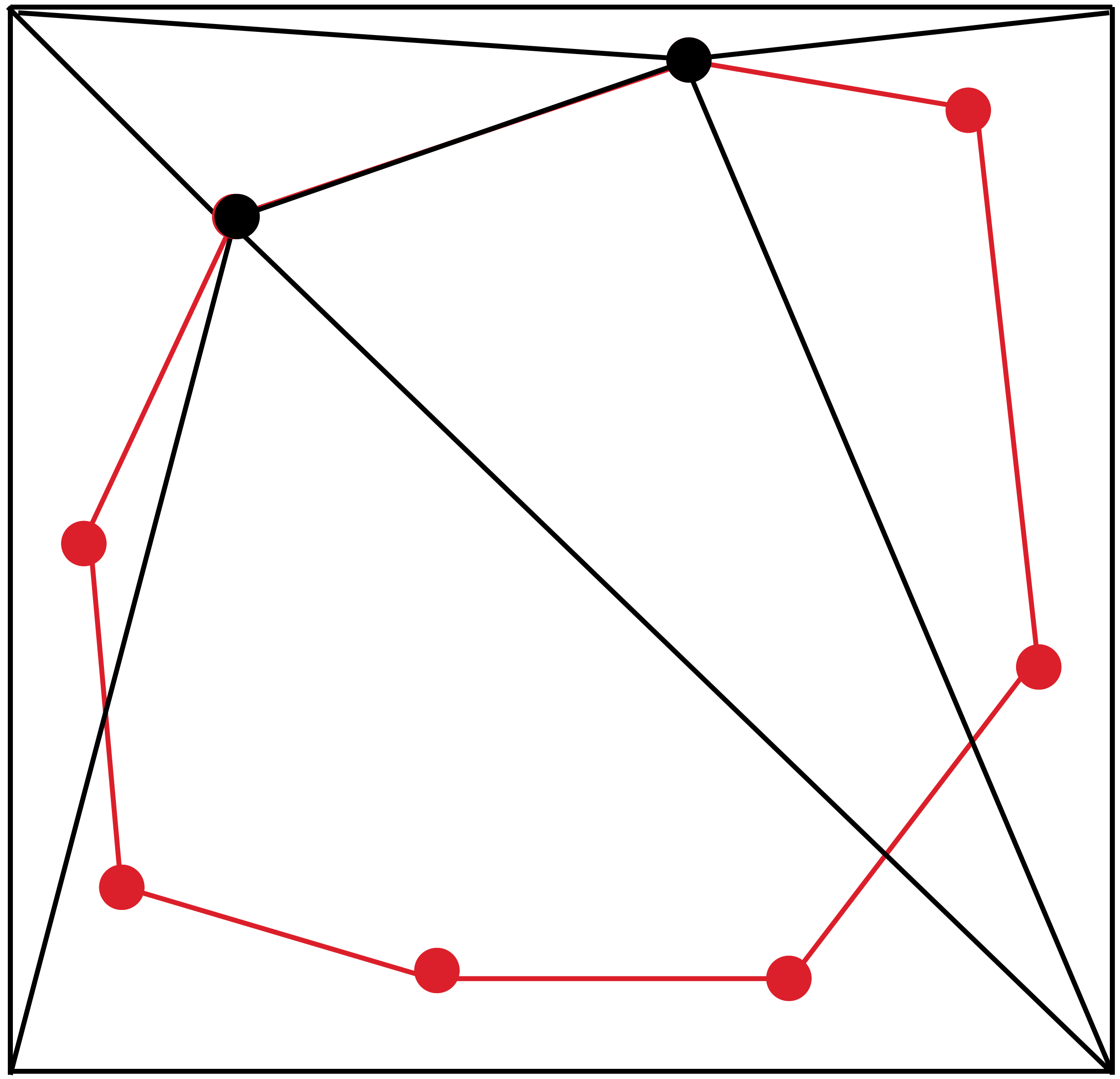


C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

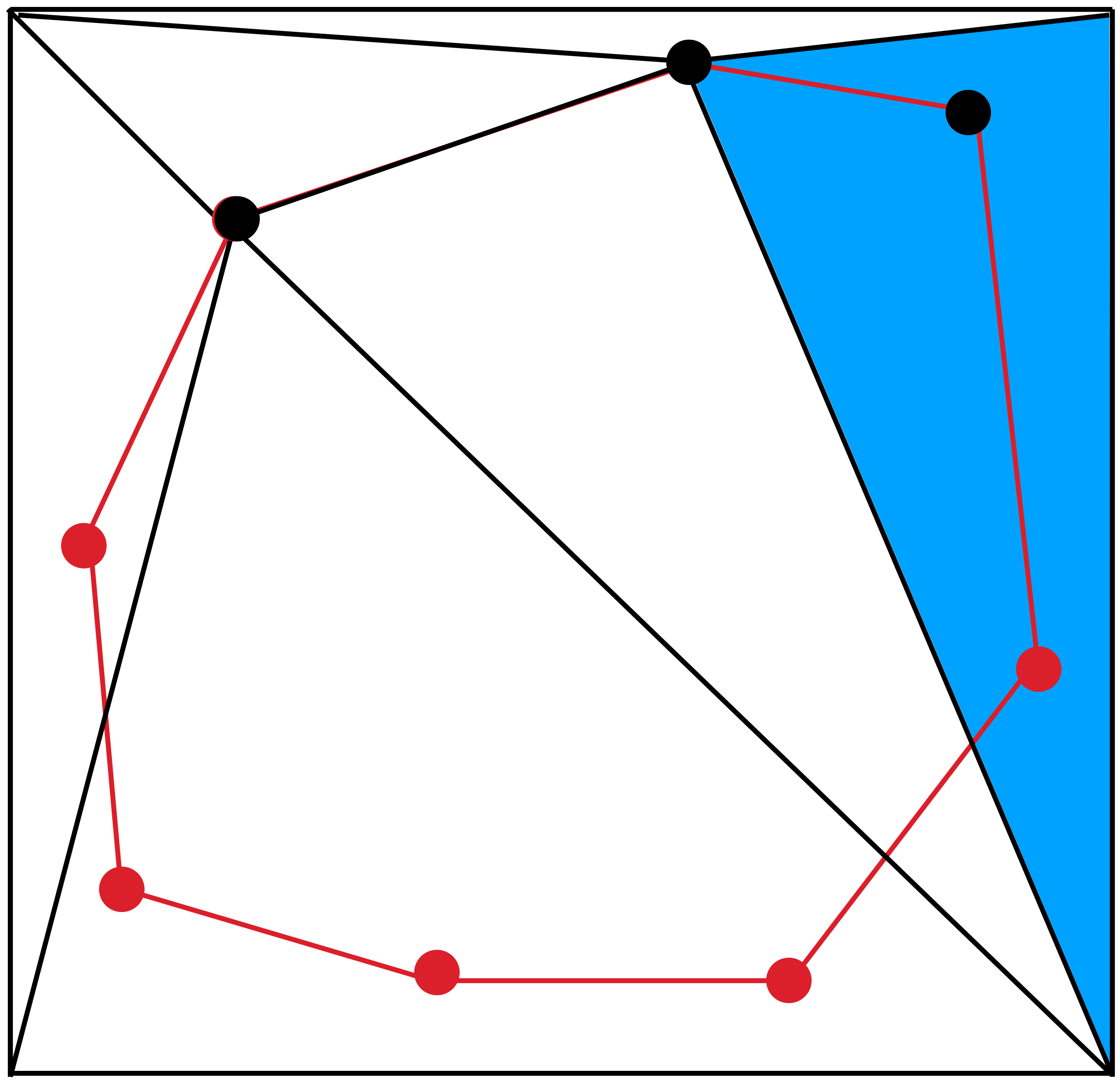
Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)



C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

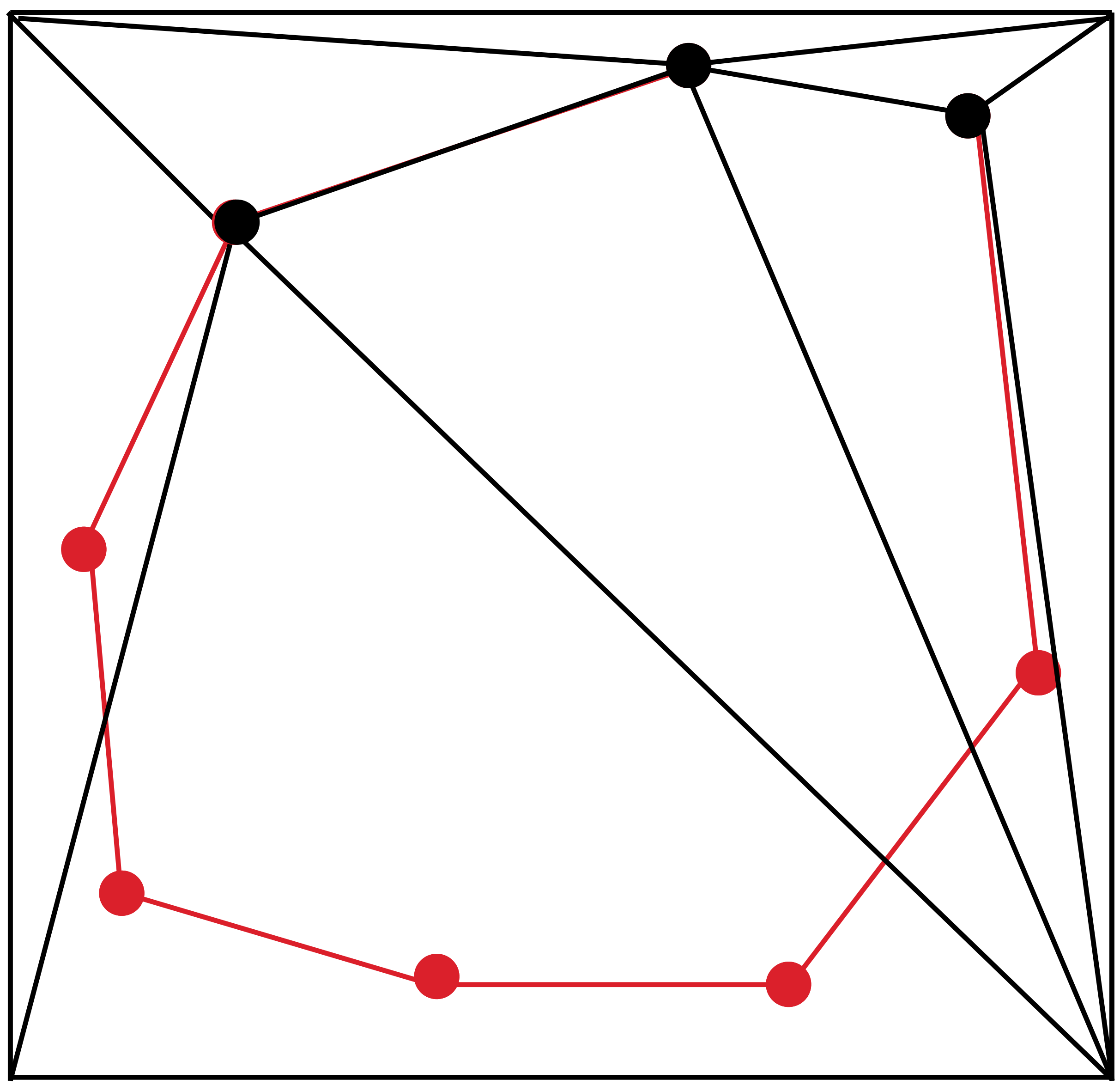


C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

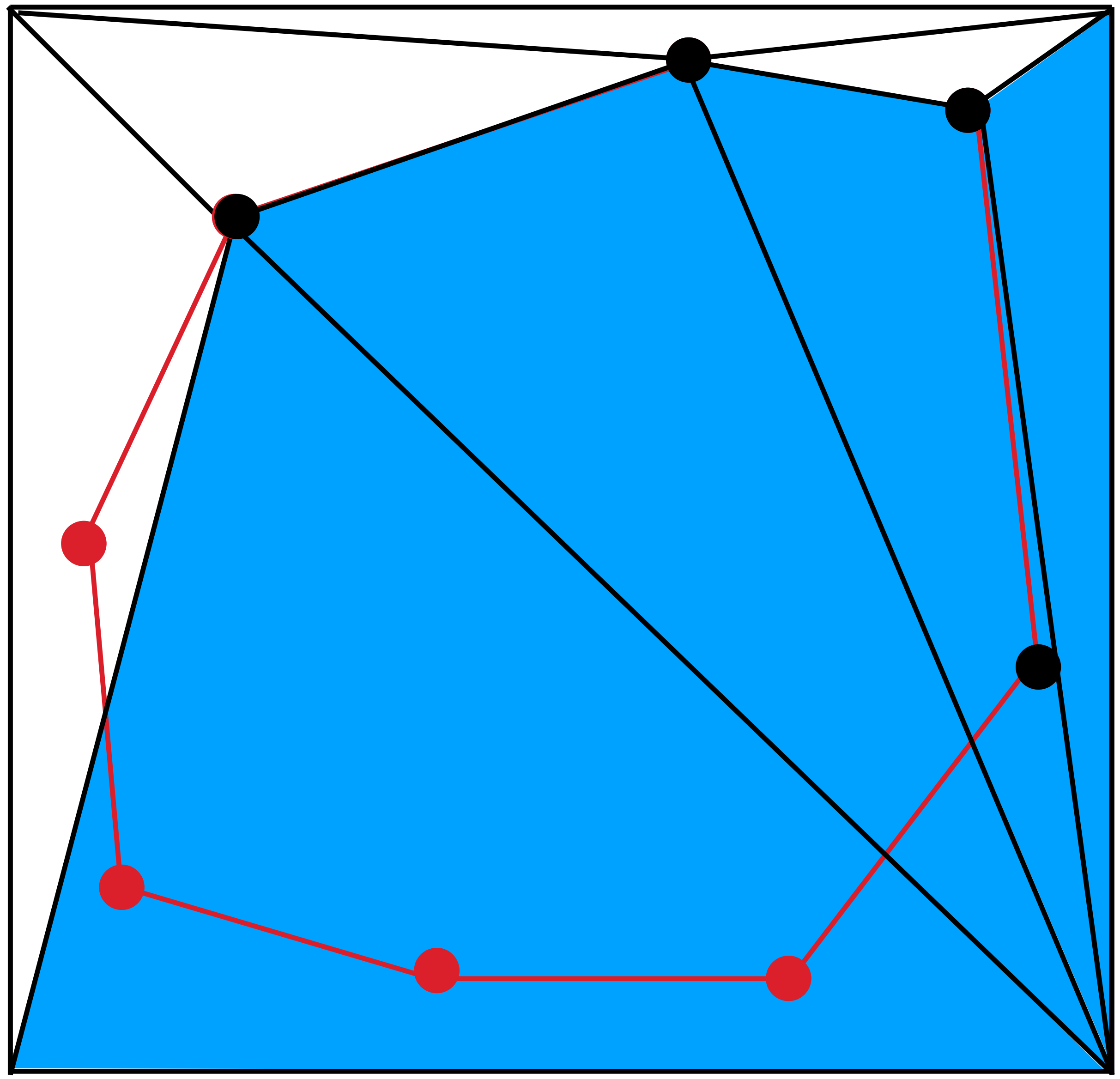


C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

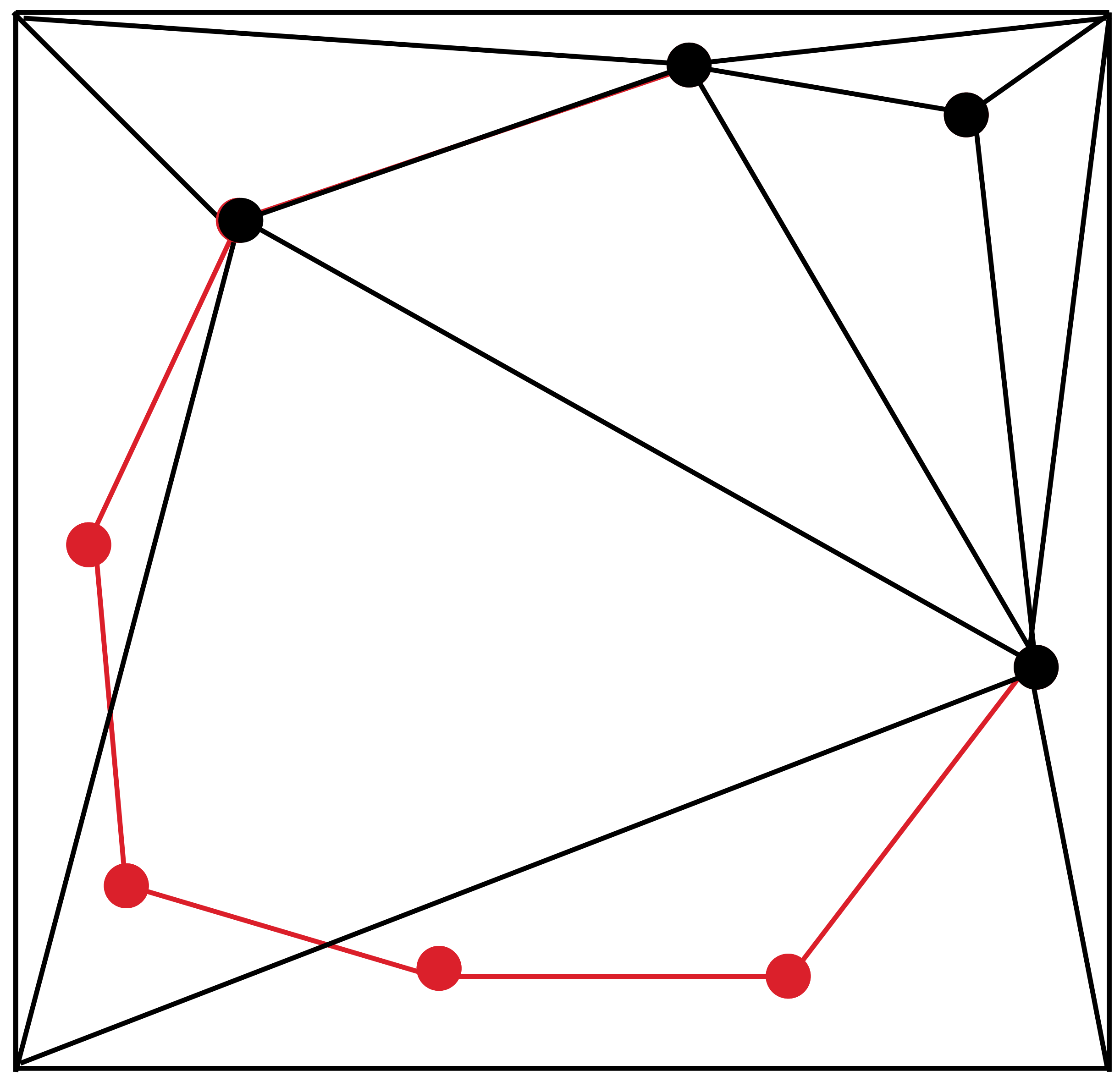
Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)



