I paskaita

Asimptotiniai žymėjimai

$$\Theta(g(n)) = \left\{ \begin{array}{l} f(n) \,|\, \exists \text{ teigiamos konstantos } c_1, c_2, n_0 \text{ tokios, kad} \\ 0 \le cLg(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \; \forall n \ge n_0 \end{array} \right\}$$

$$O(g(n)) = \left\{ \begin{array}{l} f(n) \,|\, \exists \text{ teigiamos konstantos } c, n_0 \text{ tokios, kad} \\ 0 \le f(n) \le c\; g(n) \; \forall n \ge n_0 \end{array} \right\}$$

$$\Omega(g(n)) = \left\{ \begin{array}{l} f(n) \,|\, \exists \text{ teigiamos konstantos } c, n_0 \text{ tokios, kad} \\ 0 \le c\; g(n) \le f(n) \; \forall n \ge n_0 \end{array} \right\}$$

$$o(g(n)) = \left\{ \begin{array}{l} f(n) \mid \forall \text{ teigiamos konstantos } c, \exists n_0 > 0 \text{ tokios, kad} \\ 0 \le f(n) \le cg(n)\ \forall n \ge n_0 \end{array} \right\}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$, kitas o mažojo apibrėžimas

$$\omega(g(n)) = \left\{ \begin{array}{l} f(n) \mid \forall \text{ teigiamos konstantos } c, \exists n_0 > 0 \text{ tokios, kad} \\ 0 \le cg(n) \le f(n)\ \forall n \ge n_0 \end{array} \right\}$$

Rekurentinės lygtys

suliejimo metodu (MERGE_SORT) parodėme, kad pačiu blogiausiu atveju jos darbo laikas $T(n)$ užrašomas formule:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1, \\ 2T\left(n/2\right) + \Theta(n), & n > 1, \end{cases}$$

Kurios sprendinys yra $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$.

Tokio pavidalo lygtis vadinsime rekuriantinėmis lygtimis (sąryšiais).

Tokių lygčių sprendimui naudojama keli metodai:

- Pakeitimo metodas (substitution method);
- Medžio rekursinis metodas (recursion-tree method);
- Pagrindinis metodas (master method).

Trečiu atveju nagrinėjama tokio pavidalo sąryšiai $T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$, čia $a \geq 1$, $b > 1$, o funkcija $f(n)$ – duota funkcija.

Pastaba reikia turėti galvoje, kad $T(n)$ funkcijos argumentas yra sveikaskaitinis, tačiau tai dažniausiai ignoruojama. Rikiavimo suliejimo metodu (MERGE_SORT) tikslus užrašas būtų

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1, \\ T\left(\left\lfloor n/2 \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil n/2 \right\rceil\right) + \Theta(n), & n > 1. \end{cases}$$

Pagrindinis metodas

Tolygaus padalinimo atvejis

Teorema 4.1 (Pagrindinė teorema). Tegul $a \geq 1,\ b > 1$ – konstantos, $f(n)$ – bet kokia funkcija, o $T(n)$– funkcija, apibrėžta neneigiamų sveikų skaičių aibėje rekurentinio sąryšio pagalba $T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$, čia n/b – suprantama tiek $\lfloor n/b \rfloor$, taip pat ir $\lceil n/b \rceil$. Tada asimptotinis funkcijos $T(n)$ elgesys nusakomas tokiu būdu:

1. Jei $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ kokiai nors teigiamai konstantai $\varepsilon > 0$, tai $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$.

2. Jei $f(n) = O\left(n^{\log_b a}\right)$, tai $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log_2 n\right)$.

3. Jei $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ kokiai nors teigiamai konstantai $\varepsilon > 0$ ir $a\, f\left(n/b\right) \le c\, f(n)$ kokiai nors konstantai $c < 1$ ir visiems pakankamai dideliems n, tai $T(n) = \Theta(f(n))$.

Kokia esmė šios teoremos. Kiekviename atvejyje funkcija $f(n)$ – lyginama su funkcija $n^{\log_b a}$. Pirmu atveju $n^{\log_b a}$ asimptotiškai didesnė nei $f(n)$, todėl $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$. Trečiu atveju priešingai todėl $T(n) = \Theta(f(n))$. Jei abi funkcijos auga asimptotiškai vienodai kaip antru atveju atsiranda logaritminis daugiklis $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log_2 n\right)$.

Reikia suvokti, kad pirmu atveju funkcija $f(n)$ yra netik mažesnė už $n^{\log_b a}$ bet polinomiškai mažesnė. Tai reiškia, kad ji turi būti už $n^{\log_b a}$ mažesnė n^{ε} kartų. Analogiškai ir trečiuoju atveju $f(n)$ turi būti n^{ε} kartų didesnė nei funkcija $n^{\log_b a}$. Be to turi būti išlaikoma reguliarumo sąlyga $a\ f\left(\frac{n}{b}\right) \le c\ f(n)$.

