

Eléments à retenir sur les graphes (hors ordonnancement) :

Représentations d'un graphe :

- Un graphe G est composé :
 - Par l'ensemble de ses sommets
 - Par l'ensemble de ses arcs
- Un graphe comporte plusieurs propriétés :
 - Orienté ou non orienté
 - Pondéré ou non pondéré
- On peut représenter un graphe de différentes manières :
 - Une forme graphique
 - Une liste de couples représentant les arcs
 - Un tableau des successeurs
 - Un tableau des prédécesseurs
 - Une matrice d'adjacence
- La matrice d'adjacence est une matrice carrée d'ordre n avec n le nombre de sommets du graphe.
- Les éléments de la matrice d'adjacence valent :
 - 1 : si l'arc existe
 - 0 : si l'arc n'existe pas

Chemins dans un graphe :

- Un chemin dans un graphe est une liste de sommets à parcourir.
- La longueur d'un chemin est simplement :
 - Le nombre d'arcs dans un graphe non pondéré
 - La somme des pondérations des arcs dans un graphe pondéré
- Un chemin n'est valide que si tous les arcs du chemin existent
- Un chemin peut être :
 - Un circuit : si le premier et le dernier sommet du chemin est le même.
 - Un chemin hamiltonien : si le chemin passe une et une seule fois par chaque sommet.
 - Un chemin eulérien : si le chemin passe une et une seule fois par chaque arc (le chemin eulérien peut passer plusieurs fois par le même sommet).
- La matrice d'adjacence M donne tous les chemins de longueur 1.

- Plus généralement, M^p (avec p entier) donne tous les chemins de longueur p
- L'élément à la ligne i et la colonne j dans M^p indique le nombre de chemins de longueur p dans le graphe entre le sommet i et le sommet j .
- La matrice de fermeture transitive d'un graphe est la matrice qui donne tous les chemins possibles dans un graphe peu importe leurs longueurs.
- Autrement dit, la matrice de fermeture transitive est la somme des chemins de longueur 1, des chemins de longueur 2
- On estime que pour un graphe de p sommets, on n'ajoute plus aucun chemin après les chemins de longueur p .
- Matrice de fermeture transitive = $M^1 + M^2 + M^3 + \dots + M^p$ avec p le nombre de sommets du graphe.

Niveau des sommets dans un graphe :

- Il est possible d'organiser les sommets par niveau dans un graphe si :
 - Le graphe ne possède pas de boucle : Aucun arc n'a pour départ et pour arrivée le même sommet
 - Le graphe ne possède pas de circuit : Aucun chemin n'a pour départ et pour arrivée le même sommet
- Les sommets de niveau 0 sont les sommets qui n'ont pas de prédécesseurs, ils n'ont aucun prérequis.
- Les sommets de niveau 1 sont les sommets qui n'ont pas de prédécesseurs une fois que les sommets de niveau 0 ont été traités. Les seuls prérequis des sommets de niveau 1 sont les sommets de niveau 0.
- Les sommets de niveau 2 sont les sommets qui n'ont pas de prédécesseurs une fois que les sommets de niveau 0 et de niveau 1 ont été traités. Les seuls prérequis des sommets de niveau 2 sont les sommets de niveau 0 et de niveau 1.
- On continue d'attribuer des niveaux aux sommets tant qu'il reste des sommets qui n'ont pas de niveau.
- Une fois les niveaux mis en place, il est possible de représenter le graphe sous forme d'arborescence.

Exercice type :

Comprendre les représentations d'un graphe :

Dans le BTS SIO, il a deux spécialisations :

- La spécialisation développeur
- La spécialisation réseau

Pour cette introduction aux propriétés des graphes nous proposons aux deux spécialités de travailler sur des exemples liés à leur spécialité.