C. TRIANGULATION DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ENSEMBLE DE POINTS : ALGORITHME

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

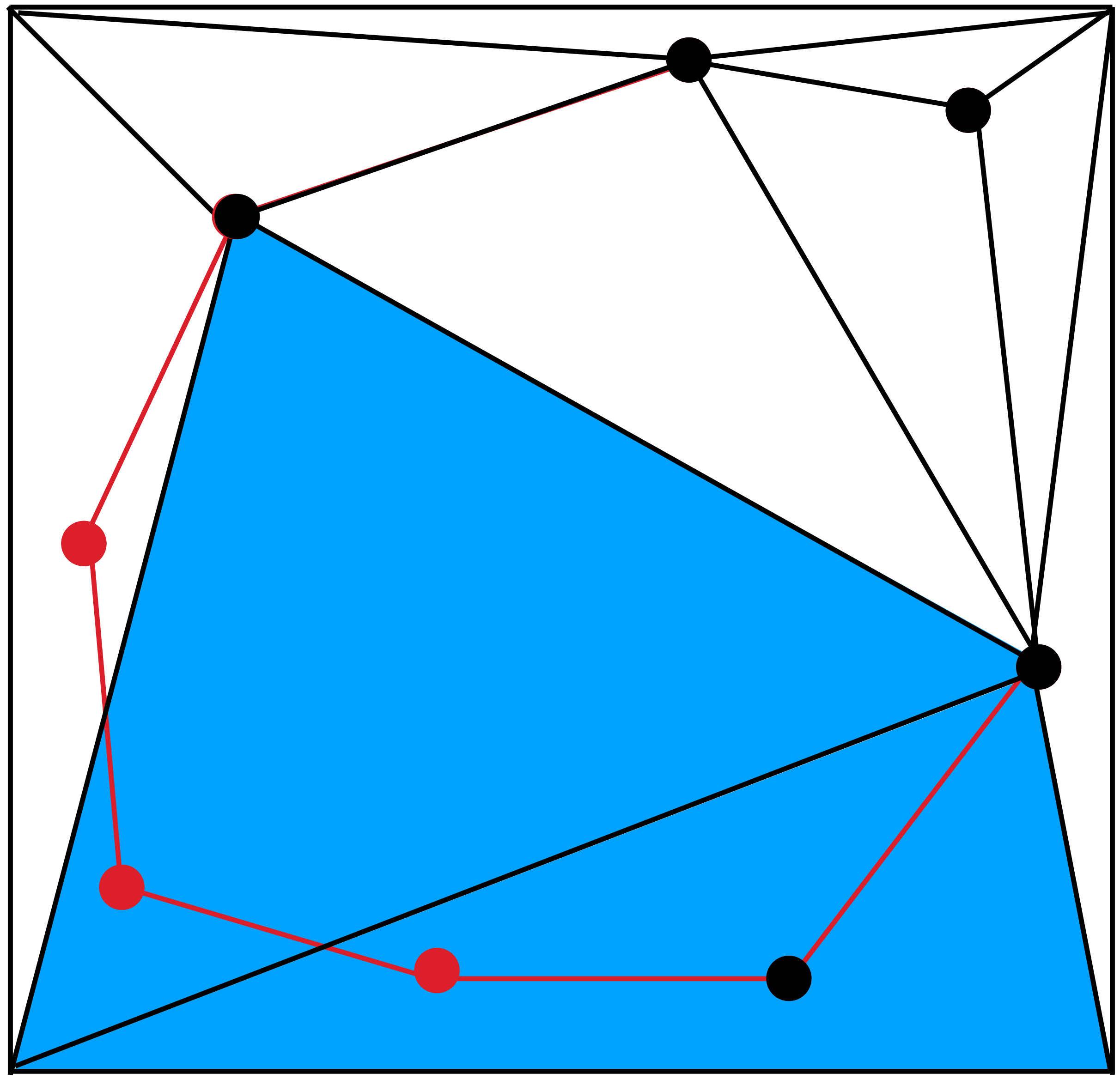


C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

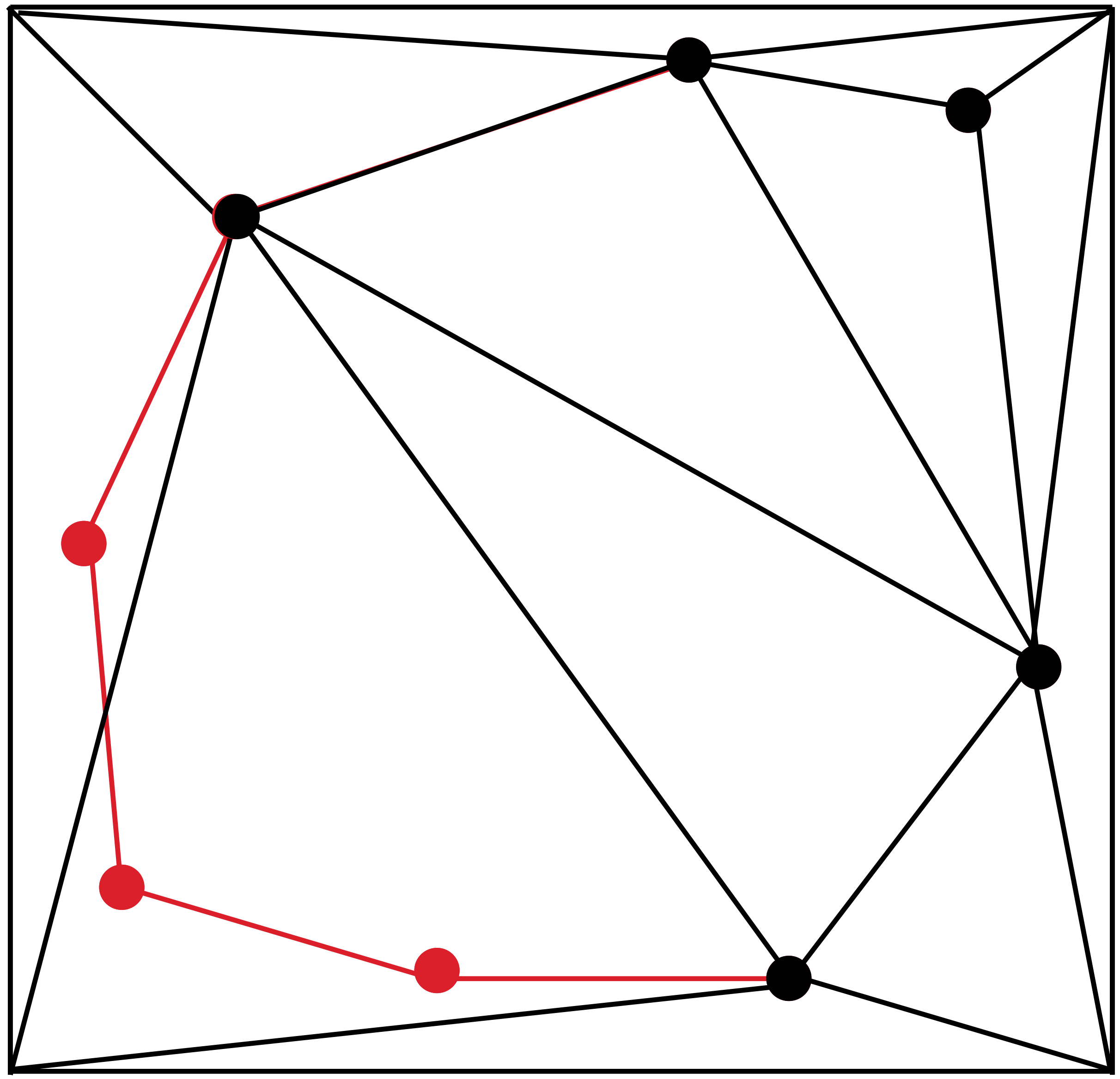


C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

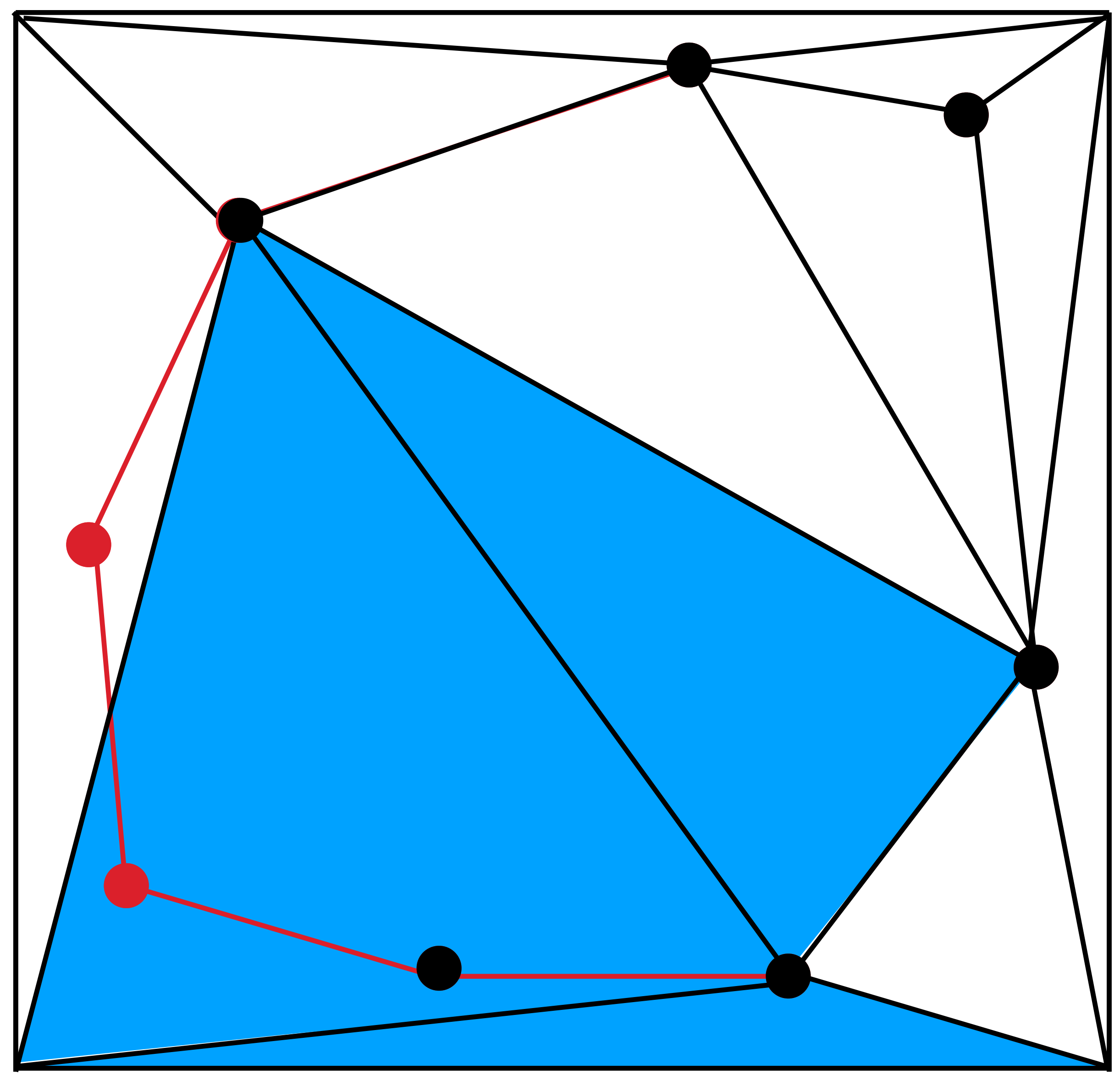


C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

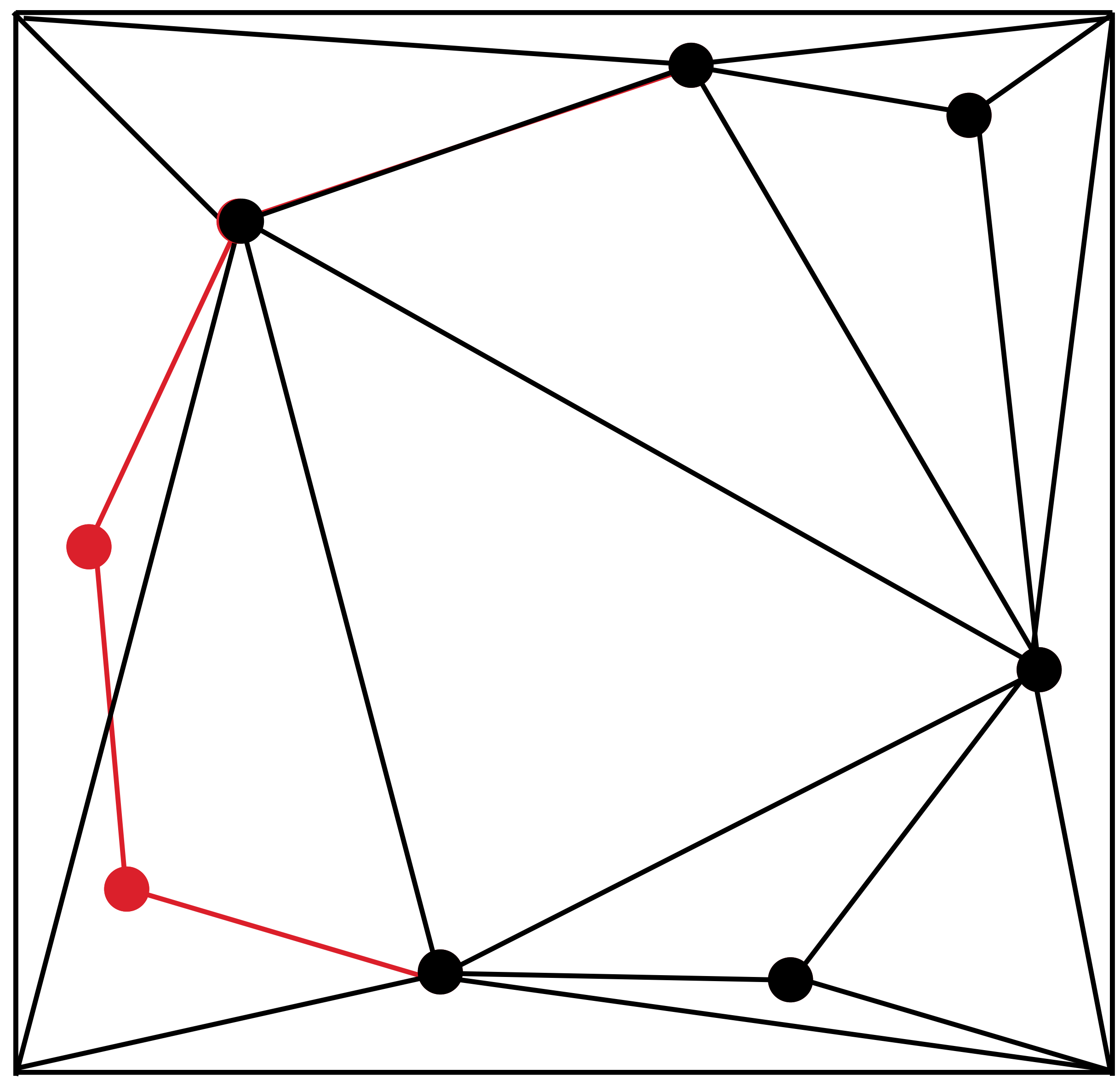
Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)



C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

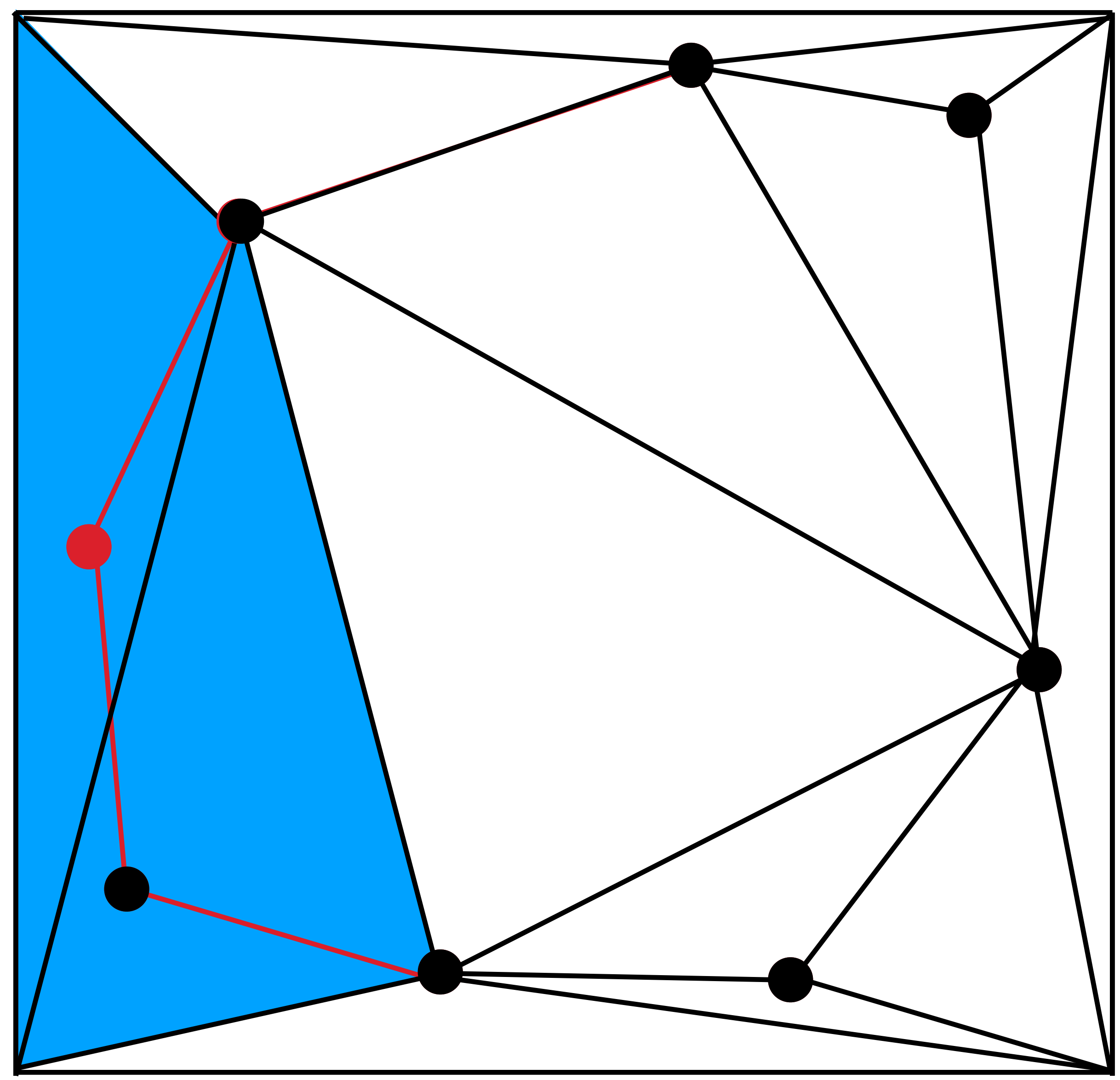
Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)



c. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

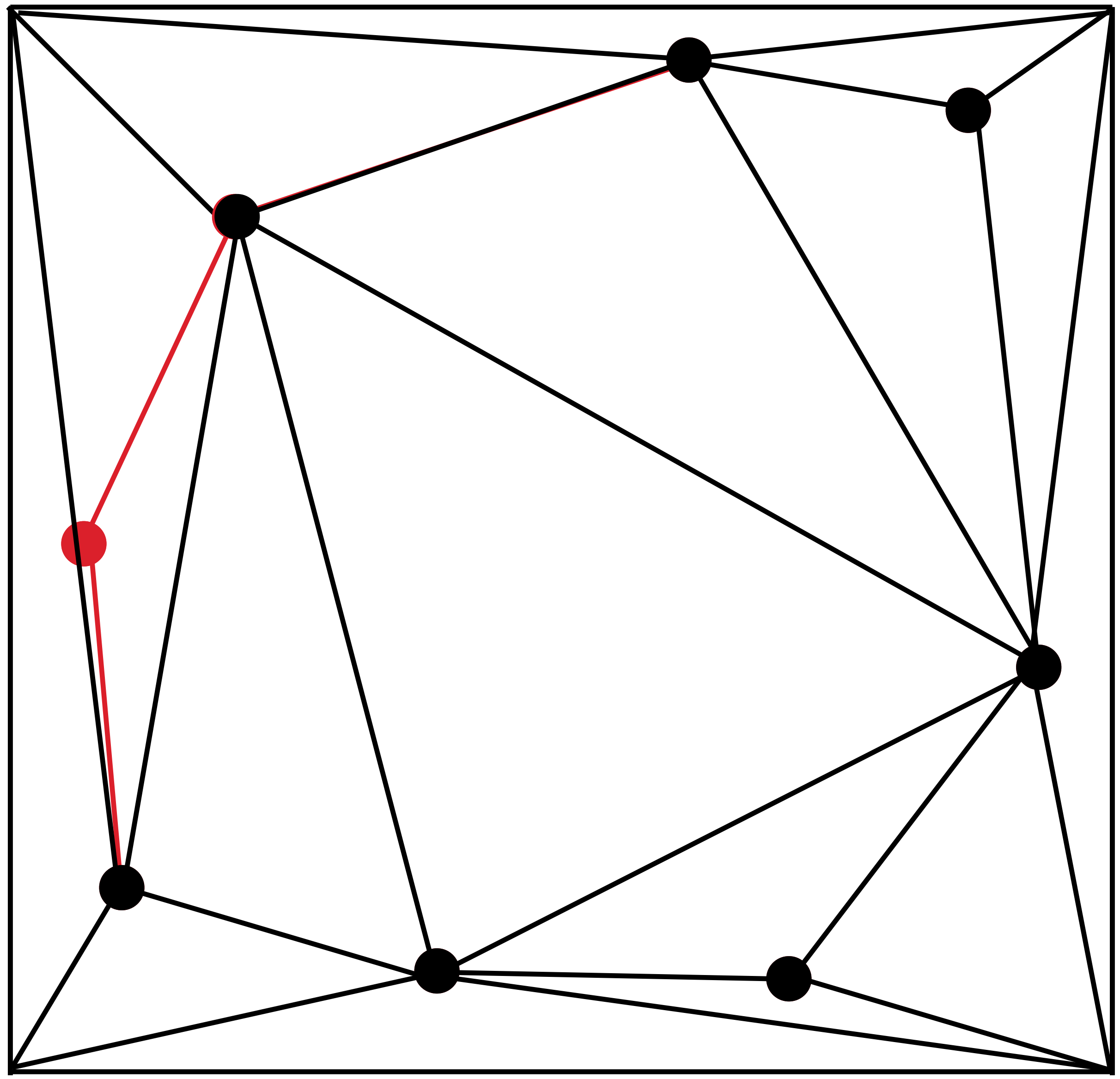


C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

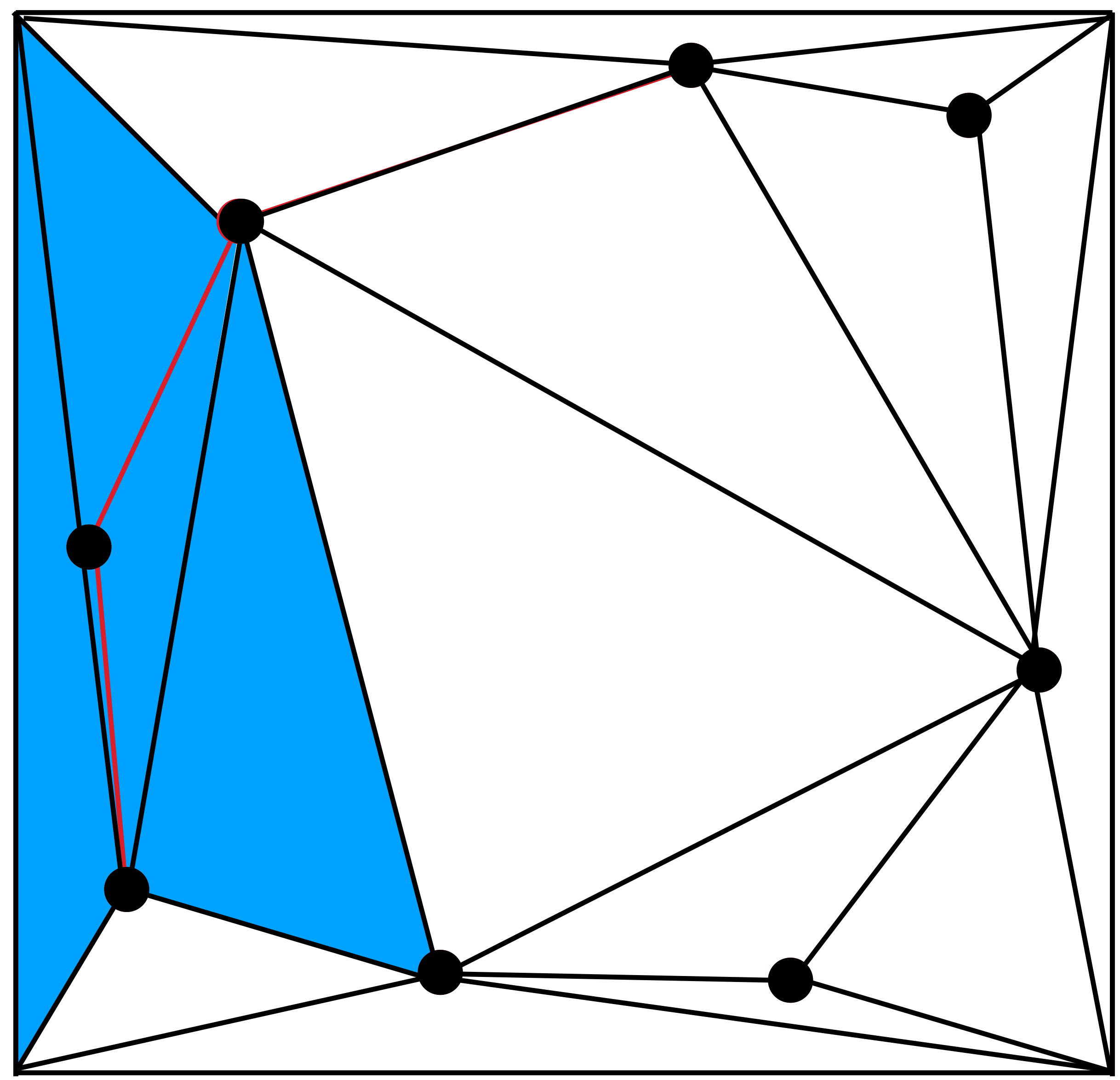


C. TRIANGULATION DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ENSEMBLE DE POINTS : ALGORITHME

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

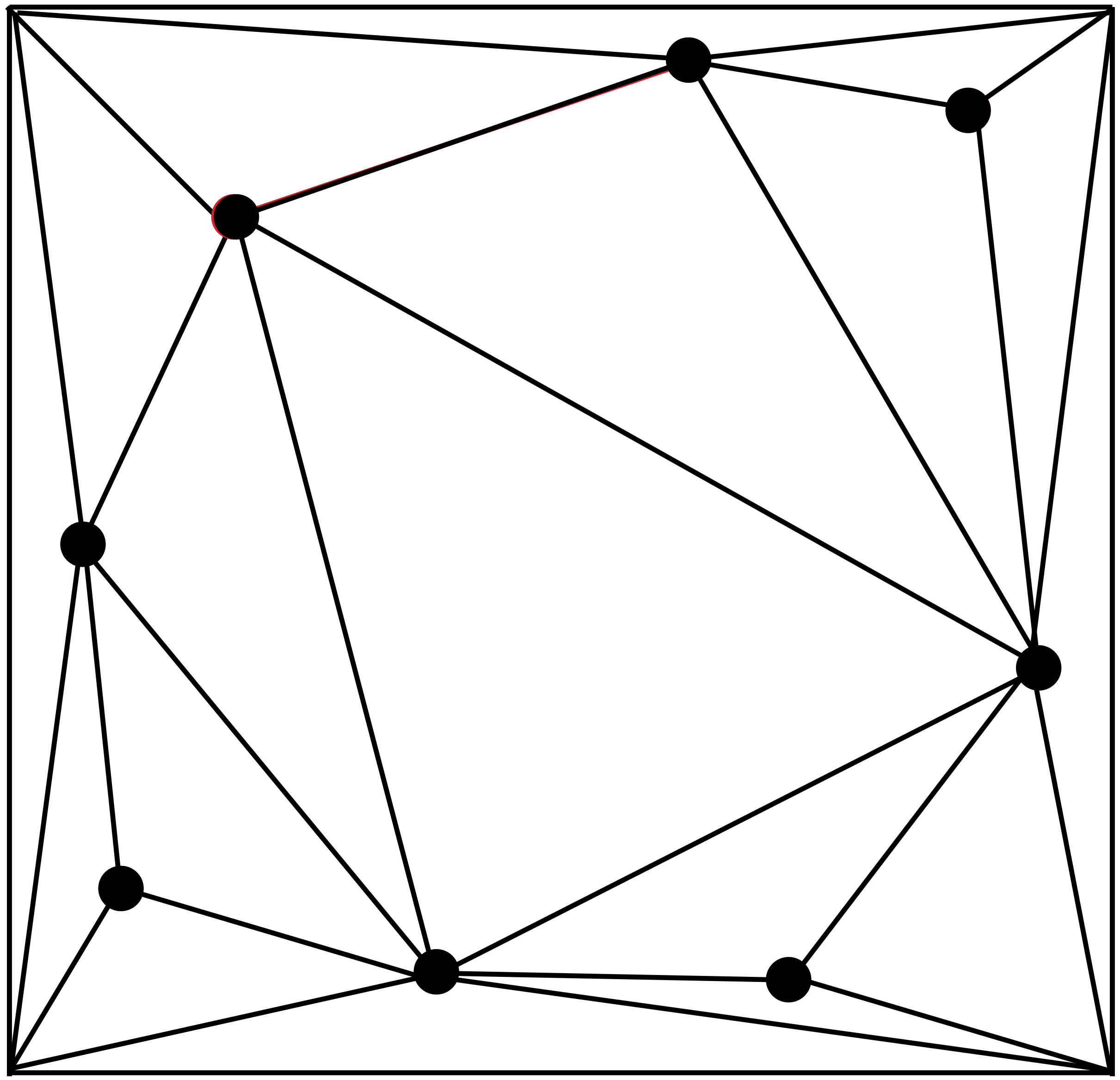
Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)



C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)



C. Triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points : algorithme

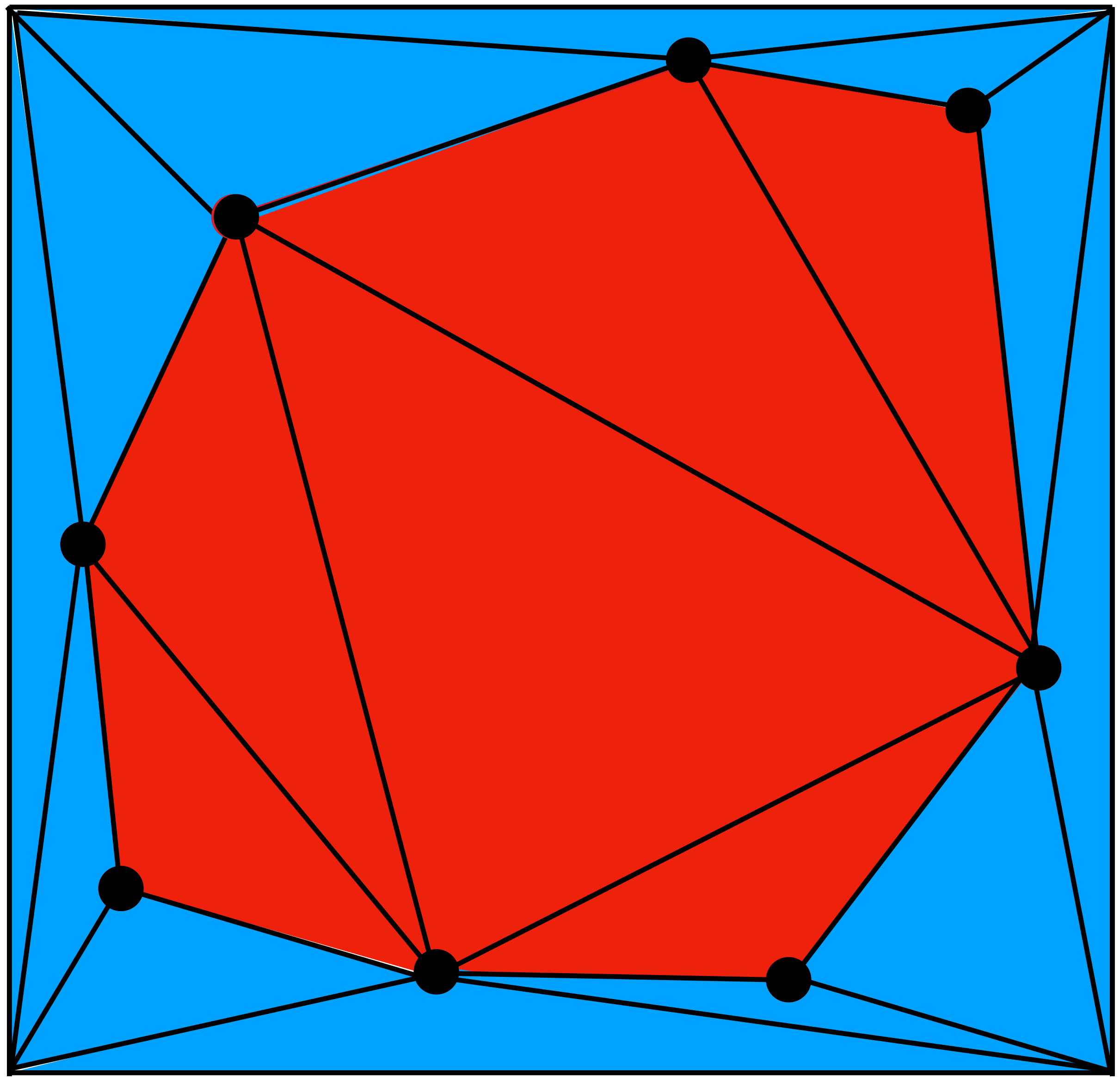
Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

Etape 3 : Construction d'un maillage bord à bord τ_E à partir de τ_B :

- Coloration des éléments
- Suppression de la boite englobante



C. TRIANGULATION DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ENSEMBLE DE POINTS : ALGORITHME

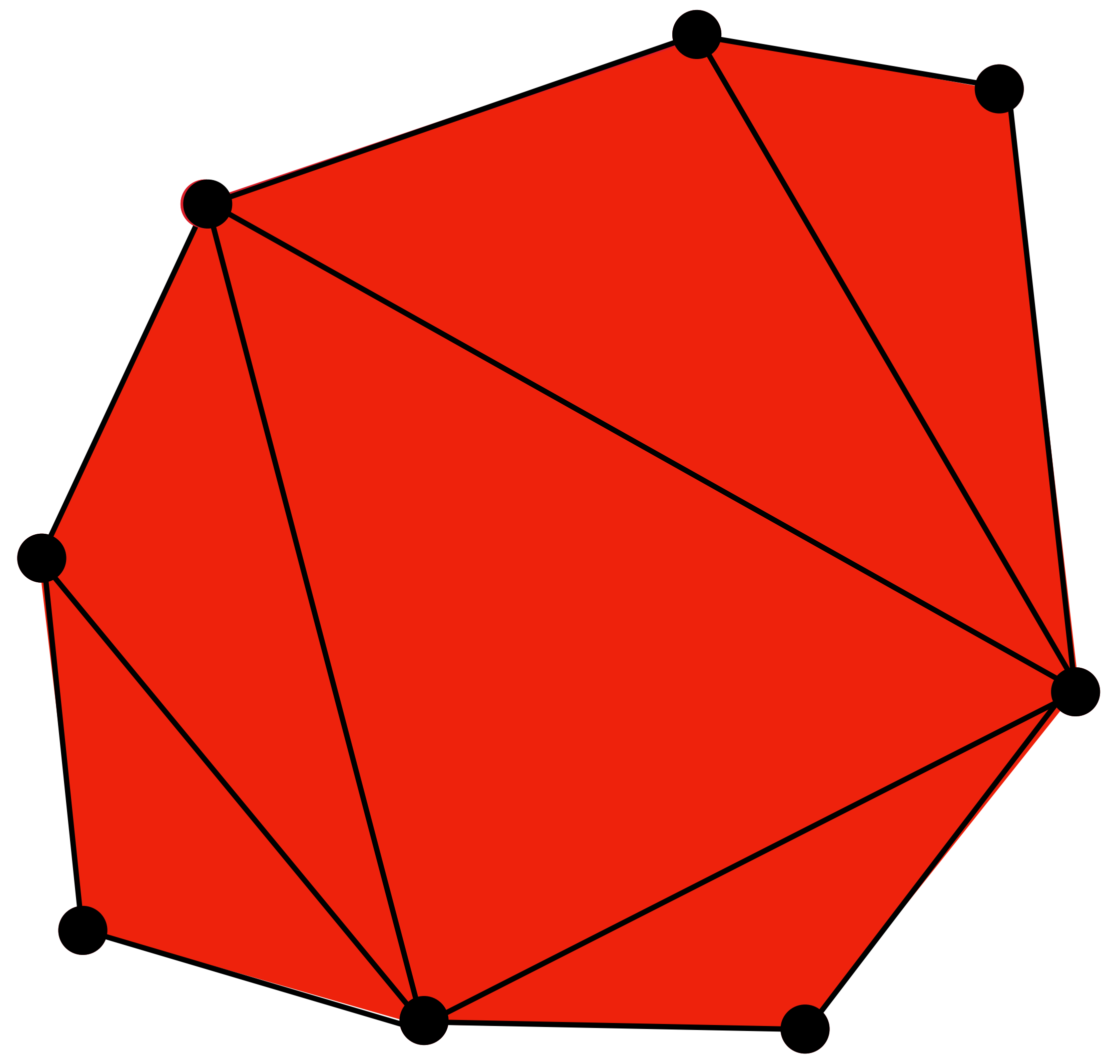
Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

Etape 3 : Construction d'un maillage bord à bord τ_E à partir de τ_B :

- Coloration des éléments
- Suppression de la boite englobante



C. TRIANGULATION DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ENSEMBLE DE POINTS : ALGORITHME

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

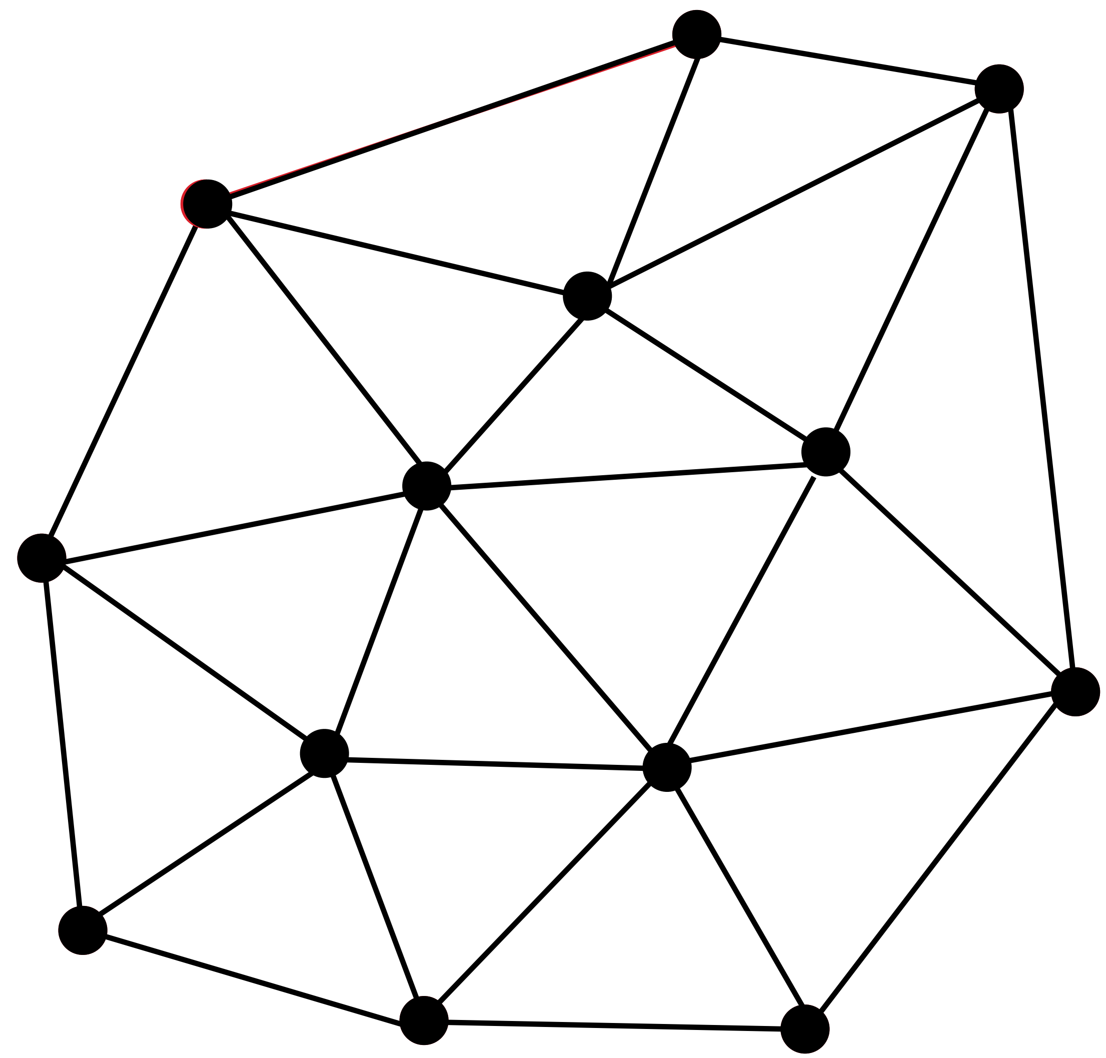
Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

