

PHƯƠNG PHÁP QUY HOẠCH ĐỘNG TRẠNG THÁI

Nguyễn Duy Dũng

Trình THPT Chuyên Hà Tĩnh

I. TỔNG QUAN

Quy hoạch động là một phương pháp thường được sử dụng để giải các bài toán trong tin học. Trong một số bài toán giải bằng phương pháp này khi xét tìm kiếm một bài toán có nhiều khả năng lựa chọn ta gọi là các trạng thái. Chúng ta tìm kiếm giải cho bài toán ta cần tìm kiếm một bài toán K, tìm kiếm bài toán có nhiều lựa chọn (trạng thái) khác nhau, tìm kiếm để ứng cho bài toán là đưa vào các trạng thái của bài toán $i-1$ và có thể xác định bằng một công thức để tính các trạng thái là hữu hạn. Khi giải các bài toán loại này ta thường giải bằng phương pháp quy hoạch động trạng thái.

Trong quá trình giảng dạy các lớp chuyên tin học và ôn luyện học sinh giỏi quốc gia, tôi nhận thấy tài liệu về nội dung này rất hạn chế. Vì vậy, trong phương pháp này chúng ta cùng tìm hiểu một bài toán cụ thể.

II. BÀI TOÁN

Chọn ô - HSG QG 2006 (SELECT)

Cho một bảng hình chữ nhật kích thước $4 \times n$ ô vuông. Các dòng được đánh số từ 1 đến 4, từ trên xuống dưới, các cột được đánh số từ 1 đến n từ trái qua phải.

Ô nằm trên giao của dòng i và cột j gọi là ô (i, j) . Trên mỗi ô (i, j) có ghi một số nguyên a_{ij} , $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, \dots, n$. Một cách chọn ô là việc xác định một tập con khác rỗng S của tập tất cả các ô của bảng sao cho không có hai ô nào trong S có chung cạnh. Các ô trong tập S gọi là ô được chọn, tổng các số trong các ô được chọn gọi là tổng của cách chọn.

Tìm cách chọn sao cho tổng là lớn nhất.

Ví dụ: Xét bảng với $n=3$ trong hình vẽ dưới đây:

	1	2	3
1	-1	9	3
2	-4	5	-6
3	7	8	9
4	9	7	2

Cách ch n c n tìm là t p các ô $S = \{(3,1), (1,2), (4,2), (3,3)\}$ v i tr ng l ng 32.

Input

Dòng u tiên ch a s nguyên d ng n là s c t c a b ng.

C t th j trong s n c t ti p theo ch a 4 s nguyên $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}$, hai s liên ti p cách nhau ít nh t m t đ u cách, là 4 s trên c t j c a b ng.

Output

G m 1 dòng duy nh t là tr ng l ng c a cách ch n tìm c.

Example

Input	Output
3 -1 9 3 -4 5 -6 7 8 9 9 7 2	32

H n ch

Trong t t c các test: $n \leq 10000$, $|a_{ij}| \leq 30000$. Có 50% s l ng test v i n 1000.

III. GI I THU T VÀ CÀI T

T t ng chính:

- M i c t có 4 dòng nên ta có th dùng dăy nh phân g m 4 bít bi u di n. Tùy vào giá tr c a bít th k c a c t th i b ng 0 ho c 1 cho bi t dòng th k c a c t th i có c ch n hay không. ($0 \leq k \leq 3$)
- Dăy nh phân có 4 bít ng v i 2^4 tr ng thái, bi u di n t 0 t i 2^4-1 .
- G i $F[i,x]$ là t ng tr ng l ng l n nh t xét t c t th 1 t i c t th i và tr ng thái ch n c a c t th i c bi u di n b ng bi n x.
- Ta có công th c quy ho ch ng nh sau:

$$F[i,x] = \max(F[i-1,y]) + \text{sum}(i,x)$$

Trong ó:

- Bi n x và y là hai tr ng thái t ng ng c a c t th i và i-1. Theo yêu c u c a bài toán thì tr ng thái x và y ph i th a măn bít th k c a bi n x ph i khác bít th k c a bi n y vì vi c ch n ô ph i th a măn **không có hai ô nào có chung c nh**. ($\text{Getbit}(k,x) \neq \text{Getbit}(k,y)$)
- Hàm **Sum(i,x)** là tr ng s c a c t th i t ng ng v i tr ng thái x.

