Statistiques
Loi binomiale

- CCI Campus
- Philippe Schlegel

Loi binomiale :

- Loi de Bernoulli
- Epreuve de Bernoulli
- Loi binomiale
- Cas concrets
- Questions

Loi de Bernoulli:

- Une loi de Bernoulli décrit le comportement d'une expérience aléatoire qui possède deux résultats possibles (Echec/succès, VRAI/FAUX…).
- Une loi de Bernoulli suit le schéma suivant :
  - P est la probabilité d'obtenir un succès
  - 1-p est la probabilité d'obtenir un échec
  - P est le paramètre de la loi de Bernoulli
- La probabilité d'obtenir face en lançant une pièce est p = ½
- La probabilité d'obtenir un 6 sur un dé est p = 1/6.

Loi de Bernoulli:

- Il est possible de modéliser une loi de Bernoulli par un tableau (exemple du lancé de pièce) :

xi	1	0
p(X=xi)	0,5	0,5

xi	1	0
p(X=xi)	p	1-p

- La première ligne indique l'état attendu :
  - 0 : Echec
  - 1 : Succès
- La seconde ligne indique la probabilité de se retrouver dans cet état.
- Dressons le tableau de probabilité d'un jet de dé où l'obtention d'un 6 est considéré comme un succès.

Loi de probabilité - Espérance

- L’espérance d’une variable aléatoire réelle est la valeur que l’on s’attend à trouver en moyenne, s’il on répète un grand nombre de fois la même expérience.
  - Exemple : J’utilise un 1D6 que je lance,
    - sur 5 et 6 je gagne 5 euros
    - sur 1, 2, 3 et 4 je perds 3 euros

xi	-3	5
P(x=xi)	4/6	2/6

    - On termine en multipliant les gain par les probabilités :
      - E(X) = -3 * 4/6 + 5 * 2/6 = -1/3 (le jeu est en notre défaveur)

Loi de probabilité - Espérance

- Prenons un exemple plus complexe. Je lance maintenant 2 dés.
  - Sur au moins un 5 ou un 6 je gagne 3 euros
  - Sur un double, je gagne 1 euros
  - Sur le reste je perds 3 euros
- Quel est le nombre de résultats différents possibles ?
- Etablissons le tableau des cas possibles
- En déduire l'espérance
- Les calculs peuvent être réalisés sur un tableur. Cela nous permettra de faire varier les paramètres du jeu pour construire des cas favorables ou défavorables.

Loi de probabilité - Espérance

- Voici le calcul de l'espérance de notre jeu :

xi	-3	1	3	4
P(x=xi)	12/36	4/36	18/36	2/36
P(x=xi)	0,333	0,111	0,5	0,0556
P * gain	-1	0,111	1,5	0,2222
Esprance				0,8333

- L'espérance est la moyenne des gains espérés en jouant une grande quantité de parties.
- En ce qui concerne la loi de Bernoulli (dont le résultat ne peut être qu'un succès ou un échec) : $E(x) = p$

Loi de probabilité - Variance :

- La variance est une mesure de la dispersion des valeurs d'un échantillon ou d'une distribution. Elle exprime la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
- Plus la variance est élevée, plus les valeurs sont dispersées, plus elle est petite, plus les valeurs sont proches.
- La variance est donc toujours positive et elle vaut 0 si toutes les valeurs de l'échantillon sont identiques.
  - $V = p1(x1 – E(X))^2 + p2(x2 – E(X))^2 + \ldots + pn(xn – E(X))^2 / p1 + \ldots + pn$
- Calculons la variance dans l'exemple du jet des deux dés.

Loi de probabilité - Variance et écart type :

- Calcul de la variance :

xi	-3	1	3	4
P(x=xi)	12/36	4/36	18/36	2/36
P(x=xi)	0,333	0,111	0,5	0,0556
P * gain	-1	0,111	1,5	0,2222
Esprance				0,8333
élément variance	4,898	0,003	2,347	0,5571
Variance				7,8056

- Il ne reste donc plus qu'à calculer l'écart type qui est la racine carré de la variance : σ (X) = √ (V(X)) = √(7,8056) = 2,79
- L'écart type nous indique donc que l'espérance de gain est de 0,8333 mais l'écart type par rapport à ce gain est de 2,79 euros ce qui est une marge énorme par rapport au gain.
- Si on a les valeurs 2 et 4 ainsi que les valeurs 0 et 6. Ces deux couples ont une moyenne de 3. C'est l'écart type qui nous amène l'information de la dispersion.

