

## 第二篇

### 核心篇

本篇是本教材的核心篇，将介绍智能嵌入式系统的软硬件优化配置方法。掌握基于线性规划的多目标优化方法以及工具，掌握基于任务优先级的多核调度方法并实现相关算法代码，掌握基于通信代价的多模块划分方法并实现相关算法代码，掌握基于多模块和多核的微系统划分方法并实现相关算法代码。

通过本篇学习，掌握智能嵌入式系统的软硬件优化配置方法，编程实现相关算法，建立智能嵌入式系统软硬件优化配置工具库。

本篇共有四章：

第 5 章 多目标划分方法

第 6 章 多核调度方法

第 7 章 多模块划分方法

第 8 章 微系统划分方法

## 第五章 多目标划分方法

兼权熟计 《荀子·不苟》

一个系统的规范包括了系统的功能描述,还有系统的性能描述。而这些系统性能是多目标的,有时是相互矛盾的,如任务完成速度与任务实现成本是一对矛盾体。

本章介绍基于线性规划方法的多目标划分方法,划分目的是确认哪些任务使用软件实现哪些任务使用硬件实现。因此,本章实际上给出的是基于线性规划的软硬件划分方法。

### 第 5.1 节 线性规划介绍

线性规划(Linear Programing, LP)是研究在线性约束条件下线性目标函数极值问题的数学理论和方法。线性规划是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支,它是辅助人们进行科学管理的一种数学方法,被广泛应用于军事作战、经济分析、经营管理和工程技术等方面,为合理地利用有限的人力、物力、财力等资源做出最优决策,提供科学的依据。

线性规划的研究成果还直接推动了其他数学规划问题包括整数规划、随机规划和非线性规划的算法研究。随着数字电子计算机的发展,出现了许多线性规划软件,如 MPSX, OPHEIE, UMPIRE 等,可以很方便地求解几千个变量的线性规划问题。由于线性规划已比较成熟,因此一般都是使用现有的软件工具求解,比较常用的求解线性规划模型的软件有 LINGO 和 Matlab。

#### 5.1.1 数学建模

数学建模是将实际问题建立数学模型,即用数学表达式或方程组来描述实际问题。

**例 5.1** 现有 3 个任务 r1、r2、r3,在微处理器上运行时间分别为 10、15、12 个单位,任务完成产生的收益分别为 0.6、0.3、0.5。计算在 30 个单位时间内,使得收益最大的任务完成方案。

从实际问题中建立数学模型一般有以下四个步骤:

步骤 1: 决策变量--依据影响所要达到目的的因素来确定决策变量

$r_1, r_2, r_3$ ; (3 个任务)

步骤 2: 目标函数--由决策变量和所要达到目的之间函数关系确定目标函数, 这个目标函数一般是最大或最小值函数:

$\max=0.6*r_1+0.3*r_2+0.5*r_3$ ; (3 个任务完成产生的增益之和)

步骤 3: 约束条件--由决策变量所受的限制条件确定决策变量所应满足的约束条件:

$10*r_1+15*r_2+12*r_3 \leq 30$ ;  $r_1, r_2, r_3 \in \{0,1\}$ , (3 个任务在微处理器上运行完成的时间之和不超过 30 个单位时间)

由于任务只有完成后才能产生收益, 因此要求任务要么完成要么没有完成, 取值 0 表示任务没有完成, 取值 1 表示任务完成;

步骤 4: 最优解--依据约束条件和目标函数, 在可行域内求目标函数的最优解及最优值, 即求出决策变量的取值(范围)以及目标函数的值(范围)。

例 5.1 的任务处理情况分析: 从 3 个任务完成时间来看, 它们不能都执行, 可以执行其中 2 个任务, 即有 3 个组合:  $(r_1, r_2)$ ,  $(r_1, r_3)$ ,  $(r_2, r_3)$ , 对应的约束条件为  $(1, 1, 0)$  执行时间为 25 个单位,  $(1, 0, 1)$  执行时间为 22 个单位,  $(0, 1, 1)$  执行时间为 27 个单位。这 3 个组合执行时间都符合约束条件 ( $\leq 30$ ), 因此它们都是候选解。当然也可以执行其中 1 个任务, 此情况虽然执行时间符合约束条件, 但收益明显地不如执行 2 个任务来得大, 因而执行 1 个任务不是最优解。

计算出各种组合产生收益为:

$(r_1, r_2)$ :  $0.6+0.3=0.9$ ;

$(r_1, r_3)$ :  $0.6+0.5=1.1$ ;

$(r_2, r_3)$ :  $0.3+0.5=0.8$ 。

因此例 5.1 任务分配问题的最优解为: 执行任务  $r_1$  和  $r_3$ , 产生的收益最大为 1.1, 执行时间为 22。

### 5.1.2 线性规划

当数学模型的目标函数为线性函数, 约束条件也为线性等式或不等式时, 称此数学模型为线性规划模型。

线性规划模型具有以下特点:

- 1、每个模型都有若干个决策变量 ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ )，其中  $n$  为决策变量个数。决策变量的一组值表示一种方案，同时决策变量一般是非负的；
- 2、目标函数是决策变量的线性函数，根据具体问题可以是最大化 ( $\max$ ) 或最小化 ( $\min$ )，二者统称为最优化 ( $\text{opt}$ )；
- 3、约束条件也是决策变量的线性函数；
- 4、线性规划的解 (即解决方案) 是满足目标函数决策变量一组值，如(0, 1, 0, 1, 1)。

### 5.1.3 求解工具

本段介绍两个求解工具：LINGO 和 Matlab。

例 5.1 任务调度问题，使用 LINGO 工具求解，其代码为：

```
model:
max=0.6*r1+0.3*r2+0.5*r3;
10*r1+15*r2+12*r3<=30;
@bin(r1);
@bin(r2);
@bin(r3);
end
```