Reikia suvokti, kad tarp pirmo ir antro atvejo yra daug atvejų kai $f(n)$ yra mažesnė už $n^{\log_b a}$, bet ne polinomiškai mažesnė. Analogiškai ir tarp antro ir trečio atvejo.

Pavyzdžiai:

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

Reikšmės konstantų: $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = n$

Sprendimas: $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2 = \Theta(n^2)$, $f(n) = O\left(n^{\log_3 9 - \varepsilon}\right)$, čia $\varepsilon = 1$.

Taikomas 1 teoremos atvejis.

Rekuriantinės lygties sprendinys $T(n) = \Theta\left(n^{\log_3 9}\right) = \Theta(n^2)$.

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$$

Reikšmės konstantų: $a = 1,\ b = \frac{3}{2},\ \ f(n) = 1 = n^0$

Sprendimas: $n^{\log_b a} = n^{\log_{\frac{2}{3}} 1} = n^0 = 1$.

Taikomas 2 teoremos atvejis.

Rekuriantinės lygties sprendinys

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_{\frac{3}{2}} 1} \log_2 n\right) = \Theta(\log_2 n).$$

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log_2 n$

Reikšmės konstantų: $a = 3$, $b = 4$, $f(n) = n\log_2 n$.

Sprendimas: $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O\left(n^{0,793}\right)$, $f(n) = \Omega\left(n^{\log_4 3+\varepsilon}\right)$, čia $\varepsilon \approx 0,2$.

Taikomas 3 teoremos atvejis, jei išpildoma sąlyga $a\ f\left(n/b\right) \le c\ f(n)$ kokiai nors konstantai $c < 1$ ir visiems pakankamai dideliems n.

$$a\ f\left(n/b\right)=3\left(\frac{n}{4}\right)\log_2\left(\frac{n}{4}\right)=\frac{3n\log_2 n}{4}-\frac{3n}{4}\log_2 4=\frac{3n\log_2 n}{4}-\frac{3n}{2}$$

$$\le\frac{3}{4}n\log_2 n=cf\left(n\right)$$

. Šiuo atveju reguliarumo sąlyga išpildyta kai $c=\frac{3}{4}<1$ ir visiems $n\ge1$.

Rekuriantinės lygties sprendinys $T(n)=\Theta(n\log_2 n)$.

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\log_2 n$$

Reikšmės konstantų: $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n\log_2 n$

Sprendimas: $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$. Gali pasirodyti kad reikia taikyti 3 teoremos atvejį. Tačiau šiuo atveju nors $f(n) = n\log_2 n$ yra asimptotiškai didesnė nei $n^{\log_2 2} = n$, tačiau ne polinomiškai didesnė, nes santykis $\dfrac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \dfrac{n\log_2 n}{n} = \log_2 n$ asimptotiškai mažesnis nei n^{ε} visiems $\varepsilon > 0$.

Rekuriantinės lygties sprendinys tarpe tarp 2 ir 3 teoremos atvejų.

Netolygaus padalinimo atvejis (Akra–Bazzi)

$T(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i T\left(\left\lfloor \frac{n}{b_i} \right\rfloor\right) + f(n)$, čia $k \geq 1$, $a_i > 0$, $b_i > 1$, $f(n)$ – aprėžta ir nemažėjanti. Be to, bet kuriai konstantos $c > 1$ reikšmei egzistuoja konstantos n_0 ir $d > 0$, tokios kad visiems $n > n_0$ išpildoma sąlyga $f\left(\frac{n}{c}\right) \geq df(n)$. Norint rasti sprendinį reikia rasti reikšmę p iš lygties $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^{-p} = 1$ (sprendinys visada egzistuoja vienintelis ir teigiamas). Rekuriantinio sąryšio sprendinys yra $T(n) = \Theta(n^p) + \Theta\left(n^p \int_{n'}^{n} \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx\right)$, n' – pakankamai didelė konstanta.

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor\right) + n$$

$$k = 2,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ b_1 = 3,\ b_2 = \frac{3}{2},\ \ f(n) = n$$

$$\frac{n}{c} \geq dn \Rightarrow d = \frac{1}{c}, \text{ visiems } n \geq 1.$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^{-p} = 3^{-p} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-p} = 1 \Rightarrow 1 + 2^p = 3^p \Rightarrow p = 1.$$

$$\boxed{\begin{aligned}T(n) &= \Theta\left(n^{p}\right)+\Theta\left(n^{p}\int_{n'}^{n}\frac{f(x)}{x^{p+1}}\,dx\right)=\Theta(n)+\Theta\left(n\int_{n'}^{n}\frac{x}{x^{2}}\,dx\right)=\\ &=\Theta(n)+\Theta\left(n\left(\ln x\big|_{n'}^{n}\right)\right)=\\ &=\Theta(n)+\Theta\left(n\left(\underbrace{\ln n-\ln n'}_{>0}\right)\right)=\Theta(n)+\Theta(n\ln n)=\Theta(n\ln n).\end{aligned}}$$