МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
И
ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

В. А. УСПЕНСКИЙ

ЛЕКЦИИ О ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЯХ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

Успенский Владимир Андреевич.

Лекции о вычислимых функциях.

Редактор *Ю. А. Шиханович.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.* Корректор *Л. А. Сечейко.*

Сдано в набор 1/VI 1960 г. Подписано к печати 3/IX 1960 г. Бумага 84×108 1/32.
Физ. печ. л. 15,375. Условн. печ. л. 25,22. Уч.-изд. л. 24,24.
Тираж 9000 экз. Т-08922. Цена книги 13 р. 60 к. С 1/I 1961 г. цена 1 р. 36 к.
Заказ 354

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза.
Москва, Трехпрудный пер., 9.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятия алгоритма и вычислимой функции являются одними из центральных понятий современной математики. Их роль в математике середины XX в. можно, пожалуй, сравнить с ролью понятия множества в математике конца XIX в. Настоящие «Лекции» посвящены изложению основ теории вычислимых функций (проводимому на базе принятого в настоящее время отождествления их — для случая функций с натуральными аргументами и значениями — с частично-рекурсивными функциями), а также некоторым приложениям этой теории.

До последнего времени автору были известны лишь две книги, излагающие теорию вычислимых функций, — монографии Р. Петер [1951] *) и С. К. Клини [1952] **) (обе эти книги переведены на русский язык). Книга Р. Петер содержит большое число детально разобранных примеров, описывающих различные способы задания вычислимых функций так называемыми «рекурсиями»; при этом в ней рассматриваются лишь обще-рекурсивные функции (зато некоторые специальные виды обще-рекурсивных функций — прежде всего примитивно-рекурсивные функции — рассматриваются с особенной подробностью). Самое важное понятие теории вычислимых функций — понятие

---

*) Четырехзначное число в квадратных скобках отсылает читателя к списку литературы в конце книги; оно является также датой опубликования соответствующего произведения.

**) Теория вычислимых функций излагается также в книге М. Дэйвиса (M. Davis, Computability and unsolvability, New York — Toronto — London, 1958 г., 210 стр.), которая, однако, не была доступна автору при написании настоящих «Лекций» (этим, в частности, объясняется полное отсутствие в «Лекциях» каких-либо ссылок на книгу М. Дэйвиса).

частично-рекурсивной функции — в книге Р. Петер лишь упоминается. Весьма фундаментальная книга С. К. Клини посвящена, как и показывает ее название, основаниям математики. Вычислимые (рекурсивные) функции занимают в ней хотя и большое, но все же отчасти подчиненное место. Им посвящена часть третья книги, которая не является совершенно независимой от предыдущих частей и предполагает известное знакомство с вводимым в части второй понятием формального вывода. В книге С. К. Клини приводится обширный и содержательный материал, посвященный приложениям теории вычислимых функций к математической логике и основаниям математики (подобный материал, кстати, совершенно отсутствует в настоящих «Лекциях»). Изложение самой теории вычислимых функций в значительной мере нацелено у С. К. Клини на эти приложения, что не могло не наложить определенный отпечаток на характер изложения. В частности, на теорию вычислимых функций оказалось в какой-то степени экстраполированным ограничение финитными методами (оправданное в ряде вопросов оснований математики).

Автор полагает, однако, что теория вычислимых функций не требует непременно ни «финитных», ни каких-либо других специфических методов, а может существовать как содержательная математическая теория, подобная, например, топологии или теории меры. Хотя теория вычислимых функций и родилась в недрах математической логики и оснований математики и находит в этих дисциплинах фундаментальные приложения, она, эта теория, может быть развита без принудительного связывания с указанными дисциплинами *). Отождествление класса вычислимых функций с классом частично-рекурсивных функций и найденное С. К. Клини [1943] очень простое

---

*) Вошедшее в традицию (применяемое и в настоящей книге) использование при изложении теории вычислимых функций простейших терминов математической логики (и даже, вероятно, просто логики) — таких, как «предикат», «квантор» и т. п.,— является, по существу, лишь вопросом языка; оно весьма удобно, так как способствует упрощению и укорочению изложения теории вычислимых функций (как, вероятно, и любой другой математической теории).

определение последнего *) позволяет разрабатывать и излагать теорию вычислимых функций независимо не только от понятия формального вывода, но и — как это ни парадоксально — от понятия алгоритма (хотя, конечно, ценность вычислимых функций состоит именно в их связи с алгоритмами). Вот почему автору, воспитанному на традициях московской математической школы, представлялась целесообразной и привлекательной попытка дать изложение теории вычислимых функций на ставшей уже стандартной теоретико-множественной основе (тем более, что многие методы и результаты теории вычислимых функций оказались схожими с методами и результатами дескриптивной теории множеств).

Попытка дать такое изложение была предпринята автором в его курсе «Рекурсивные функции», прочитанном на Механико-математическом факультете Московского университета в 1954/55 учебном году по инициативе Алексея Андреевича Ляпунова **). Переработанные записи этого курса и составили большую часть настоящих «Лекций» ***).

Теоретико-множественным подходом к теории вычислимых функций автор в значительной степени обязан своему учителю Андрею Николаевичу Колмогорову и Петру Сергеевичу Новикову; этому подходу автор учился, общаясь с ними, слушая их лекции и участвуя в их семинарах. А. Н. Колмогоров и П. С. Новиков оказали и более

---

*) Это определение и принимается в наших «Лекциях». В упомянутой книге С. К. Клини [1952] в качестве исходного принимается другое определение, основанное на понятии формального вывода.

**) Этому курсу предшествовала некоторая «репетиция» в виде цикла докладов, прочитанного автором весной 1954 г. на семинаре А. А. Ляпунова.

***) А именно, они составили §§ 1—9 и первые два пункта § 10. Остальная часть книги также в значительной степени написана по материалам курсов и семинаров автора на Механико-математическом факультете. Так, в § 14 излагается основное содержание курса «Вычислимые функции и машины Тьюринга», прочитанного в 1957/58 учебном году. Материал § 12 содержался в курсе «Избранные приложения теории алгоритмов», прочитанном в 1958/59 учебном году, а материал п. 3 § 10 и пп. 1 и 2 § 13 был рассказан в том же учебном году на семинаре по теории алгоритмов. Содержание пп. 1—2 § 11 и п. 3 § 13 изложено в диссертации автора [1955] и частично в его заметках [1953, 1955а, 1956].

непосредственное влияние на содержание курса «Рекурсивные функции», а следовательно, и на содержание этой книги. Именно А. Н. Колмогоров предложил автору заниматься вычислимыми функциями, а впоследствии пригласил соруководить семинаром по рекурсивной арифметике (Механико-математический факультет, 1953/54 уч. г.); на этом семинаре и выработались концепции, легшие в основу курса «Рекурсивные функции». На лекциях П. С. Новикова по математической логике (Механико-математический факультет, 1951/52 уч. г.) автор узнал много ранее неизвестных ему фактов (они составили содержание первых двух пунктов § 10). На этих же лекциях, а также на лекциях П. С. Новикова по дескриптивной теории множеств (Механико-математический факультет, 1949/50 уч. г.) автор учился той «геометричности» изложения, которую попытался использовать в своем курсе и этой книге.

Книга разделена на четырнадцать параграфов; каждый параграф, кроме первого, разбит на пункты.

§§ 1—3 носят вводный характер. В § 1 кратко обсуждаются понятие вычислимости и сопутствующие ему понятия перечислимости и разрешимости (все эти понятия являются интуитивными, что обуславливает «нестрогий» характер изложения, отличающий § 1 по стилю от всех других параграфов; формально говоря, этот параграф может быть опущен без ущерба для понимания подавляющей части дальнейшего). В §§ 2 и 3 приводятся некоторые простейшие понятия и термины теории множеств и функций и математической логики, удобные для того, чтобы на их основе вести дальнейшее изложение; впрочем, пп. 1—3 § 3 могут рассматриваться и как имеющие самостоятельное значение в качестве элементарного введения в логику высказываний и предикатов. (Читатель, знакомый в основном с содержанием §§ 2 и 3, может после § 1 сразу перейти к § 4, возвращаясь к пропущенным параграфам в случае необходимости.)

В §§ 4—9 систематически излагаются основы теории частично-рекурсивных функций и рекурсивно-перечислимых множеств. Материал этих параграфов может считаться достаточно хорошо известным; подавляющую часть его можно найти в прямом или косвенном виде в упомянутых монографиях Р. Петер и С. К. Клини. (Поэтому отсутствие — за редкими исключениями — при теоремах этих параграфов каких-либо ссылок не должно означать, что автор приписывает эти теоремы себе.)

§ 10 содержит несколько менее известные понятия и результаты, разработанные в основном Э. Л. Постом и П. С. Новиковым. Эти понятия и результаты иллюстрируют глубокую аналогию между теорией вычислимых функций и перечислимых множеств и дескриптивной теорией множеств.

В § 11 вводится понятие нумерации. На основе этого понятия изучаются операции над частично-рекурсивными функциями и рекурсивно-перечислимыми множествами и различные способы задания этих функций и множеств их «именами»— номерами в некоторых нумерациях. Материал этого параграфа рассматривается автором в значительной степени как оригинальный.

В §§ 12—14 делается попытка приложить развитую в предыдущих параграфах теорию к некоторым разделам математики и логики: в § 12 — к теории действительных чисел, в § 13 — к теории определений и в § 14 — к теории вычислительных машин. Излагаемое в § 12 понятие вычислимого действительного числа известно, пожалуй, столь же давно, как и понятие вычислимой функции; однако рассмотрение — на основе понятия нумерации — различных систем обозначений вычислимых действительных чисел (п. 4) представляется автору новым. В § 13 разрабатывается довольно очевидная идея использовать понятие вычислимой функции для конструктивизации негативных определений. Автор не встречал в литературе многих определений и теорем § 14; тем не менее § 14 может претендовать разве что на методическую новизну, поскольку его результаты слишком очевидны для всякого, кто имеет достаточный опыт обращения с рекурсивными функциями и машинами Тьюринга.

Поскольку § 14 может представлять специфический интерес для определенной категории читателей, уместно сообщить, что он не зависит по существу от §§ 8—13, так что к его чтению можно приступить сразу после § 7.

Более подробные сведения о содержании того или иного параграфа можно найти из помещенного перед каждым параграфом (кроме § 1) краткого обзора его содержания.

В книге принята следующая система нумерации и ссылок. Рисунки нумеруются сплошь в пределах всей книги; теоремы и таблицы — в пределах каждого параграфа; леммы, примеры и формулы — в пределах каждого пункта. В ссылке на теоремы другого параграфа обязательно указывается номер этого другого параграфа. В ссылках на теоремы того же параграфа номер параграфа опускается. Аналогичным образом делаются ссылки на леммы, примеры и т. п.

Например, если в п. 3 § 15 написано: «См. теоремы 1, 2, 3 из § 4 и примеры 5, 6 из п. 2 и 7 из п. 8 § 9», то это означает: «См. теорему 1 из § 15, теорему 2 из § 15, теорему 3 из § 4, пример 5 из п. 3 § 15, пример 6 из п. 2 § 15 и пример 7 из п. 8 § 9».

У читателя предполагается знакомство с простейшими понятиями и фактами, а также символикой теории множеств и функций (в объеме, например, главы первой книги П. С. Александрова [1948] или главы I книги А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1954]). Для полного понимания § 12 требуется некоторое знакомство с элементами математического анализа.

Читателя не должны удивлять многочисленные переформулировки, часто совершенно тривиальные. Автор считал полезными такие переформулировки, так как они помогают лучше уяснить суть дела и, кроме того, служат удобным источником ссылок.

Следует также отметить, что терминология в области теории вычислимых функций в ряде случаев — а в области приложений теории вычислимых функций почти во всех случаях — еще не устоялась и потому многие используемые ниже термины (особенно в §§ 11—14) надо рассматривать просто как рабочие варианты.

При написании настоящей книги очень большую помощь оказал автору Юрий Александрович Шиханович; без его помощи эта книга, вероятно, не была бы написана. В основу книги легли записи некоторых курсов и докладов автора, сделанные Ю. А. Шихановичем и значительно им же обработанные; многие окончательные формулировки и композиционные решения явились результатом совместного с ним обсуждения. В качестве редактора данной книги Ю. А. своею требовательностью и настойчивостью значительно способствовал ее улучшению. Автор приносит Юрию Александровичу свою глубокую благодарность.

31 января 1960 года *В. Успенский*

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Вычислимая функция — это такая функция, для которой существует вычисляющий ее значения алгоритм. В этой фразе, конечно, много неясностей. Частично они будут разъяснены на протяжении этого параграфа. Пока что заметим лишь, что понятие вычислимой функции сведено этой фразой к двум основным понятиям — понятию функции и понятию алгоритма.

Понятие функции мы предполагаем известным читателю. Напомним, что, говоря о функции, говорят обычно о законе, согласно которому некоторым объектам (называемым *значениями аргумента*) ставятся в соответствие некоторые другие объекты (называемые *значениями функции*). Никаких ограничений на характер закона соответствия при этом не накладывается. Этот закон может быть каким угодно, в том числе и таким, который не дает реальной возможности находить по значению аргумента соответствующее значение функции. Введем, например, следующую функцию f:

$$f(n)=\begin{cases} 1, & \text{если в десятичном разложении числа } \pi \\ & \text{имеется } n \text{ нулей подряд;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так описанную функцию f мы считаем заданной, хотя (насколько известно автору) современное состояние наших знаний не дает способа вычислять значения этой функции для любых n. Быть может, такой способ существует, и мы просто еще не нашли его; быть может, такого способа и не существует вовсе. (Забегая несколько вперед, отметим, что для вычислимых функций подобный способ всегда существует — это и выделяет вычислимые функции среди всех функций.)

С понятием алгоритма читатель, несомненно, сталкивался достаточно часто (хотя, быть может, и не отдавал себе в этом отчета). Математика переполнена примерами алгоритмов не в меньшей степени, чем примерами функций. Однако само слово «алгоритм» не приобрело, по-видимому, такой же привычности и такой же «терминологичности», как слово «функция» (вне теории алгоритмов оно устойчиво встречается, пожалуй, лишь в словосочетании «алгоритм Эвклида»). Что же понимают под термином «алгоритм» или, как его часто пишут и произносят, «алгорифм» в математике? «В математике принято понимать под «алгорифмом» точное предписание, определяющее вычислительный процесс, ведущий от варьируемых исходных данных к искомому результату» (А. А. Марков [1954], стр. 3). Это, разумеется, не определение в обычном для математики смысле этого слова, а скорее описание. Общему понятию алгоритма вряд ли возможно дать точное математическое определение. Это понятие, вероятно, не сводится к более простым понятиям*), его целесообразно, по-видимому, считать неопределяемым (такое положение обуславливает, конечно, известную расплывчатость понятия алгоритма, его интуитивный характер). Понятие алгоритма абстрагируется непосредственно из опыта и может быть усвоено лишь на примерах. Классическим примером алгоритма является знаменитый алгоритм Эвклида для нахождения наибольшего общего делителя двух положительных целых чисел. Этот пример — отнюдь не самый простой и широко известен лишь потому, что здесь явно употреблено слово «алгоритм». Гораздо проще, например, алгоритм сложения чисел столбиком и другие алгоритмы арифметических действий, которым учат в начальной школе (заметим, что в средневековой Европе алгоритмом как раз и называлась современная школьная арифметика, т. е. десятичная позиционная система счисления и искусство счета в ней). «Уметь складывать» или

*) Это обстоятельство не должно слишком сильно смущать читателя: ведь аналогичным образом, по существу, обстоит дело со всеми первоначальными математическими понятиями (такими, как «множество», «соответствие», «натуральное число» и т. п.).

«уметь умножать» и означает знать некоторые алгоритмы. Уже эти простые примеры показывают, что алгоритмы встречаются в математике (и «теоретической», и «бытовой») на каждом шагу и что умение решать задачу «в общем виде» всегда означает, по существу, владение некоторым алгоритмом. За более интересными и неожиданными примерами алгоритмов мы отсылаем читателя к популярной книге Б. А. Трахтенброта [1957].

Для каждого алгоритма существует некоторая совокупность возможных исходных данных — объектов, к которым имеет смысл п р и м е н я т ь рассматриваемый алгоритм. Так, для алгоритма Эвклида такой совокупностью служит совокупность всех пар положительных целых чисел. Если процесс применения алгоритма к какому-либо объекту заканчивается с выдачей результата, то говорят, что он применим к этому объекту. Алгоритм вовсе не обязан быть применимым к любому объекту из соответствующей совокупности возможных исходных данных. Более того, применяя алгоритм к какому-либо объекту из совокупности возможных исходных данных, мы, вообще говоря, не знаем наперед, получим ли мы результат, т. е. окажется ли алгоритм применимым к взятому объекту. (Здесь уместно отметить, что можно построить такой алгоритм, для которого не существует никакого алгоритма, который распознавал бы по произвольному возможному исходному данному первого алгоритма, применим к нему первый алгоритм или нет.) Таким образом, для каждого алгоритма в множестве всех возможных исходных данных этого алгоритма выделяется *область применимости* алгоритма.

Каждый алгоритм задает функцию, определенную на его области применимости и ставящую в соответствие каждому элементу этой области результат применения к нему алгоритма. *Вычислимой* и называется всякая функция, которая может быть задана — в только что разъясненном смысле — каким-либо алгоритмом. Мы уточнили, таким образом, то сведение понятия вычислимой функции к понятию алгоритма, которое содержится в первой фразе настоящего параграфа. Чтобы получить окончательное уточнение понятия вычислимой функции, достаточно, очевидно, уточнить понятие алгоритма.

Существует целый ряд уточнений понятия алгоритма *). Каждое из этих уточнений описывает, по существу, некоторый конкретный класс алгоритмов, претендующий на достаточную полноту в том смысле, что любой вообще алгоритм может быть заменен алгоритмом из этого конкретного класса, приводящим к тем же результатам (предполагается, что исходные данные и результаты заменяемого алгоритма входят в число допускаемых данным уточнением исходных данных и результатов). Эта «полнота», разумеется, не может быть математически доказана, а представляет собой — для каждого уточнения — естественнонаучный факт, или гипотезу. Впрочем, все известные уточнения понятия алгоритма оказываются эквивалентными друг другу в некотором разумном смысле (эта эквивалентность уже может быть точно определена и доказана).

Все существующие уточнения понятия «алгоритм» исходят из следующих общих представлений (или легко могут быть к ним сведены).

Алгоритмический процесс — процесс применения алгоритма к какому-либо объекту — расчленяется на отдельные, достаточно элементарные шаги. Каждый шаг состоит в смене одного состояния процесса другим (исходное данное и служит начальным состоянием). Переход от какого-либо состояния к непосредственно следующему происходит на основе так называемых правил непосредственной переработки, предполагаемых достаточно элементарными. Некоторые состояния опознаются как заключительные (на основе достаточно элементарных правил окончания), и из них извлекается окончательный результат (также на основе достаточно элементарных правил). При применении алгоритма к какому-либо объекту возможны три пути протекания алгоритмического процесса: 1) каждое состояние сменяется следующим, и процесс никогда не останавливается; 2) на некотором шаге возникает состояние, к которому не применимы ни правила непосредственной переработки, ни правила окончания, и происходит без-

---

*) Краткий обзор основных уточнений понятий алгоритма и вычислимой функции можно найти в § 1 статьи А. Н. Колмогорова и В. А. Успенского [1958].

результатная остановка; 3) на некотором шаге возникает состояние, опознаваемое как заключительное, и происходит результативная остановка, сопровождающаяся получением окончательного результата. Алгоритм, следовательно, применим лишь к тем объектам, для которых алгоритмический процесс развивается по третьему пути.

Не все объекты, встречающиеся в математике, могут служить исходными данными, результатами или промежуточными данными алгоритма. Бессмысленно, например, говорить об алгоритме, применяемом, как к исходному данному, к какому-либо бесконечному множеству. Участвовать в алгоритмических процессах могут лишь так называемые *конструктивные объекты* — натуральные и рациональные числа, полиномы с натуральными или рациональными коэффициентами, матрицы с натуральными или рациональными элементами, слова в некотором алфавите *) и т. д. Грубо говоря, конструктивный объект — это такой объект, который может быть построен весь целиком и предъявлен нам для рассмотрения. При таком понимании широко применяется так называемая абстракция потенциальной осуществимости, состоящая, по А. А. Маркову ([1954], стр. 15), «в отвлечении от реальных границ наших конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью нашей жизни в пространстве и во времени», и позволяющая рассуждать о сколь угодно больших натуральных числах, сколь угодно длинных словах и, вообще, сколь угодно больших и сложных (но конечных!) конструктивных объектах. Дать понятию конструктивного объекта формальное определение едва ли возможно. Это понятие, подобно понятию алгоритма, целесообразно, по-видимому, считать первичным.

Поскольку возможными исходными данными и результатами алгоритма могут быть лишь конструктивные объекты, то лишь конструктивные объекты могут быть аргументами и значениями вычислимой функции. Сфор-

*) Всякий конечный набор знаков называется *алфавитом*, входящие в него знаки — *буквами* этого алфавита, а конечная последовательность написанных друг за другом букв какого-либо алфавита называется *словом* в этом алфавите; подробнее см. главу I монографии А. А. Маркова [1954].

мулированное на стр. 17 определение вычислимой функции мы можем теперь переформулировать следующим образом. Пусть даны две совокупности конструктивных объектов: X и Y. Функция f, для которой все значения аргумента принадлежат к X, а все значения функции — к Y, называется *вычислимой*, если существует алгоритм, область применимости которого совпадает с областью определения функции f, и для любого x из этой области результат применения алгоритма к x совпадает с $f(x)$. Подчеркнем, что мы вовсе не требуем, чтобы вычислимая функция была всюду определена (на всем X). Более того: мы не требуем, чтобы мы умели различать, какие значения аргумента принадлежат к области определения функции, а какие — нет. Мы требуем лишь, чтобы существовал алгоритм вычисления ее значений, который, будучи применен к значению аргумента, принадлежащему к области определения функции, через какое-то число шагов, заранее, вообще говоря, не известное и ничем не ограниченное, вычислит нам значение функции. Если же на исследуемом значении аргумента функция не определена, то мы ничего от алгоритма вычисления значений функции, примененного к этому значению аргумента, не требуем, кроме того, чтобы он не приводил к заведомо неверному в этом случае результату. Быть может, процесс применения алгоритма в этом случае остановится, не дав результата. Тогда мы узнаем, что функция была не определена на исследуемом значении аргумента. Но, быть может, алгоритм будет работать бесконечно и мы никогда не узнаем, то ли мы еще не проделали достаточного числа шагов работы алгоритма для вычисления искомого значения функции, то ли функция на исследуемом значении аргумента не определена.

На основе понятия вычислимой функции определяется в свою очередь ряд важных понятий, прежде всего — понятия разрешимого множества и перечислимого множества.

Множество (расположенное в некоторой объемлющей совокупности конструктивных объектов) называется *разрешимым* (относительно этой совокупности), если существует алгоритм, распознающий принадлежность произвольного элемента объемлющей совокупности к этому множеству. Иными словами, множество разрешимо тогда и только тогда, когда его характеристическая функция (т. е. функция, определенная на объемлющей совокупности и принимающая значение 1 для объектов, принадлежащих рассматриваемому множеству, и 0 для остальных объектов) вычислима.

Множество называется *перечислимым*, если оно есть множество значений какой-нибудь вычислимой функции, определенной на всем натуральном ряду (так что элементы перечислимого множества неизбежно являются конструктивными объектами). Коль скоро перечислимое множество есть множество значений вычислимой функции f, определенной на натуральном ряду, то функция f позволяет последовательно, один за другим (быть может, с повторениями), получать или, как говорят, порождать элементы этого множества. Таким образом, каждое перечислимое множество является эффективно порождаемым в том смысле, что для него существует эффективный (т. е. подчиняющийся точным и общепонятным правилам) процесс, порождающий его элементы. Процесс порождения элементов посредством последовательного вычисления значений определенной на натуральном ряду вычислимой функции есть, конечно, весьма специальный вид эффективного порождающего процесса. Мыслимы более общие и более сложные процессы (например, эффективным порождающим процессом является формальный вывод следствий из данных посылок). Можно думать поэтому, что понятие эффективно порождаемого множества шире понятия перечислимого множества. Однако при разумном уточнении понятия «эффективный порождающий процесс» оказывается, что всякое непустое эффективно порождаемое множество перечислимо. Поскольку пустое множество, очевидно, эффективно порождаемо (можно указать процесс, который ничего не породит), то, чтобы не нарушать равнообъемности понятий эффективной порождаемости и перечислимости, пустое множество также относят к числу перечислимых.

Графиком функции $y=f(x)$ называют совокупность таких пар $<a, b>$, для которых $f(a)=b$. Посредством интуитивных рассмотрений можно обосновать следующее утверждение, формальный аналог которого будет доказан в § 6 (теорема 3): функция тогда и только тогда вычислима, когда ее график есть перечислимое множество. Вследствие этого мы получаем возможность определить понятие вычислимой функции через понятие перечислимого множества, назвав вычислимыми функции, обладающие перечислимыми графиками. Поскольку понятие перечислимого множества может быть определено независимо от понятия алгоритма — через уточненное понятие эффективного порождающего процесса, то мы получаем новую возможность для уточнения понятия вычислимой функции (возможность, не зависящую от каких бы то ни было уточнений понятия алгоритма). Небезынтересно отметить, что именно на этом пути и были получены первые уточнения понятия вычислимой функции*).

Возможен и третий путь уточнения понятия вычислимой функции, который мы и изберем в этих «Лекциях».