其中@bin(r1)表示  $r_1$  只取 0 与 1 值。运行结果为：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                1.100000
Objective bound:                1.100000
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:        0
```

	Variable	Value	Reduced Cost
	R1	1.000000	-0.6000000
	R2	0.000000	-0.3000000
	R3	1.000000	-0.5000000
	Row	Slack or Surplus	Dual Price
	1	1.100000	1.000000
	2	8.000000	0.000000

解决方案：完成任务  $r_1$  和  $r_3$ ，其收益为 1.1，执行时间为 22。

使用 Matlab 工具提供的求解函数进行求解。

Matlab 工具中的线性规划函数：

`[x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)`

其中： $x$  为最优解； $fval$  是目标函数最优值； $exitflag$  表示求解是否成功； $output$  为优化过程中各种输出信息； $lambda$  为结构体，包含最优解处的拉格朗日乘子； $f$  为目标函数系数矩阵； $A$  为不等式约束的系数矩阵； $b$  为不等式约束的常向量； $Aeq$  为等式约束的系数矩阵； $beq$  为等式约束的常向量； $lb$  为自变量下限； $ub$  为自变量上限。

整数线性规划/0-1 线性规划：

`[x,fval,exitflag,output]=intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub)`

其中： $intcon$  表示整数约束，其余参数涵义同上，但参数都是整数/0-1。

使用 Matlab 工具求引例的解：

```
>> f=[0.6;0.3;0.5];
A=[10,15,12];
b=[30];
lb=zeros(3,1);
ub=[1;1;1];
intcon=[1,2,3];
[x,fval,exitflag,output]=intlinprog(-f,intcon,A,b,[],[],lb,ub)
```

```
x =
    1
    0
    1

fval =
   -1.1000
```

求出的结果与使用 LINGO 工具求解相同：完成任务 r1 和 r3。

## 第 5.2 节 多处理器任务分配

一个系统由多任务组成，每个任务含有多个性能指标。多任务分配的目的是在满足一定系统性能约束的前提下，在多处理器上进行任务分配并使系统性能达到最优。

### 5.2.1 任务分配时间问题

**例 5.2** 将 4 个任务  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  进行划分到两个处理器 PE0 与 PE1。这些任务在处理器 PE0 上的执行时间分别 5, 15, 10 和 30，而在 PE1 上执行时间分别

为 10, 20, 10 和 10。将这 4 个任务分配到这两个处理器上执行, 使得执行时间最少。

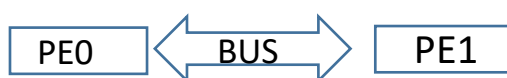


图 5-1 例 5.2 示意图

表 5-1 例 5.2 数据表

执行时间	t0	t1	t2	t3
PE0	5	15	10	30
PE1	10	20	10	10

**解:** 把每个任务安排在 PE0 和 PE1 上执行, 引入变量符号  $t_{00}$ ,  $t_{10}$ ,  $t_{20}$ ,  $t_{30}$  分别表示任务在 PE0 上执行, 变量符号  $t_{01}$ ,  $t_{11}$ ,  $t_{21}$ ,  $t_{31}$  分别表示任务在 PE1 上执行, 它们满足条件:  $t_{00}+t_{01}=1$ ,  $t_{10}+t_{11}=1$ ,  $t_{20}+t_{21}=1$ ,  $t_{30}+t_{31}=1$ , 并且每个变量符号只取 0/1 二值, 这意味着每个任务只能在且必须在 PE0 和 PE1 中一个执行。再设  $load_0$  表示处理器 PE0 执行时间,  $load_1$  表示处理器 PE1 执行时间, 则有

$$load_0 = 5 \cdot t_{00} + 15 \cdot t_{10} + 10 \cdot t_{20} + 30 \cdot t_{30};$$

$$load_1 = 10 \cdot t_{01} + 20 \cdot t_{11} + 10 \cdot t_{21} + 10 \cdot t_{31}。$$

目标函数是  $\min = load_0 + load_1$ 。

建立线性规划模型:

$$\min = load_0 + load_1;$$

$$load_0 = 5 \cdot t_{00} + 15 \cdot t_{10} + 10 \cdot t_{20} + 30 \cdot t_{30};$$

$$load_1 = 10 \cdot t_{01} + 20 \cdot t_{11} + 10 \cdot t_{21} + 10 \cdot t_{31};$$

$$t_{00} + t_{01} = 1;$$

$$t_{10} + t_{11} = 1;$$

$$t_{20} + t_{21} = 1;$$

$$t_{30} + t_{31} = 1;$$

从  $t_{00}+t_{01}=1$ ,  $t_{10}+t_{11}=1$ ,  $t_{20}+t_{21}=1$ ,  $t_{30}+t_{31}=1$ , 并且每个变量符号只取 0/1 二值来看, 共有  $2^4=16$  种候选者, 我们的计算是从这 16 种中选择最优方案, 即  $\text{load0}+\text{load1}$  取最小值的解决方案。

使用 LINGO 工具划分, 代码为:

```
model:
min = load0+load1;
load0=5*t00 + 15*t10 + 10*t20 +30*t30;
load1=10*t01 +20*t11 + 10*t21 + 10*t31;
t00+t01=1;
t10+t11=1;
t20+t21=1;
t30+t31=1;
@bin(t00);
@bin(t01);
@bin(t10);
@bin(t11);
@bin(t20);
@bin(t21);
@bin(t30);
@bin(t31);
end
```

输出结果为  $T_{00}=T_{10}=T_{20}=T_{31}=1$ , 即处理器 PE0 处理任务 T0, T1 和 T2, 处理器 PE1 处理任务 T3, 整个处理时间是 40。

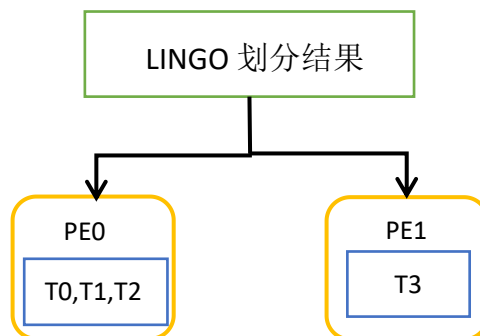


图 5-2 例 5.2 Lingo 划分结果

但这样划分方案是不均匀的, 处理器 PE0 处理了 3 个任务, 用了时间为 30, 而处理器 PE1 仅处理 1 个任务也仅用了 10 个时间。从任务时间来看, 任务 T0 和 T1 最好安排在 PE0 处理器, 而任务 T3 最好安排在 PE1 处理器, 任务 T2 安排在

PE0 和 PE1 中任何一个都可以,但从任务分配均匀角度来看,任务 T2 安排在 PE1 处理器最好,这样安排两个处理器都用了 20 个时间。

再使用 Matlab 工具平台求解:

输出结果为: 处理器 PE0 处理任务 T0, T1, 处理器 PE1 处理任务 T2 和 T3, 整个处理时间是 40。每个处理器完成的任务比较均匀,而且每个处理器处理任务时间为 20。

```
>>f=[5;15;10;30;10;20;10;10];intcon=[1,2,3,4,5,6,7,8];Aeq=[1,0,0,0,1,0,0,0;0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0;0,0,1,0,0,0,1,0;0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1];beq=[1;1;1;1];lb=zeros(8,1);ub=[1;1;1;1;1;1;1;1];
[x,fval,exitflag,output]=intlinprog(f,intcon,[],[],Aeq,beq,lb,ub)
```

LP: Optimal objective value is 40.000000.