Etape 3 : Construction d'un maillage bord à bord τ_E à partir de τ_B :
- Coloration des éléments
- Suppression de la boite englobante

Etape 4 : Définition ou prise en compte d'une fonction de taille

Etape 5 : Création et insertion des points internes pour obtenir le maillage τ

Etape 6 : Optimisation de τ



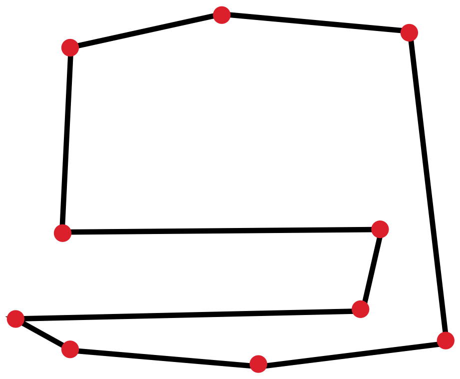
Méthode de Delaunay :
2. Triangulation de Delaunay contrainte

a. Présentation de la problématique

b. Forçage d'arêtes

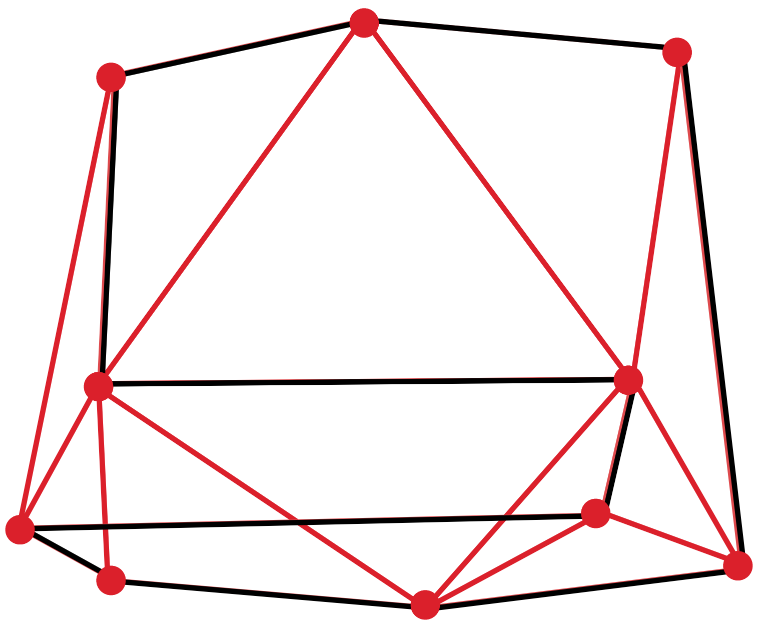
c. Triangulation de Delaunay (contrainte) pour une géométrie non convexe

A. PRÉSENTATION DE LA PROBLÉMATIQUE

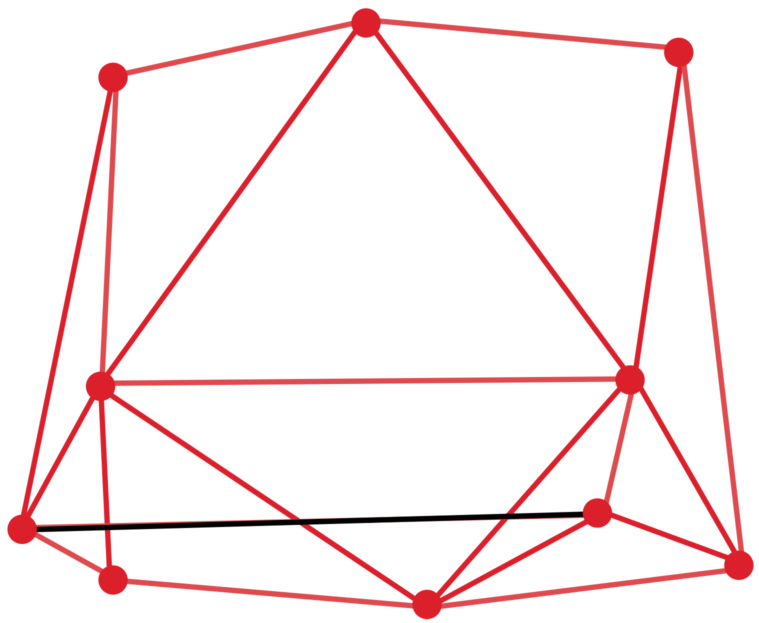


Objectif : retrouver dans notre triangulation finale un certain nombre d'entités

Ex : on a un ensemble de segment délimitant notre domaine (formant une géométrie non convexe)



Triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe



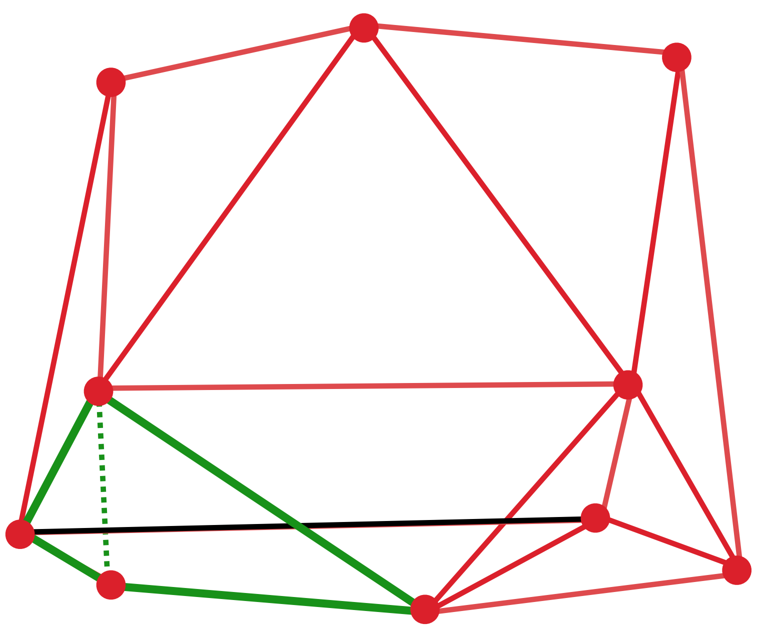
Entité à ajouter

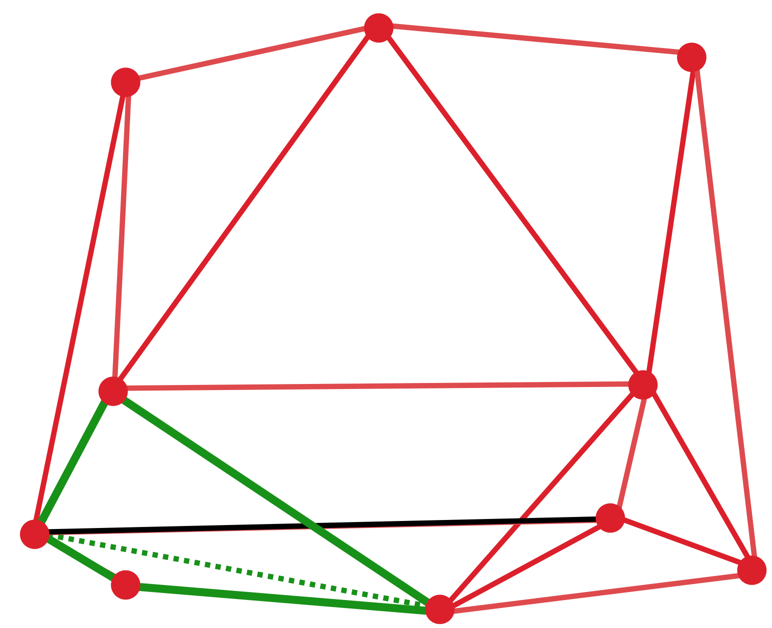
La triangulation finale ne sera plus de Delaunay, on parle de **triangulation de Delaunay contrainte** (c'est à dire que certains éléments ne vérifient pas le critère de Delaunay).

B. FORÇAGE D'ARÊTES

Tant que toutes les arêtes à intégrer ne sont pas incluses dans le maillage, parcourir chaque arête n'appartenant pas encore au maillage.
Parcourir les quadrilatères dont la diagonale couple l'arête

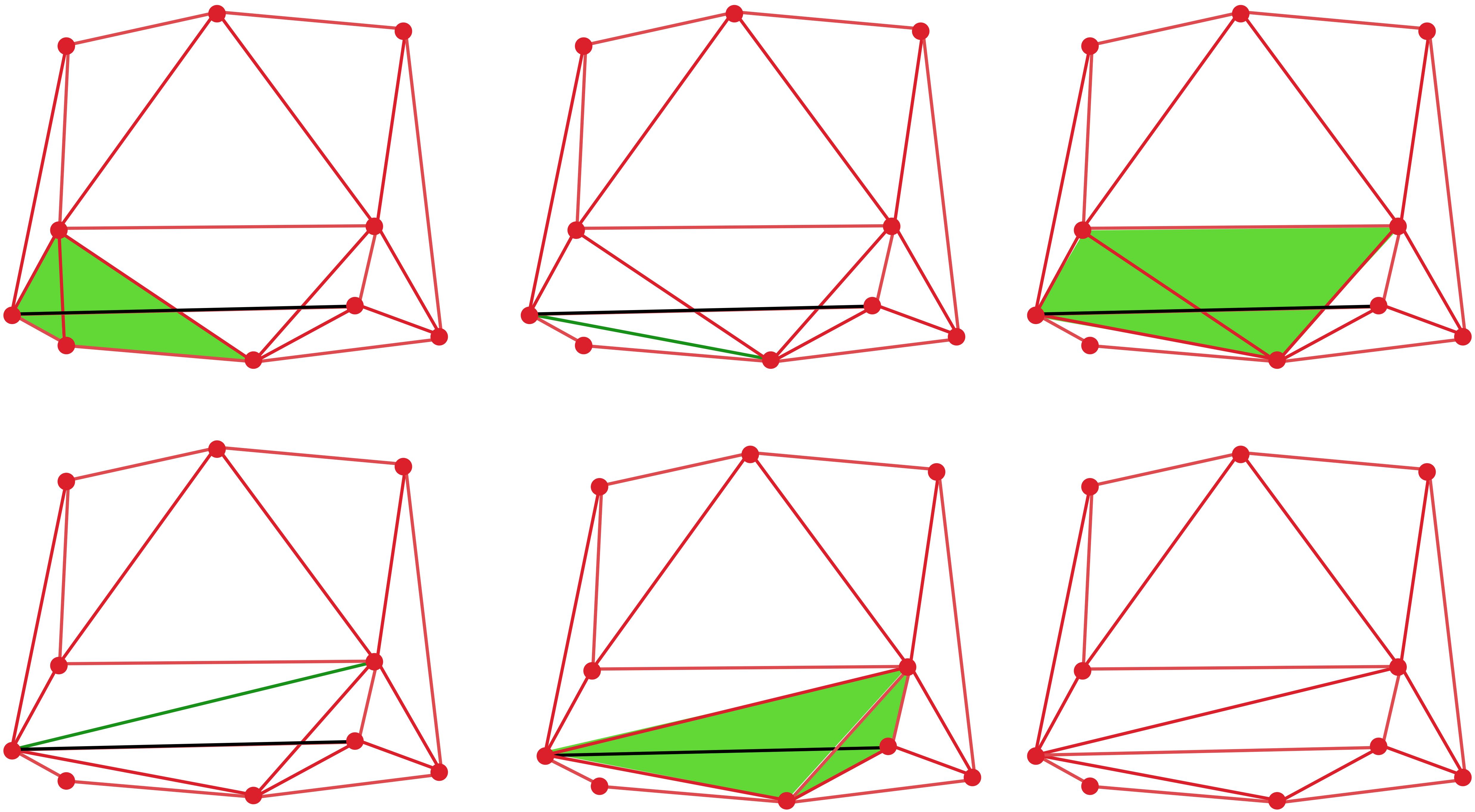
- Si l'arête ne coupe pas l'autre diagonale du quadrilatère (celle qui n'appartient pas au maillage) : Retournement de la diagonale du quadrilatère
- Si l'arête coupe l'autre diagonale du quadrilatère : Retournement de la diagonale du quadrilatère de manière aléatoire





Théorème : l'algorithme converge et la triangulation obtenue est unique.

B. FORÇAGE D'ARÊTES



C. Triangulation de Delaunay (contrainte) pour une géométrie non convexe

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une triangulation initiale τ_B de la boite englobante du domaine

Etape 2 : Insertion des points frontières dans τ_B (méthode incrémentale)

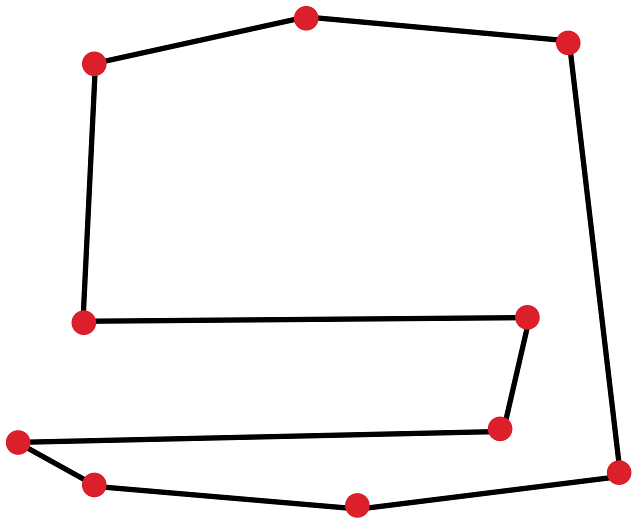
Etape 3 : Forçage des frontières

Etape 4 : Construction d'un maillage bord à bord τ_E à partir de τ_B :
- Coloration des éléments
- Suppression de la boite englobante

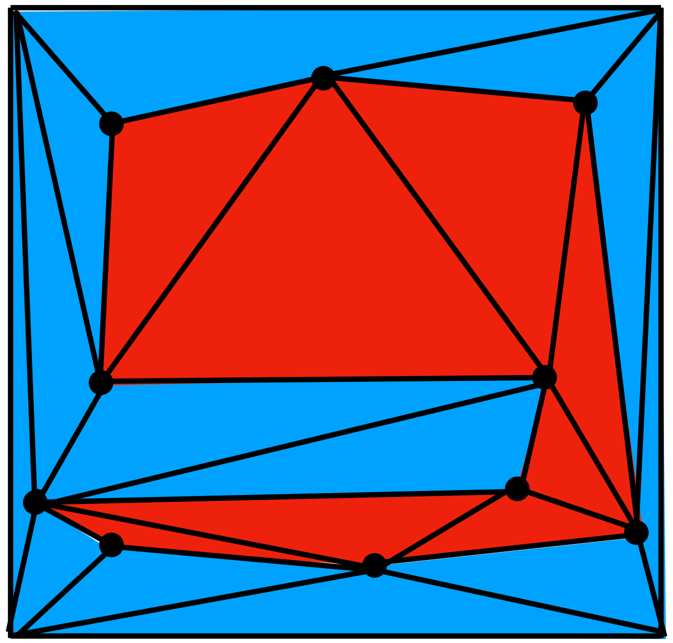
Etape 5 : Définition/prise en compte d'une fonction de taille

Etape 6 : Création et insertion des points internes pour obtenir le maillage τ

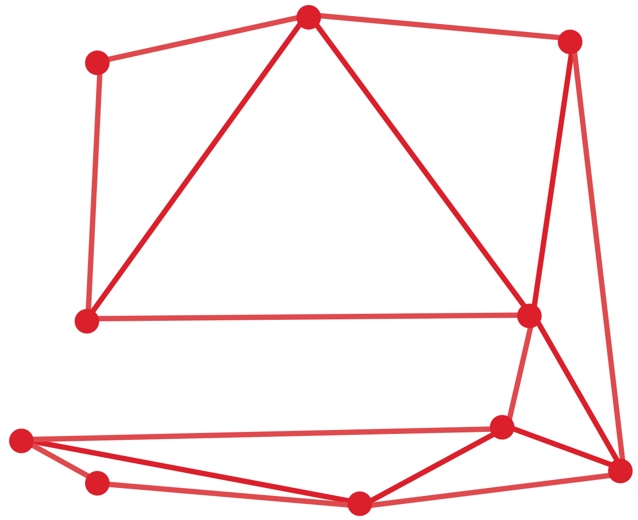
Etape 7 : Optimisation de τ



Géométrie à mailler



Triangulation contrainte de Delaunay



Triangulation de Delaunay

MÉTHODE DE DELAUNAY :
3. DIFFICULTÉS, AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS DE LA MÉTHODE

a. DIFFICULTÉS ALGORITHMIQUES

- Implémenter une recherche rapide pour savoir à quel triangle appartient un nouveau noeud
- Forçage des frontières : dur en 3D

b. AVANTAGES

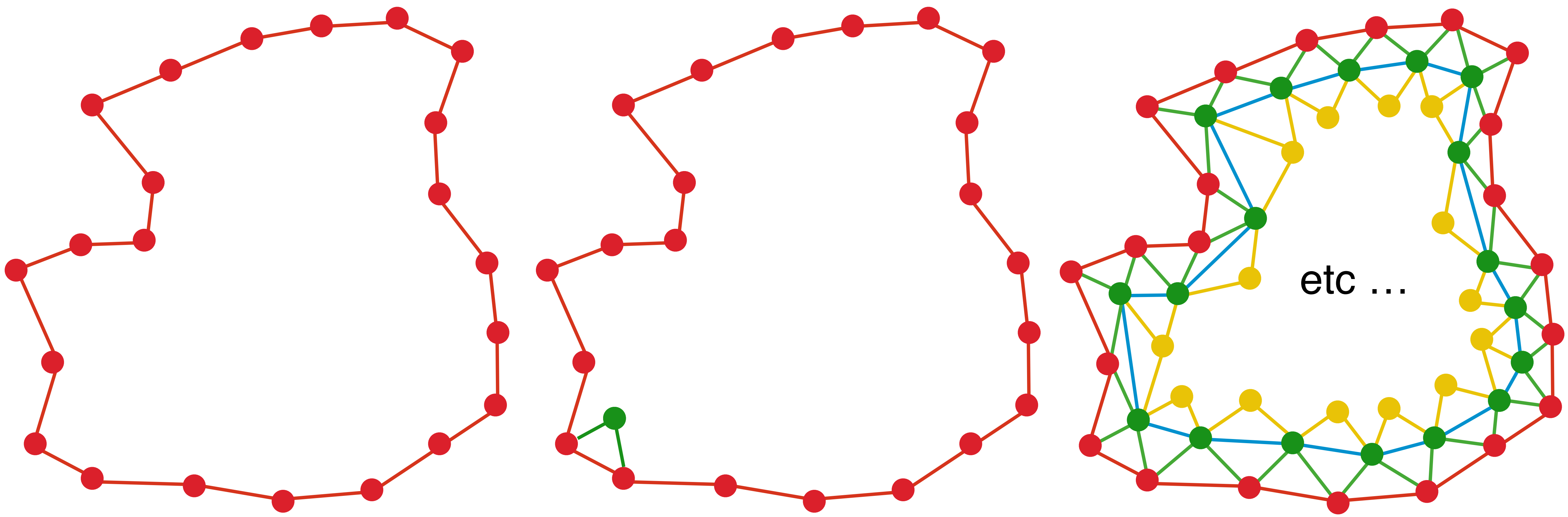
- Algorithme d'insertion performant

c. INCONVÉNIENTS

- Forçage de la frontière
- Erreurs d'arrondi (pour savoir si des points sont dans le cercle circonscrit …)