Заметим прежде всего, что можно ограничиться функциями, аргументы и значения которых суть натуральные числа. Дело в том, что для любой из естественно возникающих совокупностей конструктивных объектов — таких, как совокупность всех матриц с натуральными элементами или совокупность всех слов в заданном алфавите и т. п. — можно указать алгоритм взаимно-однозначной нумерации этой совокупности, т. е. алгоритм, который каждому натуральному числу ставит в соответствие некоторый объект из этой совокупности, причем разным числам — разные объекты (из существования такого алгоритма можно вывести существование и обратного алгоритма, дающего по объекту совокупности его номер, т. е. число,

---

*) Эти первые уточнения были предложены — для случая всюду определенных функций с натуральными аргументами и значениями — А. Чёрчем [1936]. Ранее К. Гёдель [1934] определил *обще-рекурсивную* функцию, как всюду определенную функцию, элементы графика которой порождаются некоторым процессом специального вида. В своей статье [1936] А. Чёрч ввел другой вид порождающего процесса, установил (с указанием, что этот результат получен также С. К. Клини), что определяемые этим процессом всюду определенные функции — названные им тогда *λ-определимыми* — совпадают с обще-рекурсивными, и предложил отождествить понятие вычислимой всюду определенной функции с натуральными аргументами и значениями с понятием обще-рекурсивной (или λ-определимой) функции. (Впоследствии термин «λ-определимая» стал применяться не только к всюду определенным функциям.

которому этот объект поставлен в соответствие). Тогда вычислимой функции, перерабатывающей объекты в объекты, будет соответствовать вычислимая функция, перерабатывающая номера этих объектов в номера же, причем по последней функции легко восстановить первую. (По тем же причинам для уточнения понятий перечислимого и разрешимого множества достаточно рассматривать лишь множества натуральных чисел.) В настоящей книге мы и ограничимся функциями с натуральными аргументами и значениями.

Выбранный нами «третий» путь уточнения понятия вычислимой функции будет состоять в следующем. Мы опишем (независимо от понятий алгоритма и эффективного порождающего процесса) некоторые классы функций и множеств, которые и объявим потом уточнениями понятий вычислимой функции, перечислимого множества и разрешимого множества. Именно, мы определим так называемые частично-рекурсивные функции, рекурсивно-перечислимые множества и обще-рекурсивные множества и отождествим первые с вычислимыми функциями, обладающими натуральными аргументами и значениями, вторые — с перечислимыми множествами натуральных чисел, третьи — с разрешимыми множествами натуральных чисел. В одну сторону такое отождествление будет интуитивно очевидно (именно, будет интуитивно очевидно, что всякая частично-рекурсивная функция вычислима, всякое рекурсивно-перечислимое множество перечислимо и всякое обще-рекурсивное множество разрешимо), в другую — будет представлять собой подтверждаемую опытом естественнонаучную гипотезу.

Термин «вычислимая функция» может употребляться, таким образом, в двух смысловых оттенках: во-первых, для обозначения некоторого точного понятия, возникающего на основе того или иного уточнения, во-вторых, для обозначения несколько расплывчатого понятия, возникающего на основе интуитивных представлений. В тех случаях, когда мы будем иметь в виду второй из указанных оттенков и будем хотеть это подчеркнуть, мы будем говорить о функциях, *вычислимых в интуитивном смысле*, или, короче, об *интуитивно-вычислимых* функциях.

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИЙ

Как уже отмечалось в «Предисловии», у читателя предполагается знакомство с простейшими понятиями теории множеств и функций. В этом параграфе приводятся некоторые дополнительные, хотя и весьма элементарные, сведения о множествах и функциях, постоянно используемые в дальнейшем. Без свободного владения материалом настоящего параграфа чтение последующих параграфов будет затруднительным.

1. МНОЖЕСТВА

При рассмотрении какого-либо множества часто приходится иметь дело не только с его элементами, взятыми в отдельности, но и с упорядоченными парами его элементов. При этом допускается, что первый и второй члены пары совпадают. Так,

$$\langle \sqrt{2},\ \sqrt{2}\rangle,\quad \langle 10,\ \frac{11}{17}\rangle\ ,\ \langle \frac{11}{17},\ 10\rangle$$

суть примеры различных упорядоченных пар, составленных из действительных чисел.

Подобно этому, часто приходится вводить в рассмотрение упорядоченные тройки, упорядоченные четверки,..., упорядоченные n-ки, ... элементов данного множества (по-прежнему допуская совпадение отдельных членов). Так,

$$\langle 8,\ 8,\ 8,\ 8,\ 8\rangle,\qquad \langle 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\rangle,$$
$$\langle 6,\ 6,\ 10,\ 1,\ 10\rangle,\qquad \langle 10,\ 1,\ 10,\ 6,\ 6\rangle$$

суть примеры различных упорядоченных пятерок, составленных из элементов натурального ряда.

Понятия упорядоченной пары, упорядоченной тройки и вообще упорядоченной n-ки (для любого натурального n) вряд ли могут быть определены через более простые понятия. Обобщая эти понятия, мы приходим к понятию упорядоченного набора элементов данного множества. Упорядоченный набор элементов какого-либо множества называется в разных областях математики по-разному: в комбинаторике — размещением с повторениями, в алгебре — вектором, в теории вероятностей — выборкой при выборе с возвращением, в абстрактной теории множеств — *кортежем*. Мы будем употреблять этот последний термин. Кортеж, составленный из элементов множества M, называется короче кортежем *над* M. Кортеж над M, составленный из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_s$, взятых именно в этом порядке, будем обозначать

$$\langle x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s\rangle$$

и говорить, что i-тая *координата*, или *компонента*, этого кортежа есть x_i.

Длиной кортежа $\langle x_1, \ldots, x_s\rangle$ называется число s его координат. Наряду с кортежами длины 2, 3, 4 и т. д. мы будем говорить о кортежах $\langle x\rangle$ длины 1 и о *пустом* кортеже $\langle\ \ \rangle$. Пустой кортеж будем обозначать через Λ *) и припишем ему длину 0. Кортежи длины 2 — упорядоченные пары — мы часто будем называть просто парами, кортежи длины 3 — упорядоченные тройки — просто тройками и т. д.

Из множества M образуются степени множества M: множество M^2 кортежей (над M) длины 2, множество M^3 кортежей длины 3 и вообще множество M^s кортежей длины s. Мы будем также говорить о первой степени M^1 множества M, понимая под M^1 множество кортежей длины 1, и о нулевой степени M^0 множества M, называя так множество, состоящее из одного элемента — пустого кортежа Λ. Следовательно, $M^0 = \{\Lambda\}$.

Множество всевозможных кортежей над M обозначим через M^∞. Значит, по определению $M^\infty = \bigcup\limits_{s\in N} M^s = M^0 \cup M^1 \cup M^2 \cup M^3 \cup \ldots$. Через N мы здесь обозначили,

*) Мы применяем, таким образом, для обозначения пустого кортежа тот же символ, которым обычно — в том числе и в данной книге — обозначается пустое множество.

как это видно, множество 0, 1, 2, 3, ... Это обозначение мы фиксируем и сохраним до конца книги. Множество $N=\{0,1,2,3,\ldots\}$ будет играть в дальнейшем основную роль. По принятому в теории вычислимых функций обыкновению мы будем элементы множества N называть *натуральными числами* (а само множество N — *натуральным рядом*), относя, таким образом, 0 к натуральным числам. Слово «натуральные», мы, впрочем, будем чаще всего опускать, понимая всюду, где противное не оговорено, под числами именно элементы множества N.

Пусть мы имеем два множества M_1 и M_2. *Внешним произведением* $[M_1, M_2]$ множеств M_1 и M_2 называется множество, состоящее из всевозможных пар $\langle x, y\rangle$, где $x\in M_1$, $y\in M_2$. Аналогично определяется внешнее произведение трех, четырех и т. д. сомножителей. Например, $[M_1, M_2, M_3]$ — множество, состоящее из всевозможных троек $\langle x, y, z\rangle$, где $x\in M_1$, $y\in M_2$, $z\in M_3$. Согласно этому определению, $M^2=[M, M]$, $M^3=[M, M, M]$ и т. д. Отметим, что $[\,[M_1, M_2], M_3] \neq [M_1, [M_2, M_3]\,]$ и, вообще говоря, $[M_1, M_2]\neq[M_2, M_1]$ — внешнее произведение не ассоциативно и не коммутативно. В частности, $[M^2, M]=[\,[M, M],M]\neq[M,[M, M]]=[M, M^2]$.

Заметим, что внешнее произведение множеств $A\subseteq M^k$ и $B\subseteq M^s$ не является подмножеством множества M^{k+s}. Действительно, элементы внешнего произведения множеств A и B суть не кортежи над M длины $k+s$, а пары; первый член каждой такой пары — кортеж длины k, второй член — кортеж длины s.

Однако нам нужна операция, позволяющая от подмножеств множеств M^k и M^s переходить к подмножествам множества M^{k+s}. Такой операцией является геометрическое произведение. *Геометрическим произведением* двух кортежей $\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ и $\langle y_1, \ldots, y_s\rangle$ назовем кортеж $\langle x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s\rangle$. *Геометрическим произведением* $M_1\times M_2$ двух множеств M_1 и M_2 кортежей назовем совокупность всевозможных попарных геометрических произведений кортежей из M_1 на кортежи из M_2. Теперь уже если $M_1\subseteq M^k$, $M_2\subseteq M^s$, то $M_1\times M_2\subseteq M^{k+s}$ (для $k=1$ и $s=1$ см. рис. 1). Геометрическое произведение не коммутативно, но ассоциативно: вообще говоря, $M_1\times M_2\neq M_2\times$ $\times M_1$, но $(M_1\times M_2)\times M_3=M_1\times(M_2\times M_3)$.

Говоря о множестве M^s (при каком-нибудь фиксированном s), удобно применять геометрический язык, полученный по аналогии с языком, применяемым к обычному двумерному или трехмерному пространству. Множество M^s мы будем называть *пространством*, его элементы — *точками*; о подмножестве $E \subseteq M^s$ мы будем говорить как о множестве, *лежащем* или *расположенном* в M^s или, короче, множестве *в* M^s. Множества, расположенные в M^s, мы будем называть *s-мерными*; двумерные множества мы будем называть также *плоскими*, одномерные — *линейными*. Элемент x множества M мы часто будем отождествлять с точкой $\langle x \rangle$ пространства M^1. Далее, *прямой, параллельной i-й оси*, будем называть множество всех таких элементов из M^s, у которых все координаты, кроме i-й, фиксированы, а i-я координата пробегает все множество M. Множество L в M^s называется *униформным вдоль i-й оси*, если каждая прямая, параллельная i-й оси, пересекает его не более чем в одной точке, т. е. — другими словами — в L не должно быть таких двух точек, у которых все координаты, кроме i-й, одинаковы, а i-е координаты различны. В частности, пустое множество тривиальным образом униформно вдоль любой оси.

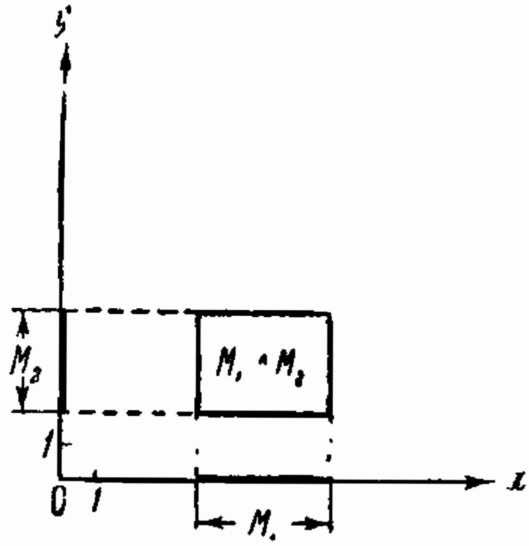


Рис. 1.

Цилиндром в M^s, *восставленным из множества* L, лежащего в M^{s-q}, *вдоль осей с номерами* $i_1, i_2, \ldots, i_q$ ($1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots \ldots < i_q \leqslant s$), называется множество всех таких кортежей $\alpha = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle$ из M^s, для которых кортеж $\langle y_1, y_2, \ldots, y_{s-q} \rangle$, получающийся из кортежа α выбрасыванием координат с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_q$, лежит в L. Цилиндр вдоль крайних осей может быть определен более коротко при помощи геометрического произведения. Например, цилиндр в M^s, восставленный из множества $L \subseteq M^{s-q}$ вдоль осей с номерами $1, 2, \ldots, q$, равен просто $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{q \text{ сомножителей}} \times L$

(см. на рис. 2, a цилиндр в N^2, восставленный из некоторого $L \subseteq N$ вдоль второй оси, и на рис. 2, *б* цилиндр в N^2, восставленный из того же множества вдоль первой оси).

Проекцией кортежа $\langle x_1, x_2, \ldots, x_s \rangle$ *на оси с номерами* $i_1, i_2, \ldots, i_q$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leqslant s)$ *) называется кортеж

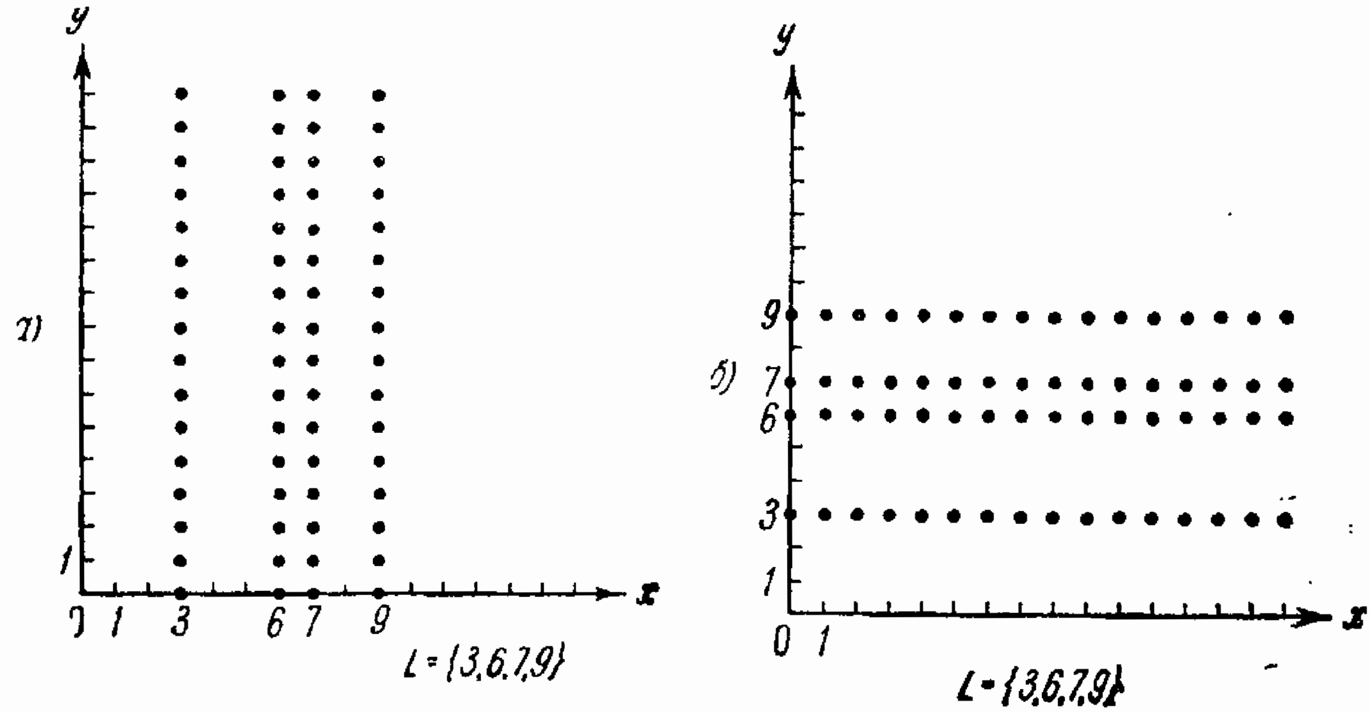


Рис. 2.

$\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_q} \rangle$. Проекцию кортежа α на оси с номерами $i_1, \ldots, i_q$ будем обозначать $\text{пр}_{i_1, \ldots, i_q} \alpha$. Очевидно, что если α — кортеж над M, то при всяком q $\text{пр}_{i_1, \ldots, i_q} \alpha \in M^q$; в частности, при $q=0$ проекцией любого кортежа над M на «пустое множество осей» является пустой кортеж $\Lambda \in M^0$. *Проекцией множества* $L \subseteq M^s$ *на оси с номерами* $i_1, i_2, \ldots, i_q$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots$ $\ldots < i_q \leqslant s)$ *) называется совокупность проекций на эти оси всех элементов множества L. Проекцию множества L на оси с номерами $i_1, \ldots, i_q$ будем обозначать $\text{пр}_{i_1, \ldots, i_q} L$. Очевидно, что $\text{пр}_{i_1, \ldots, i_q} L \subseteq M^q$. На рис. 3 показано множество L и его проекция на первую ось.

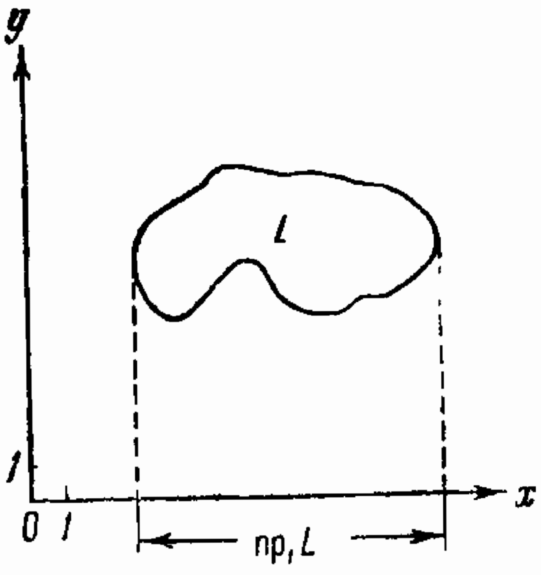


Рис. 3.

---

*) Точнее было бы, быть может, говорить о проекции на гиперплоскость, натянутую на оси с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_q$.

Цилиндр в M^s, восставленный из множества $L \subseteq M^{s-q}$ вдоль осей с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_q$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leqslant s)$, есть не что иное, как совокупность всех кортежей из M^s, проекции которых на остальные $s-q$ осей принадлежат множеству L.

2. ФУНКЦИИ

Пусть мы имеем два множества: X и Y. Функцию, определенную на каком-либо подмножестве $X_1 \subseteq X$, со значениями из Y (т. е. отображение множества X_1 в Y) будем называть *функцией типа* $X \rightarrow Y$ или функцией, определенной *в* множестве X (короче — *функцией в* X), со значениями из множества Y. Множество X_1 называется *областью определения* функции; если $x \in X_1$, то говорят, что функция определена *для* x (*на* x, *в* x); если $x \overline{\in} X_1$, то говорят, что функция не определена *для* x (*на* x, *в* x). Если $X_1 = X$, мы будем называть такую функцию типа $X \rightarrow Y$ *всюду определенной* и говорить, что функция определена *на* множестве X. Мы разрешаем рассматривать также тот случай, когда X_1— пустое множество, т. е. *нигде не определенную функцию*, не принимающую фактически ни одного значения.

Функции типа $X^s \rightarrow Y$ мы будем часто называть *s-местными функциями типа* $X \rightarrow Y$. В частности, функции типа $X^0 \rightarrow Y$ мы будем называть нульместными функциями типа $X \rightarrow Y$. Заметим, что любая всюду определенная нульместная функция типа $X \rightarrow Y$ определена на $X^0 = \{\Lambda\}$, т. е. только для одного элемента — пустого кортежа. Как и в общем случае, мы будем говорить о *нигде не определенной s-местной функции* (в частности, о *нигде не определенной нульместной функции*). Если нульместная функция не является всюду определенной, то она является нигде не определенной. Между всюду определенными нульместными функциями типа $X \rightarrow Y$ и элементами множества Y существует естественное взаимно-однозначное соответствие (а именно, элементу $y \in Y$ соответствует та нульместная функция, значением которой служит y).

Мы будем всюду различать функцию как соответствие и ее значение как элемент множества Y, обозначая первую, например, через f, а ее значение в точке x через $f(x)$. Значение функции f на кортеже $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$ (которое следовало бы обозначать через $f(\langle x_1, \ldots, x_s\rangle)$) мы будем, как это принято, обозначать через $f(x_1, \ldots, x_s)$.

Если a и b — два элемента множества X, а f и g — две функции в X, то равенство $f(a)=g(b)$ считается верным в следующих и только в следующих двух случаях:

а) когда f определена для a и g определена для b и значение $f(a)$ совпадает со значением $g(b)$;

б) когда f не определена для a и g не определена для b.

Если нам понадобится, мы будем справа сверху от символа, обозначающего функцию, писать в круглых скобках число ее аргументов, например $f^{(2)}$. Чтобы определить функцию, надо каким-то способом описать, как значениям аргумента ставятся в соответствие значения функции. Чаще всего это будет делаться написанием равенства, выражающего значения функции через значения аргумента. Причем значение функции, стоящее в таком равенстве слева, может выражаться через специальное обозначение функции, например $f(x, y)$, но может и обозначаться просто одной буквой, например z.

Пример 1. Предложение, определяющее функцию, может выглядеть по-разному. Например: «введем функцию $\mathrm{sum}^{(2)}$, определяемую равенством: $\mathrm{sum}(x, y)=x+y$». Или короче: «введем функцию $\mathrm{sum}^{(2)}$: $\mathrm{sum}(x, y)=x+y$». Можно даже еще чуть короче: «введем функцию $\mathrm{sum}(x, y)=x+y$». Можно и по-другому: «рассмотрим функцию, определяемую равенством: $z=x+y$». Или короче: «рассмотрим функцию: $z=x+y$».

Пусть мы имеем функцию f типа $X^s \to Y$. Мы будем говорить, что функция f *существенно зависит* от i-го аргумента, если существуют такие два элемента из X^s, отличающиеся друг от друга i-й координатой и только ею, на которых функция f принимает разные значения. Если функция f не является существенно зависящей от i-го аргумента, мы будем называть i-й аргумент *фиктивным*. Если у функции $f^{(s)}$ типа $X^s \to Y$ имеется k фиктивных аргументов, она принимает такие же значения, как некоторая функция $g^{(s-k)}$ типа $X^{s-k} \to Y$.

Пример 2. 1) Если функция $f^{(3)}$ определяется равенством $f(x, y, z)=x^2+y-y+\frac{z}{z}$, а функция $g^{(1)}$ —

равенством $g(x)=x^2+1$, то для всех $\langle x, y, z\rangle$, у которых $z\neq 0$, имеет место равенство $f(x, y, z)=g(x)$.

2) Пусть функция $g^{(1)}$ определяется равенством $g(x)=x$. Введем функцию $f^{(2)}$: $f(x, y)=x$. Тогда для всех $\langle x, y\rangle$ $f(x, y)=g(x)$. Про переход от функции g к функции f говорят: функция f получена *введением фиктивного аргумента* в функцию g.

Для произвольного множества M введем две серии функций типа $M^\infty\longrightarrow M$ *).

Первая серия. Возьмем произвольное $y\in M$. Через $y^{(s)}$ ($s=0, 1, 2, 3, \ldots$) обозначим s-местную функцию типа $M\longrightarrow M$, тождественно равную элементу y. В частности, через $y^{(0)}$ обозначается нульместная функция, равная элементу y.

$$\text{Для } s\geqslant 1:\ y^{(s)}(x_1, \ldots, x_s)=y.$$
$$\text{Для } s=0:\qquad y^{(0)}=y.$$

У функции $y^{(s)}$ все s аргументов — фиктивные. Функции $y^{(s)}$, определенные для любого $y\in M$ и любого натурального s, назовем *константными функциями*.

Заметим, что любая нульместная функция (если только она не является нигде не определенной) — константная.

В дальнейшем нам будет удобно произвольный элемент $y\in M$ отождествлять с нульместной функцией $y^{(0)}$. Это позволит нам, например, вместо фразы «функции типа $M^s\longrightarrow M (s\geqslant 1)$ или элементы множества M» говорить короче «функции типа $M^s\longrightarrow M$ $(s\geqslant 0)$», вместо «подстановки функций или чисел» (п. 3) говорить просто о «подстановке функций» и т. п.

Вторая серия. Для любого положительного s и любого k: $1\leqslant k\leqslant s$ введем функцию $I_k^{(s)}$:

$$I_k^{(s)}(x_1, \ldots, x_s)=x_k.$$

В частности: $I_1^{(1)}(x)=x$, $I_1^{(2)}(x_1, x_2)=x_1=I_1^{(1)}(x_1)$ и т. д. У функции $I_k^{(s)}$ имеется $(s-1)$ фиктивных аргументов. Функции $I_k^{(s)}$ назовем *функциями выбора аргумента*.

---

*) Напомним, что любую функцию типа $M^s\to M$ мы имеем право называть функцией типа $M^\infty\to M$, так как $M^s\subset M^\infty$.

Для случая $M=N$ введем еще третью серию функций типа $M^\infty \to M$. Именно, для любого положительного s и любого k: $1 \leqslant k \leqslant s$ введем функцию $\lambda_k^{(s)}$:

$$\lambda_k^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = x_k + 1.$$

У функции $\lambda_k^{(s)}$ имеется $(s-1)$ фиктивных аргументов. Функции $\lambda_k^{(s)}$ назовем *функциями следования*.

Сделаем еще следующее тривиальное

Замечание. *Из s-местной функции типа $X \to Y$ при фиксировании i-го аргумента получается $(s-1)$-местная функция типа $X \to Y$.* Рассмотрим, например, некоторую двухместную функцию f типа $X \to Y$ не на всем X^2, а на прямой $y=y_0$, параллельной первой оси, т. е. на множестве пар $\langle x, y_0 \rangle$. Тогда в силу отображения, устанавливаемого функцией f, любому $x \in X$ соответствует $f(x, y_0) \in Y$, т. е. двухместная функция f индуцирует одноместную функцию $g: g(x)=f(x, y_0)$.