```
x = 1
     1
     0
     0
     0
     0
     1
     1
fval = 40
```

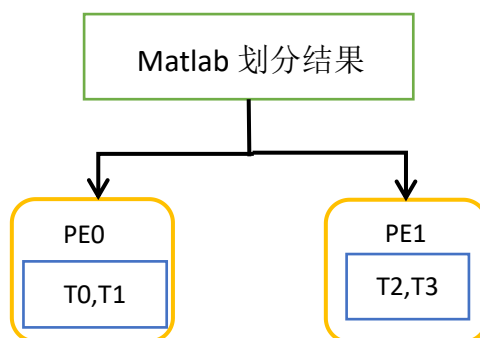


图 5-3 例 5.2 Matlab 划分结果

**一般问题:** 设有  $n$  个任务  $R_1, R_2, \dots, R_n$  以及  $m$  个处理器  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , 任务  $R_i$  在处理器  $P_j$  上执行时间为  $t_{ij}(i=1\dots n, j=1\dots m)$ 。

把这  $n$  个任务分配到这  $m$  个处理器执行,使得整体执行时间最少。



建立线性规划模型。

设  $R_{ij}$  表示任务  $R_i$  在第  $j$  处理器  $P_j$  上执行，其取值 0 或 1，0 表示不执行，1 表示执行。再设  $load_j = \sum_{i=1 \dots n} t_{ij} * R_{ij}$  ( $j=1 \dots m$ )，记录了第  $j$  处理器  $P_j$  上执行所有任务的执行时间之和。 $load = \sum_{j=1 \dots m} load_j$ ，记录  $m$  个处理器处理执行所有任务的执行时间之和。任务分配整体目标是求一个任务在处理器上分配方案使得  $load$  取最小值，即：

$$\text{Min } load = \sum_{j=1 \dots m} load_j;$$

$$load_j = \sum_{i=1 \dots n} t_{ij} * R_{ij} \quad (j=1 \dots m);$$

$$R_{ij} \in \{0, 1\} (j=1 \dots m, i=1 \dots n);$$

$$\sum_{j=1 \dots m} R_{ij} = 1。$$

### 5.2.2. 任务分配收益问题

设有  $n$  个任务  $r_1, \dots, r_n$  在处理器  $P$  上运行消耗时间分别为  $t_1, \dots, t_n$ ，系统获得收益分别为  $g_1, g_2, \dots, g_n$ 。求在时间  $T$  内最多能完成的任务并使得系统收益最大最小。

建立线性规划模型：

$$\text{maximize: } g_1 * r_1 + \dots + g_n * r_n$$

$$\text{subject to: } t_1 * r_1 + \dots + t_n * r_n \leq T$$

$$r_i = 0 \text{ 或 } 1;$$

## 第 5.3 节 多目标软硬件划分

软硬件划分是将系统任务指定给软件实现或硬件实现。每个任务都有可能软件实现或硬件实现，因而每个任务都有软件实现和硬件实现的属性，包括执行时间、开发成本、功耗、可靠度，以及硬件（电路板）面积（硬件实现）。有些属性是矛盾的，因此在系统实现时要考虑这些属性，平衡矛盾的属性，获得系统性能的最优化。

本节介绍基于线性规划的软硬件划分方法。但对于复杂系统的软硬件划分还是需要结合其他方法进行求解<sup>[23]</sup>。

### 5.3.1. 面向可靠性的软硬件划分

可靠性是嵌入式系统一个重要指标，也是系统实现的一个增益。但软件可

可靠性与硬件可靠性也是有区别的，这里设想软件可靠性没有硬件可靠性强，但硬件实现有硬件面积的要求，因此不同的硬件面积约束条件，会产生不同的软硬件划分方案，进而会产生不同的系统可靠性。

**例 5.3** 现有六个任务 T1, T2, T3, T4, T5, T6。每个任务软件实现和硬件实现有可靠度，软件实现有时间属性，硬件实现有硬件面积属性，数据如表 5-2 所示，求在软件运行时间不超过 2000 的前提下，硬件面积约束条件分别为 1000, 2000, 2500 情况下的系统最大可靠度以及设计方案。

表 5-2 例 5.3 任务属性数据表

任务	软可靠度	软时间	硬可靠度	硬面积
T1	0.8	50	0.9	430
T2	0.82	43	0.96	520
T3	0.75	38	0.90	489
T4	0.80	52	0.92	532
T5	0.78	51	0.95	541
T6	0.85	44	0.99	488

使用线性规划求解结果如表 5-3 所示，其中系统可靠度等于软实现的任务软可靠度之和+硬实现的任务硬可靠度之和，再除以 6（6 个任务）的商。

表 5-3 例 5.4 求解结果

软时间约束条件	硬件面积约束条件	软实现任务	硬实现任务	系统可靠度
2000	1000	T1,T2,T4,T5	T3,T6	0.848(=5.09/6)
	2000	T2,T4	T1,T3,T5,T6	0.893(=5.36/6)
	2500	T4	T1,T2,T3,T5,T6	0.917(=5.5/6)

### 5.3.2. 多目标软硬件划分

假设智能嵌入式系统中有任务数为  $N$ ，第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 个任务采用第  $j$  ( $j = 0, 1$ ) 开发方法，其中  $0$  表示软件开发， $1$  表示硬件开发，每个任务有 4 个属性：执行面积  $S(i, j)$ 、执行时间  $T(i, j)$ 、开发代价  $C(i, j)$  和功耗  $P(i, j)$ 。

假定智能嵌入式系统最大功耗为  $P$ ，硬件的最大面积为  $S$ ，最大开发代价为  $C$ ，最大执行时间为  $T$ 。

软硬件划分目标是建立软硬件划分方案，使得系统的整体性能或某个属性达到最优。

设变量  $x_{ij}$  表示第  $i$  个任务， $j$  开发方法 ( $j=0$  表示软件开发， $j=1$  表示硬件开发)。

引入函数： $p = \sum_{i=1 \dots N, j=0,1} P(i,j) * x_{ij}$

$$s = \sum_{i=1 \dots N, j=0,1} S(i,j) * x_{ij}$$

$$c = \sum_{i=1 \dots N, j=0,1} C(i,j) * x_{ij}$$

$$t = \sum_{i=1 \dots N, j=0,1} T(i,j) * x_{ij}$$

求  $\min p+s+c+t$

约束条件：

$$\sum_{i=1 \dots N, j=0,1} P(i,j) * x_{ij} \leq P$$

$$\sum_{i=1 \dots N, j=0,1} S(i,j) * x_{ij} \leq S$$