Loi de Bernoulli – espérance, variance, écart-type :

- Dans la loi de Bernoulli, l'espérance, la variance et l'écart type se calculent avec des fonctions simplifiées pour la bonne raison qu'il n'y que deux valeurs possibles : Echec ou succès.
- La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors :
  - Espérance : $E(X) = p$
  - Variance : $V(X) = p(1-p)$
  - Ecart type : $\sigma (X) = \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{V(X)}$

Epreuve de Bernoulli:

- Si on répète cette expérience n fois alors on obtient une épreuve de Bernoulli et la loi binomiale décrit le nombre de fois qu'un succès apparait sur les n expériences.
  - On peut imaginer lancer une pièce en l'air plusieurs fois de suite et considérer que face est un succès.
- Le nombre de succès obtenus étant une valeur aléatoire, une loi binomiale est décrite grâce à la donnée des probabilités que le succès apparaisse précisément k fois sur les n essais..

Epreuve de Bernoulli:

- Dans une épreuve de Bernoulli il est important que les expériences soient
  - identiques : toujours pratiquées de la même façon
  - Indépendantes : une expérience n'influe pas sur l'expérience suivante
- Si je tire successivement une balle de mon sac (et que je ne la remets pas) je change la probabilité de succès à chaque tirage.
- Expliquons ce qu'il se passe dans ce cas là.

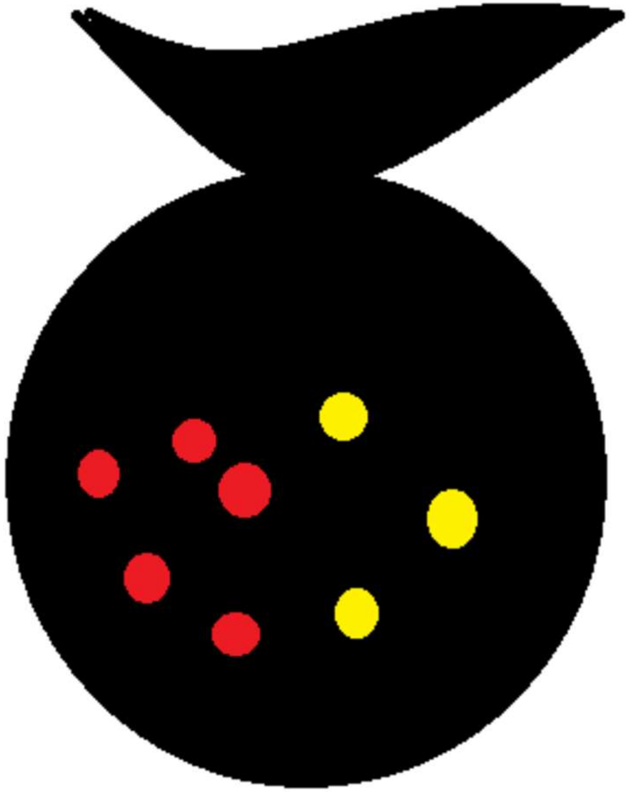


Schéma de Bernoulli:

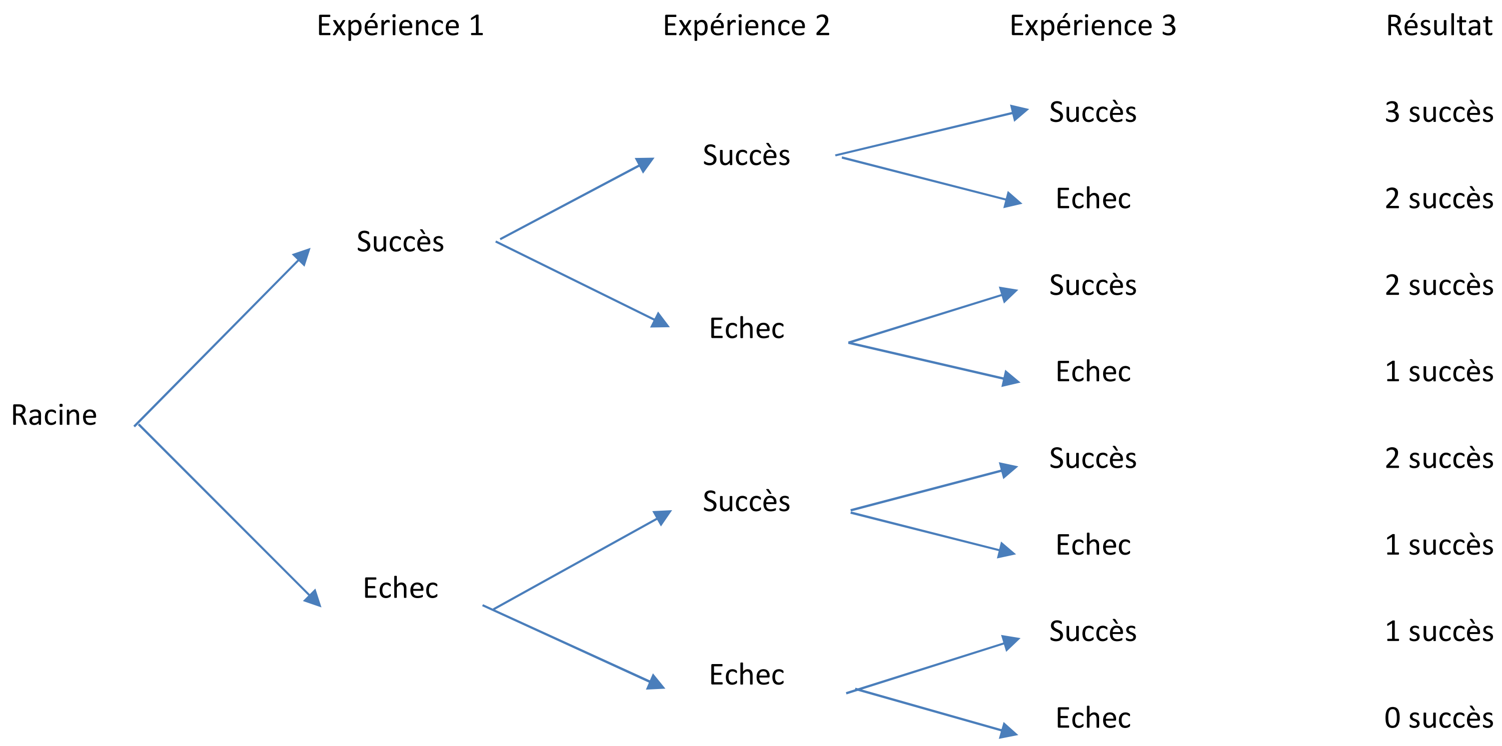
- Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendants pour lesquelles la probabilité de succès est p.
- Dans le cas ou les épreuves ne sont pas indépendantes, il serait impossible de définir un p unique.
- n est donc le nombre de répétitions.
- Il est donc possible de définir un schéma de Bernoulli à partir de n et p.
- Par exemple, si je lance 10 fois une pièce en l'air et que je considère que face est un succès, je peux définir mon schéma de Bernoulli par :
  - $n = 10$, $p = 1/2$

Loi binomiale:

- Une loi binomiale est une loi de probabilité définie sur l'ensemble {0;1;2…;n} qui donne le nombre de succès de l'expérience.
- L'ensemble contient les nombres de 0 à n. On considère que pour n lancés, le nombre de réussites est compris entre 0 (aucun succès sur les n lancés) et n (tous les lancés ont été des succès).
- Entre ces deux cas extrêmes, il est possible de considérer tous les cas possibles d'échecs et de succès.
- Si p est la probabilité de succès, alors p et n sont les paramètres de ma loi binomiale que je peux noter B(10;1/2)