3. ПОДСТАНОВКА

Пусть M — произвольное множество. Рассмотрим всевозможные функции типа $M^\infty \to M$. Уже при такой общности можно указать одну (и, пожалуй, только одну) операцию, при помощи которой можно из одних функций образовывать другие. Речь идет об операции подстановки. Начнем с частного случая этой операции — с операции регулярной подстановки.

Пусть мы имеем функции $f^{(r)}$ и $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots, f_r^{(n)}$ $(r>0, n \geqslant 0)$. Образуем из них функцию $g^{(n)}$:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n)). \quad (1)$$

Равенство (1) указывает, что функция g определена для всякого (и только для такого) кортежа $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, для которого, во-первых, определены все функции $f_1, \ldots, f_r$ и, во-вторых, функция f определена для кортежа, составленного из получающихся при этом значений функций $f_1, \ldots, f_r$. Про так построенную функцию g мы будем говорить, что функция g получена *регулярной подстановкой* функций $f_1, f_2, \ldots, f_r$ в функцию f.

Пример 1. Пусть мы имеем функции $f^{(2)}$ и $f_1^{(1)}$, $f_2^{(1)}$. Регулярной подстановкой функций f_1, f_2 в функцию f получается функция g: $g(x) = f(f_1(x), f_2(x))$. Но про функции

$$\begin{aligned} g_1^{(2)}: &\quad g_1(x, y) = f(f_1(x), f_2(y)), \\ g_2^{(1)}: &\quad g_2(x) = f(x, f_1(x)), \\ g_3^{(3)}: &\quad g_3(x, y, z) = f(f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

нам тоже хочется говорить, что они получены подстановкой функций f_1, f_2 в функцию f. Разумеется, это не регулярная подстановка.

Введем общее понятие подстановки*). Пусть мы имеем функции $f^{(s)}$ $(s \geqslant 0)$, $f_1^{(s_1)}$, $f_2^{(s_2)}$, ..., $f_r^{(s_r)}$ $(r \geqslant 0,\ s_j \geqslant 0)$ и число n $(n \geqslant 0)$. Будем говорить, что функция $g^{(n)}$ получена *подстановкой* функций $f_1, f_2, \ldots, f_r$ в функцию f, если

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(A_1, \ldots, A_s), \tag{2}$$

где каждое A_i есть либо некоторое $f_{j_i}(x_{q_{i1}}, x_{q_{i2}}, \ldots, x_{q_{is_{j_i}}})$ (здесь $1 \leqslant j_i \leqslant r$; $1 \leqslant q_{il} \leqslant n$), либо некоторое x_{p_i} (здесь $1 \leqslant p_i \leqslant n$).

Подчеркнем, что числа $s, r, s_1, \ldots, s_r, n, i, j_i, p_i, q_{i1}, \ldots, q_{is_{j_i}}$ ничем, кроме написанных неравенств, между собой не связаны. Равенство (2) указывает, что функция g определена для всякого (и только для такого) кортежа $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$, для которого, во-первых, определены все $A_1, \ldots, A_s$ и, во-вторых, функция f определена на кортеже, составленном из получающихся таким образом значений $A_1, \ldots, A_s$ (например, если одно из A_i представляет собой нигде не определенную функцию, то функция g не определена ни для какого кортежа).

Заметим, что случай $n = 0$ нами не исключен. В этом случае либо $s = 0$ и равенство (2) имеет вид:

$$g = f, \tag{3}$$

*) Ср. подстрочное примечание переводчика на стр. 38 русского издания книги Р. Петер [1951].

где g и f — нульместные функции, либо $s>0$ и равенство (2) имеет вид:

$$g=f\left(f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_s}\right), \tag{4}$$

где g и $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_s}$ — нульместные функции.

Процесс получения равенства (2), определяющего функцию $g^{(n)}$ через функции $f, f_1, \ldots, f_r$, может быть наглядно описан следующим образом. На некоторые (может быть, ни на какое!) из аргументных мест функции f подставим некоторые (может быть, ни одну из них (!), может быть, на все места одну) из функций $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Некоторыми (может быть, одной и той же всюду, но не может быть, что ни одной) из букв $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заполним произвольным образом все аргументные места функции f, на которые мы не подставили функций f_{j_i}, и все аргументные места, образовавшиеся от подстановки функций f_{j_i} в функцию f. К полученному выражению приравняем $g(x_1, \ldots, x_n)$.

В примере 1 функции g_1, g_2, g_3 получены подстановкой функций f_1, f_2 в функцию f.

Пример 2. Пусть мы имеем функции $f^{(2)}, f_1, f_2$. Про функции $g_1^{(3)}$: $g_1(x, y, z)=f(x, y)$, $g_2^{(2)}$: $g_2(x, y)=$ $=f(y, x)$ и $g_3^{(1)}$: $g_3(x)=f(x, x)$ — мы также имеем право, согласно нашему определению, говорить, что они получены подстановкой функций f_1, f_2 в функцию f.

Таким образом, как ясно из примера 2, частными случаями операции подстановки являются операции введения фиктивного аргумента, перестановки аргументов и идентификации аргументов. Непосредственно ясно, что регулярная подстановка также является частным случаем подстановки.

Пример 3. 1) Возьмем константную функцию от 0 аргументов $y^{(0)}$. Подстановкой из нее можно получить для любого s константную функцию $y^{(s)}$:

$$y^{(s)}(x_1, \ldots, x_s)=y^{(0)}.$$

Это равенство также есть равенство типа (2).

2) Любую функцию следования $\lambda_k^{(s)}$ можно получить подстановкой из функции $\lambda_1^{(1)}$:

$$\lambda_k^{(s)}(x_1, \ldots, x_s)=\lambda_1^{(1)}(x_k).$$

Заметим, что регулярную подстановку в функцию от 0 аргументов сделать нельзя (или, если угодно, в такую функцию можно регулярно подставлять лишь «пустой» набор функций). Регулярная подстановка гораздо проще, упорядоченнее, каноничнее, чем просто операция подстановки. Тем приятнее, что имеет место

Теорема 1 (Теорема о подстановке). *Пусть функция $g^{(n)}$ получается подстановкой функций $f_1^{(s_1)}, \ldots, f_r^{(s_r)}$ в функцию $f^{(s)}$. Тогда функция g может быть получена конечное число раз проделанной* ***регулярной*** *подстановкой из исходных функций $f_1, \ldots, f_r, f$, одноместных константных функций, функций выбора аргумента и нигде не определенной одноместной функции* (более точно: существует такая цепочка функций, оканчивающаяся функцией g, что каждая функция в этой цепочке либо нигде не определена, либо есть одна из функций $f_1, \ldots, f_r, f, y^{(1)}, I_k^{(m)}$, либо получается регулярной подстановкой из некоторых предыдущих функций цепочки). При этом, *если ни одна из функций $f_1, \ldots, f_r, f$ не является нигде не определенной нульместной функцией, то функция g может быть получена конечное число раз проделанной* ***регулярной*** *подстановкой из исходных функций $f_1, \ldots, f_r, f$, одноместных константных функций и функций выбора аргумента.*

Прежде чем доказывать Теорему о подстановке, покажем идею доказательства на примерах.

Пример 4. 1) Пусть функция $g^{(3)}$ получается из функции $f^{(3)}$ перестановкой аргументов. Например: $g(x_1, x_2, x_3) = f(x_3, x_1, x_2)$. Тогда

$$g(x_1, x_2, x_3) = f(I_3^{(3)}(x_1, x_2, x_3),\ I_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3),\ I_2^{(3)}(x_1, x_2, x_3)).$$

2) Пусть функция $g^{(3)}$ получается из функции $f^{(2)}$ введением фиктивного аргумента. Например: $g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_3)$. Тогда

$$g(x_1, x_2, x_3) = f(I_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3),\ I_3^{(3)}(x_1, x_2, x_3)).$$

3) Пусть константная функция $y^{(3)}$ получается введением фиктивных аргументов в константную функцию

$y^{(0)}$. Тогда та же константная функция $y^{(3)}$ может быть получена регулярной подстановкой в функцию $y^{(1)}$ функции выбора аргумента

$$y^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = y^{(1)}(I_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3)).$$

4) Пусть, наконец, функция $g^{(2)}$ получается из функций $f^{(3)}, f_1^{(2)}, f_2^{(3)}$ подстановкой, согласно равенству $g(x_1, x_2) = f(x_2, f_1(x_1, x_1), f_2(x_2, x_1, x_2))$. Сначала регулярной подстановкой функций $I_1^{(2)}, I_2^{(2)}$ в функции f_1, f_2 получим две вспомогательные функции $h_1^{(2)}$ и $h_2^{(2)}$:

$$h_1(x_1, x_2) = f_1(I_1^{(2)}(x_1, x_2), I_1^{(2)}(x_1, x_2)),$$
$$h_2(x_1, x_2) = f_2(I_2^{(2)}(x_1, x_2), I_1^{(2)}(x_1, x_2), I_2^{(2)}(x_1, x_2)).$$

Очевидно, что $h_1(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_1)$ и $h_2(x_1, x_2) = f_2(x_2, x_1, x_2)$. Функцию g можно теперь получить регулярной подстановкой функций $h_1, h_2, I_2^{(2)}$ в функцию f: $g(x_1, x_2) = f(I_2^{(2)}(x_1, x_2), h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2))$.

Доказательство Теоремы о подстановке. Пусть функция $g^{(n)}$ получается из функций $f_1^{(s_1)}, \ldots, f_r^{(s_r)}, f^{(s)}$ подстановкой, согласно равенству (2). Разберем сперва основной случай: $n > 0$, $s > 0$. Пусть сначала все $s_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Если некоторое A_i в равенстве (2) есть $f_{j_i}(x_{q_{i1}}, x_{q_{i2}}, \ldots, x_{q_{is_{j_i}}})$, получим вспомогательную функцию $h_i^{(n)}$ регулярной подстановкой:

$$h_i^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= f_{j_i}(I_{q_{i1}}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n), I_{q_{i2}}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, I_{q_{is_{j_i}}}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Так проделаем для каждого A_i, которое имеет вид $f_{j_i}(x_{q_{i1}}, \ldots, x_{q_{is_{j_i}}})$. Если некоторое A_i в равенстве (2) есть x_{p_i}, то положим $h_i^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = I_{p_i}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$. Так проделаем для каждого A_i, которое имеет вид x_{p_i}. Мы получили s вспомогательных функций $h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, \ldots, h_s^{(n)}$. Теперь функция g очевидным образом получается регулярной подстановкой функций $h_1, h_2, \ldots, h_s$ в функцию f:

$$g(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= f(h_1(x_1, \ldots, x_n), \; h_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_s(x_1, \ldots, x_n)).$$

Пусть теперь некоторое $s_j = 0$. Тогда f_j либо нигде не определена, либо является какой-то константной функцией от 0 аргументов $y^{(0)}$. Пусть какое-то A_i есть эта f_j. Во втором из указанных случаев соответствующую вспомогательную функцию $h_i^{(n)}$ мы получим регулярной подстановкой уже не в функцию $f_j = y^{(0)}$, а в константную функцию $y^{(1)}$:

$$h_i^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = y^{(1)}(I_1^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)).$$

В первом же случае функцию $I_1^{(n)}$ надо подставлять в нигде не определенную одноместную функцию.

Если, далее, $n > 0$, $s = 0$, то сама функция f либо нигде не определена, либо есть какая-то константная функция от 0 аргументов $y^{(0)}$. Во втором из этих случаев равенство (2) имеет вид: $g(x_1, \ldots, x_n) = y^{(0)}$ и функцию $g^{(n)}$ мы получим сразу, без всяких вспомогательных функций, регулярной подстановкой в константную функцию $y^{(1)}$:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = y^{(1)}(I_1^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)).$$

В первом же случае g получается регулярной подстановкой в нигде не определенную одноместную функцию.

В случае $n = 0$ теорема тривиальна ввиду равенств (3), (4).

Замечание 1. *Операция подстановки сохраняет интуитивную вычислимость*: если функция g получена подстановкой функций $f_1, \ldots, f_r$ в функцию f и функции $f, f_1, \ldots, f_r$ интуитивно-вычислимы, то и функция g интуитивно-вычислима. В частности, сохраняют интуитивную вычислимость частные случаи операции подстановки: регулярная подстановка, введение фиктивного аргумента, перестановка аргументов и идентификация аргументов.

Замечание 2. *Операция подстановки сохраняет всюду-определенность* функций: если функция g получена подстановкой функций $f_1, \ldots, f_r$ в функцию f и функции $f, f_1, \ldots, f_r$ всюду определены, то и функция g всюду определена.

Замечание 3. Если какая-то операция над функциями сохраняет принадлежность функций к некоторому классу $\mathfrak{M}$, то говорят, что $\mathfrak{M}$ *замкнут* относительно данной операции. Иными словами, $\mathfrak{M}$ замкнут относительно данной операции, если при всяком применении этой операции к функциям из класса $\mathfrak{M}$ получающаяся в результате функция также принадлежит к классу $\mathfrak{M}$. Отнесем к классу $\mathfrak{F}_{\text{и. в}}$ всякую интуитивно-вычислимую функцию типа $N^s \dashrightarrow N$ при любом s, а к классу $\mathfrak{F}_{\text{в. о}}$ всякую всюду определенную функцию типа $N^s \longrightarrow N$ при любом s. Согласно только что сделанным замечаниям 1 и 2, *каждый из классов $\mathfrak{F}_{\text{и. в}}$ и $\mathfrak{F}_{\text{в. о}}$ замкнут относительно операции подстановки.*

4. ЧАСТИЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть X и Y — два произвольных множества, а f — функция типа $X \dashrightarrow Y$. Пусть X_1 — область определения функции f (так что $X_1 \subseteq X$), а Y_1 — область ее значений (так что $Y_1 \subseteq Y$). Функцию f, являющуюся отображением множества X_1 на множество Y_1, мы будем называть также *частичным отображением* множества X в множество Y. Очевидно, отображение является частным случаем частичного отображения (при $X_1 = X$). Любое утверждение о частичном отображении автоматически верно и для отображения просто.

Возьмем произвольное подмножество X_2 множества X. *Образом* множества X_2 при частичном отображении множества X в множество Y, осуществляемом функцией f, называется множество

$$\mathscr{E}\{y \in Y \mid \text{Существует } x \in X_2 \text{ такой, что } f(x) = y\}\ *).$$

Образ множества X_2 при частичном отображении, осуществляемом функцией f, будет часто обозначаться через $f(X_2)$. Если $X_2 \cap X_1 = \Lambda$ (X_1 — область определения функции f), то $f(X_2) = \Lambda$. Аналогично вводится понятие (полного) прообраза $f^{-1}(Y_2)$ множества Y_2 при частичном ото-

*) Через $\mathscr{E}\{x \in M \mid \ldots\}$ обозначается подмножество множества M, состоящее из всех тех (и только тех) элементов множества M, которые удовлетворяют условию, написанному после черты. Иногда, если множество, из которого берутся элементы, ясно из контекста, мы будем писать короче: $\mathscr{E}\{x \mid \ldots\}$.

бражении множества X в множество Y, осуществляемом функцией f. Если $Y_2 \subseteq Y$, то — по определению — *полный прообраз*

$$f^{-1}(Y_2) = \mathscr{E}\{x \in X \mid \text{Существует } y \in Y_2 \text{ такой, что } f(x) = y\}.$$

Если $Y_2 \cap Y_1 = \Lambda$ (Y_1 — область значений функции f), то $f^{-1}(Y_2) = \Lambda$.

В наших «Лекциях» мы будем в основном рассматривать функции типа $N^r \to N$ при всевозможных r. Всюду далее, где противное не оговорено, мы под *функцией* понимаем функцию типа $N^r \to N$ при каком-либо r.

Кроме частичных отображений N в N, осуществляемых некоторой (одноместной) функцией типа $N \to N$, и частичных отображений N^r в N, осуществляемых некоторой r-местной функцией типа $N \to N$, нам часто будет нужно говорить о частичных отображениях N в N^s $(s > 0)$ и, более общо, о частичных отображениях N^r в N^s $(s > 0)$. Чтобы получить частичное отображение N в N^s, надо задать некоторую функцию типа $N \to N^s$. Мы будем получать частичное отображение N в N^s так: возьмем s одноместных функций $f_1, \ldots, f_s$ типа $N \to N$ и рассмотрим множество кортежей $\langle f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x)\rangle$ $(x \in N)$. Каждому $x \in N$, входящему в области определения всех функций f_i $(i = 1, \ldots, s)$, эти s функций ставят в соответствие кортеж $\langle f_1(x), \ldots, f_s(x)\rangle \in N^s$. Тем самым они осуществляют частичное отображение N в N^s. Мы часто будем именно в этом смысле говорить о частичном отображении N в N^s, осуществляемом s одноместными функциями типа $N \to N$. Без особых пояснений тогда понятно, что s r-местных функций $f_1, \ldots, f_s$ типа $N \to N$ осуществляют частичное отображение N^r в N^s: каждому $\langle x_1, \ldots, x_r\rangle \in N^r$, входящему в области определения всех функций f_i $(i = 1, \ldots, s)$, ставится в соответствие кортеж $\langle f_1(x_1, \ldots, x_r), f_2(x_1, \ldots, x_r), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_r)\rangle \in N^s$. Понятия образа и прообраза, данные в начале пункта для общего случая, конкретизируются для двух последних видов частичных отображений естественным образом. Предоставляем проделать это читателю.

Пусть f — функция типа $N^s \to N$. *Графиком функции* f называется множество

$$\mathscr{E}\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_s, y\rangle \in N^{s+1} \mid f(x_1, \ldots, x_s) = y\}.$$

График функции f будем обозначать через G_f. Если f — функция типа $N^s \to N$, то ее график G_f лежит в N^{s+1}. В частности, графиком нульместной функции $y^{(0)}$ является множество $\{\langle y\rangle\} \subseteq N^1$.

Замечание 1. *График функции типа* $N^s \to N$ *лежит в* N^{s+1} *и является униформным вдоль* $(s+1)$*-й оси множеством.* И обратно: *любое униформное вдоль* $(s+1)$*-й оси множество в* N^{s+1} *однозначно определяет некоторую функцию типа* $N^s \to N$, *графиком которой оно является.* В частности, пустое множество в N^{s+1} является графиком нигде не определенной функции типа $N^s \to N$.

Обобщим понятие графика на случай частичных отображений N в N^s и N^r в N^s. *Графиком частичного отображения* N *в* N^s $(s > 0)$, осуществляемого s одноместными функциями $f_1, \ldots, f_s$ типа $N \to N$, назовем множество $\mathscr{E}\{\langle x, y_1, \ldots, y_s\rangle \in N^{s+1} \mid f_i(x) = y_i \ (i = 1, \ldots, s)\}$. Обозначим этот график через G. Выразим G через графики $G_{f_1}, \ldots, G_{f_s}$ функций $f_1, \ldots, f_s$. Возьмем график G_{f_i} функции f_i. Очевидно, $G_{f_i} \subseteq N^2$. Восставим в N^{s+1} цилиндр из G_{f_i} вдоль осей с номерами $2, 3, \ldots, i, i+2, \ldots, s+1$. Обозначим этот цилиндр через H_i. Так проделаем для каждого i: $1 \leqslant i \leqslant s$. Тогда легко видеть, что

$$G = \bigcap_{i=1}^{i=s} H_i. \tag{1}$$

Графиком частичного отображения N^r в N^s $(s > 0)$, осуществляемого s r-местными функциями $f_1, \ldots, f_s$ типа $N \to N$, назовем множество

$$\mathscr{E}\{\langle x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\rangle \in N^{r+s} \mid f_i(x_1, \ldots, x_r) = y_i \ (i = 1, \ldots, s)\}.$$

Обозначим этот график через G. Выразим G через графики $G_{f_1}, \ldots, G_{f_s}$ функций $f_1, \ldots, f_s$. Возьмем график G_{f_i} функции f_i. Очевидно, $G_{f_i} \subseteq N^{r+1}$. Восставим в N^{r+s} цилиндр из G_{f_i} вдоль осей с номерами $r+1, r+2, \ldots, r+(i-1), r+(i+1), \ldots, r+s$. Обозначим этот цилиндр через H_i. Так проделаем для каждого i: $1 \leqslant i \leqslant s$. Тогда легко видеть, что

$$G = \bigcap_{i=1}^{i=s} H_i. \tag{2}$$

Пусть f — функция типа $N \to N$, а $M \subseteq N$. Тогда (см. рис. 4)

$$f(M) = \text{пр}_2 [(M \times N) \cap G_f], \tag{3}$$

$$f^{-1}(M) = \text{пр}_1 [(N \times M) \cap G_f]. \tag{4}$$

Пусть f — функция типа $N^r \to N$. Тогда, если $M \subseteq N^r$, то

$$f(M) = \text{пр}_{r+1} [(M \times N) \cap G_f], \tag{5}$$

если $M \subseteq N$, то

$$f^{-1}(M) = \text{пр}_{1,\,2,\,\ldots,\,r} [(N^r \times M) \cap G_f]. \tag{6}$$

Пусть s одноместных функций $f_1, \ldots, f_s$ типа $N \to N$ осуществляют частичное отображение N в N^s $(s > 0)$.

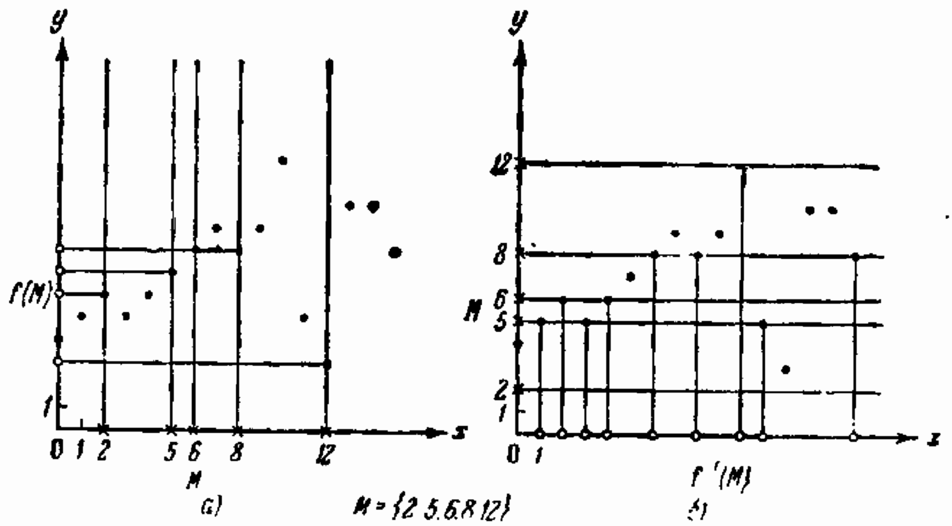


Рис. 4.

Обозначим через G график этого частичного отображения. Само частичное отображение обозначим буквой φ *). Тогда, если $M \subseteq N$, то

$$\varphi(M) = \text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1} [(M \times N^s) \cap G], \tag{7}$$

если $M \subseteq N^s$, то

$$\varphi^{-1}(M) = \text{пр}_1 [(N \times M) \cap G]. \tag{8}$$

Наконец, пусть s r-местных функций $f_1, \ldots, f_s$ типа

*) φ, как легко видеть, это функция типа $N \to N^s$.

$N \to N$ осуществляют частичное отображение N^r в N^s $(s > 0)$. Обозначим график этого частичного отображения через G, а само частичное отображение через φ *). Тогда, если $M \subseteq N^r$, то

$$\varphi(M) = \text{пр}_{r+1,\, r+2, \ldots,\, r+s}[(M \times N^s) \cap G]; \tag{9}$$

если $M \subseteq N^s$, то

$$\varphi^{-1}(M) = \text{пр}_{1,\, 2, \ldots,\, r}[(N^r \times M) \cap G]. \tag{10}$$

Область определения и область значений при отображении f: N в N, N^r в N, N в N^s $(s > 0)$ или N^r в N^s $(s > 0)$ — во всех этих четырех случаях также легко выражаются через график. А именно, в первом случае область определения равна $\text{пр}_1 G_f$, область значений — $\text{пр}_2 G_f$. Во втором случае область определения равна $\text{пр}_{1,2,\ldots,r} G_f$, область значений равна $\text{пр}_{r+1} G_f$. В третьем — область определения равна $\text{пр}_1 G$, область значений $\text{пр}_{2,3,\ldots,s+1}\, G$. И, наконец, в четвертом, область определения равна $\text{пр}_{1,2,\ldots,r} G$, область значений равна $\text{пр}_{r+1,\ldots,r+s} G$.

Разумеется, частичные отображения N в N, N^s в N и N в N^s являются частными случаями частичного отображения N^r в N^s. В этом пункте мы, для облегчения труда читателя, высказывали все утверждения сначала для этих частных случаев, восходя от простого к сложному. Впредь мы чаще всего, где это можно и нужно, будем формулировать свои утверждения для общего случая: для частичного отображения N^r в N^s $(s > 0)$.

График частичного отображения φ будем обозначать через G_φ.

З а м е ч а н и е 2. Пусть φ — частичное отображение пространства N^r в N^s $(s > 0)$. Решим следующие две задачи: когда имеют место равенства $N^s \setminus \varphi(M) = \varphi(N^r \setminus M)$ $(M \subseteq N^r)$ и $\varphi^{-1}(N^s \setminus M) = N^r \setminus \varphi^{-1}(M)$ $(M \subseteq N^s)$?