Cài đặt:

Biến A chứa giá trị của bảng, biến $m=2^4-1$ và $m+1$ là số trạng thái

Trong chương trình sẽ dùng một số hàm như sau:

+) Lấy giá trị bit thứ k của trạng thái x: Getbit(k,x)

```
Function Getbit(k,x:word):byte;  
Begin  
    Getbit:=(x shr k)and 1;  
End;
```

+) Hàm kiểm tra trạng thái x có thể thỏa mãn yêu cầu bài toán không (*không có hai ô nào có chung cột*), nghĩa là bit thứ k và bit thứ k-1 của trạng thái x phải khác nhau:

```
Function Ok(x:word):boolean;  
Begin  
    Ok:=false;  
    For k:=1 to 3 do  
        If (getbit(k-1,x)=1)and(getbit(k,x)=1) then  
            Exit;  
        Ok:=true;  
    End;
```

+) Hàm kiểm tra trạng thái x và trạng thái y có thể thỏa mãn yêu cầu bài toán không (*không có hai ô nào có chung cột*), nghĩa là bit thứ k của trạng thái x và bit thứ k-1 của trạng thái y phải khác nhau:

```
Function Check(x,y:word):boolean;  
Begin  
    Check:=false;  
    For k:=0 to 3 do  
        If (getbit(k,x)=1)and(getbit(k,y)=1) then  
            Exit;  
        Check:=true;  
    End;
```

+) Tính tổng các cột thứ i của trạng thái x:

```
Function sum(i,x:word):longint;  
Var T:longint;  
Begin  
    T:=0;  
    For k:=0 to 3 do  
        If (getbit(k,x)=1) then  
            T:= T+A[k+1,i];  
    Sum:=T;  
End;
```

+) Thuật cơ chính:

```

Procedure process;
Var  max:longint;
     y,i:word;
Begin
  For i:=1 to n do    {Xét lần lượt từng cột}
    For x:=0 to m do  {Với mỗi cột xét  $2^4$  trạng thái}
      If Ok(x) then   {Nếu trạng thái x thỏa mãn bài toán}
        Begin
          max:=-vc;
          {Tìm trạng thái y cần xét từ i-1 có tổng trọng lượng lớn nhất}
          For y:=1 to m do
            If check(x,y)and(ok(y))then
              If max<F[i-1,y] then
                max:=F[i-1,y];

          F[i,x]:=max+sum(i,x)
        End;
      End;
    End;
  End;

```

+) Thuật in kết quả :

```

Procedure printresult;
Var  Max:longint;
     ff:text;
Begin
  {Chú ý thêm trọng hợp thể c A[i,j]<0}

  {Tìm giá trị lớn nhất trong các trạng thái cần xét}
  Max:=-vc;
  For x:=0 to m do
    If ok(x)and (max<F[n,x]) then
      Max:=F[n,x];
  Assign(ff,fo); rewrite(ff);
  Writeln(ff,max);
  Close(ff);
End;

```

Nhận xét

- phức tạp thuật toán: $O(2^4 \cdot 2^4 \cdot N)$ ghi quy thuật toán trên.
- ghi mô phỏng phức tạp thuật toán ta có thể dùng 1 mảng Bit để lưu trữ trạng thái thỏa mãn yêu cầu **không có hai ô nào cùng cột có chung cạnh** kết hợp với cấu trúc dữ liệu Forward Star để vì mỗi trạng thái x ta có danh sách các trạng thái y thỏa mãn.

IV. M T S BÀI TOÁN NG D NG

Bài 1: **Chuyến du lịch (TRIP)**

Trong kì nghỉ hè n m nay sherry c b th ng cho 1 tour du l ch quanh N t n c t i p v i nhi u th ng c nh n i ti ng (vì sherry r t ngoan). T t nhiên sherry s i b ng máy bay.

Giá vé máy bay t t n c i n t n c j là C_{ij} (d nhiên C_{ij} có th khác C_{ji}). Tuy c b th ng cho nhi u ti n i du l ch nh ng sherry c ng mu n tìm cho mình 1 hành trình v i chi phí r nh t có th dành ti n mua quà v t ng m i ng i (Các chuy n bay c a sherry u c m b o an toàn tuy t i).

B n hãy giúp sherry tìm 1 hành trình i qua t t c các n c, m i n c úng 1 l n sao cho chi phí là bé nh t nh é.