$$\sum_{i=1 \dots N, j=0,1} C(i,j) * x_{ij} \leq C$$

$$\sum_{i=1 \dots N, j=0,1} T(i,j) * x_{ij} \leq T$$

划分结果： $x_{ij}$  的取值 0 或 1。 $x_{ij}$  值=1 表示第  $i$  任务按照  $j$  方法开发。

划分效果：将  $x_{ij}$  的值代入函数  $p,s,c,t$  求出的值。

**例 5.4** 现有 10 个任务，每个任务的软件实现和硬件实现有功耗、时间、代价属性，硬件实现有硬件面积属性，数据如表 5-4 所示，系统最大功耗为  $P=4w$ ，硬件的最大面积为  $S=3500mm^2$ ，最大开发软代价为  $C=1080$  元，软件执行最大时

间为  $T=600\text{ms}$ 。设计一个软硬件划分方案使得整个系统的性能最优，即功耗、硬件面积、开发代价和执行时间都最小。

表 5-4 例 5.4 任务属性值

任务	硬面积	软功耗	硬功耗	软时间	硬时间	软代价	硬代价
0	413	0.18	0.13	80	0.2	15	156
1	216	0.12	0.05	54	0.16	12	134
2	758	0.26	0.17	123	0.24	23	341
3	531	0.18	0.12	74	0.21	14	143
4	522	0.55	0.41	65	0.15	14	123
5	470	0.14	0.15	76	0.18	12	134
6	502	0.78	0.22	62	0.11	13	125
7	330	0.45	0.34	57	0.12	11	121
8	363	0.17	0.25	62	0.13	14	187
9	524	0.62	0.5	68	0.16	16	234
和	4629	3.33	2.34	721	1.66	144	1698

**解：**设变量  $x_{ij}(i=0\ldots 9, j=0, 1)$ ， $j=0$  表示软实现， $j=1$  表示硬实现，表示第  $i$  个任务是软实现还是硬实现， $x_{ij} \in \{0,1\}(i=0\ldots 9, j=0/1)$ 。

引入函数：

$s=413*x_{00}+216*x_{10}+758*x_{20}+531*x_{30}+522*x_{40}+470*x_{50}+502*x_{60}+330*x_{70}+363*x_{80}+524*x_{90}$ ；表示系统硬实现的硬件面积

$p=0.18*x_{00}+0.13*x_{01}+0.12*x_{10}+0.05*x_{11}+0.26*x_{20}+0.17*x_{21}+0.18*x_{30}+0.12*x_{31}+0.55*x_{40}+0.41*x_{41}+0.14*x_{50}+0.15*x_{51}+0.78*x_{60}+0.22*x_{61}+0.45*x_{70}+0.34*x_{71}+0.17*x_{80}+0.25*x_{81}+0.62*x_{90}+0.5*x_{91}$ ；表示系统整体功耗

$t=80*x_{00}+0.2*x_{01}+54*x_{10}+0.16*x_{11}+123*x_{20}+0.24*x_{21}+74*x_{30}+0.21*x_{31}+65*x_{40}+0.15*x_{41}+76*x_{50}+0.18*x_{51}+62*x_{60}+0.11*x_{61}+57*x_{70}+0.12*x_{71}+62*x_{80}+0.13*x_{81}+68*x_{90}+0.16*x_{91}$ ；表示系统整体执行时间

$c=15*x_{00}+156*x_{01}+12*x_{10}+134*x_{11}+23*x_{20}+341*x_{21}+14*x_{30}+143*x_{31}+14*x_{40}+$

$123 \times x_{41} + 12 \times x_{50} + 134 \times x_{51} + 13 \times x_{60} + 125 \times x_{61} + 11 \times x_{70} + 121 \times x_{71} + 14 \times x_{80} + 187 \times x_{81} + 16 \times x_{90} + 234 \times x_{91}$ ; 表示系统整体开发代价

变量空间:

$x_{00} + x_{01} = 1$ ;  $x_{10} + x_{11} = 1$ ;  $x_{20} + x_{21} = 1$ ;  $x_{30} + x_{31} = 1$ ;  $x_{40} + x_{41} = 1$ ;  $x_{50} + x_{51} = 1$ ;  $x_{60} + x_{61} = 1$ ;  $x_{70} + x_{71} = 1$ ;  $x_{80} + x_{81} = 1$ ;  $x_{90} + x_{91} = 1$  表示变量  $x_{ij}$  的约束条件

(1) 综合考虑使得系统整体性能最优

- 极值:  $\min = s + p + t + c$ ;
- 约束条件:  $s \leq 3500$ ;  $p \leq 4$ ;  $t \leq 600$ ;  $c \leq 1080$ ;
- 划分解:

$$x_{00} = x_{10} = x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{51} = x_{61} = x_{71} = x_{81} = x_{91} = 0$$

$$x_{01} = x_{11} = x_{20} = x_{30} = x_{40} = x_{50} = x_{60} = x_{70} = x_{80} = x_{90} = 1$$

软件实现: 任务 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 硬件实现: 任务 0, 1。

- 划分效果:

硬面积  $S=629$ , 功耗  $P=3.33$ , 执行时间  $T=587.36$ , 开发代价  $C=407$ 。

系统最小值:  $\min=1626.69$ 。

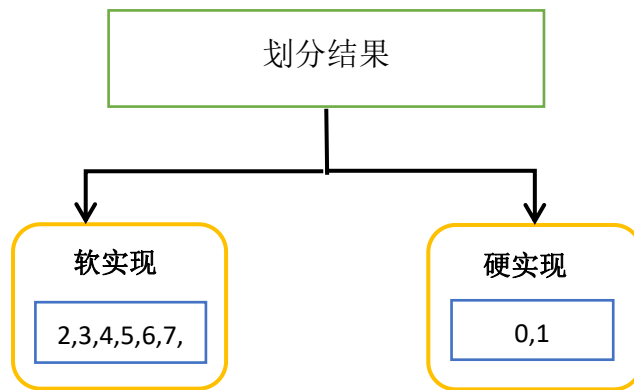


图 5-4 例 5.4 系统整体性能最优划分结果

(2) 只考虑时间最优, 即系统整体执行时间最小

- 极值:  $\min = t$ ;
- 约束条件:  $s \leq 3500$ ;  $p \leq 4$ ;  $c \leq 1080$ ;
- 划分解:

$$x_{00} = x_{11} = x_{20} = x_{30} = x_{40} = x_{50} = x_{60} = x_{71} = x_{81} = x_{91} = 0$$

$$x_{01} = x_{10} = x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{51} = x_{61} = x_{70} = x_{80} = x_{90} = 1$$

软件实现：任务 1, 7, 8, 9, 硬件实现：任务 0, 2, 3, 4, 5, 6。

● 划分效果：

硬面积  $S=3196$ , 功耗  $P=2.56$ , 执行时间  $T=242.09$ , 开发代价  $C=1075$ ,  
执行时间最小值:  $\min=242.09$ .

(3) 只考虑硬件面积, 即系统硬件面积最小

● 极值:  $\min=s$ ;

● 约束条件:  $t \leq 600$ ;  $p \leq 4$ ;  $c \leq 1080$ ;

● 划分解:

$$x_{00}=x_{10}=x_{21}=x_{31}=x_{41}=x_{51}=x_{61}=x_{71}=x_{81}=x_{91}=0$$

$$x_{01}=x_{11}=x_{20}=x_{30}=x_{40}=x_{50}=x_{60}=x_{70}=x_{80}=x_{90}=1$$

软件实现：任务 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 硬件实现：任务 0, 1。

● 划分效果：

硬面积  $S=629$ , 功耗  $P=3.33$ , 执行时间  $T=587.36$ , 开发代价  $C=407$ 。

最少硬面积  $S=629$ 。

(4) 只考虑功耗, 即系统功耗最小

● 极值:  $\min=p$ ;

● 约束条件:  $s \leq 3500$ ;  $t \leq 600$ ;  $c \leq 1080$ ;

● 划分解:

$$x_{01}=x_{10}=x_{21}=x_{30}=x_{40}=x_{51}=x_{60}=x_{70}=x_{80}=x_{90}=0$$

$$x_{00}=x_{11}=x_{20}=x_{31}=x_{41}=x_{50}=x_{61}=x_{71}=x_{81}=x_{91}=1$$

软件实现：任务 0, 2, 5, 硬件实现：任务 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9

● 划分效果：

硬面积  $S=2625$ , 执行时间  $T=341.91$ , 开发代价  $C=944$ 。

最少功耗  $P=2.39$ 。

(5) 只考虑开发代价, 即系统开发代价最小

● 极值:  $\min=c$ ;

● 约束条件:  $s \leq 3500$ ;  $p \leq 4$ ;  $t \leq 600$ ;

● 划分解:

$$x_{01}=x_{11}=x_{21}=x_{31}=x_{40}=x_{51}=x_{61}=x_{70}=x_{81}=x_{91}=0$$

$$x_{00}=x_{10}=x_{20}=x_{30}=x_{41}=x_{50}=x_{60}=x_{71}=x_{80}=x_{90}=1$$

软件实现：任务 0，1，2，3，5，6，8，9，硬件实现：任务 4，7

● 划分效果：

硬面积  $S=852$ ，执行时间  $T=599.27$ ，功耗  $P=3.2$ 。

最少开发代价：min=363。

5.3.3. 多候选对象的软硬件划分

在实际中开发一个系统平台，系统平台中任务除了有软硬件选择之外，软硬件本身还有多个候选对象，从中选取合适唯一的软硬件候选对象，获得各种组合方案，并满足一定的指标约束条件。

例 5.5 PDA 手机平台系统软硬件划分<sup>[24, 25]</sup>

一个 PDA 手机平台的视频、音频发送系统由音频数据采集模块、视频数据采集模块、用户界面、MP3 编码模块、MPEG4 编码模块和同步模块组成。音频数据采集模块和视频数据采集模块负责将声音和图像转换成音频和视频信息；用户界面负责接收来自用户的输入信息并将其发给 MP3 编码模块和 MPEG4 编码模块；MP3 编码模块和 MPEG4 编码模块负责压缩、编码音频和视频信息；同步模块负责解决音频和视频的同步问题，并将这些信息通过无线网络发给收方。

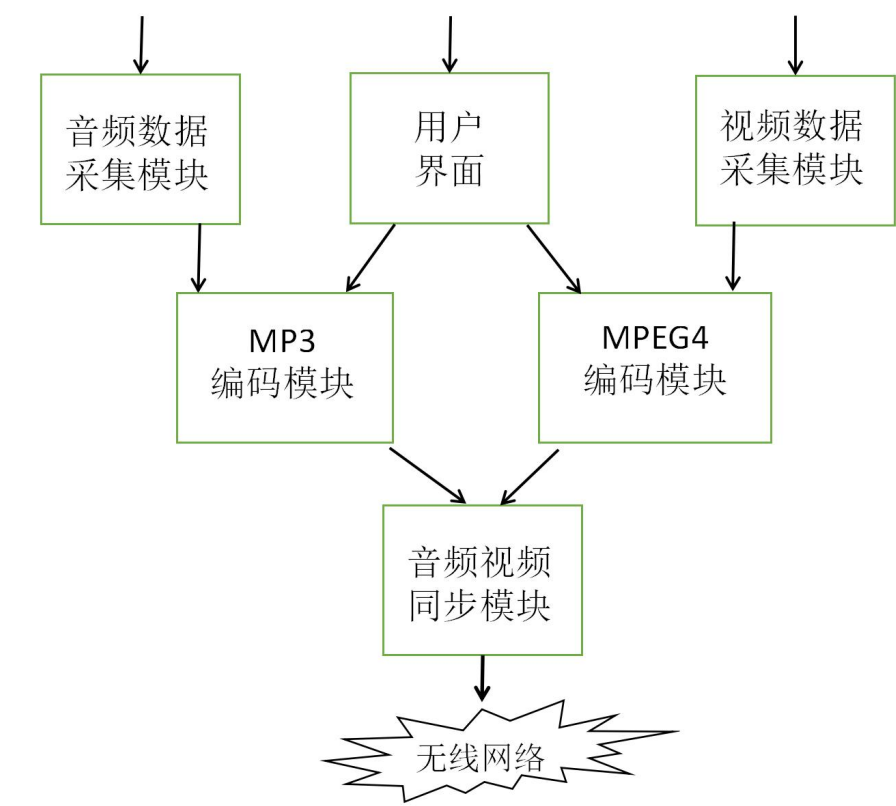


图 5-5 例 5.5 PDA 手机系统平台模块示意图

一个 PDA 手机平台可用的各个模块参数如表 5-5 所示，性能需求为成本不

超过 1100 元，硬件面积不超过  $3900\text{mm}^2$ ，系统功耗不超过 1.9w，时间特性不超过 600ms，选出最合适的模块编号。

表 5-5 例 5.5 模块参数表

功能单元	编号	类型	成本 (元)	硬件面积 ( $\text{mm}^2$ )	功耗 (w)	时间特性 (ms)
音频数据 采集模块	Core11	软件构件	80	0	0.2	80
	Core12	IP 核	110	$30 \times 25 = 750$	0.25	50
	Core13	IP 核	180	$23 \times 20 = 460$	0.15	30
视频数据 采集模块	Core21	软件构件	95	0	0.3	100
	Core22	IP 核	150	$35 \times 28 = 980$	0.3	60
	Core23	IP 核	180	$28 \times 23 = 644$	0.2	50
用户界面	Core31	软件构件	30	0	0.1	20
	Core32	软件构件	50	0	0.08	10
MP3 编码 模块	Core41	软件构件	180	0	0.6	400
	Core42	软件构件	220	0	0.5	350
	Core43	IP 核	350	$65 \times 40 = 2600$	0.5	120
	Core44	IP 核	420	$38 \times 36 = 1368$	0.4	70
MPEG4 编 码模块	Core51	软件构件	150	0	0.6	400
	Core52	软件构件	180	0	0.5	380
	Core53	IP 核	320	$55 \times 45 = 2475$	0.5	130
	Core54	IP 核	380	$40 \times 35 = 1400$	0.4	80
音频视频 同步模块	Core61	软件构件	120	0	0.4	150
	Core62	软件构件	150	0	0.3	120
	Core63	IP 核	220	$38 \times 25 = 950$	0.3	50