Пусть сначала $M \subseteq N^s$. Легко видеть, что всегда $\varphi^{-1}(N^s \setminus M) \subseteq N^r \setminus \varphi^{-1}(M)$. Обратное включение $\varphi^{-1}(N^s \setminus M) \supseteq N^r \setminus \varphi^{-1}(M)$ имеет место тогда и только

*) φ есть функция типа $N^r \to N^s$.

тогда, когда φ является отображением (всего пространства N^r в N^s). Итак, *тогда и только тогда, когда* φ *является отображением* (а не только частичным отображением), *имеет место равенство*

$$\varphi^{-1}(N^s\setminus M) = N^r\setminus\varphi^{-1}(M). \tag{11}$$

Пусть теперь $M\subseteq N^r$. Включение $N^s\setminus\varphi(M)\subseteq\varphi(N^r\setminus M)$ имеет место тогда и только тогда, когда φ является частичным отображением пространства N^r на N^s. Обратное включение $N^s\setminus\varphi(M)\supseteq\varphi(N^r\setminus M)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(M)\cap\varphi(N^r\setminus M)=\Lambda$. Итак, *тогда и только тогда, когда* φ *является частичным отображением пространства* N^r ***на*** N^s $(s>0)$ *и* $\varphi(M)\cap\varphi(N^r\setminus M)=\Lambda$, *имеет место равенство*

$$N^s\setminus\varphi(M) = \varphi(N^r\setminus M). \tag{12}$$

5. ФУНКЦИИ БОЛЬШОГО РАЗМАХА

Всюду определенная функция типа $N\to N$ называется *функцией большого размаха*, если она, во-первых, принимает каждое натуральное значение и, во-вторых, принимает каждое значение бесконечное число раз.

Следовательно, функция большого размаха осуществляет отображение N на N.

Замечание 1. *Если функции* f_1, f_2 (типа $N\to N$) *осуществляют отображение* N ***на*** N^2, *то каждая из функций* f_i $(i=1, 2)$ *есть функция большого размаха.*

Теорема 2*). *Если* f_1 — *функция большого размаха, то существует такая функция* f_2 (типа $N\to N$), *что функции* f_1, f_2 *будут осуществлять взаимно-однозначное отображение* N ***на*** N^2. (Согласно замечанию 1, функция f_2 также будет функцией большого размаха.)

Доказательство. Построим требуемую функцию f_2. Возьмем произвольное $s\in N$. Функция f_1 принимает значение s бесконечное число раз. Следовательно, существует такая последовательность значений аргумента

$$t_{s0},\ t_{s1},\ t_{s2},\ \ldots,\ t_{sn},\ \ldots\ (t_{si}<t_{sj}\ \text{для}\ i<j), \tag{1}$$

---

*) Эта теорема содержится по существу в построениях, проводимых на стр. 233 статьи А. В. Кузнецова [1950].

что $f_1(t_{sj}) = s$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Положим тогда $f_2(t_{s0}) = 0$, $f_2(t_{s1}) = 1$, $f_2(t_{s2}) = 2$ и т. д. Вообще

$$f_2(t_{sj}) = j. \tag{2}$$

Когда t пробежит последовательность (1), пары

$$\langle f_1(t_{sj}), f_2(t_{sj}) \rangle$$

пробегут прямую $x = s$. Так как для любого s найдется своя последовательность $\{t_{sj}\}$, на которой $f_1(t_{sj}) = s$, функция f_1 и определенная равенством (2) функция f_2 осуществят взаимно-однозначное отображение N на N^2.

Произвольное отображение N на N^s не обязано, конечно, быть взаимно-однозначным. Взаимно-однозначное отображение N на N^s устанавливает взаимно-однозначное соответствие между N и N^s. И обратно, разумеется. Взаимно-однозначное соответствие между N и N^s устанавливает взаимно-однозначное отображение N на N^s и взаимно-однозначное отображение N^s на N.

. Пусть $\varkappa_1^{[s]}, \varkappa_2^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}$ — всюду определенные функции типа $N \to N$ и $\varkappa_0^{[s]}$ — всюду определенная функция типа $N^s \to N$. Будем говорить, что функции $\varkappa_1^{[s]}, \varkappa_2^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}, \varkappa_0^{[s]}$ *осуществляют* данное взаимно-однозначное соответствие между N и N^s, если, во-первых, для любого $t \in N$ кортеж $\langle \varkappa_1^{[s]}(t), \ldots, \varkappa_s^{[s]}(t) \rangle$ есть кортеж, соответствующий числу t в силу данного соответствия, и, во-вторых, для любого кортежа $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle \in N^s$ число $\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s)$ есть число, соответствующее кортежу $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$ в силу данного соответствия*).

Замечание 2. *Если функции $\varkappa_1^{[s]}, \varkappa_2^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}, \varkappa_0^{[s]}$ осуществляют взаимно-однозначное соответствие между N и N^s, то функции $\varkappa_i^{[s]}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ суть функции большого размаха.*

Замечание 3. *Если функции $\varkappa_1^{[s]}, \varkappa_2^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}, \varkappa_0^{[s]}$ осуществляют взаимно-однозначное соответствие между*

---

*) Напомним читателю, что число аргументов функции обозначается индексом в круглых скобках, индекс же в квадратных скобках, стоящий справа сверху от символа, обозначающего функцию, указывает на что-нибудь другое. Например в данном случае — на то, что соответствие устанавливается между N и N^s

N и N^s, то функции $\varkappa_1^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}$ осуществляют (взаимно-однозначное) *отображение N на N^s, а функция $\varkappa_0^{[s]}$ осуществляет* (взаимно-однозначное) *отображение N^s на N, причем эти отображения взаимно-обратны.*

Имеет место следующая совершенно очевидная

Теорема 3. *Для того, чтобы функции $\varkappa_1^{[s]}, \ldots$ $\ldots, \varkappa_s^{[s]}, \varkappa_0^{[s]}$ осуществляли некоторое взаимно-однозначное соответствие между N и N^s, необходимо и достаточно, чтобы для всех $t \in N$ и всех $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle \in N^s$ выполнялись равенства*

$$\varkappa_i^{[s]}(\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s)) = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{3}$$

$$\varkappa_0^{[s]}(\varkappa_1^{[s]}(t), \quad \varkappa_2^{[s]}(t), \ldots, \varkappa_s^{[s]}(t)) = t. \tag{4}$$

Впредь через $\varkappa_1^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}, \varkappa_0^{[s]}$ мы будем обозначать любой набор (всюду определенных) функций, удовлетворяющих равенствам (3) и (4).

6. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть M — произвольное множество. Каждому подмножеству L множества M может быть поставлена в соответствие некоторая всюду определенная функция типа $M \to \{0, 1\}$. Эта функция называется *характеристической функцией множества L* (относительно множества M), обозначается через χ_L и определяется так:

$$\chi_L(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in L, \\ 0, \text{ если } x \in M \setminus L. \end{cases}$$

И обратно: каждой всюду определенной функции f типа $M \to \{0, 1\}$ естественным образом ставится в соответствие некоторое подмножество L множества M такое, что f оказывается его характеристической функцией. А именно: если положить $L = \mathscr{E}\{x \in M \mid f(x) = 1\}$, то $f = \chi_L$. Таким образом, между подмножествами множества M и всюду определенными функциями типа $M \to \{0,1\}$ существует взаимно-однозначное соответствие.

Пример 1. Возьмем в качестве основного множества N. Пусть $L_1 = \mathscr{E}\{x \in N \mid x > 0\}$. Тогда

$$\chi_L(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Функция χ_{L_1} будет нам очень полезна в дальнейшем. Поэтому дадим ей индивидуальное обозначение. Обозначим χ_{L_1} через sg. Итак,

$$\operatorname{sg} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \; ^{*)} \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Пусть $L_2 = N \setminus L_1 = \{0\}$. Характеристической функции множества L_2 также дадим индивидуальное обозначение. Обозначим ее через $\overline{\operatorname{sg}}$. Следовательно,

$$\overline{\operatorname{sg}}\, x = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Вернемся к произвольному множеству M и его подмножествам **).

Легко видеть, что

$$\chi_M = 1^{(1)}, \tag{1}$$

$$\chi_\Lambda = 0^{(1)}, \tag{2}$$

$$\chi_{L_1 \cup L_2}(x) = \operatorname{sg}(\chi_{L_1}(x) + \chi_{L_2}(x)) = \max(\chi_{L_1}(x), \; \chi_{L_2}(x)), \tag{3}$$

$$\chi_{L_1 \cap L_2}(x) = \chi_{L_1}(x) \cdot \chi_{L_2}(x) = \min(\chi_{L_1}(x), \; \chi_{L_2}(x)), \tag{4}$$

$$\chi_{M \setminus L}(x) = \overline{\operatorname{sg}}\, \chi_L(x), \tag{5}$$

$$\chi_{L_1 \setminus L_2}(x) = \chi_{L_1 \cap (M \setminus L_2)}(x) = \chi_{L_1}(x) \cdot \overline{\operatorname{sg}}\, \chi_{L_2}(x). \tag{6}$$

---

*) Мы пишем $\operatorname{sg} x$, а не $\operatorname{sg}(x)$ [и — см. ниже — $\overline{\operatorname{sg}}\, x$, а не $\overline{\operatorname{sg}}(x)$], следуя той же традиции, согласно которой пишут $\sin x$, $\log x$ и т. д.

**) Иногда рассматривается двойственная к характеристической представляющая функция Z_L множества L, определяемая равенством: $Z_L(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in M \setminus L, \\ 0, & \text{если } x \in L. \end{cases}$ Характеристическая функция χ_L и представляющая функция Z_L одного и того же множества легко выражаются друг через друга:

$$Z_L(x) = \overline{\operatorname{sg}}\, \chi_L(x); \quad \chi_L(x) = \overline{\operatorname{sg}}\, Z_L(x).$$

Пример 2. Основное множество — N.

Пусть L_1 — произвольное конечное множество, например, $L_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$.

Тогда

$$\chi_{L_1}(x) = \overline{\mathrm{sg}} \left[\prod_{i=1}^{i=s} |x - a_i| \right]. \tag{7}$$

В частности, если $L_2 = \{a\}$, то

$$\chi_{L_2}(x) = \overline{\mathrm{sg}}\, |x - a|. \tag{8}$$

Если $L_3 = \mathscr{E}\{x \mid x < a\}$, то

$$\chi_{L_3}(x) = \overline{\mathrm{sg}} \left[\prod_{a_i < a} |x - a_i| \right]. \tag{9}$$

Следовательно, для $L_4 = \mathscr{E}\{x \mid x \leqslant a\}$

$$\chi_{L_4}(x) = \mathrm{sg}\,(\chi_{L_2}(x) + \chi_{L_3}(x)). \tag{10}$$

Для $L_5 = \mathscr{E}\{x \mid x > a\}$

$$\chi_{L_5}(x) = \overline{\mathrm{sg}}\, \chi_{L_4}(x). \tag{11}$$

Для $L_6 = \mathscr{E}\{x \mid x \geqslant a\}$

$$\chi_{L_6}(x) = \overline{\mathrm{sg}}\, \chi_{L_3}(x). \tag{12}$$

Пример 3. Основное множество — N^2.

Если L_1 – конечное множество, например,

$$L_1 = \{\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \ldots, \langle a_s, b_s\rangle\},$$

то

$$\chi_{L_1}(x, y) = \overline{\mathrm{sg}} \left[\prod_{i=1}^{i=s} (|x - a_i| + |y - b_i|) \right]. \tag{13}$$

Для любой прямой, параллельной одной из осей, например для $L_2 = \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \mid x = a\}$,

$$\chi_{L_2}(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}\, |x - a|. \tag{14}$$

Для биссектрисы $L_3 = \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \mid x = y\}$

$$\chi_{L_3}(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}\, |x - y|. \tag{15}$$

И вообще: пусть $P(x, y)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда для $L_4 = \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \mid P(x, y) = 0\}$

$$\chi_{L_4}(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}\,|P(x, y)|. \tag{16}$$

Пример 4. Пусть L — конечное множество в N^k. Например, $L = \{\langle a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\rangle\}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Тогда

$$\chi_L(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \overline{\mathrm{sg}} \prod_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} |x_j - a_{ij}|. \tag{17}$$

7. ПРИМИТИВНАЯ РЕКУРСИЯ

Фундаментальную роль во всех наших дальнейших рассмотрениях будет играть, наряду с операцией подстановки, еще одна операция, а именно операция примитивной рекурсии.

Рассмотрим сначала простейший случай. Пусть мы имеем число k и функцию $f^{(2)}$. Тогда равенства

$$\begin{cases} g(0) = k, \\ g(x+1) = f(x, g(x)) \end{cases} \tag{1}$$

однозначно определяют некоторую функцию $g^{(1)}$.

Например, $g(2) = f(1, g(1))$, $g(1) = f(0, g(0))$, $g(0) = k$. Следовательно, $g(1) = f(0, k)$, $g(2) = f(1, f(0, k))$.

Мы будем говорить, что функция $g^{(1)}$ определена через функцию $f^{(2)}$ и число k при помощи *операции примитивной рекурсии*, или — по *схеме примитивной рекурсии*, или, совсем коротко, *примитивной рекурсией*, или, наконец, *примитивно-рекурсивно*.

Пример 1. Возьмем число 0 и функцию $\lambda_1^{(2)}$. Напишем схему примитивной рекурсии

$$\begin{cases} g(0) = 0, \\ g(x+1) = \lambda_1^{(2)}(x, g(x)) = x + 1. \end{cases} \tag{2}$$

Равенства (2) примитивно-рекурсивно определяют через функцию $\lambda_1^{(2)}$ и число 0 некоторую функцию $g^{(1)}$. Очевидно, что $g(x)=x$. Следовательно, равенствами (2) примитивно-рекурсивно определена функция $I_1^{(1)}$.

Пример 2. Возьмем число 0 и функцию $I_2^{(2)}$. Напишем схему примитивной рекурсии

$$\begin{cases} g(0)=0, \\ g(x+1)=I_2^{(2)}(x, g(x)). \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, что функция g, определяемая этой схемой, тождественно равна нулю. Следовательно, равенствами (3) примитивно-рекурсивно определена константная функция $0^{(1)}$.

Замечание 1′. *Если функция $g^{(1)}$ определена примитивно-рекурсивно через функцию $f^{(2)}$ и число k и функция $f^{(2)}$ интуитивно-вычислима, то и функция g интуитивно-вычислима.*

Замечание 2′. *Если функция $g^{(1)}$ определена примитивно-рекурсивно через функцию $f^{(2)}$ и число k и функция $f^{(2)}$ всюду определена, то и функция g всюду определена.*

Если функция $f^{(2)}$ не всюду определена, то функция $g^{(1)}$ может быть уже не всюду определена. Рассмотрим этот случай подробнее. В силу первого из равенств (1), функция g всегда определена в 0. Далее, в силу второго из равенств (1), если g определена в x и f определена для пары $\langle x, g(x)\rangle$, то g определена в $x+1$. С другой стороны, если g не определена в x, то g не определена и в $x+1$ [это следует из второго из равенств (1) и принятого на стр. 30 соглашения о понимании равенств вида $f(a)=g(b)$]. Поэтому, если g не является всюду определенной, то она не определена «начиная с некоторого места». Иными словами, возможны два случая:

1° существует такое x^0, что g определена для всех $x \leqslant x^0$ и не определена для всех $x > x^0$ [при этом, очевидно, f определена для всех пар $\langle x, g(x)\rangle$ при $x < x^0$ и не определена для пары $\langle x^0, g(x^0)\rangle$],

2° такого x^0 не существует, и функция g всюду определена.

Напишем схему примитивной рекурсии для общего случая. Пусть мы имеем две функции $f_1^{(n-1)}$ и $f_2^{(n+1)}$.

Тогда равенства

$$\begin{cases} g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ = f_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \\ g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+1, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ = f_2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots \\ \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) \end{cases} \tag{4}$$

однозначно определяют некоторую функцию $g^{(n)}$.

Мы будем говорить, что функция $g^{(n)}$ определена через функции $f_1^{(n-1)}$, $f_2^{(n+1)}$ при помощи *операции примитивной рекурсии* (по i-му аргументу), или — *по схеме примитивной рекурсии* (по i-му аргументу), или, короче, *примитивной рекурсией* (по i-му аргументу), или, наконец, *примитивно-рекурсивно*. Схема (1) представляет собой частный случай схемы (4).

Пример 3. Возьмем функции $I_1^{(1)}$ и $\lambda_3^{(3)}$. Напишем схему примитивной рекурсии по первому аргументу

$$\begin{cases} g(0, y) = I_1^{(1)}(y) = y, \\ g(x+1, y) = \lambda_3^{(3)}(x, y, g(x, y)) = g(x, y)+1. \end{cases} \tag{5}$$

Равенства (5) примитивно-рекурсивно определяют через функции $I_1^{(1)}$, $\lambda_3^{(3)}$ функцию $g^{(2)}$. Легко видеть, что $g(x, y) = x+y$. Следовательно, равенствами (5) примитивно-рекурсивно определена функция sum (п. 2, прим. 1).

Замечание 1. *Операция примитивной рекурсии сохраняет интуитивную вычислимость*: если функция $g^{(n)}$ получена примитивной рекурсией (по некоторому i-му аргументу) из функций $f_1^{(n-1)}$, $f_2^{(n+1)}$ и функции f_1, f_2 интуитивно-вычислимы, то и функция g интуитивно-вычислима.

Замечание 2. *Операция примитивной рекурсии сохраняет всюду-определенность.*

Если функция f_1 не всюду определена, то на соответствующем кортеже (а значит, и на всех следующих) не определена и функция g. Если функция f_2 не всюду определена, то функция g может быть, а может и не быть всюду определена. Более точно, предположим, что примитивная рекурсия происходит по i-тому аргументу, и фиксируем кортеж $\alpha^0 = \langle x_1^0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0 \rangle$. Если f_1 не определена на этом кортеже, то, каково бы ни было x_i, функция g не определена на кортеже $\langle x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0 \rangle$. Если f_1 определена на кортеже α^0, то g определена на кортеже $\langle x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, 0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0 \rangle$. Тогда (как легко убедиться, повторяя рассуждения, проведенные на стр. 49 для случая $n = 1$) либо g всюду определена, либо существует такое x_i^0, что g определена на всех кортежах $\langle x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0 \rangle$, где $x_i \leqslant x_i^0$, и не определена ни на одном кортеже $\langle x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0 \rangle$, где $x_i > x_i^0$.

Замечание 3. Замечания 1 и 2 могут быть сформулированы следующим образом: *каждый из классов* $\mathcal{F}_{\text{и.в}}$ *и* $\mathcal{F}_{\text{в.о}}$, введенных в замечании 3 п. 3, *замкнут относительно операции примитивной рекурсии.*

8. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЙ

Все константные функции $y^{(s)}$ $(y \in N, s \in N)$ тривиальным образом интуитивно-вычислимы. Функции выбора аргумента $I_k^{(s)}$ (рассматриваемые на N^s) и функции следования $\lambda_k^{(s)}$ также интуитивно-вычислимы.

Функция $y = \sqrt{x}$ интуитивно-вычислима, но не всюду определена *). Функция $y = [\sqrt{x}]$ **) интуитивно-вычислима и уже всюду определена.

Функция $z = x^y$ интуитивно-вычислима и определена всюду, кроме пары $\langle 0, 0 \rangle$.

Функция $z = x - y$ интуитивно-вычислима, но не определена для всех пар $\langle x, y \rangle$, где $x < y$. Функция $\operatorname{adif}(x, y) = |x - y|$ также интуитивно-вычислима, но уже всюду определена.

Введем еще «урезанную разность». Пусть $x \dot{-} y = x - y$, если $x \geqslant y$, и $x \dot{-} y = 0$, если $x < y$. Функция $\operatorname{dif}(x, y) = x \dot{-} y$ интуитивно-вычислима и всюду определена.

---

*) Еще раз напоминаем, что под *функцией* мы всюду, где противное не оговорено, понимаем функцию типа $N^s \to N$ при каком-нибудь s.

** $[x]$ — целая часть числа x.

Функции $\mathrm{sum}(x, y) = x + y$ и $\mathrm{prod}(x, y) = x \cdot y$ также интуитивно-вычислимы и всюду определены.

Простыми теоретико-множественными рассуждениями можно показать, что *не всякая функция интуитивно-вычислима*. В самом деле, всех функций (всевозможных типов $N^s \longrightarrow N$) — несчетное множество. А множество интуитивно-вычислимых функций — счетное. Ведь каждой интуитивно-вычислимой функции по самому смыслу понятия вычислимости может быть поставлен в соответствие русский текст, объясняющий, как вычислять ее значения. Но каждый русский текст есть кортеж знаков, взятых из конечного алфавита (русские буквы плюс математические символы плюс знаки препинания, включая пропуск между словами, и т. д.). А как известно, если множество M — конечное, то множество M^∞ — счетное. Следовательно, русских текстов и, тем более (ведь не всякий русский текст определяет некоторую вычислимую функцию), интуитивно-вычислимых функций — счетное множество.

В § 9 (п. 2, примеры 2, 10, 11) будет построен индивидуальный пример функции, не вычислимой в смысле того определения, которое мы дадим в § 6.

§ 3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Хотя теория вычислимых функций и не является частью математической логики, при разработке этой теории оказалось весьма удобным и вошло в традицию использование простейших понятий математической логики. Их изложению и посвящен настоящий параграф.

1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ

В литературе по математической логике термин «высказывание» или встречается вовсе без определения *), или сопровождается немногословными комментариями, суть которых сводится к тому, что высказывания являются истинными или ложными **). Мы также не собираемся давать определения этому термину, считая, что его значение становится ясным из первых же примеров его употребления: например,

$$2\times 2=4,$$

$$2\times 2=5$$

суть высказывания.

На самом деле значение термина «высказывание» не выясняется до конца из подобных примеров. Так, остается неясным, например, различны или нет высказывания

$$2\times 2=4, \tag{1}$$

$$4=2\times 2, \tag{2}$$

$$\text{дважды два — четыре.} \tag{3}$$

---

*) См. русский перевод книги А. Тарского [1941], стр. 31.

**) См. русский перевод книги Д. Гильберта и В. Аккермана [1938], стр. 19.

Возможны две точки зрения: можно считать, что мы встречаемся здесь с одним и тем же высказыванием, только по-разному записанным, а можно считать, что это разные высказывания, имеющие один и тот же смысл. Для нас — в рамках данного изложения — безразлична (т. е. в равной степени нас устроит) любая из этих точек зрения*). Такое несколько расплывчатое толкование термина «высказывание» вполне пригодно, как нам кажется, для понимания дальнейшего.

Итак, высказывания бывают истинные и ложные, причем каждое высказывание либо истинно, либо ложно. Например,

$$2 \times 2 = 4$$

есть истинное высказывание, а

$$2 \times 2 = 5$$

есть ложное высказывание.

$$2 \times 2 = x$$

является высказыванием лишь в том случае, если через x обозначено какое-то конкретное число. Если же x — просто буква, вместо которой могут подставляться числа (т. е. числовая переменная), то «$2 \times 2 = x$» не высказывание, а высказывательная форма.

Высказывательная форма — это выражение, содержащее одну или несколько переменных и становящееся высказыванием при подстановке чисел, кортежей или, вообще, элементов каких-либо множеств вместо своих переменных. (Так, форма «$2 \times 2 = x$» становится высказыванием, если вместо x подставить какое-либо число, — истинным высказыванием, если вместо x подставить 4, и ложным в остальных случаях.) Предполагается, что для каждой переменной, входящей в высказывательную форму, указано некоторое множество элементов — область значений этой переменной, — которые разрешается подставлять

---

*) Можно было бы, следуя, например, А. Чёрчу [1956], различать *предложения* и *суждения* и говорить, что (1), (2), (3) суть различные предложения, выражающие одно и то же суждение. Мы этого делать не будем; мы будем употреблять термин «высказывание» для обозначения как суждений, так и предложений, не уточняя, что же именно — суждение или предложение — имеется в виду в каждом конкретном случае.

вместо этой переменной (в нашем изложении это будет, как правило, натуральный ряд). При этом, вообще говоря, не требуется, чтобы высказывательная форма была всюду определена (т. е. превращалась в высказывание при подстановке **любых** значений, взятых из областей значений своих переменных). Так, если считать областью значений переменных x, y натуральный ряд, высказывательная форма «$\frac{x}{y}=1$» не превращается в высказывание, а становится бессмысленной при $y=0$ и любом x. Вообще, если областью значений переменных $x_1, \ldots, x_s$ и y является множество M и f есть не всюду определенная функция типа $M^s \longrightarrow M$, то «$f(x_1, \ldots, x_s)=y$» — не всюду определенная высказывательная форма. Различают одноместные, двухместные, трехместные и т. д. высказывательные формы по числу входящих в них переменных. Так,

$$2 \times 2 = x$$

— одноместная высказывательная форма, а

$$t \times w = x$$

— трехместная высказывательная форма. Сами высказывания можно считать *нульместными* высказывательными формами.

Замечание 1. До сих пор, говоря о переменных, входящих в состав высказывательных форм, мы имели в виду лишь переменные, вместо которых имело смысл подставлять их значения, т. е. так называемые *свободные* переменные. Однако в состав высказывательных форм могут входить и другие, так называемые *связанные* переменные, вместо которых не имеет смысла подставлять их значения. Так, в выражении

$$\int_0^y \sin^2 x\, dx = z$$

переменные y и z являются свободными (при подстановке вместо них их конкретных значений мы получаем конкретное высказывание), а переменная x — связанной.

Подчеркнем, что высказывательная форма считается s-местной, если она содержит s свободных переменных. Всех переменных в форме может быть и больше. Так, высказывание (нульместная форма) может содержать больше чем 0 переменных (разумеется, связанных), как, например, высказывание

$$\sum_{i=1}^{100} \int\limits_{\frac{i-1}{100}}^{\frac{i}{100}} x^2 dx = 5,$$

содержащее две связанных переменных (i и x).