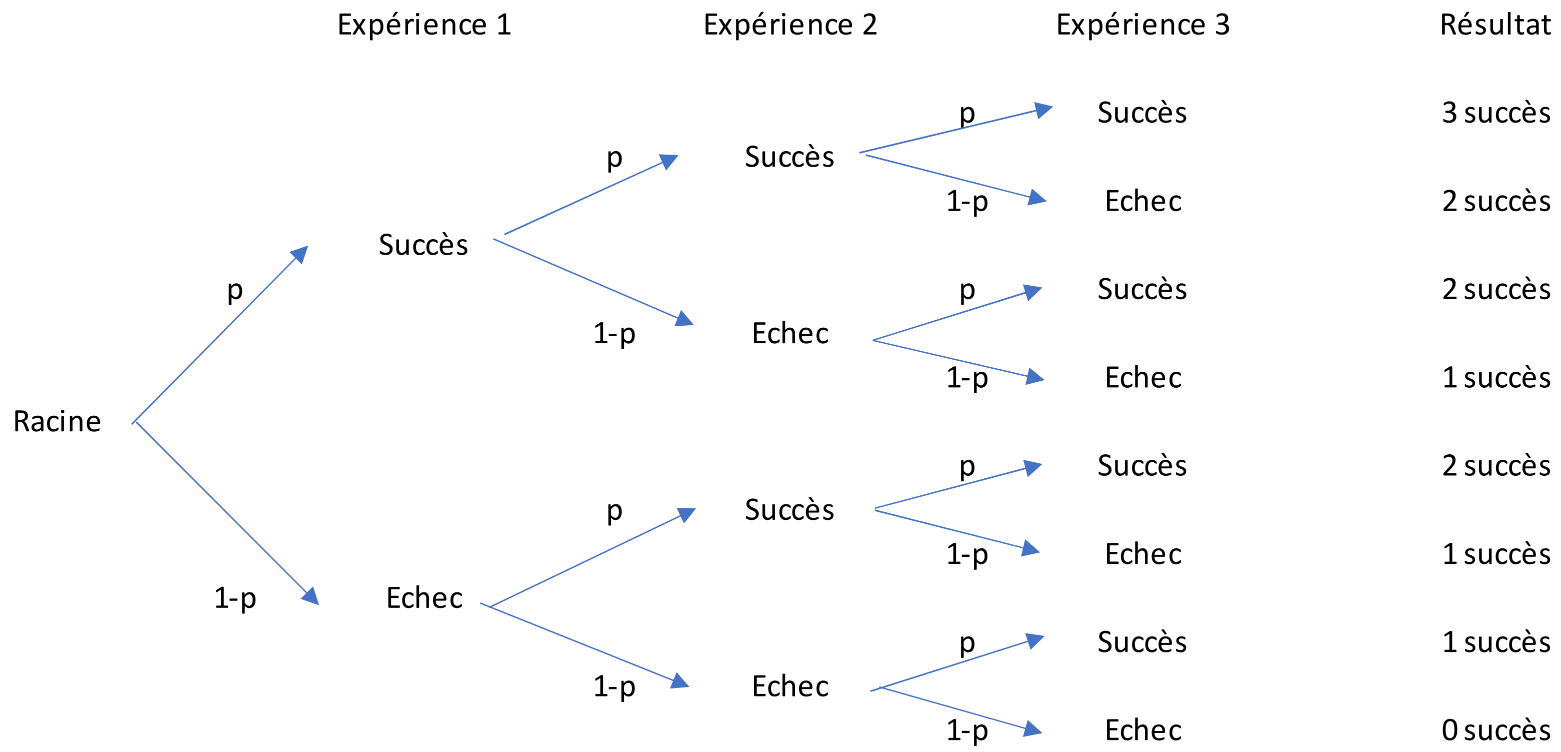
Loi binomiale:

- En statistique, la loi binomiale modélise la fréquence du nombre de succès obtenus lors de la répétition de plusieurs expériences identiques et indépendantes.
- Il est possible de représenter une loi binomiale grâce à un arbre de de probabilité :



Loi binomiale – généralisation :