Input

Dòng 1: N ($5 < N < 16$)

Dòng th i trong N dòng ti p theo: G m N s nguyên, s th j là C_{ij} ($0 < C_{ij} < 10001$)

Output

G m 1 dòng duy nh t ghi chi phí bé nh t tìm c

Example

Input	Output
6 0 1 2 1 3 4 5 0 3 2 3 4 4 1 0 2 1 2 4 2 5 0 4 3 2 5 3 5 0 2 5 4 3 3 1 0	8

H ng d n:

- Ta nh n th y ây là bài toán tìm ng i Hamilton, m t bài toán khá quen thu c: cho N nh, tìm ng i sao cho m i nh c th m duy nh t m t l n, và chi phí th m N nh là th p nh t.
- V i d ng toán này, thông th ng n u N nh (10), ta có th gi i quy t bài toán b ng ph ng pháp nhánh c n. Nh ng n u gi i h n N t ng lên n 20, thì vì c s d ng ph ng pháp nhánh c n gi i quy t s không còn kh thi n a. Trong tr ng h p này, ta có cách ti p c n khác gi i quy t bài toán m t cách t i u h n, v i ph c t p $O(N^2 \cdot 2^N)$.
- Dãy nh phân có N bít ng v i 2^n tr ng thái, bi u di n t 0 t i $2^n - 1$ cho bi t các nh ã c th m hay ch a.
- G i $F[i, x]$ là t ng chi phí n u sherry ang t n c i và tr ng thái các n c ã i qua c l u vào bi n.
- Công th c Quy ho ch ng:
$$F[i, x] = \min(F[j, y] + C[j, i])$$

Trong đó

- j là tên của ảnh đầu qua trong x.
- y là trạng thái gì nên trạng thái x nên tên của ảnh đầu.

Bài 2: Cô gái chăn bò (COWGIRL)

Trên mặt đất nguyên nhé bé có 1 gia đình gồm 3 anh em: 2 người anh trai là Nvutri và Andorea còn người em gái là Lola. Cuộc sống gia đình khá giả nên gia đình có truyền thống chăn nuôi và mua các con trâu nên cha mẹ 3 người quy tụ các con hàng ngày sẽ chọn 1 số bò nào đó (tùy ý 3 người con).

Thế nguyên là 1 cánh đồng chia làm $M \times N$ ô vuông, mỗi con bò chỉ đứng trong 1 ô và mỗi ô chỉ chứa 1 con bò. Chỉ có 1 quy tắc duy nhất là không bao giờ có 4 con bò tạo thành 1 hình vuông 2×2 hoặc tạo thành 1 khu vực 2×2 .

Hai người anh muốn chơi đùa Lola chọn 1 mình. Lola muốn biết tất cả có bao nhiêu cách xếp bò thỏa mãn quy tắc trên phòng mặt đất này. Vì con số này rất lớn nên hãy giúp Lola tính toán con số này.

Input

Dòng đầu gồm 1 số T duy nhất là số test (T ≤ 111)

T dòng tiếp theo gồm 2 số M, N cho biết kích thước của thế nguyên ($M \times N \leq 30$)

Output

Gồm T dòng, mỗi dòng ứng với 1 test là số cách xếp bò của test đó.

Example

Input	Output
1 1 1	2

Hướng dẫn:

- Ta thấy $M \times N \leq 30$ nên tất cả các M hay N không lớn hơn 5. Giả sử là M là số dòng không quá 5. Ta có thể dùng số có không quá 5 bit nhị phân mô tả trạng thái của mỗi cột.
- Gọi $F[i, x]$ là số cách xếp bò thỏa mãn yêu cầu bài toán xét tất cả các cột từ 1 tới i và trạng thái của cột tiếp theo là x. (x là bit nhị phân của cột tiếp theo).
- Công thức Quy hoạch động:
$$F[i, x] = F[i, x] + F[i-1, y]$$

Bài 3: Đàn bò hỗn loạn (MIXUP)

Mỗi trong N con bò ($4 \leq N \leq 16$) của bác John có một số seri phân biệt S_i ($1 \leq S_i \leq 25,000$). Các con bò tạo thành một dãy theo thứ tự các bộ phận trên cơ thể của chúng.

Các cô bò giảng h này thích n i lo n nên ng x p hàng ch v t s a theo m t th t g i c g i là 'h n lo n'.

M t th t bò là 'h n lo n' n u trong dãy s seri t o b i hàng bò, hai s liên ti p khác bi t nhau nhi u h n K ($1 \leq K \leq 3400$). Ví d , n u $N = 6$ và $K = 1$ thì 1, 3, 5, 2, 6, 4 là m t th t 'h n lo n' nh ng 1, 3, 6, 5, 2, 4 thì không (vì hai s liên ti p 5 và 6 ch chênh l ch 1).

H i có bao nhiêu cách khác nhau N cô bò s p thành th t 'h n lo n'?

Input

* Dòng 1: Hai s N và K cách nhau b i kho ng tr ng.

* Dòng 2..N+1: Dòng i+1 ch a m t s nguyên duy nh t là s seri c a cô bò th i: S_i

Output

* Dòng 1: M t s nguyên duy nh t là s cách N cô bò s p thành th t 'h n lo n'. K t qu m b o n m trong ph m vi ki u s nguyên 64-bit.

Example

Input	Output
4 1 3 4 2 1	2