MÉTHODE FRONTALE

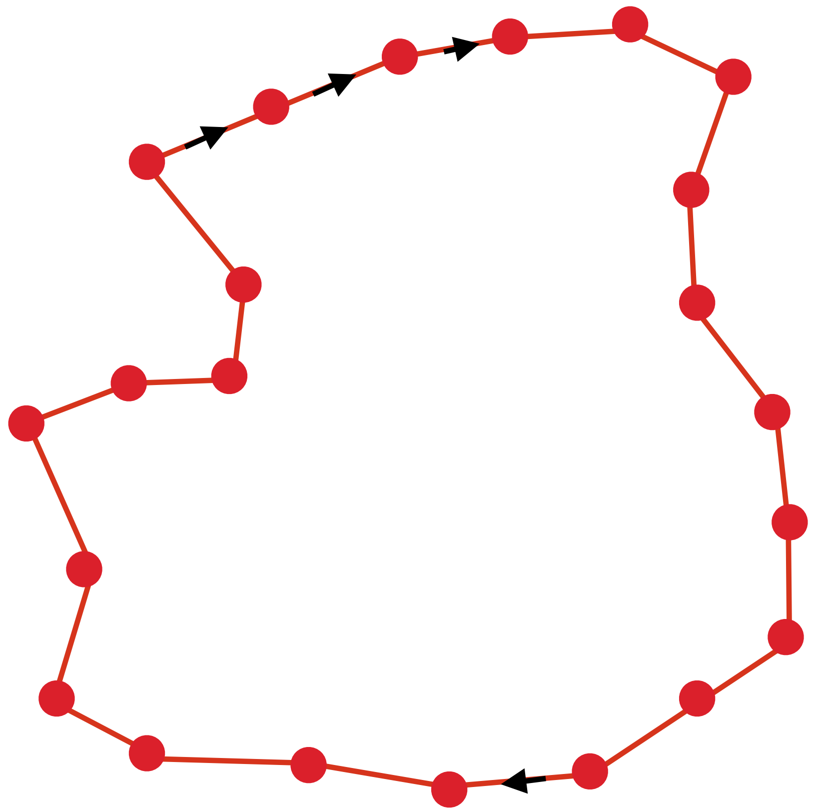
Illustration de la méthode sur un exemple en 2D



MÉTHODE FRONTALE : ALGORITHME

Etape 1 : Initialisation du front :

- Discrétisation de la frontière
- Orientation consistante de chaque composante connexe de la frontière
- Ajout des entités frontières au front



Méthode frontale : Algorithme

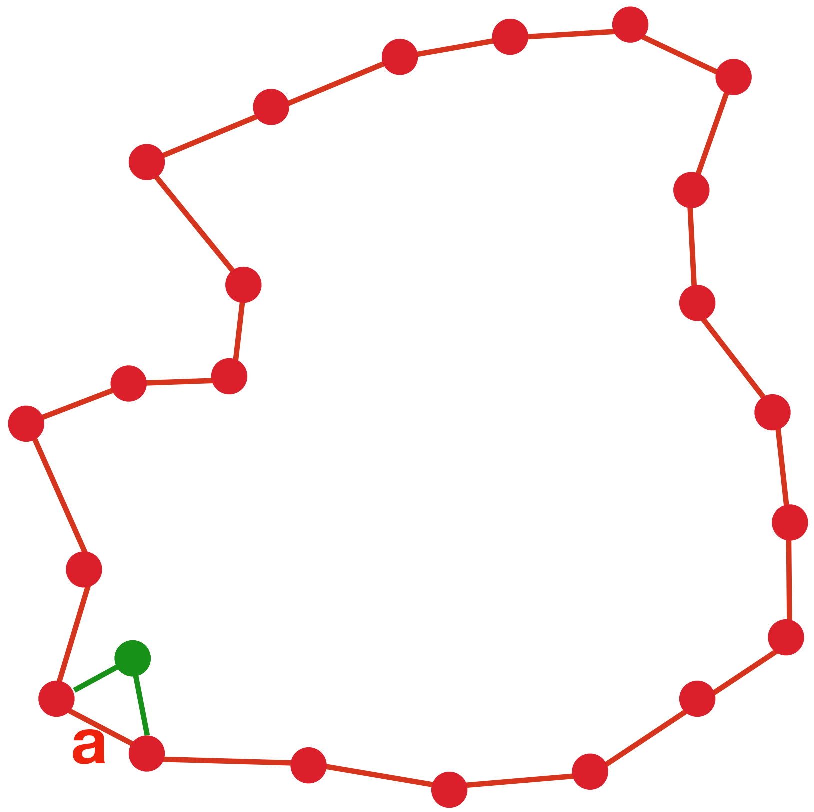
Etape 1 : Initialisation du front :
- Discrétisation de la frontière
- Orientation consistante de chaque composante connexe de la frontière
- Ajout des entités frontières au front

Etape 2 : Définition/prise en compte d'une fonction de taille

Etape 3 : Analyse du front

Etape 4 : Sélection d'une entité de front :
- Sélection d'un point idéal P
- Recherche des sommets proches de P pouvant-être utilisés au lieu de P
- Vérification de l'absence d'intersections
- Màj du maillage et du front

Etape 5 : Tant que le front n'est pas vide, retour à l'étape 3.



MÉTHODE FRONTALE : ALGORITHME

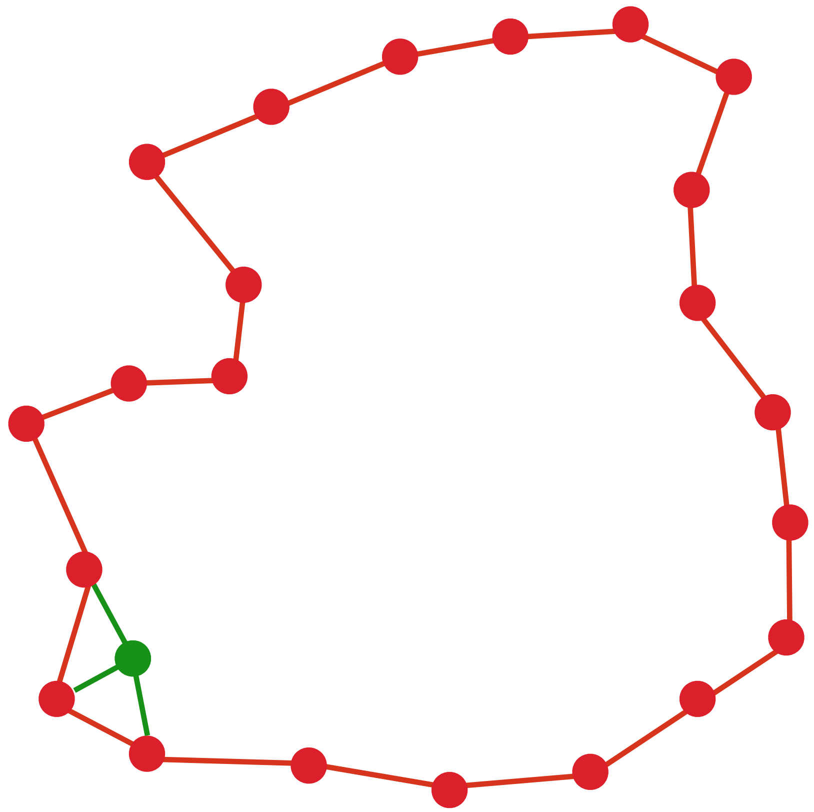
Etape 1 : Initialisation du front :
- Discrétisation de la frontière
- Orientation consistante de chaque composante connexe de la frontière
- Ajout des entités frontières au front

Etape 2 : Définition/prise en compte d'une fonction de taille

Etape 3 : Analyse du front

Etape 4 : Sélection d'une entité de front :
- Sélection d'un point idéal P
- Recherche des sommets proches de P pouvant-être utilisés au lieu de P
- Vérification de l'absence d'intersections
- Màj du maillage et du front

Etape 5 : Tant que le front n'est pas vide, retour à l'étape 3.



MÉTHODE FRONTALE : ALGORITHME

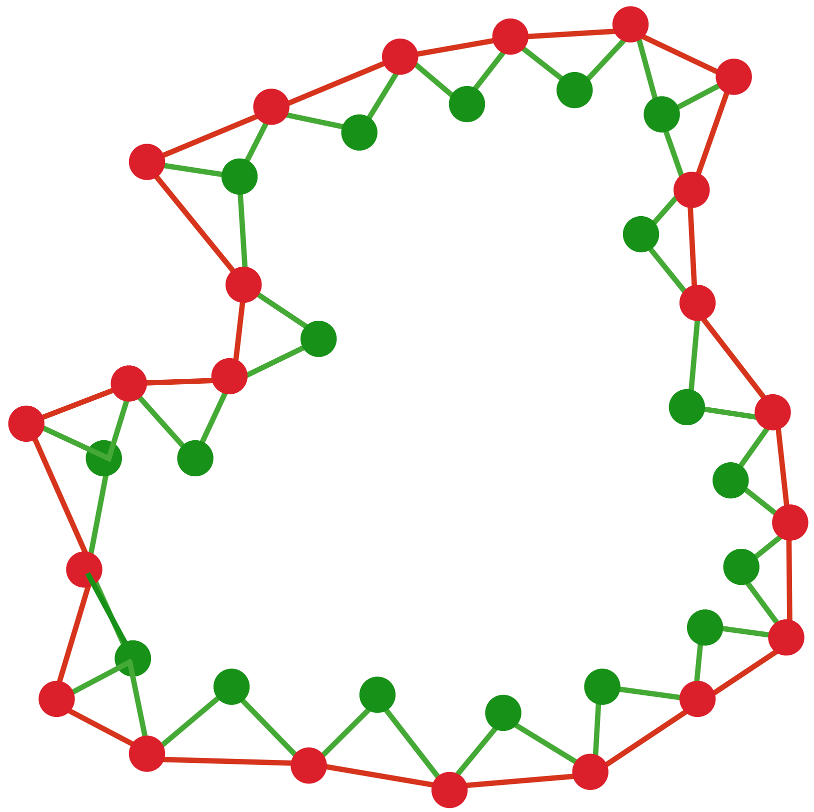
Etape 1 : Initialisation du front :
- Discrétisation de la frontière
- Orientation consistante de chaque composante connexe de la frontière
- Ajout des entités frontières au front

Etape 2 : Définition/prise en compte d'une fonction de taille

Etape 3 : Analyse du front

Etape 4 : Sélection d'une entité de front :
- Sélection d'un point idéal P
- Recherche des sommets proches de P pouvant-être utilisés au lieu de P
- Vérification de l'absence d'intersections
- Màj du maillage et du front

Etape 5 : Tant que le front n'est pas vide, retour à l'étape 3.



Méthode frontale : Algorithme

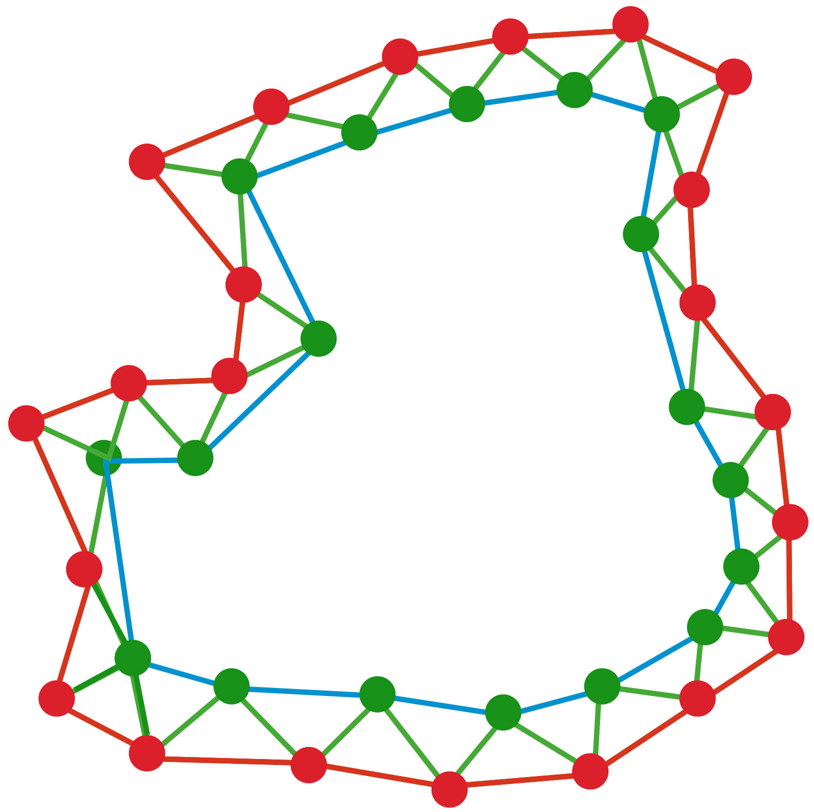
Etape 1 : Initialisation du front :
- Discrétisation de la frontière
- Orientation consistante de chaque composante connexe de la frontière
- Ajout des entités frontières au front

Etape 2 : Définition/prise en compte d'une fonction de taille

Etape 3 : Analyse du front

Etape 4 : Sélection d'une entité de front :
- Sélection d'un point idéal P
- Recherche des sommets proches de P pouvant-être utilisés au lieu de P
- Vérification de l'absence d'intersections
- Màj du maillage et du front

Etape 5 : Tant que le front n'est pas vide, retour à l'étape 3.



Méthode frontale : Algorithme

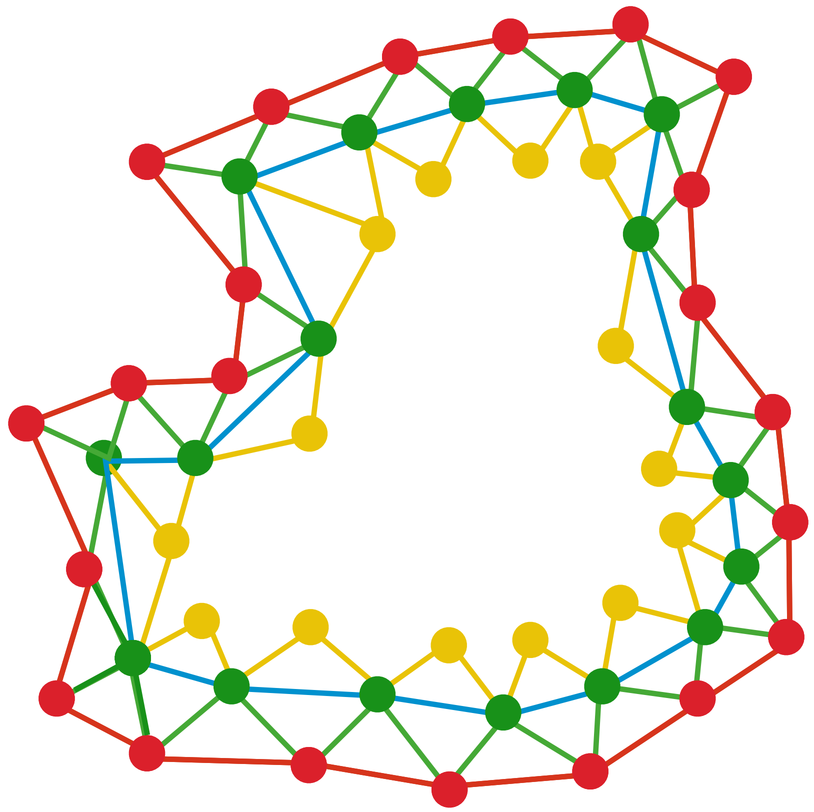
Etape 1 : Initialisation du front :
- Discrétisation de la frontière
- Orientation consistante de chaque composante connexe de la frontière
- Ajout des entités frontières au front

Etape 2 : Définition/prise en compte d'une fonction de taille

Etape 3 : Analyse du front

Etape 4 : Sélection d'une entité de front :
- Sélection d'un point idéal P
- Recherche des sommets proches de P pouvant-être utilisés au lieu de P
- Vérification de l'absence d'intersections
- Màj du maillage et du front

Etape 5 : Tant que le front n'est pas vide, retour à l'étape 3.



MÉTHODE FRONTALE : ALGORITHME

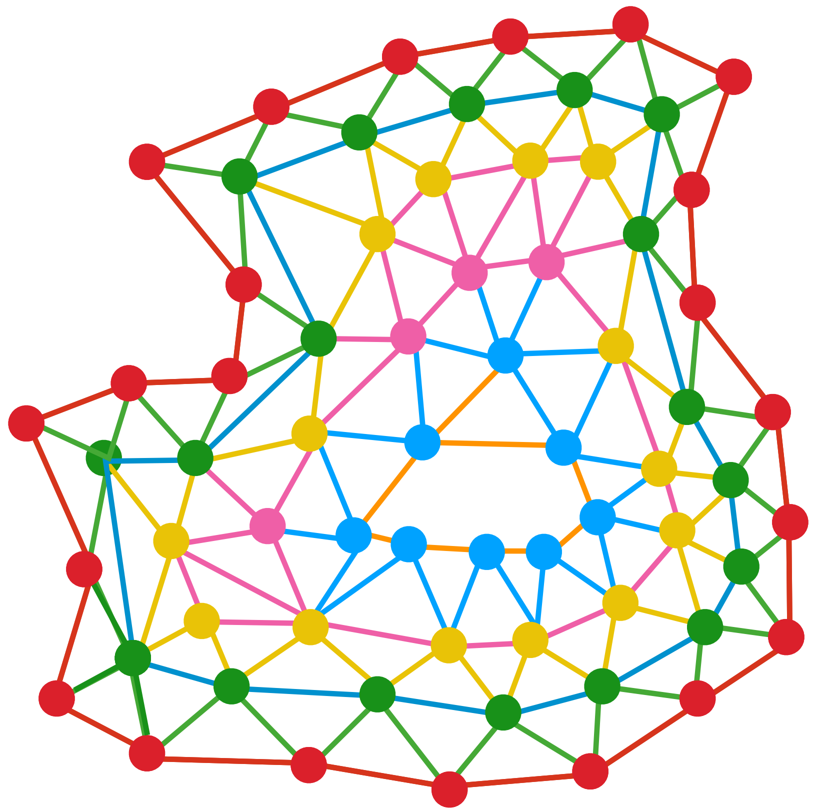
Etape 1 : Initialisation du front :
- Discrétisation de la frontière
- Orientation consistante de chaque composante connexe de la frontière
- Ajout des entités frontières au front

Etape 2 : Définition/prise en compte d'une fonction de taille

Etape 3 : Analyse du front

Etape 4 : Sélection d'une entité de front :
- Sélection d'un point idéal P
- Recherche des sommets proches de P pouvant-être utilisés au lieu de P
- Vérification de l'absence d'intersections
- Màj du maillage et du front

Etape 5 : Tant que le front n'est pas vide, retour à l'étape 3.