Замечание 2. Произведенное только что, в целях уточнения, деление переменных на свободные и связанные требует, в свою очередь, дальнейших уточнений. Дело в том, что могут встретиться каверзные случаи, когда одна и та же переменная является в данной форме и связанной, и свободной. Так обстоит дело с переменной x в высказывательной форме

$$\int\limits_0^x f(x)\,dx = 1. \tag{4}$$

Приходится поэтому различать *свободные* и *связанные* вхождения данной переменной. Так, переменная x имеет три вхождения в форму (4): над знаком интеграла, после левой скобки и после буквы d; первое из этих вхождений — свободное (если вместо него подставить какое-либо значение переменной x, то получится осмысленное выражение), два других — связанные (ибо здесь подобная подстановка неуместна). В порядке дальнейшего уточнения нашей терминологии будем называть переменную, входящую в форму, *свободной*, если она имеет хоть одно свободное вхождение, и *связанной*, если все ее вхождения — связанные. Будем далее под *подстановкой вместо свободной переменной* какого-либо *ее значения* понимать замену этим значением всех свободных вхождений данной переменной и только их. Так, при подстановке числа $\frac{1}{2}$ вместо x в форму (4) получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 1$$

$\left(\text{а не } \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}\right) d\,\frac{1}{2} = 1\right)$.

Из высказываний можно посредством так называемых операций исчисления высказываний, или операций алгебры логики, образовывать новые высказывания. Таких операций мы рассмотрим четыре: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию и импликацию.

Отрицание высказывания A обозначается $\bar{A}$ и означает высказывание «не A» или «неверно, что A», т. е. высказывание, утверждающее, что A ложно. Очевидно, $\bar{A}$ истинно, если A ложно, и $\bar{A}$ ложно, если A истинно.

Конъюнкция высказываний A и B обозначается $A \& B$ и означает высказывание «A и B», т. е. высказывание, утверждающее, что оба высказывания A и B истинны. Очевидно, $A \& B$ истинно лишь в том случае, если и A и B истинны, в остальных случаях $A \& B$ ложно.

Дизъюнкция высказываний A и B обозначается $A \vee B$ и означает высказывание «A или *) B», т. е. высказывание, утверждающее, что хотя бы одно из высказываний A и B истинно. Очевидно, $A \vee B$ ложно лишь в том случае, если и A и B ложны; в остальных случаях $A \vee B$ истинно.

Импликация высказываний A и B обозначается $A \to B$ и означает высказывание «если A, то B» или «из A следует, что B» **), т. е. высказывание, утверждающее, что если A истинно, то и B истинно. Очевидно, $A \to B$

*) «Или» — неразделительное.

**) Здесь и в дальнейшем необходимо иметь в виду, что в математическом языке принято специфическое употребление союза «если ..., то» и слова «следует», расходящееся подчас с обычным. Именно, если в условном предложении посылка невозможна или неверна, то все предложение считается верным (каково бы ни было заключение). Так, считаются верными предложения: «если $2 \times 2 = 5$, ложно лишь в том случае, если A истинно, а B ложно; в остальных случаях $A \to B$ истинно.

Какие бы мы ни имели операции для образования одних высказываний из других, эти же самые операции способны из высказывательных форм производить новые высказывательные формы. Так, конъюнкцией высказывательных форм $x < 3$ и $x > 10$ служит высказывательная форма $x < 3 \& x > 10$. Вообще, имея высказывательные формы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, можно, очевидно, образовать формы $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть всюду определенные высказывательные формы (т. е. подстановка в них *любых* значений их переменных делает их высказываниями), смысл полученных из них новых форм ясен без специальных пояснений (т. е. без специальных пояснений ясно, какие высказывания получаются из них при замене переменных их значениями). Если же разрешать в качестве $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и не всюду определенные высказывательные формы, смысл производных форм уточняется следующим образом.

Высказывательная форма $\overline{\mathfrak{A}}$ истинна для тех значений переменных, для которых $\mathfrak{A}$ ложна, ложна для тех значений переменных, для которых $\mathfrak{A}$ истинна, и не определена для тех значений переменных, для которых $\mathfrak{A}$ не определена.

Высказывательная форма $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ истинна для тех значений переменных, для которых и $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ истинны, ложна для тех значений переменных, для которых хотя бы одна из форм $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ ложна. не определена для тех значений переменных, для которых либо обе формы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не определены, либо одна из форм истинна, а другая не определена.

Высказывательная форма $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ истинна для тех значений переменных, для которых хотя бы одна из форм

то $3 \times 3 = 9$» и «если $2 \times 2 = 5$, то $3 \times 3 = 10$» (синонимичные конструкции: «из $2 \times 2 = 5$ следует, что $3 \times 3 = 9$» и «из $2 \times 2 = 5$ следует, что $3 \times 3 = 10$»). Нередко применяемые в расчете на внешний эффект формулировки вроде «из лжи следует все, что угодно» или «если $2 \times 2 = 5$, то существуют ведьмы» надлежит воспринимать как тривиальные следствия из соглашений об употреблении слов «если ..., то» и «следует», облеченные в нарочито парадоксальную форму.

$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ истинна, ложна для тех значений переменных, для которых обе формы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ ложны, и не определена в остальных случаях.

Высказывательная форма $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ истинна для тех значений переменных, для которых $\mathfrak{A}$ ложна или $\mathfrak{B}$ истинна, ложна для тех значений переменных, для которых $\mathfrak{A}$ истинна и $\mathfrak{B}$ ложна, и не определена в остальных случаях.

Существуют, однако, операции, применимые только к высказывательным формам, не являющимся высказываниями, т. е. к формам, содержащим свободные переменные. Это так называемые операции *навешивания кванторов*, приводящие от высказывательных форм к высказываниям или высказывательным формам.

Пусть $\mathfrak{A}$ — высказывательная форма, содержащая свободную переменную x и не содержащая никаких других свободных переменных. Рассмотрим следующее предложение: «для всякого значения переменной x высказывание, получающееся подстановкой этого значения вместо x в $\mathfrak{A}$, истинно», или короче: «для всякого x высказывание $\mathfrak{A}$ истинно», или другими словами: «для всякого x имеет место (или справедливо) $\mathfrak{A}$», или совсем коротко: «для всякого x $\mathfrak{A}$». Это предложение мы обозначим $(\forall x)\mathfrak{A}$. В случае, если $\mathfrak{A}$ — всюду определенная высказывательная форма (т. е. становится высказыванием при подстановке вместо x л ю б о г о значения, взятого из области значений этой переменной), $(\forall x)\mathfrak{A}$ всегда является высказыванием, причем без дальнейших пояснений ясно, когда оно истинно, а когда ложно. В общем же случае понимание выражения $(\forall x)\mathfrak{A}$ уточняется следующим образом. Если при подстановке в $\mathfrak{A}$ л ю б о г о значения переменной x получается истинное высказывание, $(\forall x)\mathfrak{A}$ есть истинное высказывание; если при подстановке в $\mathfrak{A}$ н е к о т о р о г о значения переменной x получается ложное высказывание, $(\forall x)\mathfrak{A}$ есть ложное высказывание; в остальных случаях (т. е. когда существует такое значение переменной x, подстановка которого в $\mathfrak{A}$ не обращает $\mathfrak{A}$ в высказывание, и не существует такого значения переменной x, подстановка которого в $\mathfrak{A}$ превращает $\mathfrak{A}$ в ложное высказывание) $(\forall x)\mathfrak{A}$ не является ни истинным, ни ложным (т. е. вообще не является высказыванием).

Знак $\forall$ называется знаком квантора общности или просто *квантором общности*, а выражение $(\forall x)$ — *квантором общности по переменной* x.

Пусть теперь форма $\mathfrak{A}$ содержит ровно две свободные переменные: x и y. Тогда выражение $(\forall x)\mathfrak{A}$ есть одноместная высказывательная форма с единственной свободной переменной y. Вообще, если дана s-местная форма $\mathfrak{A}$, содержащая свободные переменные $x_1, \ldots, x_s$, то выражение $(\forall x_i)\mathfrak{A}$ есть $(s-1)$-местная форма, содержащая свободные переменные $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s$ (переменная x_i, очевидно, — связанная: вместо нее нельзя подставлять ее значения). Переход от формы $\mathfrak{A}$ к форме (в частности, высказыванию) $(\forall x_i)\mathfrak{A}$ называется *навешиванием* на форму $\mathfrak{A}$ *квантора общности* по переменной x_i.

Пусть снова $\mathfrak{A}$ — форма, содержащая единственную свободную переменную x. Через $(\exists x)\mathfrak{A}$ обозначим предложение: «существует такое значение переменной x, что высказывание, получающееся подстановкой этого значения вместо x в $\mathfrak{A}$, истинно», или короче: «существует такое x, что высказывание $\mathfrak{A}$ истинно», или другими словами: «существует такое x, что имеет место (справедливо) $\mathfrak{A}$», или совсем коротко: «существует такое x, что $\mathfrak{A}$». $(\exists x)\mathfrak{A}$ является истинным высказыванием, если существует такое значение переменной x, при подстановке которого в $\mathfrak{A}$ получается высказывание, и притом истинное; $(\exists x)\mathfrak{A}$ является ложным высказыванием, если при любом значении переменной x форма $\mathfrak{A}$ становится высказыванием, и притом ложным; в остальных случаях $(\exists x)\mathfrak{A}$ не является высказыванием.

Знак $\exists$ называется знаком квантора существования или просто *квантором существования*, а выражение $(\exists x)$ — *квантором существования по переменной* x.

Ясно, что если $\mathfrak{A}$ есть s-местная высказывательная форма, содержащая свободные переменные $x_1, \ldots, x_s$, то $(\exists x_i)\mathfrak{A}$ есть $(s-1)$-местная высказывательная форма, содержащая свободные переменные $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots$ $\ldots, x_s$. Переход от формы $\mathfrak{A}$ к форме $(\exists x_i)\mathfrak{A}$ называется *навешиванием* на фому $\mathfrak{A}$ *квантора существования* по переменной x_i.

Замечание 3. Пусть $\mathfrak{A}$ — высказывательная форма, содержащая единственную свободную переменную x, а M —

какое-то множество. Полезно ввести специальные обозначения для предложений «для всякого значения переменной x, принадлежащего множеству M, высказывание, получающееся подстановкой этого значения вместо x в $\mathfrak{A}$, истинно» (сокращенно: «для всякого x из M $\mathfrak{A}$») и «существует такое значение переменной x, принадлежащее множеству M, что высказывание, получающееся подстановкой этого значения вместо x в $\mathfrak{A}$, истинно» (сокращенно: «существует такое x из M, что $\mathfrak{A}$»). Первое из них мы обозначим через $(\forall x \in M)\mathfrak{A}$, второе — через $(\exists x \in M)\mathfrak{A}$. Смысл выражений $(\forall x_i \in M)\mathfrak{A}$, $(\exists x_i \in M)\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — высказывательная форма со свободными переменными $x_1, \ldots, x_s$, ясен без дальнейших разъяснений.

2. ИСТИННОСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Будем считать, что каждое высказывание обладает некоторым *истинностным значением*. Именно, каждому истинному высказыванию припишем истинностное значение «истина» (сокращенно — «*и*»), а каждому ложному высказыванию — истинностное значение «ложь» (сокращенно — «*л*»). В табл. 1 показано, как истинностные значения высказываний, полученных применением операций алгебры логики к некоторым исходным высказываниям, зависят от истинностных значений этих исходных высказываний.

Таблица 1

Истинностные значения высказывания						
A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \to B$
и	*и*	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*
л	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*и*
л	*л*	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*

Пример. Проверьте (используя табл. 1), что истинностное значение высказывания $\overline{[A \to (B \vee C)]} \vee [\overline{A \& \bar{C}}]$

выражается через истинностные значения высказываний A, B, C посредством табл. 2. Проверьте, что та же табл. 2 выражает зависимость истинностных значений высказывания $(\overline{A \& B}) \vee C$ от истинностных значений высказываний A, B, C.

Таблица 2

Истинностные значения высказывания			
A	B	C	$\overline{[A \to (B \vee C)]} \vee \overline{[A \& \bar{C}]}$
и	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*и*
л	*л*	*и*	*и*
л	*л*	*л*	*и*

Начиная с этого момента, мы **отождествим высказывание с его истинностным значением***). Мы можем писать теперь

$$(2 \times 2 = 4) = \text{и},$$
$$(2 \times 2 = 5) = \text{л}.$$

Отождествив высказывание с его истинностным значением, мы тем самым считаем равными высказывания с одинаковым истинностным значением и получаем право писать, например,

$$\overline{[A \to (B \vee C)]} \vee \overline{[A \& \bar{C}]} = (\overline{A \& B}) \vee C, \qquad (*)$$

поскольку, в силу только что приведенного примера, для любых A, B, C истинностные значения высказываний,

*) Прецедент такого отождествления встречается, например, у С. К. Клини [1952] (стр. 202—203 русского издания).

стоящих в левой и правой частях равенства (*) (а стало быть, в силу принятого отождествления, и сами эти высказывания), совпадают.

Аналогично, подсчетом истинностных значений (что облегчается использованием табл. 1) без труда получаются равенства (1) – (10).

$$\overline{\overline{A}} = A, \tag{1}$$

$$A \mathbin{\&} B = B \mathbin{\&} A, \qquad A \vee B = B \vee A, \tag{2}$$

$$(A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C = A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} C), \qquad (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C). \tag{3}$$

Равенства (3), выражающие ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции, позволяют употреблять бесскобочную запись вроде $A \vee B \vee C \vee D$.

$$A \mathbin{\&} A = A, \qquad A \vee A = A, \tag{4}$$

$$A \mathbin{\&} \textit{и} = A, \qquad A \mathbin{\&} \textit{л} = \textit{л}, \qquad A \vee \textit{и} = \textit{и}, \qquad A \vee \textit{л} = A. \tag{5}$$

Равенства (1) — (5) выражают свойства отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, взятых в отдельности. Следующие равенства (6) – (7) выражают связь между этими операциями:

$$\left.\begin{aligned} (A \mathbin{\&} B) \vee C &= (A \vee C) \mathbin{\&} (B \vee C), \\ (A \vee B) \mathbin{\&} C &= (A \mathbin{\&} C) \vee (B \mathbin{\&} C), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\overline{A \mathbin{\&} B} = \overline{A} \vee \overline{B}, \qquad \overline{A \vee B} = \overline{A} \mathbin{\&} \overline{B}. \tag{7}$$

Конъюнкцию, дизъюнкцию и импликацию можно выразить друг через друга и отрицание:

$$A \mathbin{\&} B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} = \overline{A \to \overline{B}}, \tag{8}$$

$$A \vee B = \overline{\overline{A} \mathbin{\&} \overline{B}} = \overline{A} \to B, \tag{9}$$

$$A \to B = \overline{A} \vee B = \overline{A \mathbin{\&} \overline{B}}. \tag{10}$$

Какова бы ни была одноместная высказывательная форма $\mathfrak{A}$ со свободной переменной x, истинностные значения высказываний $\overline{(\forall x)\mathfrak{A}}$ и $(\exists x)\overline{\mathfrak{A}}$ совпадают; точно так же совпадают истинностные значения высказываний $\overline{(\exists x)\mathfrak{A}}$

и $(\forall x)\overline{\mathfrak{A}}$. Мы можем теперь записать это в виде

$$\overline{(\forall x)\mathfrak{A}} = (\exists x)\overline{\mathfrak{A}}, \tag{11'}$$

$$\overline{(\exists x)\mathfrak{A}} = (\forall x)\overline{\mathfrak{A}}. \tag{12'}$$

Отрицание высказывания, начинающегося с квантора, условимся для краткости обозначать более короткой черточкой, простирающейся только над первым квантором; например, вместо $\overline{(\forall x)(\exists y)\mathfrak{A}}$ будем писать $\overline{(\forall x)}(\exists y)\mathfrak{A}$, вместо $\overline{(\forall x)\overline{(\exists y)\mathfrak{A}}}$ будем писать $\overline{(\forall x)}\,\overline{(\exists y)\mathfrak{A}}$ или, еще короче, $\overline{(\forall x)}\,\overline{(\exists y)}\mathfrak{A}$. Тогда только что написанные равенства (11′) и (12′) перепишутся в виде

$$\overline{(\forall x)}\mathfrak{A} = (\exists x)\overline{\mathfrak{A}}, \tag{11}$$

$$\overline{(\exists x)}\mathfrak{A} = (\forall x)\overline{\mathfrak{A}}. \tag{12}$$

Из этих равенств и равенства (1) вытекает, что кванторы общности и существования выражаются друг через друга. Именно, из (1) и (11) вытекает

$$(\forall x)\mathfrak{A} = \overline{(\exists x)}\,\overline{\mathfrak{A}}, \tag{13}$$

а из (1) и (12) вытекает

$$(\exists x)\mathfrak{A} = \overline{(\forall x)}\,\overline{\mathfrak{A}}. \tag{14}$$

3. ПРЕДИКАТЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Начнем с примера.

Пример 1. Высказывательная форма $x > 3$ каждому числу ставит в соответствие некоторое высказывание и тем самым некоторое истинностное значение: числу 0 — высказывание $0 > 3$ (истинностное значение *л*), числу 100 — высказывание $100 > 3$ (истинностное значение *и*), числу 3 — высказывание $3 > 3$ (истинностное значение *л*) и т. д. Мы имеем, таким образом, две функции, аргументы которых суть числа, а значения — высказывания (у одной) и истинностные значения (у другой). В силу принятого нами в предыдущем пункте отождествления высказываний с их истинностными значениями обе эти функции совпадают, и мы имеем не две, а одну функцию. Обозначим эту функцию через T. В согласии с тем, как вообще вводятся в рассмотрение новые функции (см. пример 1 из п. 2 § 2), мы можем ввести функцию T равенством

$$T(x) = x > 3. \tag{1}$$

Функция T из примера 1 является одноместным предикатом. *Предикатами* вообще называются функции, значениями которых служат высказывания или, что для нас то же самое, истинностные значения. Совсем коротко определение предиката можно дать так: *предикатом в множестве M* называется функция типа $M \to \{\text{и}, \text{л}\}$. Очевидно, каждой одноместной высказывательной форме $\mathfrak{A}$ со свободной переменной x можно сопоставить некоторый предикат P, вводимый равенством

$$P(x) = \mathfrak{A} \tag{2}$$

(равенство (1) есть частный случай равенства (2)). Если x означает некоторый конкретный объект, то $P(x)$, как обычно, означает значение предиката P для объекта x. Если же x просто буква (т. е. переменная), то $P(x)$, очевидно, есть высказывательная форма. Сочетая один и тот же предикат P с различными переменными x, y, z и т. д., мы получим различные высказывательные формы $P(x)$, $P(y)$, $P(z)$ и т. д. (ясно, что все эти формы в каком-то естественном смысле «эквивалентны» друг другу; однако для наших целей нам нет нужды в этом разбираться).

Пример 2. С высказывательной формой $x > y$ можно сопоставить два двухместных предиката, T_1 и T_2:

$$T_1(x, y) = x > y,$$
$$T_2(y, x) = x > y.$$

Если областью значений переменной x служит натуральный ряд N, а областью значений переменной y — множество действительных чисел D, то предикат T_1 определен на внешнем произведении $[N, D]$, а предикат T_2 — на внешнем произведении $[D, N]$.

Пусть вообще $\mathfrak{A}$ есть s-местная высказывательная форма со свободными переменными $x_1, \ldots, x_s$. Обозначим через M_i множество допустимых значений переменной x_i. Этой форме можно сопоставить $s!$ предикатов.

Именно, для каждой перестановки $(j_1, \ldots, j_s)$ из чисел $1, \ldots, s$ введем предикат $P_{j_1, \ldots, j_s}$, определяемый равенством

$$P_{j_1, \ldots, j_s}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}) = \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Предикат $P_{j_1, \ldots, j_s}$ определен на внешнем произведении $[M_{j_1}, \ldots, M_{j_s}]$.

С другой стороны, если P есть s-местный предикат, а $u_1, \ldots, u_s$ — переменные, то $P(u_1, \ldots, u_s)$ — высказывательная форма.

Иногда для удобства высказывательная форма будет заключаться в скобки. Например,

$$T(z, x, y) = (x = y + z \,\&\, x > y!). \tag{4}$$

Замечание 1. Если $u_1, \ldots, u_s$ обозначают какие-то объекты, то $P(u_1, \ldots, u_s)$ — значение предиката на наборе $\langle u_1, \ldots, u_s \rangle$, т. е. высказывание. Поэтому мы можем писать «пусть $P(u_1, \ldots, u_s)$», или «если $P(u_1, \ldots, u_s) \ldots$», или «неверно, что $P(u_1, \ldots, u_s)$» и т. п. Поскольку, однако, мы не различаем высказываний и истинностных значений, мы можем с тем же успехом писать «пусть $P(u_1, \ldots, u_s) = \mathit{и}$», или «если $P(u_1, \ldots, u_s) = \mathit{и}$», или «неверно, что $P(u_1, \ldots, u_s) = \mathit{и}$» и т. п.

Еще раз подчеркнем, что предикаты — частный случай функций и к ним применимо все, сказанное в § 2 о функциях и их обозначениях. Так, например, мы будем различать предикаты, определенные *на* M и *в* M. Если нам понадобится, мы будем справа сверху от символа, обозначающего предикат, указывать в круглых скобках число его аргументов, например, $P^{(2)}$. Подобно тому, как на стр. 29 мы допустили нульместные функции, можно допускать и нульместные предикаты. Существует ровно два всюду определенных нульместных предиката — $\mathit{и}^{(0)}$ и $\mathit{л}^{(0)}$.

Замечание 2. В добавление к указанным выше способам введения в рассмотрение функций (§ 2, п. 2, пример 1) мы будем употреблять иногда еще один, специфический для предикатов, способ. Именно, желая упомянуть какой-либо предикат, мы разрешим себе для краткости просто взять в кавычки соответствующую высказывательную форму. Так, предикат T из примера 1 мы можем обозначить просто «предикат „$x > 3$“». Разумеется, этот способ однозначен лишь в применении к одноместным предикатам. Однако мы будем пользоваться этим способом и для многоместных предикатов в тех случаях, когда нам безразлично, о каком именно из $s!$ предикатов, сопоставленных данной s-местной высказывательной форме, идет речь. Так, если мы говорим: «введем предикат „$x > y$“», это означает, что мы вводим какой-то (все равно, какой) из предикатов T_1 и T_2 примера 2; а если мы говорим «предикат „$x > y$“ интуитивно-вычислим», то это означает, что каждый из предикатов T_1 и T_2 примера 2 интуитивно-вычислим.

Чтобы задать предикат, достаточно задать высказывательную форму и для каждой переменной указать область ее значений. Как правило, впрочем, область значений переменной не будет указываться явно, а будет ясна из контекста. Чаще всего этой областью будет служить натуральный ряд N.

В п. 3 § 2 мы определили операцию подстановки функций в функцию. Определим теперь операцию подстановки функций в предикат. Проделаем, например, это для регулярной подстановки.

Пусть мы имеем предикат $P^{(r)}$ в M и функции $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots, f_r^{(n)}$ $(r > 0)$ типа $M^n \to M$. Образуем из них предикат $Q^{(n)}$:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = P(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n)).$$

Про так построенный предикат Q мы будем говорить, что предикат Q получен *регулярной подстановкой* функций $f_1, \ldots, f_r$ в предикат P.

Также совершенно аналогично определению из § 2 определяется просто *подстановка* функций в предикат.

Пример 3. Рассмотрим в N^∞ предикат Div : $\mathrm{Div}(x, y) = (y$ делится на $x)$ *) и функции $f_1(x) = x^3$, $f_2(x, y) = x^y$, $\mathrm{sum}(x, y) = x + y$.

1) Регулярной подстановкой функций f_2 и sum в предикат Div можно получить два предиката: „x^y делится на $x + y$“ и „$x + y$ делится на x^y“.

*) «y делится на x» означает, что существует такое z, для которого $z \cdot x = y$. Следовательно, в частности, $\mathrm{Div}(0, 0) = u$.

2) Просто подстановкой функций f_1, f_2, sum в предикат Div можно получить неограниченное (за счет фиктивных переменных) количество предикатов, например:

$$P_1(x) = (x^3 \text{ делится на } x),$$
$$P_2(x, y) = (x^3 \text{ делится на } x),$$
$$P_3(x, y) = (y \text{ делится на } x + y),$$
$$P_4(x, y) = (x \text{ делится на } y),$$
$$P_5(x) = (x \text{ делится на } x),$$
$$P_6(x, y) = (x^y \text{ делится на } x^3).$$

Легко видеть, что $P_1(x) = \boldsymbol{\text{и}}$ для всех x; $P_2(x, y) = \boldsymbol{\text{и}}$ для всех пар $\langle x, y\rangle$; $P_3(x, y) = \boldsymbol{\text{и}}$ только для пар $\langle 0, y\rangle$; $P_4(x, y) = \boldsymbol{\text{и}}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Div}(y, x) = \boldsymbol{\text{и}}$; $P_5(x) = \boldsymbol{\text{и}}$ для всех x; $P_6(x, y) = \boldsymbol{\text{и}}$ для пар $\langle x, y\rangle$, в которых $y \geqslant 3$ и для пар $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 1, 0\rangle$, $\langle 0, 2\rangle$, $\langle 1, 1\rangle$, $\langle 1, 2\rangle$.

Остается верным, разумеется, и аналог Теоремы о подстановке (теорема 1 из § 2).

