Домашняя работа

Задача 1. Так как чётных и нечётных цифр по 5 штук, а все чётные и нечётные идут в порядке возрастания или убывания, то есть различны, то чило чётных и число нечётных циифр не больше 5. Пусть есть n чётных и m нечётных цифр. Выберем, какие именно цифры будут встречаться. Так как чётные цифры идут сторого по возрастанию, то число способов выбрать то, как в порядке будут стоять чётные цифры равно число способов выбрать просто n различных чётных цифр, что равно $\binom{5}{n}$. Аналогично число способов выбрать то, как в порядке будут стоять нечётные цифры равно $\binom{5}{m}$. Далее после выбора цифр, нам надо как-то расставить их в исходной последовательности, а так как по выбору цифр и мест для чётных и нечётных цифр, цифры единственным образом можно расставить, то число способов расставить эти цифры равно $\binom{n+m}{n}$. Тогда итого число способов выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы чётные шли в порядке возрастания, в нечётные — в порядке убывания $\sum_{n=0}^{5}\sum_{m=0}^{5}\binom{5}{n}\cdot\binom{5}{m}\cdot\binom{n+m}{n} = 15525$

Задача 2. Всего чило исходов равно числу способов выбрать 4 карты из 36, что равно $\binom{36}{4}$. Число способов взять 2 красные и 2 чёрные карты из колоды равно $\binom{18}{2}\cdot\binom{18}{2}$. Тогда вероятность того, что 2 чёрные, а 2 красные равна $\frac{\binom{18}{2}\cdot\binom{18}{2}}{\binom{36}{4}} = \frac{153}{385}$.

Задача 3. Замечаем, что в числе должно быть 5 нечётных цифр и 2 чётные. Тогда сначала расставим нечётные цифры. Это можно сделать 5^5 способами. Дальше выберем места для чётных цифр. Так как перед любой чётной есть нечётная цифра, то всего есть 5 мест для вставки чётных цифр, причём на каждое можно поставить не более одной цифры. Тогда места мы можем выбрать $\binom{5}{2}$ способами. А число способов выбрать эти 2 цифры равно 5^2. Тогда всего число таких чисел равно $\binom{5}{2}\cdot 5^7 = 781250$.

Задача 4. Нам надо узнать число упорядоченный восьмёрок неотриицательных целых чисел, в сумме дающих 8. Выпишем 8 единиц. Тогда число упорядоченный восьмёрок неотриицательных целых чисел, в сумме дающих 8 равно числу способов среди этих 8 единиц расставиить 7 перегородок (2 перегородки могут стоять между одной парой соседних единиц, так же перегородки могут стоять с краю) (это верно потому что число единииц до превой перегородки будет равно первому числу, число единиц между первой и второй — второму и т.д.). Замечаем, что после расставления перегородок у нас будет 15 элементов, из которых будет 7 перегородк, а всё остальное — единицы. Число способов выбрать 7 мест для перегородок из 15 возможных равно $\binom{15}{7}$. Тогда число упорядоченный восьмёрок неотриицательных целых чисел, в сумме дающих 8 равно $\binom{15}{7} = 6435$.

Задача 5. Хоровод получится, если вокруг елки хотя бы 3 человека. Тогда т.к. человек всего 9, то 3 хоровода получатся если вокруг каждой ёлки по 3 человека. Число способов так разделиь детей равно числу способов выбрать 3 для первого хоровода умножить на число спопобов выбрать 3 из оставшиеся 6 для второго хоровода, что равно $\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}$. Чсло способов просто как-то расставиить людей по хороводам равно 3^9. Тогда число способов, при которых хоровод не получился равно $3^9 - \binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}$. Тогда вероятность этого равна $\frac{3^9-\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}}{3^9} = \frac{6001}{6561}$

Задача 6. Докажем по индукции.