Méthode frontale : Algorithme

Etape 1 : Initialisation du front :

- Discrétisation de la frontière
- Orientation consistante de chaque composante connexe de la frontière
- Ajout des entités frontières au front

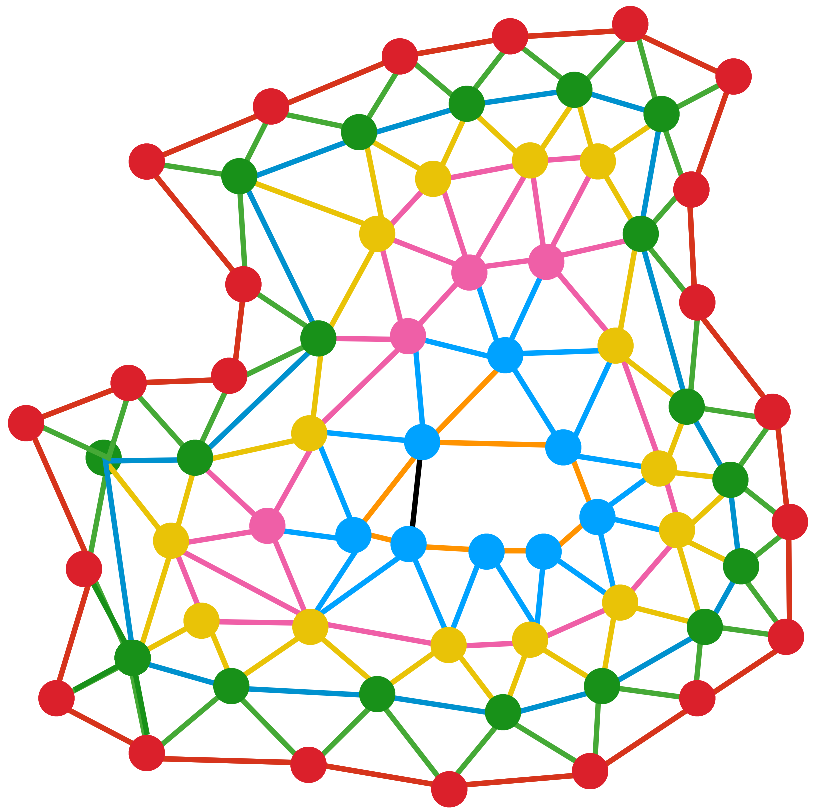
Etape 2 : Définition/prise en compte d'une fonction de taille

Etape 3 : Analyse du front

Etape 4 : Sélection d'une entité de front :

- Sélection d'un point idéal P
- Recherche des sommets proches de P pouvant-être utilisés au lieu de P
- Vérification de l'absence d'intersections
- Màj du maillage et du front

Etape 5 : Tant que le front n'est pas vide, retour à l'étape 3.



Méthode frontale : Algorithme

Etape 1 : Initialisation du front :

- Discrétisation de la frontière
- Orientation consistante de chaque composante connexe de la frontière
- Ajout des entités frontières au front

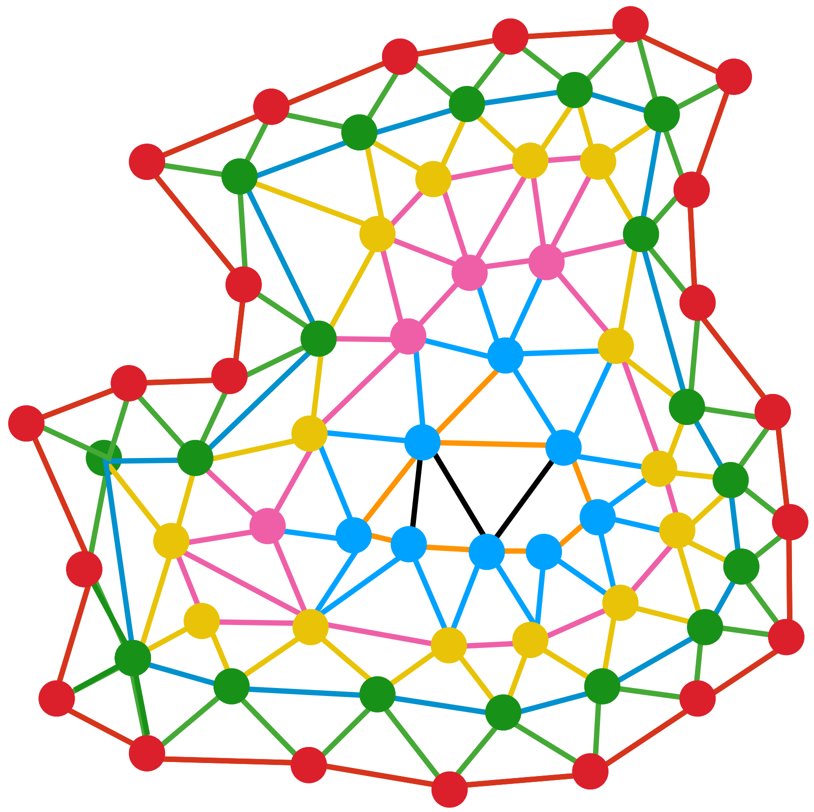
Etape 2 : Définition/prise en compte d'une fonction de taille

Etape 3 : Analyse du front

Etape 4 : Sélection d'une entité de front :

- Sélection d'un point idéal P
- Recherche des sommets proches de P pouvant-être utilisés au lieu de P
- Vérification de l'absence d'intersections
- Màj du maillage et du front

Etape 5 : Tant que le front n'est pas vide, retour à l'étape 3.



Méthode frontale : Algorithme

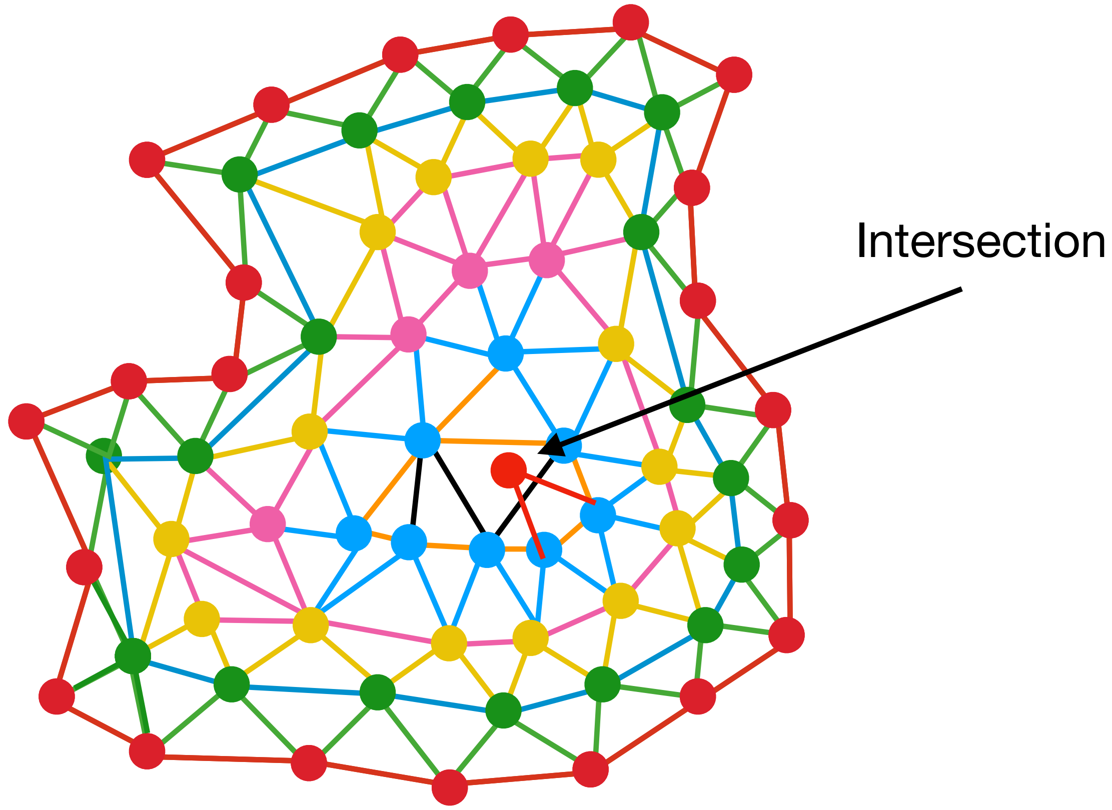
Etape 1 : Initialisation du front :
- Discrétisation de la frontière
- Orientation consistante de chaque composante connexe de la frontière
- Ajout des entités frontières au front

Etape 2 : Définition/prise en compte d'une fonction de taille

Etape 3 : Analyse du front

Etape 4 : Sélection d'une entité de front :
- Sélection d'un point idéal P
- Recherche des sommets proches de P pouvant-être utilisés au lieu de P
- Vérification de l'absence d'intersections
- Màj du maillage et du front

Etape 5 : Tant que le front n'est pas vide, retour à l'étape 3.



Méthode frontale : Algorithme

Etape 1 : Initialisation du front :
- Discrétisation de la frontière
- Orientation consistante de chaque composante connexe de la frontière
- Ajout des entités frontières au front

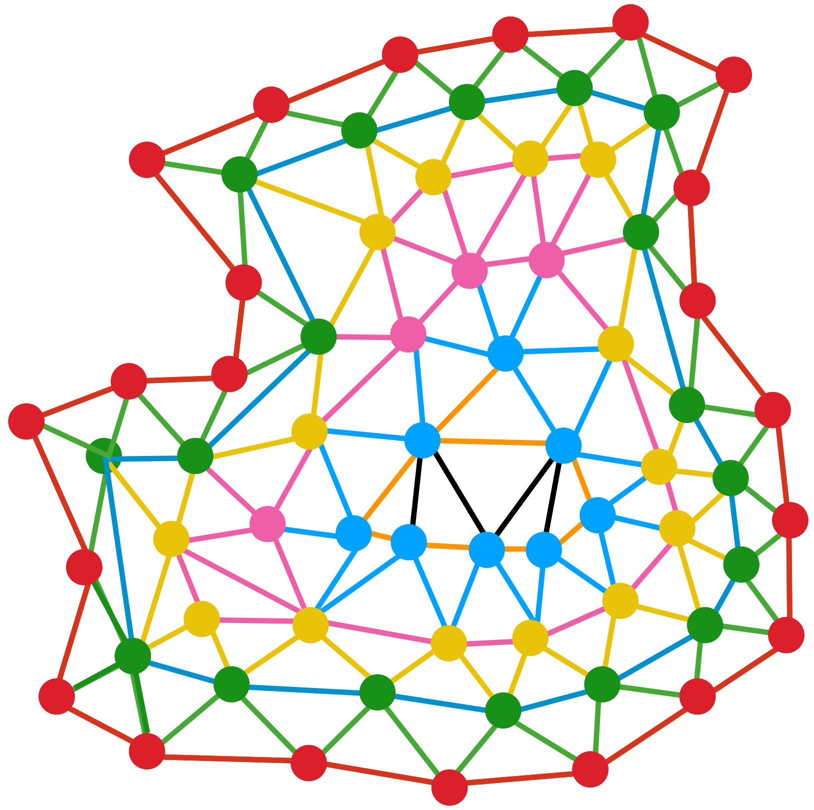
Etape 2 : Définition/prise en compte d'une fonction de taille

Etape 3 : Analyse du front

Etape 4 : Sélection d'une entité de front :
- Sélection d'un point idéal P
- Recherche des sommets proches de P pouvant-être utilisés au lieu de P
- Vérification de l'absence d'intersections
- Màj du maillage et du front

Etape 5 : Tant que le front n'est pas vide, retour à l'étape 3.

Etape 6 : Optimisation du maillage



MÉTHODE FRONTALE:
2. DIFFICULTÉS, AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS DE LA MÉTHODE

a. DIFFICULTÉS ALGORITHMIQUES

- Pré-requis initial : orientation des éléments du front
- Sélection d'une entité du front
- Identification des points admissibles pour créer un élément
- Validation des éléments à partir de ces points
- convergence

b. AVANTAGES

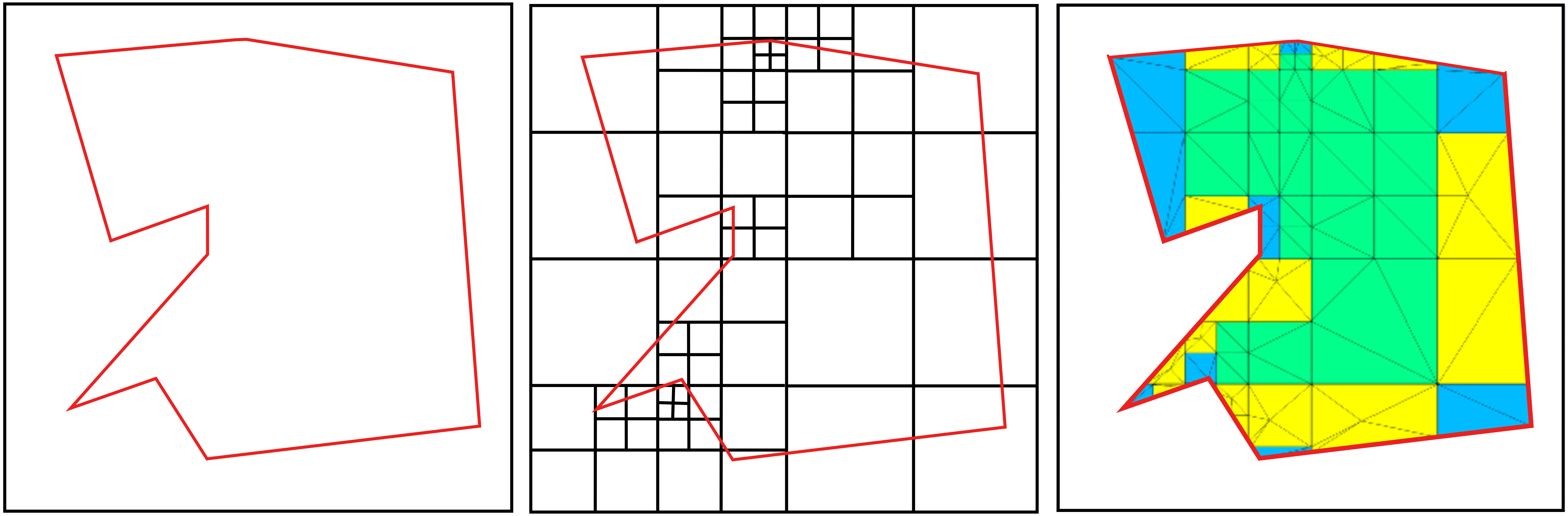
- Maillages contenant généralement beaucoup d'éléments de (très) bonne qualité

c. INCONVÉNIENTS

- Robustesse en 3D

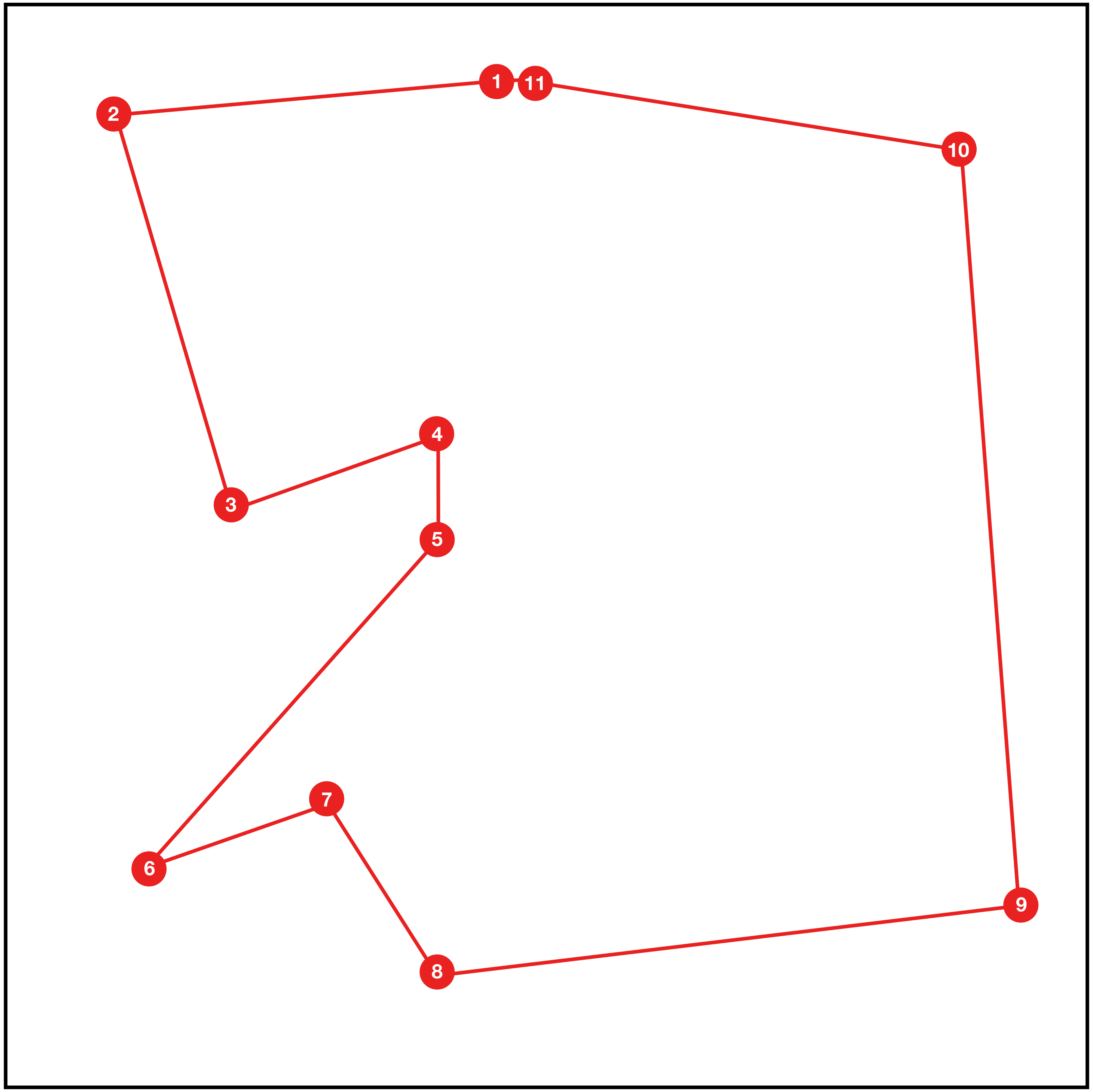
MÉTHODE QUADREE (2D) / OCTREE (3D)

Illustration de la méthode sur un exemple en 2D



Méthode quadree (2D) / octree (3D) : Algorithme

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une boite englobante du domaine



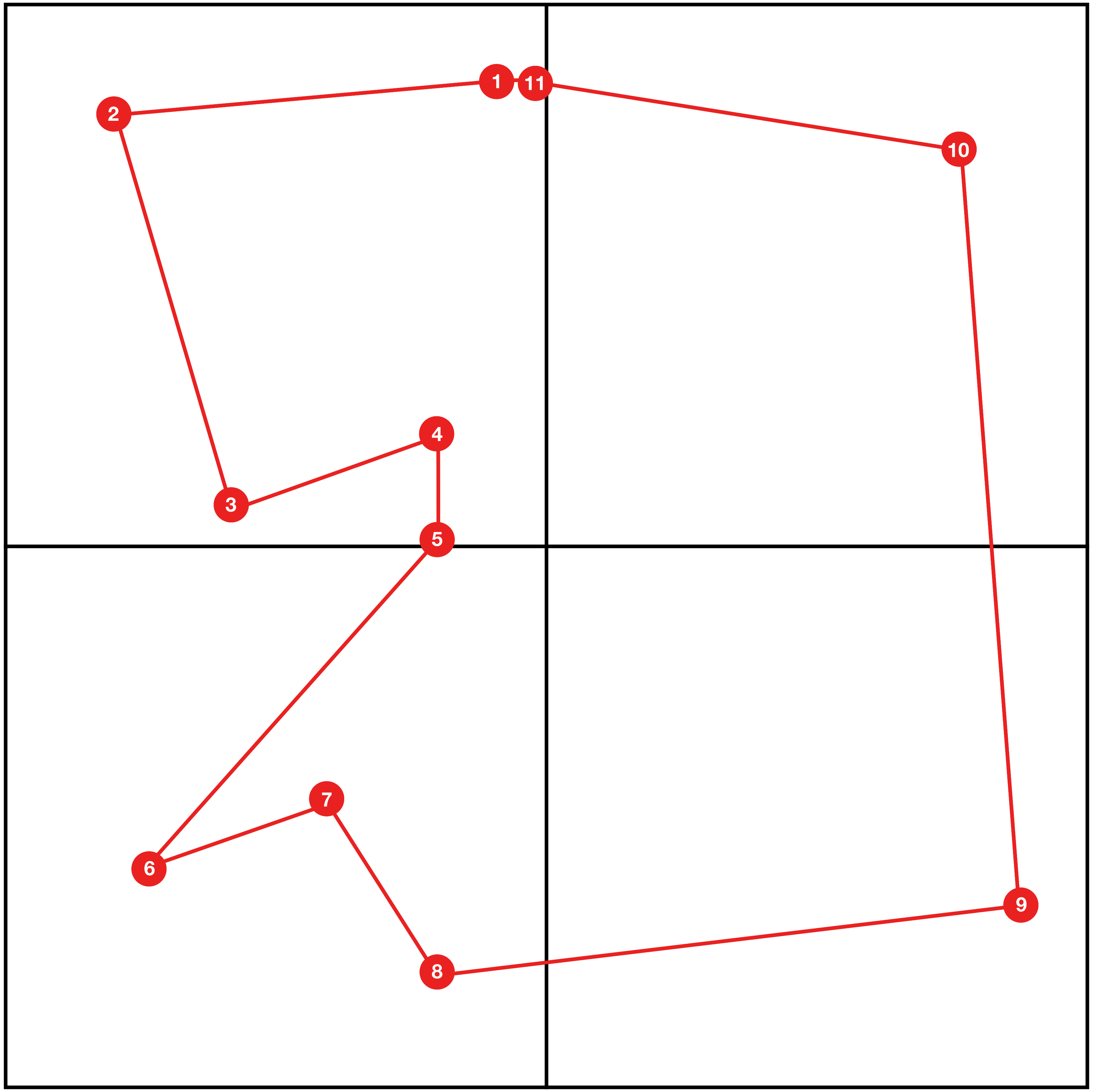
MÉTHODE QUADREE (2D) / OCTREE (3D) : ALGORITHME