Теорема 1. *Если предикат Q получен подстановкой функций $f_1, \ldots, f_r$ в предикат P, то предикат Q может быть получен конечное число раз проделанной регулярной подстановкой из исходного предиката P, исходных функций $f_1, \ldots, f_r$, одноместных константных функций, функций выбора аргумента и нигде не определенных функций.*

Каждому предикату P в произвольном множестве M ставится в соответствие множество $\mathcal{E}\{x \in M \mid P(x) = \boldsymbol{\text{и}}\}$. Это множество называется *множеством истинности* предиката P. Мы будем обозначать множество истинности предиката P через $\overline{P}$. Каждому подмножеству L множества M соответствует один и только один предикат P на M такой, что $L = \overline{P}$. А именно: $P(x) = (x \in L)$. Следовательно, между подмножествами множества M и предикатами на M существует взаимно-однозначное соответствие.

В § 2 п. 6 было установлено взаимно-однозначное соответствие между подмножествами множества M и всюду определенными функциями типа $M \to \{0, 1\}$ («характеристическими функциями»). Получается тройное взаимно-однозначное соответствие между предикатами на M, подмножествами множества M и всюду определенными функциями типа $M \to \{0, 1\}$. Характеристическую функцию множества истинности предиката P (на M) мы будем также называть *характеристической функцией предиката* и обозначать ее через χ_P. Следовательно, по определению: $\chi_P = \chi_{\overline{P}}$ *).

Нам часто будет полезен в дальнейшем переход от множества $L \subseteq M$ к предикату „$x \in L$" или к характеристической функции χ_L; от предиката P (на M) к множеству $\overline{P}$ или к характеристической функции χ_P; и, наконец, от некоторой функции f типа $M \to \{0, 1\}$ к множеству $\mathscr{E}\{x \in M \mid f(x) = 1\}$ или к предикату „$f(x) = 1$".

Замечание. Как и в случае функций вообще, из s-местного предиката в M при фиксировании i-го аргумента получается $(s-1)$-местный предикат в M (ср. замечание в п. 2 § 2).

Рассмотренные нами в п. 1 операции над высказывательными формами — операции алгебры логики и операции навешивания кванторов — можно распространить и на предикаты и образовывать с помощью этих операций из одних предикатов другие. Займемся этим.

Если P есть предикат в M, то через $\bar{P}$ будем обозначать предикат (снова в M), принимающий значение *и* для тех $x \in M$, для которых P принимает значение *л*, и принимающий значение *л* для тех $x \in$ M, для которых P принимает значение *и*. Области определения предикатов P и $\bar{P}$, очевидно, совпадают. Если предикат P определен на всем M, то

$$\overline{\bar{P}} = M \setminus \overline{P}. \tag{5}$$

Пусть P есть s-местный предикат в M. Для любого $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle \in M^s$, входящего в область определения предиката P, значение отрицания высказывания $P(x_1, \ldots, x_s)$ совпадает со значением предиката $\bar{P}$ на $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$

$$\bar{P}(x_1, \ldots, x_s) = \overline{P(x_1, \ldots, x_s)}. \tag{6}$$

*) Понятие характеристической функции для не всюду определенных предикатов нам не понадобится.

Предикат $\overline{P}$ естественно называть *отрицанием предиката* P. Ввести такое же четкое понятие конъюнкции предикатов труднее.

Пример 4. Пусть P — двухместный предикат в M, а Q — трехместный предикат в M. Определим через P и Q несколько предикатов в M^∞.

$$R_1(x, y, z) = P(x, y) \mathbin{\&} Q(x, y, z)$$

R_1 — предикат в M^3. $\overline{R_1} = (\overline{P} \times M) \cap \overline{Q}$

$$R_2(x, y, z, u, v) = P(x, y) \mathbin{\&} Q(z, u, v)$$

R_2 — предикат в M^5. $\overline{R_2} = (\overline{P} \times M^3) \cap (M^2 \times \overline{Q})$

$$R_3(x, y, z, u) = P(x, y) \mathbin{\&} Q(x, y, z)$$

R_3 — предикат в M^4, u — фиктивное переменное. Для любых $x, y, z, u \in M$ $R_3(x, y, z, u) = R_1(x, y, z)$. $\overline{R_3} = \overline{R_1} \times M$

$$R_4(x, y, z, u) = P(x, y) \mathbin{\&} Q(x, z, u)$$

R_4 — предикат в M^4. Обозначим через H_Q цилиндр в M^4, восставленный из $\overline{Q}$ вдоль второй оси. Тогда $\overline{R_4} = (\overline{P} \times M^2) \cap H_Q$

$$R_5(x, y, z, u) = P(x, y) \mathbin{\&} Q(z, u, x),$$

$$R_6(x, y, z) = P(x, y) \mathbin{\&} Q(z, x, x).$$

Любой из предикатов $R_1 - R_6$ естественно называть конъюнкцией предикатов P и Q. Мы поступим так. Пусть P есть r-местный предикат в M, а Q есть s-местный предикат в M. Напишем равенство вида

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_t) = P(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}) \mathbin{\&} Q(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_s}), \tag{7}$$

где t — любое положительное число и каждая из переменных x_{i_k}, x_{j_i} $(1 \leqslant k \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s)$ есть одна из переменных x_m $(1 \leqslant m \leqslant t)$. Равенство (7) определяет предикат R в M^t. Любой предикат R, определенный равенством вида (7), мы будем называть *конъюнкцией предикатов* P и Q. Множество истинности $\overline{R}$ предиката R зависит, естественно, от множеств истинности $\overline{P}$, $\overline{Q}$ предикатов P и Q (см. пример 4). Мы не будем выражать эту зависимость в общем случае. Выделим лишь один простейший частный случай. Пусть P и Q суть s-местные предикаты в M. *Простейшей конъюнкцией* предикатов P и Q называется предикат R (тоже в M^s), определяемый равенством

$$R(x_1, \ldots, x_s) = P(x_1, \ldots, x_s) \mathbin{\&} Q(x_1, \ldots, x_s). \tag{8}$$

Для случая простейшей конъюнкции

$$\overline{R} = \overline{P} \cap \overline{Q}. \tag{9}$$

Теорема 2. *Если предикат R является конъюнкцией предикатов P и Q, то он также может быть получен при помощи подстановки* (фактически достаточно трех ее частных случаев: перестановки аргументов, идентификации аргументов и введения фиктивного аргумента) *и простейшей конъюнкции из предикатов P и Q.*

Доказательство. Пусть предикат R определен через предикаты P и Q согласно равенству (7). Из предиката P подстановкой получим предикат $P_1 : P_1(x_1, \ldots, x_l) = P(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})$. Аналогично подстановкой из предиката Q получим предикат $Q_1 : Q_1(x_1, \ldots, x_l) = Q(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$. А теперь очевидно, что $R(x_1, \ldots, x_l) = P_1(x_1, \ldots, x_l) \mathbin{\&} Q_1(x_1, \ldots, x_l)$.

Из доказательства теоремы 2 видно, что ее результат может быть немного усилен, конкретизирован в виде следующей теоремы 3.

Теорема 3. *Если предикат R является конъюнкцией предикатов P и Q, то он также может быть получен как простейшая конъюнкция результатов регулярной подстановки функций выбора аргумента $I_k^{(n)}$ в предикаты P и Q* (ср. с теоремой 1).

Аналогично дело обстоит с дизъюнкцией и импликацией.

Пусть P есть r-местный предикат в M, а Q есть s-местный предикат в M. Любой предикат R, определенный равенством вида

$$R(x_1, \ldots, x_l) = P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) \vee Q(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}), \tag{10}$$

где t — любое положительное число и каждая из переменных x_{i_k}, x_{j_l} $(1 \leqslant k \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s)$ встречается среди x_m $(1 \leqslant m \leqslant t)$, назовем *дизъюнкцией предикатов* P и Q.

Пусть P и Q суть s-местные предикаты в M. *Простейшей дизъюнкцией* предикатов P и Q назовем предикат R:

$$R(x_1, \ldots, x_s) = P(x_1, \ldots, x_s) \vee Q(x_1, \ldots, x_s). \tag{11}$$

Для простейшей дизъюнкции

$$\overline{R} = \overline{P} \cup \overline{Q}. \tag{12}$$

Справедливы следующие аналоги теорем 2 и 3.

Теорема 4. *Если предикат R является дизъюнкцией предикатов P и Q, то он также может быть получен при помощи подстановки и простейшей дизъюнкции из предикатов P и Q.*

Теорема 5. *Если предикат R является дизъюнкцией предикатов P и Q, то он также может быть получен как простейшая дизъюнкция результатов регулярной подстановки функций выбора аргумента $I_k^{(n)}$ в предикаты P и Q.*

Для импликации и простейшей импликации даются аналогичные определения. Остаются, разумеется, верными аналоги теорем 2, 4 и 3, 5. Напишем только аналог равенств (9), (12). Если s-местный предикат R есть простейшая импликация предикатов P и Q, определенных на M^s, то из равенства (10) из п. 2 и равенств (5) и (12) следует, что

$$\overline{R} = (M^s \setminus \overline{P}) \cup \overline{Q}. \tag{13}$$

Если P есть s-местный предикат, а $u_1, \ldots, u_s$ — переменные, то, как уже отмечалось, $P(u_1, \ldots, u_s)$ есть высказывательная форма. Поэтому без дополнительных объяснений ясен смысл выражений $(\forall u_i) P(u_1, \ldots, u_s)$ и $(\exists u_i) P(u_1, \ldots, u_s)$. Оба эти выражения суть $(s-1)$-местные высказывательные формы. Поэтому можно ввести предикаты Q_1 и Q_2 равенствами

$$Q_1(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_s) = (\forall u_i) P(u_1, \ldots, u_s),$$
$$Q_2(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_s) = (\exists u_i) P(u_1, \ldots, u_s).$$

Переход от предиката P к предикату Q_1 называют *навешиванием* на предикат P *квантора общности* по i-му аргументу, а переход от предиката P к предикату Q_2 — *навешиванием квантора существования* по i-му аргументу. Если P был предикатом в M^s, то Q_1 и Q_2 суть предикаты в M^{s-1}, причем для любого кортежа $\langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s \rangle \in M^{s-1}$

1) $$Q_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s)$$

тогда и только тогда, когда для всякого $x_i \in M$ справедливо

$$P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s),$$

2) $$Q_2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s)$$

тогда и только тогда, когда существует такое $x_i \in M$, что справедливо

$$P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s).$$

На полученные предикаты можно снова навешивать кванторы, получая $(s-2)$-местные предикаты и т. д. После того, как навешено уже s кванторов, получается нольместный предикат, т. е. высказывание.

Так, навешивая на двухместный предикат P каждый из двух кванторов по каждому из двух аргументов, получим следующие 4 предиката R_1, R_2, R_3, R_4:

$$R_1(y) = (\forall x) P(x, y), \quad R_2(x) = (\forall y) P(x, y),$$
$$R_3(y) = (\exists x) P(x, y), \quad R_4(x) = (\exists y) P(x, y).$$

Навешивая всеми возможными способами кванторы на эти предикаты, получим 8 выражений:

$$\begin{array}{ll}
(\forall x)(\forall y) P(x, y), & (\forall y)(\forall x) P(x, y), \\
(\forall x)(\exists y) P(x, y), & (\forall y)(\exists x) P(x, y), \\
(\exists x)(\forall y) P(x, y), & (\exists y)(\forall x) P(x, y), \\
(\exists x)(\exists y) P(x, y), & (\exists y)(\exists x) P(x, y).
\end{array}$$

Вспоминая содержательный смысл кванторов, легко усмотреть следующие связи между выписанными восемью выражениями:

$$\text{(I)} \qquad (\forall x)(\forall y) P(x, y) = (\forall y)(\forall x) P(x, y),$$
$$(\exists x)(\exists y) P(x, y) = (\exists y)(\exists x) P(x, y).$$

Словами: одноименные кванторы можно переставлять.

$$\text{(II)} \qquad \text{Если } (\exists y)(\forall x) P(x, y) = \boldsymbol{u},$$
$$\text{то } (\forall x)(\exists y) P(x, y) = \boldsymbol{u}.$$
$$\text{Если } (\exists x)(\forall y) P(x, y) = \boldsymbol{u},$$
$$\text{то } (\forall y)(\exists x) P(x, y) = \boldsymbol{u}.$$

Обратное, вообще говоря, неверно: из $(\forall x)(\exists y) P(x, y) = \boldsymbol{u}$ не следует, что $(\exists y)(\forall x) P(x, y) = \boldsymbol{u}$, и из того, что $(\forall y)(\exists x) P(x, y) = \boldsymbol{u}$ не следует, что $(\exists x)(\forall y) P(x, y) = \boldsymbol{u}$. Так, если $P(x, y) = (y > x)$, то $(\forall x)(\exists y) P(x, y) = \boldsymbol{u}$, но $(\exists y)(\forall x) P(x, y) = \boldsymbol{л}$.

Наконец, последовательным применением равенств (11) и (12) из п. 2 получаем равенства

$$\text{(III)} \qquad \overline{(\forall x)}(\exists y) P(x, y) = (\exists x)(\forall y) \overline{P}(x, y), \tag{14}$$
$$\overline{(\exists x)}(\exists y) P(x, y) = (\forall x)(\forall y) \overline{P}(x, y), \tag{15}$$
$$\overline{(\exists y)}(\forall x) P(x, y) = (\forall y)(\exists x) \overline{P}(x, y), \tag{16}$$
$$\overline{(\forall x)}(\forall y) P(x, y) = (\exists x)(\exists y) \overline{P}(x, y). \tag{17}$$

Словами равенства (14) — (17) можно выразить так: чтобы найти отрицание выражения, начинающегося с кванторов, надо кванторы общности заменить на кванторы существования, кванторы существования — на кванторы общности и взять отрицание от предиката.

Свойства (I) — (III) остаются верными и в общем случае.

(I). Одноименные кванторы можно переставлять

$$(\forall x_i)(\forall x_j) P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s) =$$
$$= (\forall x_j)(\forall x_i) P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s), \tag{18}$$
$$(\exists x_i)(\exists x_j) P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s) =$$
$$= (\exists x_j)(\exists x_i) P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s). \tag{19}$$

(II). Квантор существования можно переставить за квантор общности в том смысле, что если

$$(\exists x_i)(\forall x_j) P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s) = u,$$

то (20)

$$(\forall x_j)(\exists x_i) P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s) = u.$$

Обратное, вообще говоря, неверно.

(III) Отрицание выражения, начинающегося с кванторов, получается заменой каждого квантора на двойственный и переходом от предиката к его отрицанию

$$\overline{(\exists x_i)}(\forall x_j) P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s) = \\ = (\forall x_i)(\exists x_j) \overline{P}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s). \quad (21)$$

$$\overline{(\forall x_i)}(\exists x_j) P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s) = \\ = (\exists x_i)(\forall x_j) \overline{P}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s). \quad (22)$$

Из определения проекции следует, что при навешивании квантора существования по i-му аргументу на пре-

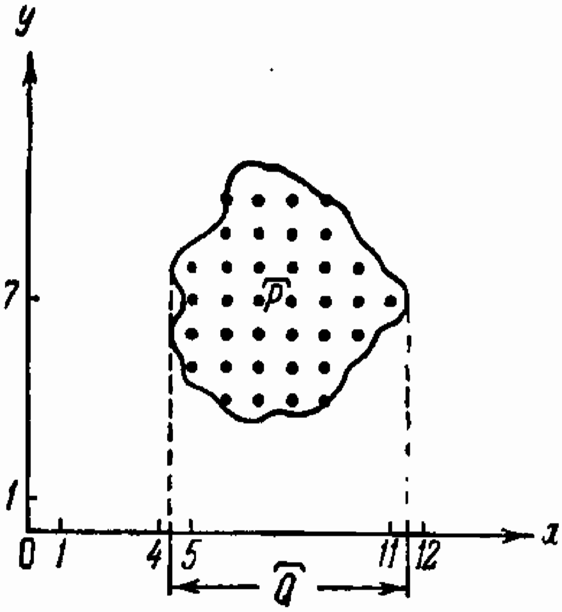


Рис. 5.

дикат P в M^s множество истинности предиката P проектируется на оси с номерами $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, s$. Иными словами, если

$$Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \\ = (\exists x_i) P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s), \quad (23)$$

то

$$\overline{Q} = \text{пр}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,s}\overline{P}.$$

Это можно наглядно показать на рисунке для $s=2$ и $M=N$. Если предикат P определяется нарисованным на рис. 5 множеством $\overline{P}$, то предикат Q, определяемый равенством $Q(x) = (\exists y) P(x, y)$, имеет в качестве множества истинности множество $\text{пр}_1 \overline{P} = \mathscr{E}\{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11\}$. Например, $11 \in \overline{Q}$, так как $(\exists y) P(11, y) = \boldsymbol{u}$, а именно: $P(11,7) = \boldsymbol{u}$.

Замечание. Верно и обратное. *Если*

$$K = \text{пр}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,s}L,$$

где $K \subseteq M^{s-1}$, $L \subseteq M^s$, *то предикат* $Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s) = (\langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s\rangle \in K)$ *получается навешиванием квантора существования по i-му аргументу на предикат*

$$P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \\ = (\langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s\rangle \in L).$$

Выразить в таких же общих теоретико-множественных терминах множество истинности предиката, получающегося навешиванием квантора общности на некоторый другой предикат, тоже можно, но это будет гораздо менее наглядно. А именно: если

$$Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \\ = (\forall x_i) P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s),$$

где P — предикат на M^s, то из (13) из п. 2 и из (5) и (23) следует

$$\overline{Q} = M^{s-1} \setminus \text{пр}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,s}(M^s \setminus \overline{P}). \quad (24)$$

В дальнейшем нам часто понадобится сравнивать предикаты лишь по их множествам истинности и, так сказать, не различать предикаты с одинаковыми множествами истинности. Более точно. Пусть P и Q — предикаты в M, а a и b — какие-нибудь элементы из M. Будем писать

$$P(a) \sim Q(b),$$

если либо 1) $P(a)=\boldsymbol{u}$ и $Q(b)=\boldsymbol{u}$, либо 2) $P(a)$ равно $\boldsymbol{л}$ или не определено и $Q(b)$ равно $\boldsymbol{л}$ или не определено. Таким образом, если P и Q — предикаты в M, равенство $\overline{P}=\overline{Q}$ справедливо тогда и только тогда, когда для всех x из M имеет место $P(x)\sim Q(x)$.

Пример 5. Для всех $\langle x, y\rangle \in N^2$

$$\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}=19\right)\sim(x^2+xy+y^2=19).$$

Поэтому множества истинности предикатов T_1: $T_1(x, y)=\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}=19\right)$ и T_2: $T_2(x, y)=(x^2+xy+y^2=19)$ равны (хотя сами предикаты T_1 и T_2 не равны: $T_2(0, 0)=\boldsymbol{л}$, а $T_1(0, 0)$ не определено).

Пусть $\mathfrak{A}$ — одноместная (для простоты) высказывательная форма, а M — область значений ее переменной. Тогда, как уже указывалось выше, запись

$$P(x)=\mathfrak{A}$$

вводит предикат P, значение которого на любом $x\in M$ равно результату подстановки этого x в высказывательную форму $\mathfrak{A}$ (например, если этот результат не есть высказывание, то и $P(x)$ не определено).

Очевидно, если для всех $x\in M$ $P(x)=\mathfrak{A}$ и $Q(x)=\mathfrak{A}$, то предикаты P и Q просто совпадают. Однако для нас в большинстве случаев будет излишним такое полное совпадение предикатов, а будет достаточно совпадение их множеств истинности. Поскольку, если для всех $x\in M$ $P(x)\sim\mathfrak{A}$ и $Q(x)\sim\mathfrak{A}$, то множества истинности предикатов P и Q совпадают $(\overline{P}=\overline{Q})$, разрешим себе вводить новые предикаты следующим образом: «введем предикат P такой, что $P(x)\sim\mathfrak{A}$», понимая под этим, что мы вводим какой-то из предикатов P в M, удовлетворяющих — для всех $x\in M$ — соотношению $P(x)\sim\mathfrak{A}$. Заметим, что если дополнительно потребовать, чтобы предикат P был всюду определен, то соотношение $P(x)\sim\mathfrak{A}$ определит предикат однозначно. Таким образом, фраза «введем предикат P *на* M такой, что $P(x)\sim\mathfrak{A}$» задает единственный предикат P, истинный для тех $x\in M$, для которых $\mathfrak{A}$ истинна, и ложный для тех $x\in M$, для которых $\mathfrak{A}$ ложна или не определена.

4. ОГРАНИЧЕННЫЕ КВАНТОРЫ

Уменьшим степень общности наших рассмотрений. До сих пор мы, в основном, рассматривали функции и предикаты, заданные в произвольном множестве. Но для нас основным полем изучения будет множество N^∞. Все вышеизложенное будет нами, главным образом, применяться именно к множеству N^∞. Начиная с настоящего момента, мы и будем вести наше изложение применительно к множеству N^∞. Это связано, впрочем, с существом изучаемого вопроса, поскольку числовая природа элементов множества N^∞ позволит нам ввести ряд новых операций над предикатами. Речь идет, прежде всего, о так называемых «ограниченных кванторах».

Пусть $\mathfrak{A}$ – одноместная высказывательная форма со свободной переменной x, принимающей в качестве значений натуральные числа. Выражение «для всякого значения переменной x, не превосходящего z, высказывание, получающееся подстановкой этого значения вместо x в $\mathfrak{A}$, истинно» есть одноместная высказывательная форма со свободной переменной z. Обозначим эту форму через

$$\underset{x\leqslant z}{(\forall x)}.\mathfrak{A}. \tag{1}$$

Аналогично, высказывательную форму «существует такое значение переменной x, не превосходящее z, что высказывание, получающееся подстановкой этого значения вместо x в $\mathfrak{A}$, истинно» обозначим через

$$\underset{x\leqslant z}{(\exists x)}\,\mathfrak{A}. \tag{2}$$

Если $\mathfrak{A}$ — высказывательная форма со свободными переменными $x, y_1, \ldots, y_s$, причем множество допустимых значений переменной x есть натуральный ряд, то (1) и (2) суть высказывательные формы со свободными переменными $y_1, \ldots, y_s, z$. Очевидно, для любой формы $\mathfrak{A}$

$$\underset{x\leqslant z}{(\forall x)}\,\mathfrak{A} = (\forall x)\,(x \leqslant z \to \mathfrak{A}), \tag{3}$$

$$\underset{x\leqslant z}{(\exists x)}\,\mathfrak{A} = (\exists x)\,(x \leqslant z \,\&\, \mathfrak{A}). \tag{4}$$

Через

$$(\forall x)_{x<z} \mathfrak{A} \tag{5}$$

и

$$(\exists x)_{x<z} \mathfrak{A} \tag{6}$$

обозначаются, соответственно, высказывательные формы «для всякого значения переменной x, меньшего z, высказывание, получающееся подстановкой этого значения вместо x в $\mathfrak{A}$, истинно» и «существует такое значение переменной x, меньшее z, что высказывание, получающееся подстановкой этого значения вместо x в $\mathfrak{A}$, истинно».

Чтобы придать смысл этим формам при $z=0$, положим по определению

$$(\forall x)_{x<0} \mathfrak{A} = \boldsymbol{u}, \tag{7}$$

$$(\exists x)_{x<0} \mathfrak{A} = \boldsymbol{\textit{л}}. \tag{8}$$

Тогда для любой формы $\mathfrak{A}$:

$$(\forall x)_{x<z} \mathfrak{A} = (\forall x)(x<z \to \mathfrak{A}), \tag{9}$$

$$(\exists x)_{x<z} \mathfrak{A} = (\exists x)(x<z \,\&\, \mathfrak{A}). \tag{10}$$

Выражения вида $(\forall x)_{x\leqslant z}$, $(\exists x)_{x\leqslant z}$, $(\forall x)_{x<z}$, $(\exists x)_{x<z}$ называются *ограниченными кванторами* общности и существования, причем первые два квантора — *нестрого ограниченными*, а последние два — *строго ограниченными*. В случае необходимости отличить от ограниченных кванторов «просто кванторы», введенные в п. 1, мы будем «просто кванторы» называть *неограниченными*.

Переход от высказывательной формы $\mathfrak{A}$ к любой из форм (1), (2), (5) или (6) называется *навешиванием* ограниченного квантора *на форму* $\mathfrak{A}$.

По аналогии с предыдущим пунктом естественным образом вводится навешивание кванторов на предикаты.

В самом деле, если P — предикат в N^s, то можно ввести (при каждом $i \leqslant s$) следующие четыре предиката в N^s

$$Q_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s, z) = \underset{x_i \leqslant z}{(\forall x_i)} P(x_1, \ldots, x_s),$$

$$Q_2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s, z) = \underset{x_i \leqslant z}{(\exists x_i)} P(x_1, \ldots, x_s),$$

$$Q_3(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s, z) = \underset{x_i < z}{(\forall x_i)} P(x_1, \ldots, x_s),$$

$$Q_4(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s, z) = \underset{x_i < z}{(\exists x_i)} P(x_1, \ldots, x_s),$$

получающиеся, как говорят, *навешиванием* ограниченных кванторов *на предикат* P по i-му аргументу.

Указанные в п. 3 свойства неограниченных кванторов переносятся и на ограниченные кванторы. Например:

$$\underset{x_i \leqslant u}{(\forall x_i)} \underset{x_j \leqslant v}{(\forall x_j)} P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s) =$$
$$= \underset{x_j \leqslant v}{(\forall x_j)} \underset{x_i \leqslant u}{(\forall x_i)} P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s). \tag{11}$$

Если

$$\underset{x_i < u}{(\exists x_i)} \underset{x_j \leqslant v}{(\forall x_j)} P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s) = \text{и},$$

то

$$\underset{x_j \leqslant v}{(\forall x_j)} \underset{x_i < u}{(\exists x_i)} P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s) = \text{и}, \tag{12}$$

$$\overline{\underset{x_i < u}{(\exists x_i)}} \underset{x_j < v}{(\forall x_j)} P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s) =$$
$$= \underset{x_i < u}{(\forall x_i)} \underset{x_j < v}{(\exists x_j)} \overline{P}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_s). \tag{13}$$

Отметим некоторые дополнительные свойства.