База: $F_0 = 1 = \binom{0}{0}$ $F_1 = 1 = \binom{1}{0}$

Переход: Пусть мы доказали для n и $n-1$. $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Пусть n чётно. Тогда

$$F_{n-1}+F_n = \binom{n}{0} + \sum_{0\le k<n/2}\left(\binom{(n-1)-k}{k} + \binom{n-(k+1)}{k+1}\right) = \binom{n+1}{0} + \sum_{0\le k<n/2}\binom{(n+1)-(k+1)}{k+1}$$

Пусть n нечётно. Тогда

$$F_{n-1}+F_n = \binom{n}{0} + \binom{(n-1)/2}{(n-1)/2} + \sum_{0\le k<n/2}\left(\binom{(n-1)-k}{k} + \binom{n-(k+1)}{k+1}\right) =$$

$$= \binom{n+1}{0} + \left(\sum_{0\le k<n/2}\binom{(n+1)-(k+1)}{k+1}\right) + \binom{(n+1)/2}{(n+1)/2}$$

Утверждение доказанно. При доказательстве использовался факт, что $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. Это верно так как если из n предметов нам надо выбрать k, то мы можем либо взять первый и выбрать $k-1$ предмет из оставшихся, либо не брать первый и выбрать k предметов из оставшихся.

Задача 7. i-я строка в треугольнике Паскаля — всевозможные $\binom{i}{k}$, где $0 \leq k \leq i$. Пусть c — максимальное число такое, что $2^c \leq i$.

Если $2^c \geq i/2+1$, то т.к. $\binom{i}{k} = \frac{i\cdot(i-1)\cdot\ldots\cdot(i-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}$, то еслии взять $k = i-2^c+1$, то снизу каждое 2-е число делится на 2, каждое 4-е делится на 4 и т.д, и одно число делится на 2^{c-1}, а свеху хотя бы каждое 2-е делится на 2, хотя бы каждое 4-е делится на 4 и т.д, хотя бы кажлое 2^{c-2}-е делится на 2^c-2, но есть одно число, которое делится на 2^c. т.е. степнень вхождения 2 в верхнюю часть больше, чем в нижнюю, т.е. $\binom{i}{k}$ чётный.

Если $2^c \leq i/2$, то $2^{c+1} \leq i$. Тогда c не максимально. Значит $i/2 < 2^c < i/2+1$. Тогда $i = 2^{c+1}-1$. Тогда докажем что все $\binom{i}{k}$ нечётные.

База: $k=0$, $\binom{2^{c+1}-1}{0} = 1$

Переход: Пусть мы доказали для k. Тогда $\binom{2^{c+1}-1}{k}$ нечётное. $\binom{2^{c+1}-1}{k+1} = \binom{2^{c+1}-1}{k} \cdot \frac{2^{c+1}-1-k}{k+1}$. Т.к. степень вхождения 2 в любое число меньшее 2^{c+1} меньше $c+1$ и $(k+1)+(2^{c+1}-1-k) = 2^{c+1}$, то степень вхождения 2 в числа $k+1$ и $2^{c+1}-1-k$ одинакова. Тогда число $\binom{2^{c+1}-1}{k+1}$ тоже нечётное. ЧТД.

Тогда удовлетворяющие нас ряды имеют номера вида 2^c-1 для всех $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Задача 8. Замечаем, что если на каждую клетку поставить по одной фигуре первого типа, то число битых клеток равно $20\cdot100\cdot100$. Тогда число клеток, которые бьют хотя бы 400 фигур не более 500, иначе у нас число битых слеток было бы больше допустимого. Аналогичный вывод можно провести для любой другой фигуры. Тогда есть не более 500 мест, которые каждая фигура первого типа бьёт хотя бы 400 раз, не более 500 мест, которые каждая фигура второго типа бьёт хотя бы 400 раз и т.д. Тогда есть хотя бы 500 мест, которые каждая из первых 19 фигур бьёт меньше 400 раз. Тогда поставим на любое из этх мест 20-ю фигуру. После этого на 20 мест на доске нельзя класть никакие другие фигуры, а остальные не бьются этой 20-й фигурой. Так же для каждой фигуры существует не более 400 мест, на которые её нельзя ставить, иначе она будет бить уже поставленную 20-ю фигуру.

Тепеь если посмотреть на 18 первых фигур, то остаётся 1000 возможных мест, каждое из которых может бить не более 400 фигур из каждой среди первых 18. Среди этих 1000 мест не более 400 блокируются чтобы 19-я фигура не била 20-ю фигуру и не более 20 блокируются 20-й фигурой. Тогда мы можем поставить 19-ю фигуру на одно из хотя бы 580 оставшихся мест.

Далее будем действовать аналогично, и на $(20-i)$-ю фигуру будет $500\cdot(i+1)-20\cdot i-400\cdot i$ свободных мест таких, что она никого не бьёт и её может бить не более 400 возможных расстановок каждой фигуры от 1-й до $i-1$-й.

Так мы все фигуры расставим.