Etape 1 : Initialisations :

- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une boite englobante du domaine

Etape 2 : Décomposition de l'arbre :
Subdivisions récursives jusqu'à :

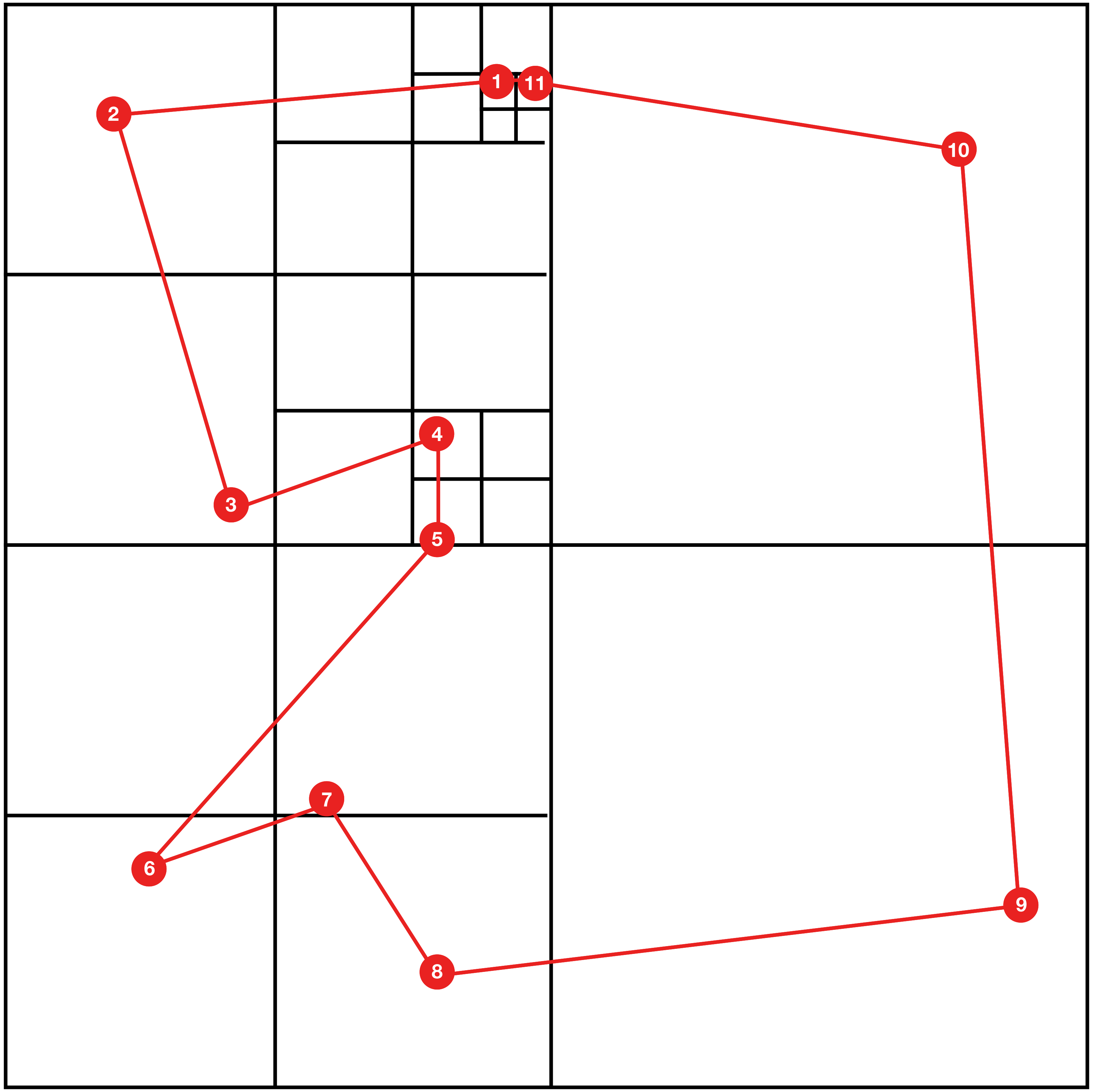
- 1 seul noeud par feuille
- 1 seule arête par feuille



MÉTHODE QUADREE (2D) / OCTREE (3D) : ALGORITHME

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une boite englobante du domaine

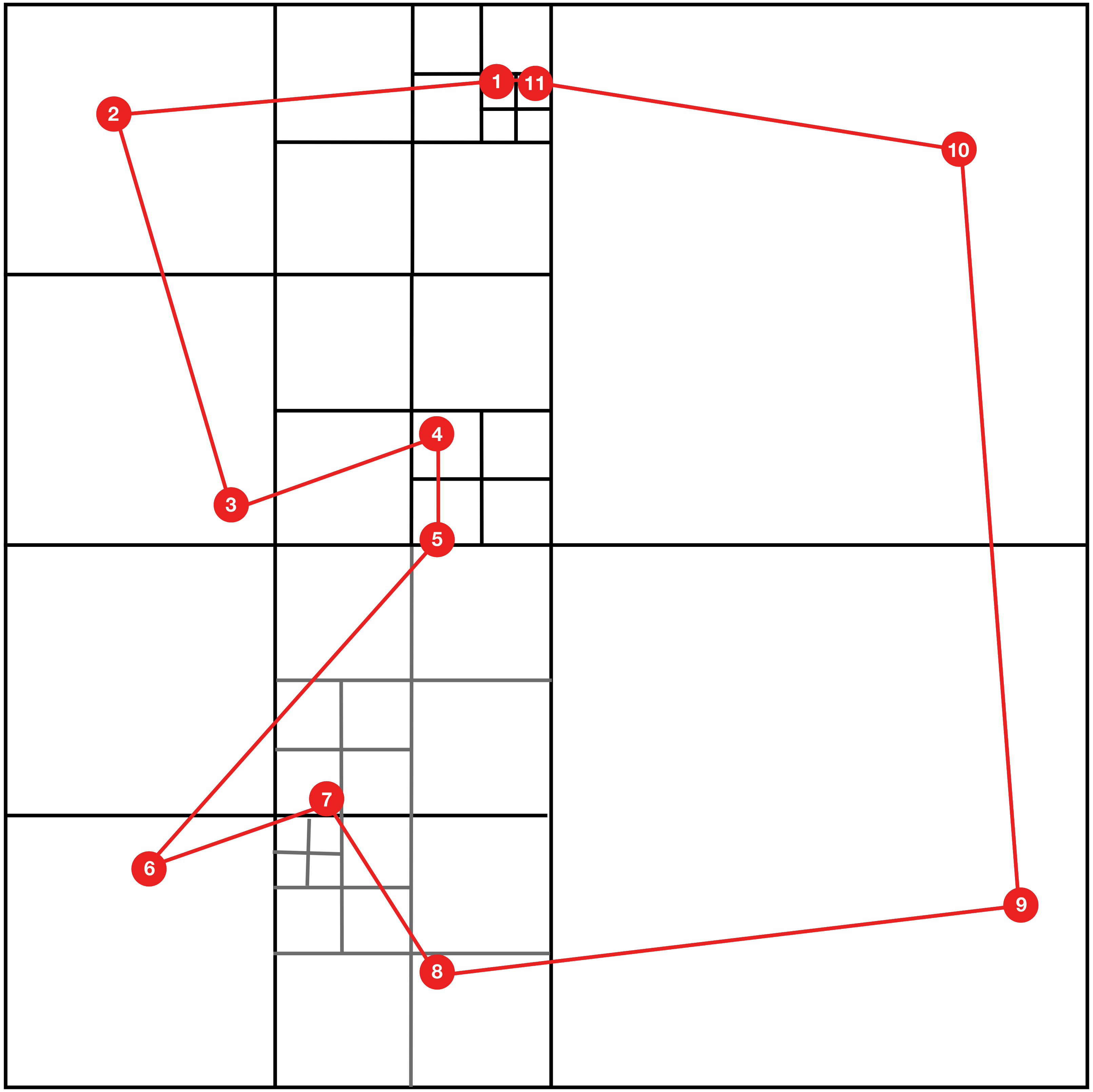
Etape 2 : Décomposition de l'arbre :
Subdivisions récursives jusqu'à :
- 1 seul noeud par feuille
- 1 seule arête par feuille



MÉTHODE QUADREE (2D) / OCTREE (3D) : ALGORITHME

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une boite englobante du domaine

Etape 2 : Décomposition de l'arbre :
Subdivisions récursives jusqu'à :
- 1 seul noeud par feuille
- 1 seule arête par feuille

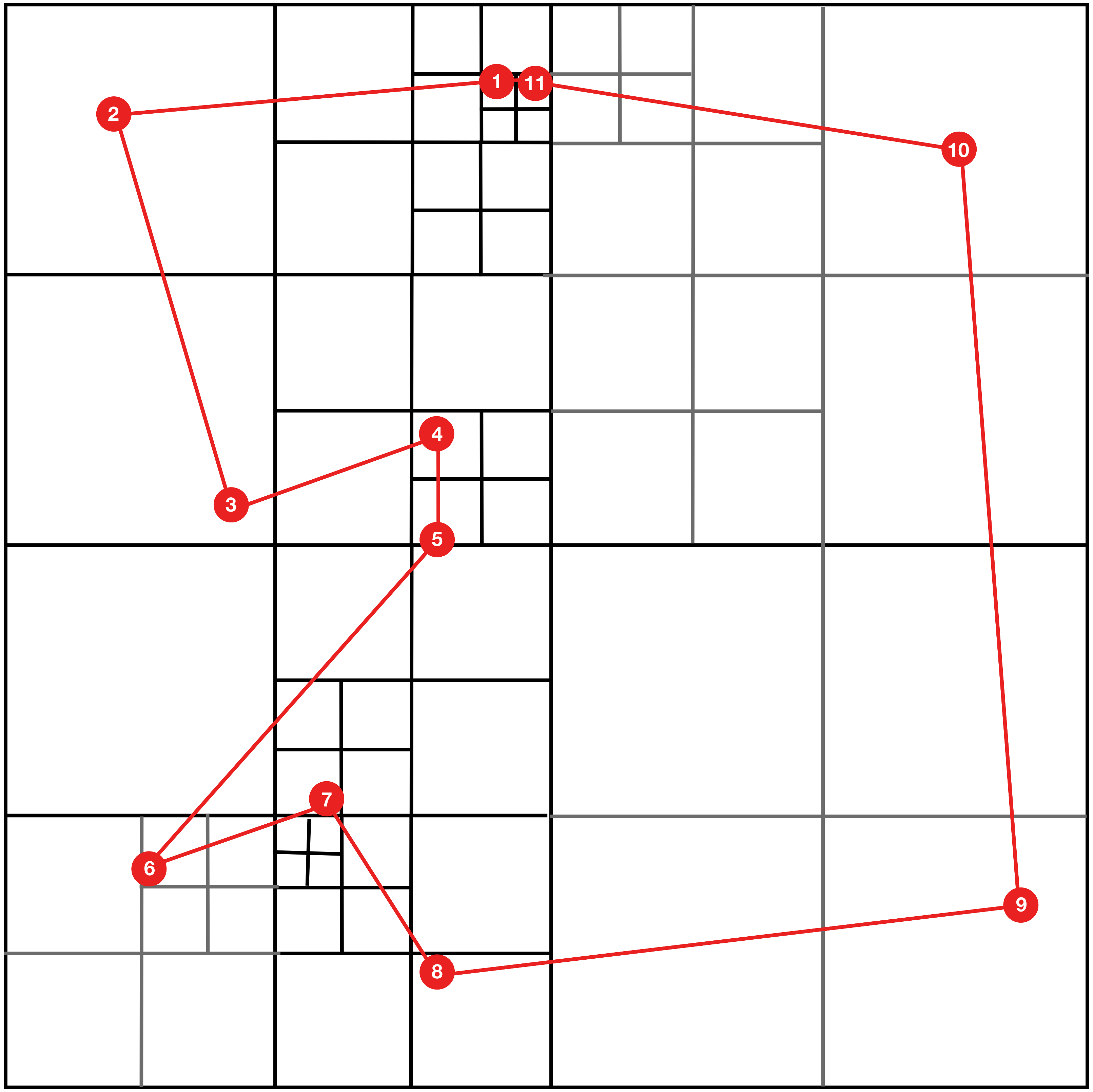


MÉTHODE QUADREE (2D) / OCTREE (3D) : ALGORITHME

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une boite englobante du domaine

Etape 2 : Décomposition de l'arbre :
Subdivisions récursives jusqu'à :
- 1 seul noeud par feuille
- 1 seule arête par feuille

Etape 3 : Equilibrage de l'arbre



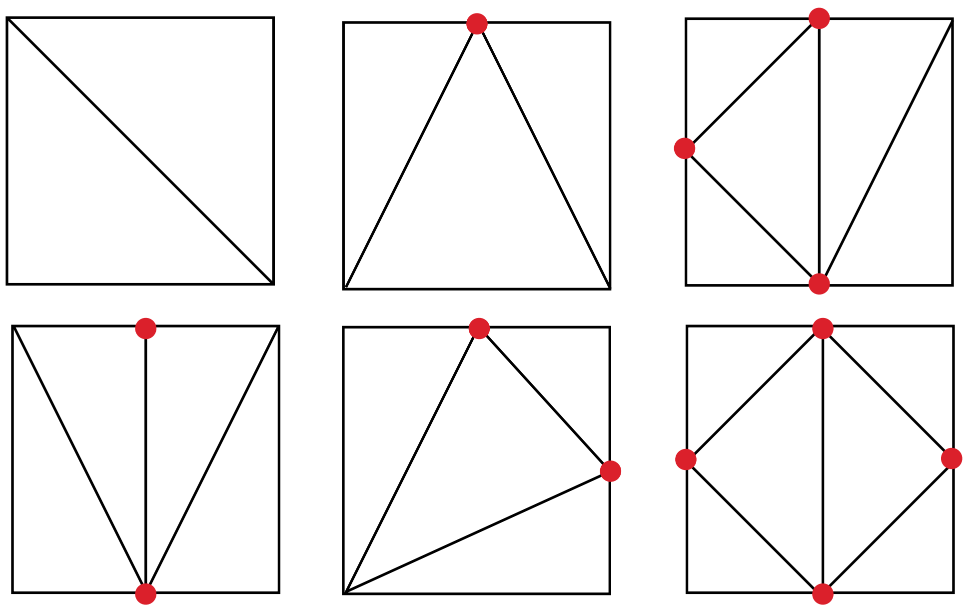
MÉTHODE QUADREE (2D) / OCTREE (3D) : ALGORITHME

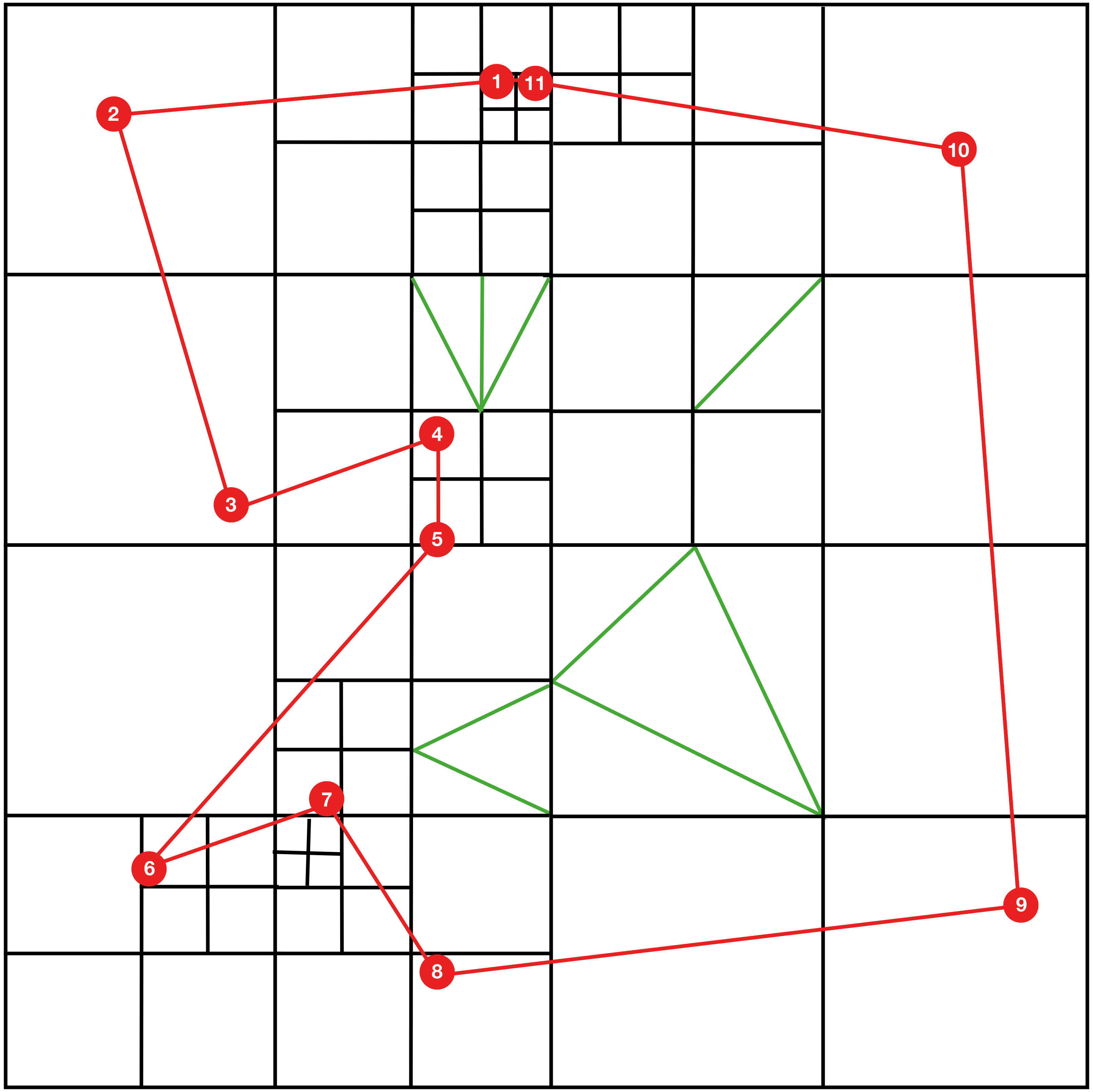
Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une boite englobante du domaine

Etape 2 : Décomposition de l'arbre :
Subdivisions récursives jusqu'à :
- 1 seul noeud par feuille
- 1 seule arête par feuille