- Nous allons généraliser ce que nous venons de voir sur la loi binomiale. Cette fois la probabilité de succès n’est pas connue, nous l’appellerons donc p :



Loi binomiale – Généralisation :

- Nous comprenons rapidement que la représentation sous forme d'arbre n'est pas possible dès lors que le nombre d'expériences devient grand.
- Nous allons donc mettre en place une autre façon de calculer une loi binomiale.
- Pour cela, commençons par calculer la probabilité d'avoir 3 succès : $P(X=3) = p.p.p = p^3$
- Calculons $P(X=2)$ en retrouvant toutes les branches qui correspondent à 2 succès.
  - $P(X=2) = 3.(p^2.(1-p))$

Loi binomiale – Généralisation :

- On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
- On appelle coefficient binomial ou combinaison de k parmi n, le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience : $\binom{n}{k}$
- Cela nous permet de donner la formule de la loi binomiale :
  - $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$

Loi binomiale – Coefficient binomial :

- Le coefficient binomial, définis pour tout entier naturel n et tout entier naturel k tel que k <= n donne le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de n éléments.
- Notation $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ ou C_n^k correspond au nombre de combinaisons qui font 3 succès parmi 5 épreuves.
- Cette quantité s'exprime à l'aide de la fonction factorielle :
  - $C_n^k = \frac{n!}{\mathrm{k}!(n-k)!}$
- Si nous réutilisons l'exemple vu plus haut, nous avons cherché 2 parmi 3 ce qui s'écrit : $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$

Loi binomiale – Coefficient binomial :

- Le triangle de Pascal nous donne les coefficients binomiaux :

n											
0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1

- Voyons comment retrouver facilement le triangle de Pascal avec Excel
- Essayons d'interpréter le triangle de Pascal en fonction de la loi binomiale.

Loi binomiale – espérance, variance, écart type :

- Par rapport à la loi de Bernoulli que nous avons abordée plus tôt, la loi binomiale se compose aussi de plusieurs expériences. Il faut donc intégrer le nombre n d'expériences dans le calcul de l'espérance, de la variance et de l'écart-type.
- Nous avons la loi binomiale B(n;p):
  - Espérance : $E(X) = n * p$
  - Variance : $V(X) = n*p(1-p)$
  - Ecart type : $\sigma (X) = \sqrt{(n*p(1-p))} = \sqrt{(V(X))}$

Les dés sont jetés – petit cas pratique :

- Essayons de comprendre la loi binomiale au travers d'un exemple.
- Je lance un dé à 6 faces 3 fois de suite et je voudrais savoir quelle est la probabilité de n'avoir qu'une seule fois le 6
- Commençons par chercher la probabilité d'avoir un 6.
- A partir de là, quelle est la probabilité de ne pas avoir de 6?
- Je n'ai pas précisé à quel lancé pouvait survenir le 6. Il peut donc être présent à chacun des lancés.
- Il nous reste à calculer la probabilités de notre exemple.

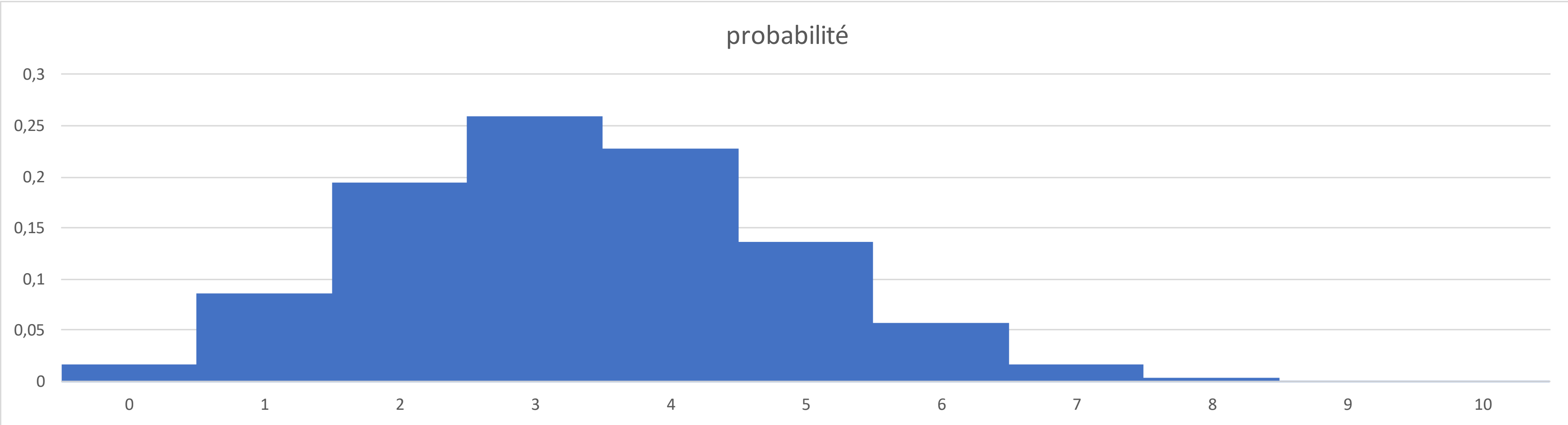
Loi binomiale – histogramme :