Если $z_1 \leqslant z_2$, то из $\underset{x_i \leqslant z_1}{(\exists x_1)} P(x_1, \ldots, x_s) = \text{и}$ следует

$$\underset{x_i \leqslant z_2}{(\exists x_i)} P(x_1, \ldots, x_s) = \text{и}. \tag{14}$$

И двойственно: если $z_1 \leqslant z_2$, то из $(\forall x_i)_{x_i \leqslant z_2} P(x_1, \ldots, x_s) = u$ следует

$$(\forall x_i)_{x_i \leqslant z_1} P(x_1, \ldots, x_s) = u \tag{15}$$

$$(\exists x_i)_{x_i \leqslant z} P(x_1, \ldots, x_s) = P(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_s) \vee \\ \vee P(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_s) \vee \ldots \\ \ldots \vee P(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_s), \tag{16}$$

$$(\forall x_i)_{x_i \leqslant z} P(x_1, \ldots, x_s) = P(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_s) \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_s) \mathbin{\&} \ldots \\ \ldots \mathbin{\&} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_s). \tag{17}$$

Никакой принципиальной разницы между нестрого и строго ограниченными кванторами нет. Разница между ними чисто техническая. Все свойства одних — с небольшими, чисто техническими изменениями — переносятся на другие. Поэтому мы, как правило, будем высказывать (см., например, (14) — (17)) или доказывать (см., например, теорему 15 из § 5) утверждения только про какой-нибудь один вид ограниченных кванторов, молчаливо распространяя их и на другой вид. Напротив, разница между ограниченными и неограниченными кванторами есть и очень большая. Мы на ней остановимся подробнее в п. 9. Пока же просто заметим, что предикаты с ограниченными кванторами гораздо «финитнее». Они даже выражаются, как показано в (16) и (17), через дизъюнкцию и конъюнкцию, т. е. квантор в них может быть устранен, элиминирован.

5. ОПЕРАТОР «НАИМЕНЬШЕЕ ЧИСЛО»

При навешивании кванторов мы получали из предикатов снова предикаты. Сейчас мы введем оператор, образующий из предикатов функции. Пусть P — предикат в N^s ($s \geqslant 1$). Фиксируем $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0$. Через $(\mu x_i) P(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0)$ обозначим наименьшее число y^0 такое, что $P(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, y^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0) = u$. Возьмем другой набор: $x_1', x_2', \ldots, x_{i-1}',$

$x'_{i+1}, \ldots, x'_s$ значений переменных. Снова через $(\mu x_i)P(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, x_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_s)$ обозначим наименьшее число y' такое, что $P(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, y', x'_{i+1}, \ldots, x'_s) = \boldsymbol{u}$ и т. д. При таком понимании выражения $(\mu x_i)P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ равенство

$$y = (\mu x_i)P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) \tag{1}$$

определяет в N^{s-1} функцию, которая кортежу $\langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s\rangle$ ставит в соответствие наименьшее число y такое, что $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \boldsymbol{u}$. Сделаем два уточнения. Если для некоторого кортежа $\langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s\rangle$ не существует такого y, что $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \boldsymbol{u}$, будем считать на этом кортеже функцию, заданную равенством (1), не определенной. Это вполне естественное соглашение. Второе уточнение, которое мы сейчас сделаем, покажется, быть может, читателю менее естественным. Его смысл станет ясным в п. 9. Может случиться, например, так, что на кортежах $\langle x^0_1, \ldots, x^0_{i-1}, t, x^0_{i+1}, \ldots, x^0_s\rangle$ при t, $0 \leqslant t \leqslant y^0 - 2$, предикат P определен и равен $\boldsymbol{л}$, на кортеже $\langle x^0_1, \ldots, x^0_{i-1}, y^0 - 1, x^0_{i+1}, \ldots, x^0_s\rangle$ не определен, а на кортеже $\langle x^0_1, \ldots, x^0_{i-1}, y^0, x^0_{i+1}, \ldots, x^0_s\rangle$ определен и равен $\boldsymbol{u}$. В этом случае y^0, конечно, является наименьшим числом t таким, что $P(x^0_1, \ldots, x^0_{i-1}, t, x^0_{i+1}, \ldots, x^0_s) = \boldsymbol{u}$. Но мы все-таки не будем в этом случае считать число y^0 значением функции, заданной равенством (1). В этом случае мы также будем считать функцию, заданную равенством (1), не определенной на кортеже $\langle x^0_1, \ldots, x^0_{i-1}, x^0_{i+1}, \ldots, x^0_s\rangle$. Для общего случая наше второе уточнение можно сформулировать так: через $(\mu x_i)P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ мы обозначаем такое число y, что на всех кортежах $\langle x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_i\rangle$ при t, $0 \leqslant t \leqslant y - 1$, предикат P определен и равен $\boldsymbol{л}$ и $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \boldsymbol{u}$.

Введенный оператор, порождающий из предикатов (в N^s) функции (типа $N^{s-1} \to N$), мы будем называть *оператором наименьшего числа* или оператором «наименьшее число» или просто оператором μ *).

---

*) В частности, при $s = 1$ оператор μ порождает из предиката $P^{(1)}$ в N^1 нульместную функцию: $y = (\mu x)P(x)$. В ряде случаев, например, если не существует такого x, что $P(x) = \boldsymbol{u}$, эта функция может быть нигде не определенной.

Оператор μ будет нами чаще всего навешиваться на предикаты некоторого специального вида. Пусть f — функция типа $N^s \to N$. Тогда равенство «$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = 0$» определяет предикат в N^s. Вот на предикаты именно такого специального вида мы и будем чаще всего навешивать оператор μ. Про оператор μ, примененный к предикату „$f(x_1, \ldots, x_s) = 0$“, мы условимся говорить, что оператор μ *применен к функции* f. Для оператора μ, примененного к функции f, наши оговорки и уточнения формулируются так. Выражение $(\mu x_i)[f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = 0]$ обозначает число y такое, что для всех t, $0 \leqslant t \leqslant y-1$, значение $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ определено и больше 0, а $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ определено и равно 0.

Пример 1. На предикат $Q(x, y) = (x - y > 10)$ навесим оператор μ по x. Рассмотрим функцию g: $g(y) = (\mu x) Q(x, y)$. $g(0) = 11$. $g(3) = 14$. Навесим теперь оператор μ по y. Введем функцию h: $h(x) = (\mu y) Q(x, y)$. $h(20) = 0$. $h(11) = 0$. $h(10)$ не определено, так как в N не существует такого y, что $10 - y > 10$.

Пример 2. Рассмотрим предикат Q_1: $Q_1(x, y) = \left[\frac{x(x-13)}{x-13} - y > 10\right]$. Навесим на него оператор μ по x. Положим $g_1(y) = (\mu x) Q_1(x, y)$. $g_1(0) = 11$. Но $g_1(3)$ на этот раз не определено (ср. пример 1), так как хотя $Q_1(14,3) = и$ и $Q_1(t, 3) = л$ для t: $0 \leqslant t \leqslant 12$, но $Q_1(13,3)$ не определено.

Пример 3. Применим оператор μ к всюду определенной константной функции $5^{(2)}$. Рассмотрим функцию, определенную равенством $y = (\mu t)[5(x, t) = 0]$. Эта функция нигде не определена, так как для любого x не существует такого t, что $5(x, t) = 0$. Оператор μ перевел всюду определенную функцию $5^{(2)}$ в нигде не определенную (одноместную) функцию.

6. ОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР «НАИМЕНЬШЕЕ ЧИСЛО»

Оператор μ, рассмотренный в предыдущем пункте, был «неограниченным» оператором. Подобно тому, как после неограниченных кванторов (п. 1) мы ввели кванторы строго и нестрого ограниченные (п. 4), мы сейчас введем ограниченный оператор μ.

Пусть P — предикат в N^s. Будем считать, что выражение $\underset{x_i \leqslant z}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ обозначает такое число y, не превосходящее z, что $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ определено и равно $л$ для t: $0 \leqslant t \leqslant y-1$ и $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_s) = и$. Если для всех t: $0 \leqslant t \leqslant z$ — значение $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ определено и равно $л$, то, в отличие от неограниченного оператора μ, мы будем и в этом случае приписывать выражению $\underset{x_i \leqslant z}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_s)$ некоторое числовое значение. А именно: пусть по определению в этом случае

$$\underset{x_i \leqslant z}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = z + 1.$$

Почему мы именно так доопределили функцию $y = \underset{x_i \leqslant z}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$, станет ясным в § 4. Пока же заметим, что если неограниченный оператор μ мог из всюду определенного предиката породить не всюду определенную функцию (пример 3 в п. 5), то ограниченный оператор μ всюду определенный предикат переводит всегда во всюду определенную функцию.

Функция $y = \underset{x_i \leqslant z}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ зависит, разумеется, и от z. Ограниченный оператор μ переводит предикат в N^s в функцию типа $N^s \rightarrow N$, зависящую от $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s$ и z.

Как и в п. 4, кроме только что рассмотренного нестрого ограниченного оператора μ можно ввести и строго ограниченный оператор. Доопределим функцию $y = \underset{x_i < z}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ так, чтобы всюду определенный предикат P переходил во всюду определенную функцию. Для этого надо доопределить выражение $\underset{x_i < z}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ в двух случаях: во-первых, при $z = 0$ и, во-вторых, когда для некоторого $\langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s \rangle$ и некоторого z $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ определено и равно $л$ для всех t: $0 \leqslant t < z$.

Положим при любых $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s$

$$\underset{x_i<0}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = 0.$$

Если для некоторого $\langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s\rangle$, для некоторого z и для всех t: $0 \leqslant t < z$ $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ определено и равно л, положим

$$\underset{x_i<z}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = z.$$

Теперь всюду определенный предикат (на N^s) переводится строго ограниченным оператором μ во всюду определенную функцию (типа $N^s \to N$). Причины именно такого доопределения функции $y = \underset{x_i<z}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ будут выяснены в § 4. Пока что заметим только, что, в силу введенного доопределения, всегда

$$\underset{x_i\leqslant z}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_s) = \underset{x_i<z+1}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_s). \qquad (1)$$

7. ОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР «НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО»

Нам будет полезен «двойственный» к ограниченному оператору наименьшего числа ограниченный оператор наибольшего числа.

Пусть P—предикат в N^s. Обозначим через $\underset{x_i\leqslant z}{(\mu' x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ такое число y, не превосходящее z, что $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_s) = u$, но для всех t: $y < t \leqslant z$ — значение $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ определено и равно л. Если для всех t: $0 \leqslant t \leqslant z$ — значение $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ определено и равно л, положим

$$\underset{x_i\leqslant z}{(\mu' x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = z + 1.$$

Ограниченный оператор наибольшего числа или, просто, оператор μ' переводит предикат P (в N^s) в функцию $y = \underset{x_i\leqslant z}{(\mu' x_i)} P(x_1, \ldots, x_s)$ типа $N^s \to N$, зависящую от $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s$ и z.

Если P — предикат на N^s, оператор μ' выражается через оператор μ:

$$(\mu' x_i)_{x_i \leqslant z} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) =$$
$$= (\mu x_i)_{x_i \leqslant z} \{P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) \& (\forall t)_{t \leqslant z} [(t > x_i) \to \to \overline{P}(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_s)]\}. \quad (1)$$

Можно употреблять, конечно, и строго ограниченный оператор «наибольшее число». При $z=0$ положим

$$(\mu' x_i)_{x_i < 0} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = 0.$$

Если для всех t: $0 \leqslant t < z$ — значение $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ определено и равно л, положим

$$(\mu' x_i)_{x_i < z} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = z.$$

8. ОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР «ЧИСЛО ТЕХ, КОТОРЫЕ»

Пусть P — предикат в N^s. Обозначим через $(\nu x_i)_{x_i \leqslant z} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ число тех t, не превосходящих z, которые удовлетворяют условию: $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \text{и}$. Ограниченный оператор «число тех, которые» или оператор ν переводит предикат P (в N^s) в функцию $y = (\nu x_i)_{x_i \leqslant z} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ типа $N^s \to N$, зависящую от $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s$ и z.

Строго ограниченный оператор «число тех, которые» при $z=0$ доопределим нулем:

$$(\nu x_i)_{x_i < 0} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = 0.$$

9. ИНТУИТИВНО-ВЫЧИСЛИМЫЕ ПРЕДИКАТЫ

Предикат — частный случай функции. Поэтому можно говорить и об интуитивно-вычислимых (лучше, быть может, было бы сказать — об интуитивно-проверяемых) предикатах. Посмотрим, как влияют на интуитивную вычислимость предикатов операции над предикатами, введенные в пп. 3—8.

Операции исчисления высказываний: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация — *сохраняют интуитивную вычислимость*.

Неограниченный квантор общности нарушает, вообще говоря, интуитивную вычислимость предиката. Если даже предикат P (в N^2, для простоты) интуитивно-вычислим, то мы, вообще говоря, все равно не знаем, как вычислить $Q_1(x_0) = (\forall y) P(x_0, y)$. Ведь для вычисления $Q_1(x_0)$ надо вычислить бесконечное число значений предиката P: $P(x_0, 0)$, $P(x_0, 1)$, $P(x_0, 2)$ и т. д.

Это рассуждение, разумеется, не претендует на то, чтобы установить отсутствие интуитивной вычислимости у предиката Q_1: $Q_1(x) = (\forall y) P(x, y)$. (Вообще, располагая лишь интуитивным пониманием вычислимости, мы можем в ряде случаев установить вычислимость конкретных функций и предикатов, но никогда не сможем установить невычислимость какой-либо конкретной функции или предиката.) Проведенное рассуждение носит чисто эвристический характер. Оно должно вызвать у читателя сомнение в интуитивной вычислимости предиката Q_1 и ожидание, что Q_1 может оказаться и не интуитивно-вычислимым. Вычислимые предикаты P, для которых соответствующие предикаты Q_1 будут не вычислимыми, действительно существуют; пример такого предиката будет построен позже (пример 14 в п. 2 § 9), после уточнения понятия вычислимости. А пока мы ограничиваемся чисто декларативным заявлением «С чего бы предикату Q_1 быть интуитивно-вычислимым?», подкрепленным тем, что поиски алгоритма, вычисляющего значения Q_1, оказываются безуспешными. (Сделанный в этом абзаце комментарий остается в силе и для других проводимых в этом пункте исследований неограниченных операторов.)

Впрочем, если P есть предикат на N^2, то некоторой весьма слабой интуитивной вычислимостью предикат Q_1 все же обладает. Именно, существует алгоритм, позволяющий вычислять значения Q_1 для всякого x_0, для которого высказывание $(\forall y) P(x_0, y)$ ложно. Алгоритм состоит в том, что надо вычислять значения $P(x_0, 0)$,

$P(x_0, 1)$, $P(x_0, 2)$, ... до тех пор, пока мы не наткнемся на значение $\boldsymbol{\textit{л}}$ (а если $(\forall y)P(x_0, y)$ ложно, то на такое значение мы непременно наткнемся); тем самым мы узнаем, что $Q_1(x_0) = \boldsymbol{\textit{л}}$. Для тех x_0, для которых $(\forall y)P(x_0, y)$ истинно, этот алгоритм ничего не даст, ибо процесс его применения никогда не закончится.

Неограниченный квантор существования также сохраняет в некотором ослабленном смысле интуитивную вычислимость. Если P — интуитивно-вычислимый предикат на N^2 и $Q_2(x_0) = (\exists y)\,P(x_0, y) = \boldsymbol{\textit{и}}$, т. е. существует такое y_0, что $P(x_0, y_0) = \boldsymbol{\textit{и}}$, то, вычисляя последовательно $P(x_0, 0)$, $P(x_0, 1)$, $P(x_0, 2)$, ..., мы, в конце концов, вычислим $P(x_0, y_0)$ и узнаем, что $Q_2(x_0) = \boldsymbol{\textit{и}}$. Если же $Q_2(x_1) = (\exists y)\,P(x_1, y) = \boldsymbol{\textit{л}}$, т. е. не существует такого y, что $P(x_1, y) = \boldsymbol{\textit{и}}$, то мы $Q_2(x_1)$ вычислить, вообще говоря, не сумеем. Вычисляя последовательно $P(x_1, 0)$, $P(x_1, 1)$, $P(x_1, 2)$, ... и получая каждый раз $\boldsymbol{\textit{л}}$, мы никогда не закончим этого подсчета и не узнаем, что для всех y справедливо $P(x_1, y) = \boldsymbol{\textit{л}}$, и что, следовательно, $Q_2(x_1) = (\exists y)P(x_1, y) = \boldsymbol{\textit{л}}$. Итак, если предикат P интуитивно-вычислим, то предикат Q_2: $Q_2(x) = (\exists y)P(x, y)$ — может, вообще говоря, и не быть интуитивно-вычислимым (точнее: не ясно, почему ему быть интуитивно-вычислимым). Имеется алгоритм вычисления значений предиката Q_2 на любом x, на котором $Q_2(x) = \boldsymbol{\textit{и}}$; однако этот алгоритм не применим к тем x, на которых $Q_2(x) = \boldsymbol{\textit{л}}$ *).

Ограниченные кванторы: как общности, так и существования — *сохраняют интуитивную вычислимость*, так как выражаются даже через операции исчисления высказываний ((16), (17) в п. 4).

Неограниченный оператор μ, ввиду того уточнения, которое мы сделали на стр. 82, также *сохраняет интуитивную вычислимость*. Пусть P — предикат, ради простоты, в N^2. Если $P(x_0, y_0) = \boldsymbol{\textit{и}}$, но для всех y: $0 \leqslant y < y_0$ — значение $P(x_0, y)$ определено и равно $\boldsymbol{\textit{л}}$, то, вычисляя последовательно $P(x_0, 0)$, $P(x_0, 1)$, $P(x_0, 2)$, ..., мы, в

*) В § 5 (теорема 13) это «слабое» сохранение интуитивной вычислимости получит точную формулировку: навешивание квантора существования сохраняет рекурсивно-перечислимость (но, как показывает пример 13 из п. 2 § 9, не обще-рекурсивность) предиката.

конце концов, вычислим $P(x_0, y_0)$ и узнаем, что $(\mu y) P(x_0, y) = y_0$. Таким образом, алгоритм вычисления значений функции θ: $\theta(x) = (\mu y) P(x, y)$ состоит в следующем. Возьми x_0 и вычисляй последовательно $P(x_0, 0)$, $P(x_0, 1), \ldots$, пока не получишь в первый раз $P(x_0, y_0) = \boldsymbol{u}$; тогда остановись: $\theta(x_0) = y_0$. Если в процессе вычисления значений $P(x_0, 0)$, $P(x_0, 1), \ldots$ мы наткнемся на такое z, что $P(x_0, z)$ не определено, то сформулированный алгоритм окажется не применимым; но как раз в этом случае, в силу уточнения, сделанного на стр. 82, функция θ считается не определенной для x_0. Итак, наш алгоритм дает результат (равный значению функции θ) тогда и только тогда, когда функция θ определена; следовательно, он задает функцию θ в смысле § 1, и функция θ вычислима. Итак, неограниченный оператор «наименьшее число» сохраняет интуитивную вычислимость.

Ограниченные операторы: «наименьшее число», «наибольшее число» и «число тех, которые» — *сохраняют интуитивную вычислимость.*

З а м е ч а н и е. Если $f^{(s+1)}$ — интуитивно-вычислимая функция, то предикат P: $P(x_1, \ldots, x_s, y) = [f(x_1, \ldots \ldots, x_s, y) = 0]$ интуитивно-вычислим. Поэтому, *если* $f^{(s+1)}$ — *интуитивно-вычислимая функция, то и функция* $y = (\mu t)[f(x_1, \ldots, x_s, t) = 0]$ *интуитивно-вычислима.*

§ 4. ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ, МНОЖЕСТВА, ПРЕДИКАТЫ

Этим параграфом начинается систематическое изложение теории вычислимых функций, проводимое на основе отождествления, в порядке уточнения, расплывчатого интуитивного понятия «вычислимая функция с натуральными аргументами и значениями» с точно очерченным математическим понятием «частично-рекурсивная функция». Определение понятия «частично-рекурсивная функция» будет дано в § 6. В настоящем же параграфе рассматривается (определяемый в п. 1) класс примитивно-рекурсивных функций — один из простейших и важнейших подклассов класса частично-рекурсивных функций. В п. 2 и п. 3 на основе понятия примитивно-рекурсивной функции определяются понятия примитивно-рекурсивного множества и примитивно-рекурсивного предиката. Изучение этих понятий приводит, в свою очередь, в п. 4 к дальнейшему расширению наших знаний о примитивно-рекурсивных функциях. В пп. 5 и 6 устанавливаются некоторые важные взаимно-однозначные соответствия между N и N^s (в п. 5) и между N и N^∞ (в п. 6); кроме того, в п. 6 понятие примитивно-рекурсивной функции по существу (хотя это и происходит в других терминах) обобщается на случай, когда аргументами или значениями функции являются кортежи натуральных чисел произвольной длины. Введенные в пп. 5 и 6 понятия позволяют изучать общие способы, посредством которых кортежи натуральных чисел (фиксированной длины в п. 5 и произвольной длины в п. 6) можно занумеровать (причем, так сказать, «примитивно-рекурсивно») натуральными числами.

Пп. 1—4 настоящего параграфа содержат в основном довольно традиционный материал по примитивно-рекурсивным функциям, который в значительной своей части можно найти, например, в §§ 1—2 книги Р. Петер [1951] или в §§ 43—45 книги С. К. Клини [1952]. В качестве небольшого методического новшества можно упомянуть введение и использование двух понятий: 1) понятия примитивно-рекурсивно замкнутого класса (введение этого понятия позволит для большинства результатов, полученных в § 4 для примитивно-рекурсивных функций, автоматически найти «общерекурсивные» аналоги в § 7) и 2) понятия примитивно-рекурсивного отображения. Что касается содержания пп. 5 и 6, то оно несколько менее традиционно; изучаемые в этих пунктах «примитивно-рекурсивные» нумерации важны для приложений; однако в имеющейся литературе обычно не устанавливают общих свойств таких нумераций (что делается отчасти в пп. 5 и 6), а довольствуются одной какой-нибудь нумерацией, например, получающейся на основе разложений целых положительных чисел на простые множители.

1. ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Обозначим через $\mathfrak{F}^{(s)}$ класс всех функций типа $N^s \to N$ и через $\mathfrak{F}$ соединение этих классов

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{s=0}^{\infty} \mathfrak{F}^{(s)}.$$

Напомним, что, как мы условились на стр. 39, всюду, где не оговорено противное, под словом «функция» понимается функция из класса $\mathfrak{F}$.

Определение. Класс функций называется *примитивно-рекурсивно замкнутым*, если он 1) содержит функции $0^{(0)}$ и $\lambda_1^{(1)}$ и 2) замкнут относительно операций подстановки и примитивной рекурсии.

Очевидно, класс $\mathfrak{F}$ является примитивно-рекурсивно замкнутым. Никакой из классов $\mathfrak{F}^{(s)}$ не является примитивно-рекурсивно замкнутым (уже введение фиктивных аргументов выводит за пределы этого класса). Как показывают замечание 3 в п. 3 § 2 и замечание 3 в п. 7 § 2, примитивно-рекурсивно замкнутыми являются следующие подклассы класса $\mathfrak{F}$: класс $\mathfrak{F}_{\text{в.о}}$ всех всюду определенных функций и класс $\mathfrak{F}_{\text{и.в}}$ всех интуитивно-вычислимых функций.

Определение. Минимальный примитивно-рекурсивно замкнутый класс (т. е. такой, который содержится в любом другом примитивно-рекурсивно замкнутом классе) называется *классом примитивно-рекурсивных функций*, а его члены, соответственно, — *примитивно-рекурсивными функциями*.

Класс примитивно-рекурсивных функций совпадает с пересечением всех примитивно-рекурсивно замкнутых классов, которое, очевидно, примитивно-рекурсивно замкнуто, не пусто (содержит $\lambda_1^{(1)}$ и $0^{(0)}$) и содержится в любом другом примитивно-рекурсивно замкнутом классе. Обозначим класс примитивно-рекурсивных функций русской заглавной буквой $\mathscr{П}$.

Так как класс интуитивно-вычислимых функций — один из примитивно-рекурсивно замкнутых классов, любая примитивно-рекурсивная функция интуитивно-вычислима. Однако понятие примитивно-рекурсивной функции еще не есть та точная математическая замена, которую мы ищем для расплывчатого понятия интуитивно-вычислимой функции. Примитивно-рекурсивные функции окажутся, как мы увидим впоследствии, только частным случаем интуитивно-вычислимых функций.

Заметим, что любой примитивно-рекурсивно замкнутый класс, будучи замкнутым относительно подстановки, замкнут и относительно ее частных случаев: регулярной подстановки, введения фиктивных аргументов, перестановки аргументов и идентификации аргументов.

Поэтому, в частности, если бы мы в определении примитивно-рекурсивно замкнутого класса написали «и замкнут относительно операций подстановки и примитивной рекурсии по первому аргументу», мы получили бы эквивалентное определение.