Etape 3 : Equilibrage de l'arbre

Etape 4 : Triangulation des feuilles par des motifs prédéfinis





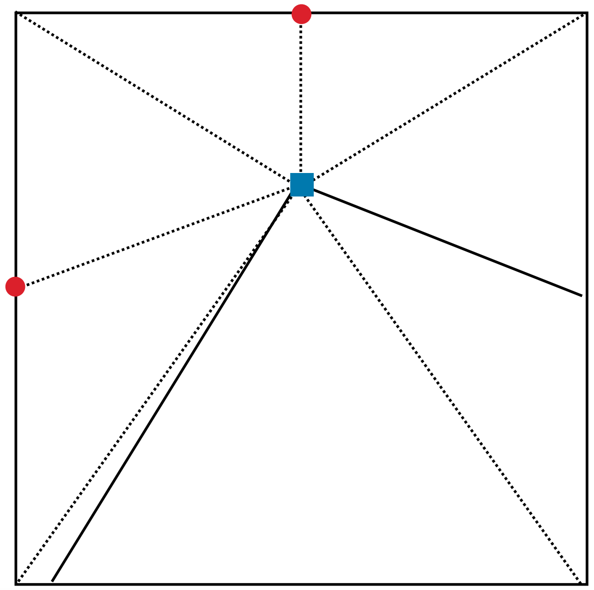
MÉTHODE QUADREE (2D) / OCTREE (3D) : ALGORITHME

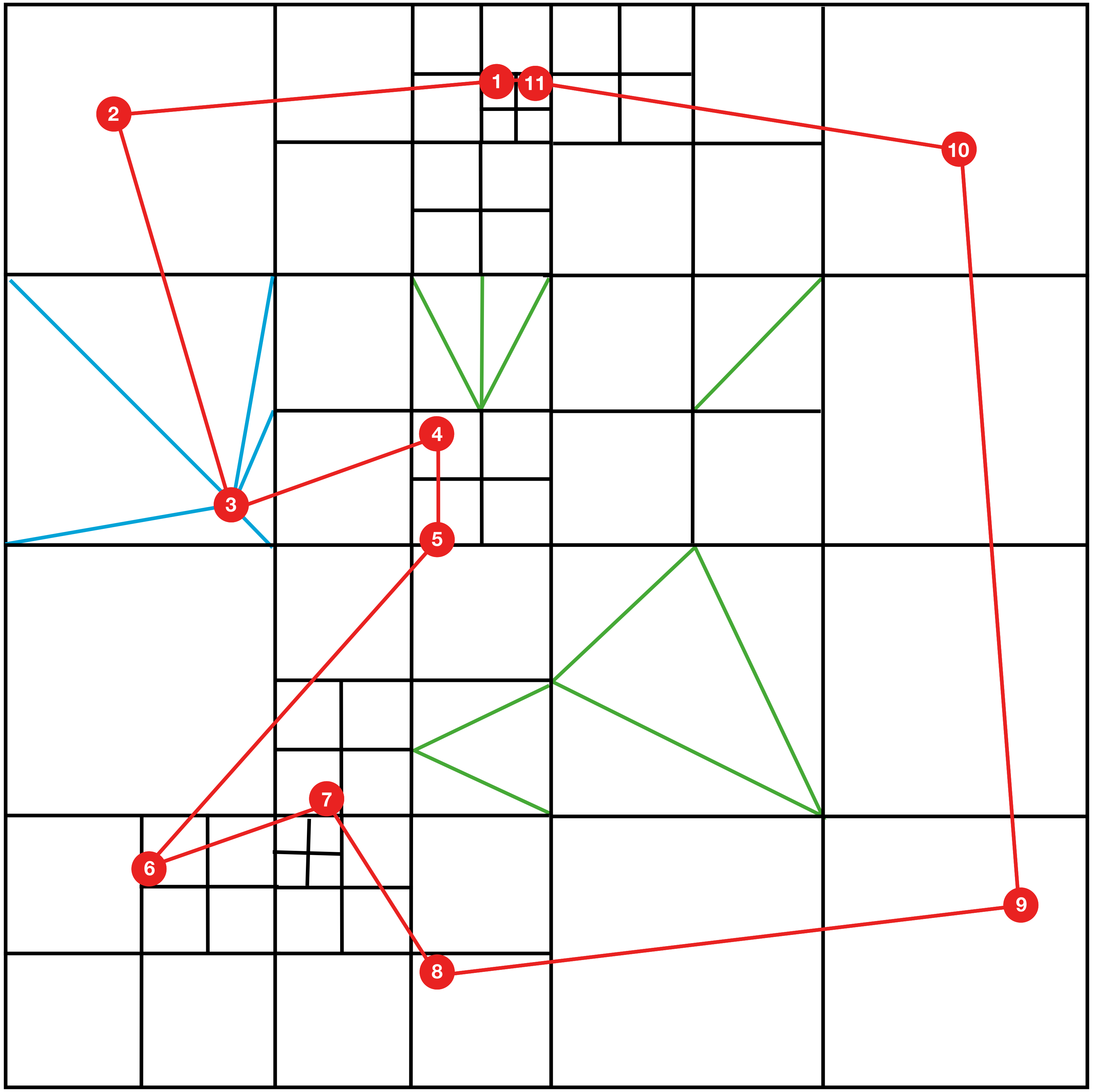
Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une boite englobante du domaine

Etape 2 : Décomposition de l'arbre :
Subdivisions récursives jusqu'à :
- 1 seul noeud par feuille
- 1 seule arête par feuille

Etape 3 : Equilibrage de l'arbre

Etape 4 : Triangulation des feuilles par des motifs prédéfinis





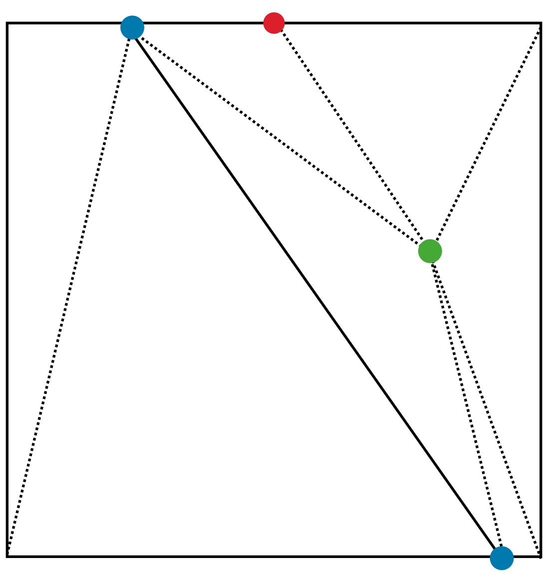
MÉTHODE QUADREE (2D) / OCTREE (3D) : ALGORITHME

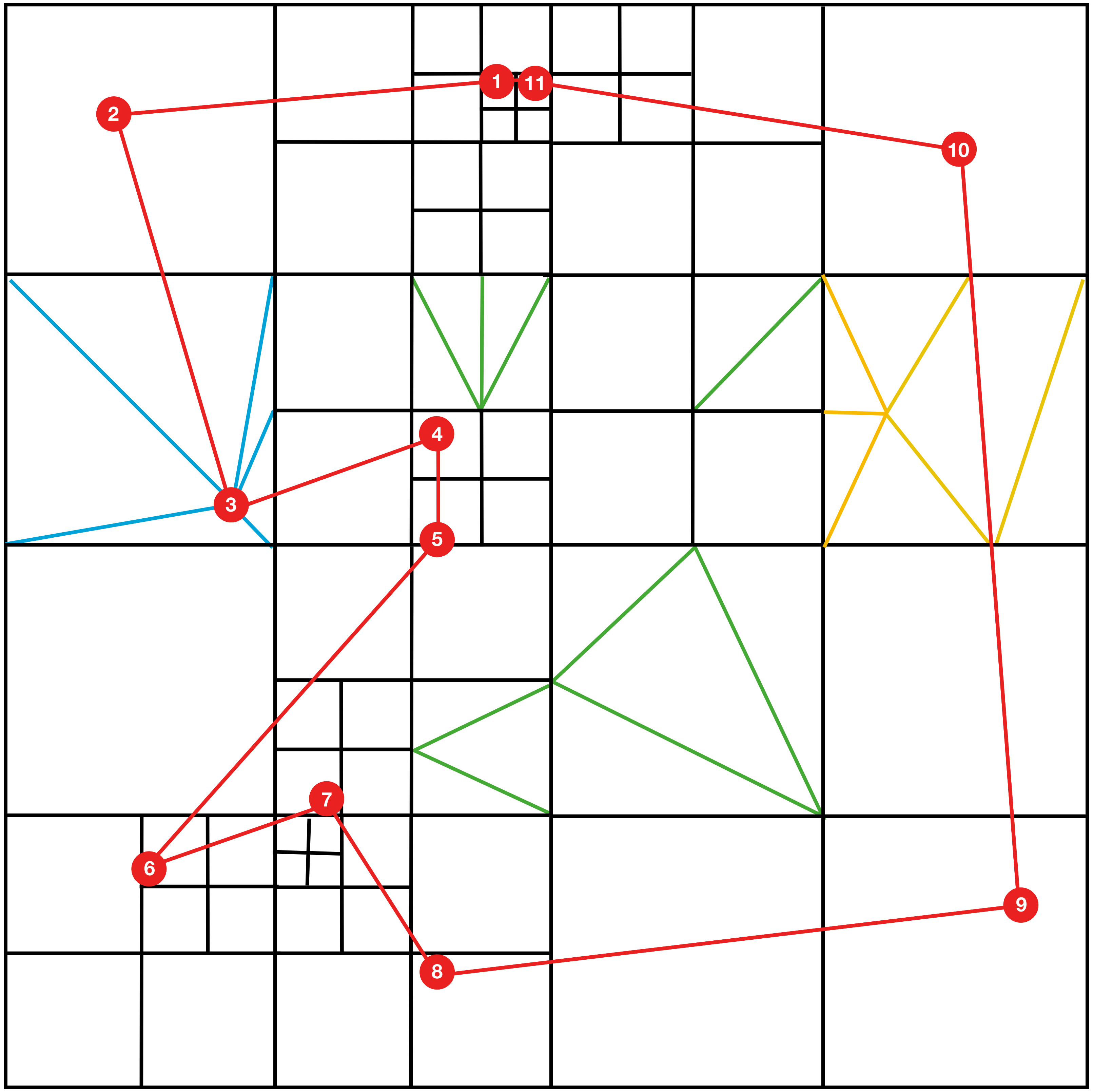
Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une boite englobante du domaine

Etape 2 : Décomposition de l'arbre :
Subdivisions récursives jusqu'à :
- 1 seul noeud par feuille
- 1 seule arête par feuille

Etape 3 : Equilibrage de l'arbre

Etape 4 : Triangulation des feuilles par des motifs prédéfinis





MÉTHODE QUADREE (2D) / OCTREE (3D) : ALGORITHME

Etape 1 : Initialisations :

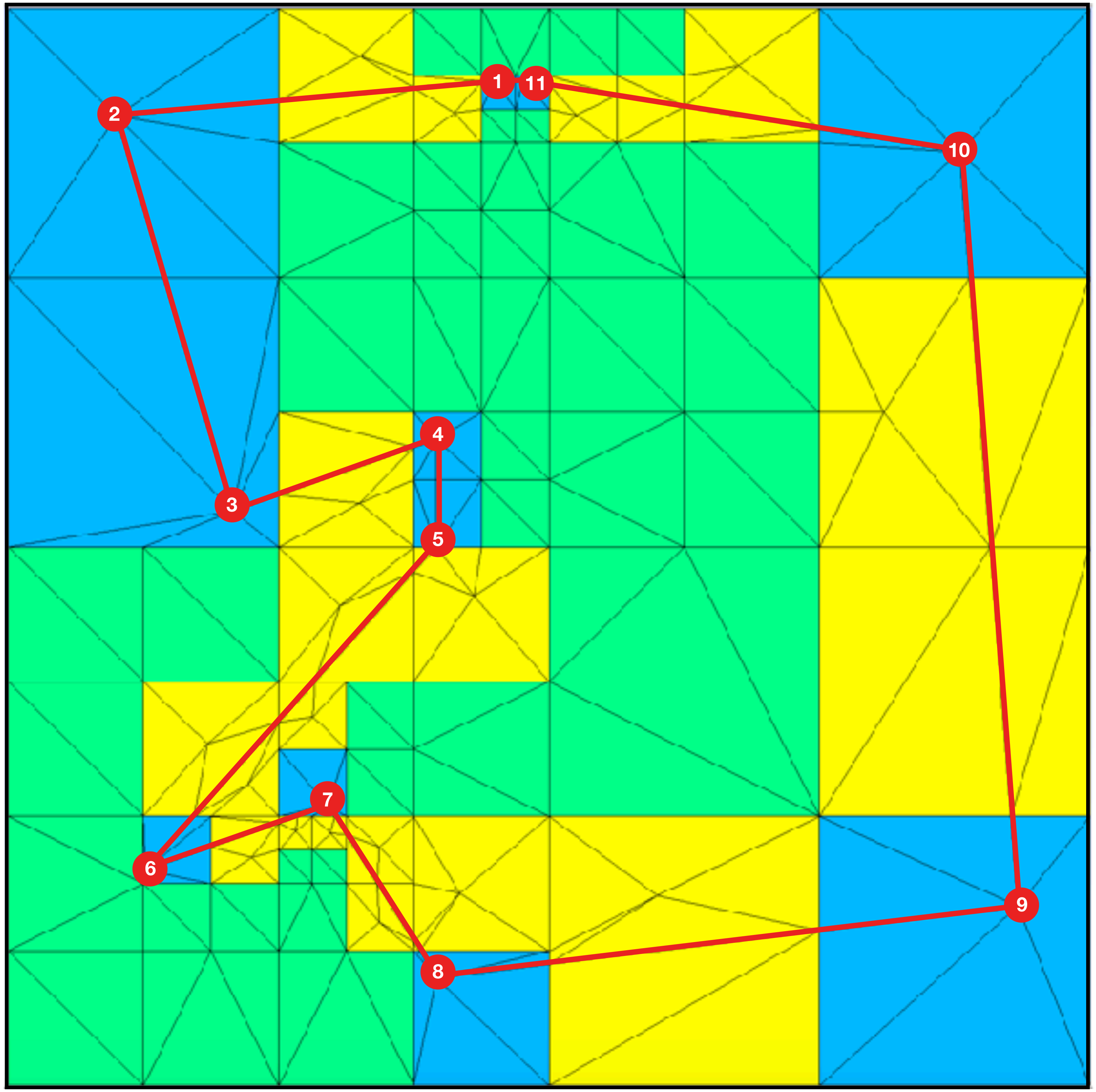
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une boite englobante du domaine

Etape 2 : Décomposition de l'arbre : Subdivisions récursives jusqu'à :

- 1 seul noeud par feuille
- 1 seule arête par feuille

Etape 3 : Equilibrage de l'arbre

Etape 4 : Triangulation des feuilles par des motifs prédéfinis



MÉTHODE QUADREE (2D) / OCTREE (3D) : ALGORITHME

Etape 1 : Initialisations :
- Discrétisation de la frontière
- Construction d'une boite englobante du domaine

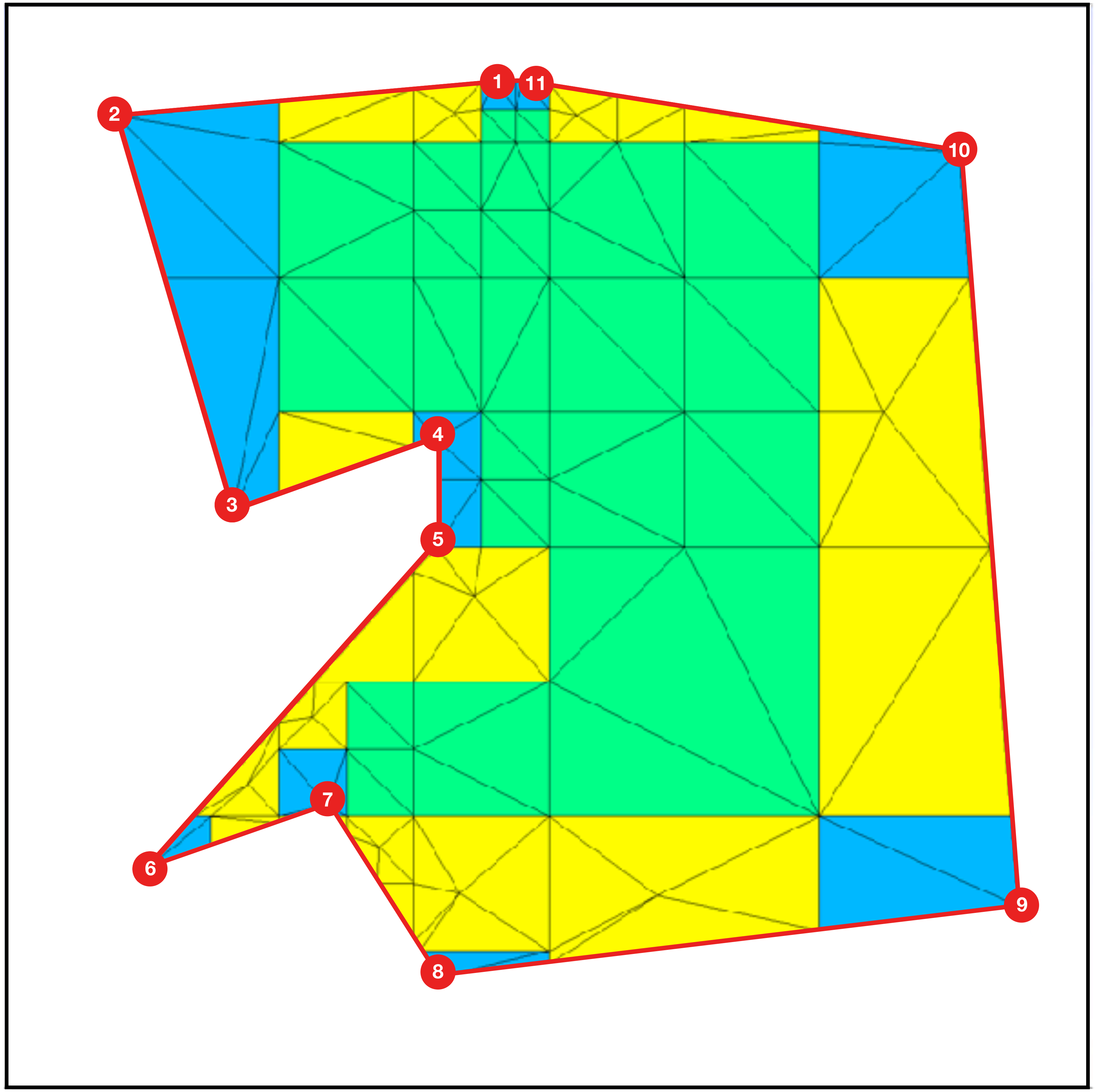
Etape 2 : Décomposition de l'arbre : Subdivisions récursives jusqu'à :
- 1 seul noeud par feuille
- 1 seule arête par feuille

Etape 3 : Equilibrage de l'arbre

Etape 4 : Triangulation des feuilles par des motifs prédéfinis

Etape 5 : Suppression de la boite englobante

Etape 6 : Optimisation du maillage



Méthode quadree (2D) / octree (3D) :
2. Difficultés, avantages et inconvénients de la méthode

a. Difficultés algorithmiques

- Calcul d'intersection de la géométrie avec l'arbre
- Procédures de recherche dans l'arbre

b. Avantages

- Robustesse
- Convergence

c. Inconvénients

- On ne retrouve pas la frontière initiale
- Dépendance aux transformations géométriques
- Maillages à optimiser : aucun critère de qualité n'est pris en compte lors de la construction

COMPARAISON DES TROIS MÉTHODES

	Robustesse	Performance	Qualité			Préservation des frontières
			Moy	Min	Max	
Quadtree	++	++ O(n)	++	++	-	Non
Delaunay	+	+ O(n log(n))	+	+	+	Oui
Frontal	-	- O(n log(n))	-	-	++	Oui