- Nous allons représenter une loi binomiale sous Excel. Je vous propose de représenter la loi B(10;1/3).
  - 10 représente n le nombre d’expérience
  - 1/3 représente la probabilité de succès.
- Nous allons représenter un histogramme avec :
  - Le nombre de succès en abscisse
  - La probabilité correspondante en ordonnée
- Commençons par dresser le tableau de données.
  - En abscisse les succès vont s’échelonner de 0 à 10
  - Intéressons nous à la fonction loi.binomiale dans Excel.

Loi binomiale – histogramme :

- Excel nous permet donc facilement de représenter sous forme d'histogramme une loi binomiale :

Succès	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
probabilité	0,017	0,087	0,195	0,26	0,228	0,137	0,057	0,016	0,003	3E-04	2E-05



Loi binomiale – histogramme :

- Cette représentation sous Excel nous permet de voir facilement plusieurs choses
  - La somme de toutes les probabilités est de 1
  - Il est facile de sommer des probabilité pour obtenir par exemple :
    - Une inégalité $P(x < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$
    - Un intervalle $P(2 < x < 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(x=5)$
    - Une négation $P(X <> 3) = 1 – P(X = 3)$
    - Un complément $P(X < 3) = 1 – P(X >= 3)$
  - Ce sont des égalités que l'on retrouve dans la théorie des ensembles.

Loi binomiale – Résumons :

- Ma société me demande de faire une enquête de satisfaction auprès de nos clients. Ils auront le choix entre deux options (satisfaits ou non satisfaits).
  - A votre avis cet exemple correspond t’il à une application de la loi binomiale et pourquoi ?
- Vous décidez de sélectionner un échantillon de 25 personnes. Votre collègue qui a déjà eu maintes fois affaire à ce genre de travail vous informe qu’en moyenne il note 7% de personnes insatisfaites.
  - Quelle est la probabilité p de tomber sur une personne insatisfaite et q sur un personne satisfaite? Attention, ici on s’intéresse aux personnes insatisfaites en priorité.

Loi binomiale – Résumons :

- Donner la définition de la loi binomiale
- Représenter cette loi binomiale sous forme d'histogramme dans Excel.
- Calculer l'espérance, la variance et l'écart type.
- Donner la probabilité de tomber sur 3 personnes non satisfaites dans votre échantillon
- Donner la probabilité de tomber sur au moins 2 personnes non satisfaites
- Donner la probabilité de tomber entre 2 et 6 personnes non satisfaites

Loi binomiale – Changeons d'inconnu :

- Nous allons essayer de déterminer la taille de l'échantillon qui permettrait d'avoir une probabilité de 0,1 d'avoir 0 personnes satisfaites.
- Pour cela nous reprenons la formule de la loi binomiale :
  - $P(X = k) = C_n^k\ p^k(1-p)^{n-k}$
- Cette fois-ci c'est n l'inconnu et nous savons que $P(X=0) = 0,1$

Bilan

- Résumé des notions abordées.
- Questions.
- Difficultés particulières ?