**解：**建立线性规划模型：

定义变量簇  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$  分别表示音频模块、视频数据采集模块、用户界面模块、MP3 编码模块、MPEG4 编码模块、以及音频与视频同步模块。 $X_{1i}$  表示音频模块候选构件（软件构件和 IP 核）( $i=1...3$ )， $X_{2j}$  表示视频数



据采集模块候选构件( $j=1\ldots3$ ),  $X_{3k}$  表示用户界面模块候选构件( $k=1\ldots2$ ),  $X_{4l}$  表示 MP3 编码模块候选构件( $l=1\ldots4$ ),  $X_{5m}$  表示 MPEG4 编码模块候选构件( $m=1\ldots4$ ),  $X_{6n}$  表示音频视频同步模块候选构件( $n=1\ldots3$ )。每个  $X_{st}$  都含有 4 个属性成本  $cost$ 、 $area$ 、 $power$  和  $time$ , 其中  $cost$  代表 IP 核或软件构件的成本、 $area$  代表硬件面积、 $power$  代表功耗、 $time$  代表时间特性。使用符号  $C$ ,  $S$ ,  $P$  和  $T$  分别表示总成本、总硬件面积、总功耗和总时间。

约束问题描述为:

$$C = \sum_{i=1\ldots3, j=1\ldots3, k=1\ldots2, l=1\ldots4, m=1\ldots4, n=1\ldots3} \text{Sumcost}(X_{1i}, X_{2j}, X_{3k}, X_{4l}, X_{5m}, X_{6n}) \leq 1100;$$

$$S = \sum_{i=1\ldots3, j=1\ldots3, k=1\ldots2, l=1\ldots4, m=1\ldots4, n=1\ldots3} \text{Sumarea}(X_{1i}, X_{2j}, X_{3k}, X_{4l}, X_{5m}, X_{6n}) \leq 3900;$$

$$P = \sum_{i=1\ldots3, j=1\ldots3, k=1\ldots2, l=1\ldots4, m=1\ldots4, n=1\ldots3} \text{Sumpower}(X_{1i}, X_{2j}, X_{3k}, X_{4l}, X_{5m}, X_{6n}) \leq 1.9;$$

$$T = \sum_{i=1\ldots3, j=1\ldots3, k=1\ldots2, l=1\ldots4, m=1\ldots4, n=1\ldots3} \text{Sumtime}(X_{1i}, X_{2j}, X_{3k}, X_{4l}, X_{5m}, X_{6n}) \leq 600.$$

线性规划模型为:

$$C = 80 \cdot X_{11} + 110 \cdot X_{12} + 180 \cdot X_{13} + 95 \cdot X_{21} + 150 \cdot X_{22} + 180 \cdot X_{23} + 30 \cdot X_{31} + 50 \cdot X_{32} + 180 \cdot X_{41} + 220 \cdot X_{42} + 350 \cdot X_{43} + 420 \cdot X_{44} + 150 \cdot X_{51} + 180 \cdot X_{52} + 320 \cdot X_{53} + 380 \cdot X_{54} + 120 \cdot X_{61} + 150 \cdot X_{62} + 220 \cdot X_{63}; \text{表示系统总成本}$$

$$S = 0 \cdot X_{11} + 750 \cdot X_{12} + 460 \cdot X_{13} + 0 \cdot X_{21} + 980 \cdot X_{22} + 644 \cdot X_{23} + 0 \cdot X_{31} + 0 \cdot X_{32} + 0 \cdot X_{41} + 0 \cdot X_{42} + 2600 \cdot X_{43} + 1368 \cdot X_{44} + 0 \cdot X_{51} + 0 \cdot X_{52} + 2475 \cdot X_{53} + 1400 \cdot X_{54} + 0 \cdot X_{61} + 0 \cdot X_{62} + 950 \cdot X_{63}; \text{表示系统硬件总面积}$$

$$P = 0.2 \cdot X_{11} + 0.25 \cdot X_{12} + 0.15 \cdot X_{13} + 0.3 \cdot X_{21} + 0.3 \cdot X_{22} + 0.2 \cdot X_{23} + 0.1 \cdot X_{31} + 0.08 \cdot X_{32} + 0.6 \cdot X_{41} + 0.5 \cdot X_{42} + 0.5 \cdot X_{43} + 0.4 \cdot X_{44} + 0.6 \cdot X_{51} + 0.5 \cdot X_{52} + 0.5 \cdot X_{53} + 0.4 \cdot X_{54} + 0.4 \cdot X_{61} + 0.3 \cdot X_{62} + 0.3 \cdot X_{63}; \text{表示系统总功耗}$$

$$T = 80 \cdot X_{11} + 50 \cdot X_{12} + 30 \cdot X_{13} + 100 \cdot X_{21} + 60 \cdot X_{22} + 50 \cdot X_{23} + 20 \cdot X_{31} + 10 \cdot X_{32} + 400 \cdot X_{41} + 350 \cdot X_{42} + 120 \cdot X_{43} + 70 \cdot X_{44} + 400 \cdot X_{51} + 380 \cdot X_{52} + 130 \cdot X_{53} + 80 \cdot X_{54} + 150 \cdot X_{61} + 120 \cdot X_{62} + 50 \cdot X_{63}; \text{表示系统总时间}$$

$$X_{st} \in \{0, 1\} (s=1\ldots6, t=i, j, k, l, m, n)$$

所有候选构件要么选中要么没有选中, 值=1 表示候选构件选中, 值=0 表示候选构件没有选中。

$$C \leq 1100;$$

$$S \leq 3900;$$