On demande aux développeurs de représenter sous forme de graphe la notion de « suivre » sur un réseau social. Une personne inscrite au réseau peut suivre une autre personne ce qui lui permet de recevoir les actualités de la personne suivie. Nous prenons le cas de 6 personnes :

- Bob est suivi par Kim et Jane
- Kim est suivie par Jack et John
- Jack est suivi par Alison
- Alison est suivie par Bob
- John est suivi par Jack et Jane
- Jane est suivie par Alison

1. Comprendre le graphe :

- a. Est-ce que le graphe est orienté ?
- b. Est-ce que le graphe est pondéré ?
- c. Donner la liste des sommets du graphe
- d. Donner la liste des arcs du graphe

2. Représenter le graphe :

- a. Graphiquement
- b. Sous forme de matrice d'adjacence

On demande aux spécialistes réseau de représenter sous forme de graphe la mise en réseaux de différents serveurs. Nous connaissons la distance physique entre chacun des serveurs. Nous avons une liste de 5 serveurs utilisant des noms de Dieux grecs :

- Zeus est à distance de 25m de Héra et 30m d'Athéna
- Héra est à distance de 25m de Zeus, 20m de Poséidon et 20m d'Arès
- Poséidon est à distance de 20m de Héra, 25m d'Arès et 40m d'Athéna
- Athéna est à distance de 30m de Zeus et 40m de Poséidon
- Arès est à distance de 20m de Héra et 25m de Poséidon

Si on ne donne pas la distance entre deux serveurs, c'est que techniquement il est impossible ou trop coûteux de mettre en place cette liaison.

1. Comprendre le graphe :
 - a. Est-ce que le graphe est orienté ?
 - b. Est-ce que le graphe est pondéré ?
 - c. Donner la liste des sommets du graphe
 - d. Donner la liste des arcs du graphe
2. Représenter le graphe :
 - a. Graphiquement
 - b. Sous forme de matrice d'adjacence

Se déplacer dans un graphe :

Maintenant que chaque groupe connaît le graphe sur lequel il travaille, nous allons nous intéresser à la notion de chemin.

Le groupe développeur reprend son graphe des suiveurs.

1. Quelle est la longueur du chemin Bob, Kim, John, Jane ?
2. Donner un circuit dans le graphe.
3. Si M est la matrice d'adjacence du graphe, que représentent les éléments de M^2 ?
4. Calculer la matrice de fermeture transitive du graphe ? Que symbolisent les éléments de la matrice de fermeture transitive dans notre cas ? Que signifie les valeurs de la diagonale de la matrice de fermeture transitive ?

Le groupe réseau reprend lui aussi son graphe des serveurs.

1. Donner un circuit dans le graphe.
2. Nous allons essayer d'optimiser l'utilisation de câbles :
 - a. Calculer la longueur du chemin : Zeus, Héra, Arès
 - b. Calculer la longueur du chemin : Zeus, Héra, Poséidon, Arès
 - c. Calculer la longueur du chemin : Zeus, Athéna, Poséidon, Arès
 - d. Quelle est la solution qui utilise le moins de câble pour relier Zeus à Arès ?

Evaluation des niveaux dans un graphe :

Après avoir réfléchi sur des sujets techniques, nos BTS SIO veulent se changer les idées avec un bon roman de fantaisie. Ils décident de s'attaquer aux annales du disque monde de Terry Pratchett. Il s'agit d'une série composée de plusieurs romans mais il existe un ordre de lecture car certains romans décrivent la suite d'un ouvrage précédent. Ainsi :

- « Ronde de nuit » doit être lu après « Procrastination », « La vérité » et « Le cinquième éléphant »
- « La vérité » doit être lu après « Le cinquième éléphant »
- « Procrastination » doit être lu après « Les petits Dieux » et « Le père Porcher »
- « Les petits Dieux » doit être lu après « Pyramides »

Il est plus agréable de lire les ouvrages dans l'ordre pour ne pas passer à côté de certaines références. Nous allons nous aider des niveaux de sommets pour y arriver.

1. Lister tous les romans et donner pour chacun leurs prérequis
2. Vérifier qu'il n'existe pas de boucle, ni de circuit en passant par la matrice d'adjacence.
3. Déterminer les niveaux de chaque roman
4. Dans le contexte de notre liste de lecture quel est la signification du niveau 0 ?
5. Représenter l'ordre de lecture sous forme d'arborescence