$$P \leq 1.9;$$

$$T \leq 600;$$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1;$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1;$$

$$X_{31} + X_{32} = 1;$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1;$$

$$X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} = 1;$$

$$X_{61} + X_{62} + X_{63} = 1;$$

所有模块中的候选构件只能取其中一个。

根据考虑情况不同，目标也不同。

(1) 综合最优，即  $C+S+P+T$  最小，得到综合解决方案。

使用 LINGO 工具在条件  $C \leq 1100$ ;  $S \leq 3900$ ;  $P \leq 1.9$ ;  $T \leq 600$  约束下，使得  $\min = C+S+P+T$ ，可以得到 LINGO 解决方案：

综合最优方案	成本	硬面积	功耗	时间
Core11,Core21,Core31,Core44,Core53,Core62	1095	3843	1.80	520

(2) 分性能最优解决方案：当求性能（如成本  $C$ ）最优时，在使用 LINGO 工具时取消这个性能的约束条件（如  $C \leq 1100$ ），保留其他性能约束条件，求得最优解（如  $\min = C$ ）。

使用 LINGO 工具可以求得：

成本极小化方案	成本	硬面积	功耗	时间
Core11,Core21,Core31,Core44,Core53,Core61	1065	3843	1.90	550

类似地可以求得面积最小化、功耗最小化、时间最小化的解决方案，连同综合最优解决方案和成本最优解决方案，获得三种解决方案如表 5-6，其中综合最优、时间最小化、功耗最小化的解决方案是一致的。

表 5-6 例 5.5 优化目标解决方案表

优化目标	解决方案	成本	硬面积	功耗	时间
综合最优	Core11,Core21,Core31,Core44,	1095	3843	1.80	520
时间最小化	Core53,Core62				

功耗最小化					
成本最小化	Core11,Core21,Core31,Core44, Core53,Core61	1065	3843	1.90	550
面积最小化	Core11,Core21,Core32,Core44, Core53,Core61	1085	3843	1.88	540

这三种综合方案的差异在用户界面（第 1 下标编号为 3）和音频视频同步模块（第 1 下标编号为 6）上，硬件面积都是一样的。从解决方案来看：功耗少执行时间短成本就高，这符合实际情况。本段采用线性规划方法进行求解，其结果与文献[24，25]的解决方案相同，但这两篇文献介绍的解决方法是值得学习和借鉴的。

第 5.4 节 本章小结

本章介绍了基于线性规划的软硬件划分方法，并使用现有的软件工具 LINGO 和 Matlab 进行求解。对于比较复杂的线性规划问题求解，需要使用一些常用的算法，如蚁群算法<sup>[26]</sup>、遗传算法<sup>[27]</sup>、遗传算法与蚁群算法融合算法<sup>[28]</sup>、以及遗传算法与自适应蚁群算法融合算法<sup>[29]</sup>等，进行算法设计。

习题

5.1 SM2 加密算法软硬件划分

SM2 加密算法每个步骤所需软硬件执行时间、面积及功耗如表 5-7 依据这些数据，系统要求最大硬功耗  $P=4.5\text{mw}$ ，最大硬件面积  $S=12\text{mm}^2$ ，最大执行时间  $T=110\text{s}$ ，使用线性规划方法进行软硬件划分，使得执行时间、硬件面积以及功耗的系统整体最小化，以及系统单个性能指标最小化，并求出相应的软硬件划分结果及其性能指标。

表 5-7 习题 5.1 硬件面积及功耗

数据 模块				
	软时间/s	硬时间/s	硬面积/ $\text{mm}^2$	硬功耗/mw
点加 AddP	11.861	1.467	3.524	1.338
倍点 DoubleP	11.055	1.038	1.881	1.002
模逆 Invmod	48.949	0.958	0.293	0.078

模乘 Mulmod	42.293	0.536	0.271	0.123
预处理 MODN	23.478	0.342	0.109	0.033
点乘 $Q=[k]P$	32.456	1.231	5.581	2.2
模加减 Addmod&Submod	10.020	0.995	5.426	2.231

## 5.2 车辆自动变道系统

矩形分别代表车辆 A、B、C（每辆上装有通讯设备和用于信息采集的传感器），车身长度为图中所示两条红线之间的距离。

当车辆 A 要向右进行变道时，先向车辆 B、C 发送变道请求，打开右转向灯，并收集车辆 B、C 此时的车速、加速度、线段 AB、AC 与平行法线的夹角和距车辆 A 的距离（即线段 AB 和 AC），若车辆 B、C 成功收到请求并将收到信息成功反馈给车辆 A，则车辆 A 查看此时道路环境是否满足变道要求，若满足则进行变道，否则重新发送请求。车辆 A 进行变道时，该系统会控制车辆 B 不能减速，车辆 C 不能加速。该自动变道系统由信息采集模块、信息处理模块、车灯控制模块、车速控制模块、信息接收模块、信息发送模块组成。每个模块有软件执行功耗、硬件执行功耗和硬件执行面积。

使用线性规划方法给出两种解决方案：第一种在硬件面积不超过  $1.5\text{mm}^2$ 、 $1.8\text{mm}^2$ 、 $2.0\text{mm}^2$  前提下功耗最小解决方案；第二种在整体功耗不超过  $2\text{mw}$ 、 $2.2\text{mw}$ 、 $2.5\text{mw}$  前提下，硬件面积最小的解决方案。

表 5-8 习题 5.2 软硬件功耗及资源

模块 性能	信息采集	信息处理	车灯控制	车速控制	信息接收	信息发送
软件功耗 mw	0.55	0.23	0.22	0.37	0.45	0.39
硬件功耗 mw	0.34	0.38	0.17	0.57	0.33	0.27
硬件面积 mm	0.413	0.531	0.216	0.330	0.363	0.424

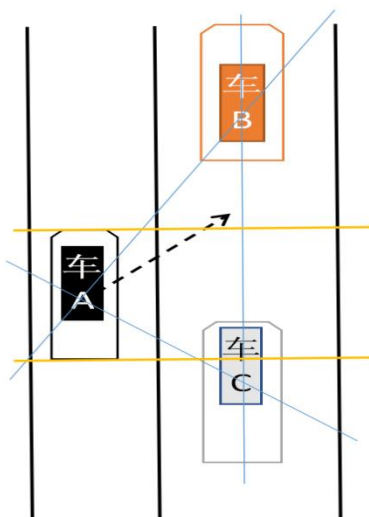


图 5-6 习题 5.2 车辆变道示意图

**5.3** 查阅本章小结中提到的典型算法，了解国内外多目标划分的最新研究成果。