Пример. Пусть функция $g^{(2)}$ получается из функций $f_1^{(1)}$, $f_2^{(3)}$ примитивной рекурсией по второму аргументу:

$$\begin{cases} g(x, 0) = f_1(x), \\ g(x, y+1) = f_2(x, y, g(x, y)). \end{cases}$$

Получим ту же функцию g из функций f_1, f_2 при помощи примитивной рекурсии по первому аргументу и перестановки аргументов. Сначала перестановкой аргументов из функции f_2 определим функцию $f_3^{(3)}$: $f_3(x, y, z) = f_2(y, x, z)$. Теперь примитивной рекурсией по первому аргументу из функций f_1 и f_3 получим функцию $h^{(2)}$:

$$\begin{cases} h(0, y) = f_1(y), \\ h(x+1, y) = f_3(x, y, h(x, y)). \end{cases}$$

Легко видеть, что $g(x, y) = h(y, x)$.

Начнем изучение класса $\mathscr{P}$ примитивно-рекурсивных функций. Прежде всего, как мы уже отмечали, $\lambda_1^{(1)} \in \mathscr{P}$ и $0^{(0)} \in \mathscr{P}$. Подстановка функции $0^{(0)}$ в функцию $\lambda_1^{(1)}$ дает функцию $1^{(0)}$. Класс $\mathscr{P}$ содержит функции $\lambda_1^{(1)}$ и $0^{(0)}$ и замкнут относительно подстановки. Следовательно, $1^{(0)} \in \mathscr{P}$. Подстановка функции $1^{(0)}$ в функцию $\lambda^{(1)}$ дает функцию $2^{(0)}$. Снова: класс $\mathscr{P}$ содержит $1^{(0)}$ и $\lambda_1^{(1)}$, следовательно, $2^{(0)} \in \mathscr{P}$ и т. д. Итак, для любого натурального c константная функция $c^{(0)} \in \mathscr{P}$. Вводя s фиктивных аргументов в функцию $c^{(0)}$, получим функцию $c^{(s)}$ (пример 3 из п. 3 § 2). Как мы уже доказали, $c^{(0)} \in \mathscr{P}$. И класс $\mathscr{P}$ замкнут относительно подстановки. Следовательно, любая константная функция $c^{(s)} \in \mathscr{P}$ $(c \in N,\ s \in N)$. Введением фиктивных аргументов из функции $\lambda_1^{(1)}$ можно получить любую функцию следования $\lambda_k^{(s)}$ (пример 3 из п. 3 § 2). Но $\lambda_1^{(1)} \in \mathscr{P}$, а класс $\mathscr{P}$ замкнут относительно подстановки. Следовательно, любая функция следования $\lambda_k^{(s)} \in \mathscr{P}$. Примитивной рекурсией из функций $0^{(0)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ получается функция $I_1^{(1)}$ (пример 1 из п. 7 § 2). $0^{(0)} \in \mathscr{P}$. Как мы только что доказали, $\lambda_1^{(2)} \in \mathscr{P}$. Класс $\mathscr{P}$ замкнут относительно операции примитивной рекурсии. Следовательно, $I_1^{(1)} \in \mathscr{P}$. Введением фиктивных аргументов из функции $I_1^{(1)}$ получается любая функция выбора аргумента $I_k^{(s)}$. Мы только что доказали, что $I_1^{(1)} \in \mathscr{P}$. Класс $\mathscr{P}$ замкнут относительно подстановки. Следовательно, любая функция выбора аргумента $I_k^{(s)} \in \mathscr{P}$. Выше мы несколько раз делали умозаключения по одной и той же логической схеме: если уже доказано, что функции $f_1, \ldots, f_s$ примитивно-рекурсивны, то результат применения к ним операции подстановки или операции примитивной рекурсии тоже принадлежит к $\mathscr{P}$. Впредь мы будем проделывать такие умозаключения более бегло.

Прежде чем продолжать дальше изучение класса $\mathscr{P}$, дадим другое определение понятию «примитивно-рекурсивно замкнутый класс». Это определение будет предполагать несколько больший запас исходных функций, но зато позволит иметь дело не с операцией подстановки, а с более простой и обозримой операцией регулярной подстановки.

Теорема 1. *Класс функций тогда и только тогда* ***примитивно-рекурсивно замкнут****, когда он* 1) *содержит функции* $0^{(0)}$, $\lambda_1^{(1)}$ *и все функции выбора аргумента* $I_k^{(s)}$ *и* 2) *замкнут относительно операций регулярной подстановки и примитивной рекурсии.*

Доказательство. Необходимость («только тогда»), по существу, уже доказана выше, так как мы уже показали, что все функции выбора аргумента примитивно-рекурсивны, а значит, принадлежат к любому примитивно-рекурсивно замкнутому классу. А регулярная подстановка — частный случай подстановки.

Достаточность («тогда») вытекает из Теоремы о подстановке (теорема 1 из § 2), из того, что все одноместные константные функции могут быть получены из функций $\lambda_1^{(1)}$, $0^{(1)}$ с помощью операции регулярной подстановки, из того, что функция $0^{(1)}$ может быть получена примитивной рекурсией из функций $0^{(0)}$ и $I_2^{(2)}$ (см. пример 2 в п. 7 § 2) и, наконец, из того, что нигде не определенная одноместная функция может быть получена примитивной рекурсией из нигде не определенной нульместной функции и произвольной двухместной функции.

Продолжим изучение класса $\mathscr{П}$ примитивно-рекурсивных функций. Покажем, что к $\mathscr{П}$ принадлежат многие простейшие арифметические функции.

В п. 7 § 2 (пример 3) примитивной рекурсией из $I_1^{(1)}$ и $\lambda_3^{(3)}$ была получена функция sum: $\mathrm{sum}(x, y) = x + y$. Так как $I_1^{(1)} \in \mathscr{П}$ и $\lambda_3^{(3)} \in \mathscr{П}$, то и $\mathrm{sum} \in \mathscr{П}$. Перепишем схему (5) из примера 3 п. 7 § 2, задающую функцию sum, в более «вольной» форме записи

$$\begin{cases} 0 + y = y, \\ (x+1) + y = (x + y) + 1. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь допущены две «вольности». Во-первых, не введено специальное обозначение (типа «g» или «sum») как для определяемой функции, так и для функций определяющих. Во-вторых, во второй строчке схемы (1) опущены полагающиеся аргументы x и y, являющиеся здесь фиктивными. Мы и впредь будем употреблять подобную, более вольную форму записи. Читатель при желании всегда сумеет перейти к форме, требуемой согласно определению примитивной рекурсии ((1) или (4) в п. 7 § 2).

Получим по схеме примитивной рекурсии функцию prod: $\mathrm{prod}(x, y) = x \cdot y$

$$\begin{cases} x \cdot 0 = 0, \\ x \cdot (y+1) = xy + x. \end{cases} \tag{2}$$

Рекурсия по второму аргументу. Не хватает фиктивных аргументов и в первой и во второй строчках. Более «строго» полагалось бы действовать так. Сначала добавим фиктивный аргумент в функцию sum: $f_2(x, y, z) = \mathrm{sum}(x, z) = x + z$. $\mathrm{sum} \in \mathscr{P}$. Следовательно, $f_2 \in \mathscr{P}$. А теперь вполне «строго» из функций $0^{(1)}$ и $f_2^{(3)}$ примитивной рекурсией по второму аргументу получается желаемая функция prod:

$$\begin{cases} \mathrm{prod}(x, 0) = 0^{(1)}(x), \\ \mathrm{prod}(x, y+1) = f_2(x, y, \mathrm{prod}(x, y)). \end{cases} \tag{2'}$$

$0^{(1)} \in \mathscr{P}$ и $f_2 \in \mathscr{P}$. Следовательно, $\mathrm{prod} \in \mathscr{P}$

$$\begin{cases} x^0 = 1, \\ x^{y+1} = x^y \cdot x. \end{cases} \tag{3}$$

Равенства (3) определяют примитивно-рекурсивно функцию pot: $\mathrm{pot}(x, y) = x^y$ — через функции (с точностью до фиктивных аргументов) 1 и prod. Мы только что доказали, что $\mathrm{prod} \in \mathscr{P}$. Следовательно, $\mathrm{pot} \in \mathscr{P}$. Заметим, что определенная по схеме (3) функция pot определена и на паре $\langle 0, 0\rangle$. У нас $\mathrm{pot}(0, 0) = 1$. Под функцией pot мы и будем понимать именно функцию, определенную схемой (3), т. е. функцию

$$\mathrm{pot}(x, y) = \begin{cases} x^y & x \neq 0 \text{ или } y \neq 0, \\ 1 & x = 0 \text{ и } y = 0. \end{cases}$$

Из (1) — (3) следует, что все многочлены с натуральными коэффициентами примитивно-рекурсивны.

Функция $\mathrm{pd}^{(1)}$: $\mathrm{pd}(x) = x \dot{-} 1$ примитивно-рекурсивна, так как получается по схеме примитивной рекурсии из функций $0^{(0)}$ и $I_1^{(2)}$:

$$\begin{cases} 0 \dot{-} 1 = 0, \\ (x+1) \dot{-} 1 = x. \end{cases} \tag{4}$$

А тогда и функция $\mathrm{dif} \in \mathscr{PR}$:

$$\begin{cases} x \dot{-} 0 = x, \\ x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1. \end{cases} \tag{5}$$

Схема (5) задает функцию dif через функции $I_1^{(1)}$ и pd.

$|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$. Следовательно, $\mathrm{adif} \in \mathscr{PR}$.

Более подробно это выглядело бы так: $\mathrm{adif}(x, y) = \mathrm{sum}(\mathrm{dif}(x, y), \mathrm{dif}(y, x))$. $\mathrm{dif} \in \mathscr{PR}$. Следовательно, и функция f: $f(x, y) = \mathrm{dif}(y, x)$ примитивно-рекурсивна. $\mathrm{sum} \in \mathscr{PR}$. Следовательно, $\mathrm{adif} \in \mathscr{PR}$. Проведение подобных подробностей мы впредь предоставим читателю.

$$\begin{cases} 0! = 1, \\ (x+1)! = x! \cdot (x+1). \end{cases}$$

Следовательно, функция fak: $\mathrm{fak}(x) = x!$ примитивно-рекурсивна.

$\min(x, y) = y \dot{-} (y \dot{-} x)$. Следовательно, $\min^{(2)} \in \mathscr{PR}$. $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(x_1, \min(x_2, \ldots, \min(x_{n-1}, x_n)\ldots))$. Следовательно, $\min^{(n)} \in \mathscr{PR}$. $\max(x, y) = (x+y) \dot{-} \min(x, y)$. Следовательно, $\max^{(2)} \in \mathscr{PR}$. $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \ldots, \max(x_{n-1}, x_n)\ldots))$. Следовательно, $\max^{(n)} \in \mathscr{PR}$.

$\overline{\mathrm{sg}}\, x = \mathrm{pot}(0, x) = 0^x$. Мы получили функцию $\overline{\mathrm{sg}}$ подстановкой функции $0^{(0)}$ в функцию pot. $\mathrm{pot} \in \mathscr{PR}$. Следовательно, $\overline{\mathrm{sg}} \in \mathscr{PR}$. $\begin{cases} \mathrm{sg}\, 0 = 0, \\ \mathrm{sg}(x+1) = 1. \end{cases}$ Следовательно, $\mathrm{sg} \in \mathscr{PR}$.

Функция $z = \dfrac{x}{y}$ не всюду определена *). Функция div: $\mathrm{div}(x, y) = \left[\dfrac{x}{y}\right]$ — уже всюду определена, кроме пар

---

*) См. сноску *) на стр. 51.

вида $\langle x, 0\rangle$. Можно было бы, доопределив функцию div, написать схему примитивной рекурсии, задающую ее через уже полученные в $\mathcal{P}$ функций, и, тем самым, доказать, что div $\in \mathcal{P}$ *). Мы не будем пока этого делать, так как это потребовало бы от нас некоторого труда, а схема вышла бы длинной и не очень прозрачной. Скоро мы получим в руки новые средства, которые дадут нам возможность легко доказать, в частности, примитивно-рекурсивность функции div. Но мы все же рекомендуем читателю именно сейчас, на этом этапе попробовать написать эту схему, чтобы, во-первых, приобрести некоторый навык в обращении с операциями примитивной рекурсии и подстановки и, во-вторых, оценить силу тех средств, которые мы вскоре ему дадим. Заметим, что при написании схемы функцию div разрешается доопределить на парах $\langle x, 0\rangle$ как угодно.

Пока мы имеем такое определение примитивно-рекурсивной функции: функция называется *примитивно-рекурсивной*, если она принадлежит к любому примитивно-рекурсивно замкнутому классу (к любому, значит, к их пересечению, т. е. к классу $\mathcal{P}$). Дадим более удобное, более обозримое, более конструктивное определение.

Кортеж функций $\langle f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$ называется *примитивно-рекурсивным описанием* функции f, если $f_k = f$ и каждая f_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ либо 1) является одной из функций $0^{(0)}$, $\lambda_1^{(1)}$, либо 2) получается из предыдущих функций кортежа при помощи операции подстановки или операции примитивной рекурсии.

Теорема 2. *Функция является* ***примитивно-рекурсивной*** *тогда и только тогда, когда она имеет какое-нибудь примитивно-рекурсивное описание.*

Доказательство. Достаточность («тогда») очевидна.

Для доказательства необходимости («только тогда») достаточно показать, что множество всех функций, имеющих примитивно-рекурсивное описание, является примитивно-рекурсивно замкнутым классом. Это множество, очевидно, содержит функции $0^{(0)}$ и $\lambda_1^{(1)}$. Покажем,

*) Т. е. ее доопределение (см. ниже следствие 2 теоремы 2).

что оно замкнуто относительно, например, операции примитивной рекурсии. Пусть функция g определяется по схеме примитивной рекурсии через функции g_1, g_2 и пусть функции g_1, g_2 имеют примитивно-рекурсивные описания; пусть, например, $\langle h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}, g_1\rangle$ и $\langle i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_{l-1}, g_2\rangle$ — соответствующие кортежи. Тогда функция g тоже принадлежит к исследуемому множеству, так как ее примитивно-рекурсивным описанием является, например, следующий кортеж: $\langle h_1, h_2, h_3, \ldots, h_{k-1}, g_1,$ $i_1, i_2, \ldots, i_{l-1}, g_2, g\rangle$. Доказательство замкнутости исследуемого множества относительно операции подстановки проводится аналогично.

Мы получили еще одно определение примитивно-рекурсивной функции, которое мы выскажем в следующей форме: функция называется *примитивно-рекурсивной*, если она может быть получена из функций $0^{(0)}$ и $\lambda_1^{(1)}$ при помощи операций подстановки и примитивной рекурсии в конечное число шагов *).

Теорема 1 дает нам третий вариант определения: функция называется *примитивно-рекурсивной*, если она может быть получена из функций $0^{(0)}$, $\lambda_1^{(1)}$ и функций выбора аргумента при помощи операций регулярной подстановки и примитивной рекурсии в конечное число шагов **).

Следствие 1. Поскольку из любого конечного множества функций однократным применением операции подстановки или операции примитивной рекурсии можно получить не более чем счетное ***) множество функций, из теоремы 2 вытекает, что *примитивно-рекурсивных функций счетное множество.*

---

*) В такой форме определение примитивно-рекурсивной функции встречается, например, в книге Р. Петер [1951] (стр. 38 русского издания).

**) Такое определение близко к определению, имеющемуся в книге С. К. Клини [1952] (стр. 197 русского издания); С. К. Клини рассматривает лишь функции от большего, чем нуль, числа аргументов и называет функцию примитивно-рекурсивной, если она может быть получена из константных функций, $\lambda_1^{(1)}$ и функций выбора аргумента конечным числом регулярных подстановок и примитивных рекурсий.

***) Счетное (а не конечное) множество может получиться благодаря добавлению фиктивных аргументов.

Следствие 2. Из теоремы 2 также следует, что *каждая примитивно-рекурсивная функция всюду определена*, так как она получается из всюду определенных функций при помощи операций, сохраняющих всюду определенность (замечание 2 в п. 3 § 2 и замечание 2 в п. 7 § 2). Примеры всюду определенных не примитивно-рекурсивных функций будут построены в § 8 (п. 3, примеры 1, 2, 3, 6).

2. ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫЕ МНОЖЕСТВА

В п. 6 § 2 было установлено взаимно-однозначное соответствие между подмножествами произвольного множества M и всюду определенными функциями типа $M \to \{0, 1\}$. В частности, для любого s существует взаимно-однозначное соответствие между подмножествами множества N^s и всюду определенными функциями типа $N^s \to \{0, 1\}$. Используем это соответствие. До сих пор у нас примитивно-рекурсивно замкнутыми классами назывались некоторые классы функций типа $N^\infty \to N$.

Определение. Условимся говорить, что множество M (расположенное в некотором N^s) *принадлежит к примитивно-рекурсивно замкнутому классу функций* $\mathfrak{M}$, если его характеристическая функция χ_M принадлежит к $\mathfrak{M}$.

Определение. Множество $M\ (\subseteq N^s)$ называется *примитивно-рекурсивным*, если оно принадлежит к классу $\mathscr{P}$, т. е. если его характеристическая функция примитивно-рекурсивна.

Замечание. Из следствия 1 теоремы 2 следует, что *примитивно-рекурсивных множеств* (как в каждом N^s, так и всего) — *счетное число*. Поскольку множество подмножеств в N^s несчетно, *существуют не примитивно-рекурсивные множества*. Примеры таких множеств будут построены в § 8 (п. 3, примеры 4, 5, 7).

Теорема 3. *Класс всех подмножеств множества N^s, принадлежащих к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, есть тело множеств* *).

---

*) Система подмножеств некоторого множества M называется *телом множеств*, если она 1) наряду с любым своим элементом (являющимся подмножеством множества M) содержит его дополнение до всего множества M и 2) наряду с любыми двумя

Доказательство. Пусть $L \subseteq N^s$ и $L \in \mathfrak{M}$. Функция $\overline{\mathrm{sg}} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{M}$, следовательно, $\overline{\mathrm{sg}} \in \mathfrak{M}$. В силу (5) из п. 6 § 2, $\chi_{N^s \setminus L} \in \mathfrak{M}$. Значит, $N^s \setminus L \in \mathfrak{M}$. Пусть теперь L_1, $L_2 \subseteq N^s$ и L_1, $L_2 \in \mathfrak{M}$. Функция $\max^{(2)}$ примитивно-рекурсивна. Следовательно, $\max^{(2)} \in \mathfrak{M}$. В силу (3) из п. 6 § 2 $\chi_{L_1 \cup L_2} \in \mathfrak{M}$. Значит, $L_1 \bigcup L_2 \in \mathfrak{M}$. Аналогично, по (4) из п. 6 § 2 и из примитивно-рекурсивности функции $\min^{(2)}$ следует, что $L_1 \bigcap L_2 \in \mathfrak{M}$.

Следствие 1. *Класс всех примитивно-рекурсивных подмножеств множества N^s есть тело множеств.*

Следствие 2. *Если L_1, $L_2 \subseteq N^s$ и L_1, $L_2 \in \mathfrak{M}$, то $L_1 \setminus L_2 \in \mathfrak{M}$* *) (см., например, (6) из п. 6 § 2).

Равенства (1) из п. 6 § 2 и (2) из п. 6 § 2 показывают, что все N^s и пустое множество Λ примитивно-рекурсивны.

Из равенства (7) из п. 6 § 2 следует, что любое конечное множество в N примитивно-рекурсивно. В частности, примитивно-рекурсивными являются множества $\{a\}$, $\mathcal{E}\{x \mid x < a\}$. А тогда из следствия 1 теоремы 3 следует примитивно-рекурсивность множеств $\mathcal{E}\{x \mid x \leqslant a\}$, $\mathcal{E}\{x \mid x > a\}$, $\mathcal{E}\{x \mid x \geqslant a\}$, которую, впрочем, можно получить и непосредственно из равенств (10) — (12) из п. 6 § 2. Из равенств (14) из п. 6 § 2 и (15) из п. 6 § 2 следует примитивно-рекурсивность множеств $\mathcal{E}\{\langle x, y\rangle \mid x = a\}$, $\mathcal{E}\{\langle x, y\rangle \mid x = y\}$. Множество $L = \mathcal{E}\{\langle x, y\rangle \mid x < y\}$ примитивно-рекурсивно, так как $\chi_L(x, y) = \mathrm{sg}(y \dot{-} x)$ и, следовательно, χ_L примитивно-рекурсивна. $\mathcal{E}\{x \leqslant y\} = \mathcal{E}\{x < y\} \bigcup \mathcal{E}\{x = y\}$. Примитивно-рекурсивность множеств $\mathcal{E}\{x < y\}$, $\mathcal{E}\{x = y\}$ уже доказана. Из следствия 1 теоремы 3 вытекает, что $\mathcal{E}\{x \leqslant y\}$ — примитивно-рекурсивное множество. $\mathcal{E}\{x > y\} = N^2 \setminus \mathcal{E}\{x \leqslant y\}$. Следовательно, множество $\mathcal{E}\{x > y\}$ примитивно-рекурсивно. И, наконец, $\mathcal{E}\{x \geqslant y\} = N^2 \setminus \mathcal{E}\{x < y\}$. Значит, и множество $\mathcal{E}\{x \geqslant y\}$ примитивно-рекурсивно.

Примитивно-рекурсивность множеств $\mathcal{E}\{x<a\}$, $\mathcal{E}\{x \leqslant a\}$. $\mathcal{E}\{x>a\}$, $\mathcal{E}\{x \geqslant a\}$, $\mathcal{E}\{x = y\}$, $\mathcal{E}\{x<y\}$, $\mathcal{E}\{x \leqslant y\}$, $\mathcal{E}\{x > y\}$, $\mathcal{E}\{x \geqslant y\}$ будет часто нам полезна в дальнейшем.

элементами (являющимися подмножествами множества M) содержит их соединение и пересечение.

*) Через $\mathfrak{M}$ мы на протяжении § 4 будем обозначать произвольный фиксированный примитивно-рекурсивно замкнутый класс.

Из равенства (17) из п. 6 § 2 следует, что любое конечное множество в любом N^s примитивно-рекурсивно.

Теорема 4. *Если множество L_1 в N^{s-q} принадлежит к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$,*

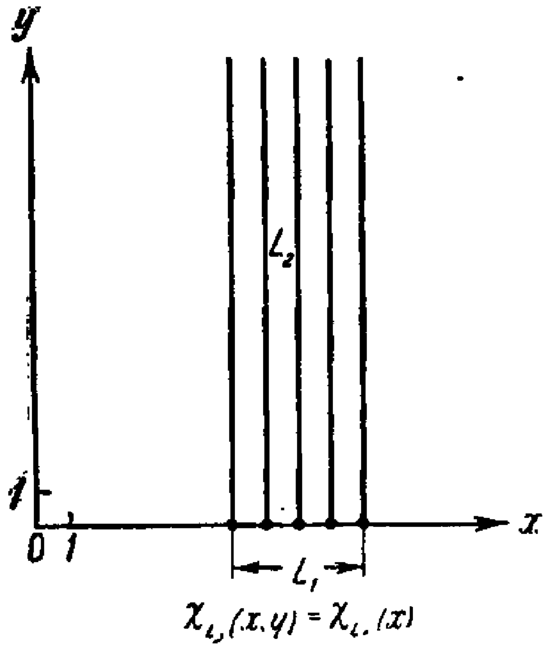


Рис. 6.

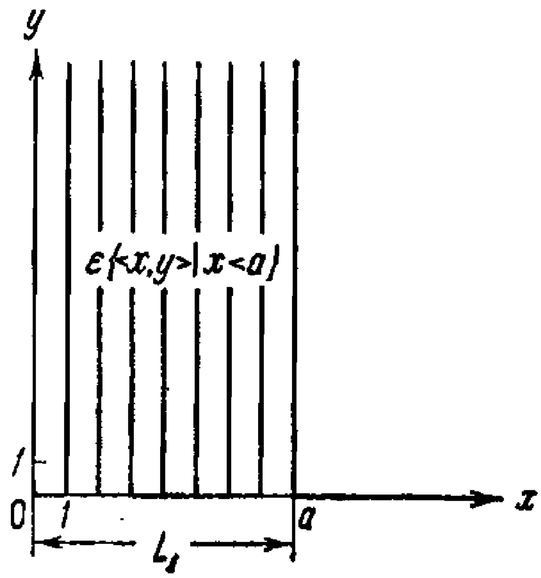


Рис. 7.

то любой цилиндр в N^s, восставленный из L_1, также принадлежит к $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть L_2 есть цилиндр в N^s, восставленный из L_1 вдоль осей с номерами $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_q$. Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_{s-q}$ — номера осей в N^s, отличные от $i_1, i_2, \ldots, i_q$ $(j_1 < j_2 \ldots < j_{s-q})$. Тогда $\chi_{L_2}(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \chi_{L_1}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{s-q}})$ (см. рис. 6). $\chi_{L_1} \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\chi_{L_2} \in \mathfrak{M}$.

Следствие. *Цилиндр, восставленный из примитивно-рекурсивного множества, также примитивно-рекурсивен.*

Из этого следствия вытекает, например, что множества $\mathcal{E}\{\langle x, y\rangle \mid x < a\}$, $\mathcal{E}\{\langle x, y\rangle \mid x \leqslant a\}$, $\mathcal{E}\{\langle x, y\rangle \mid x > a\}$ и $\mathcal{E}\{\langle x, y\rangle \mid x \geqslant a\}$ примитивно-рекурсивны (см. рис. 7).

Теорема 5. *Если множества $L_1 (\subseteq N^s)$ и $L_2 (\subseteq N^t)$ принадлежат к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, то их геометрическое произведение $L_1 \times$ $\times L_2 (\subseteq N^{s+t})$ также принадлежит к $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. $L_1 \times L_2 = (L_1 \times N^t) \cap (N^s \times L_2)$ (см. рис. 8). $L_1 \times N^t$ — это цилиндр в N^{s+t}, восставленный из L_1 вдоль последних t осей. По теореме 4 $(L_1 \times \times N^t) \in \mathfrak{M}$. По аналогичной причине $(N^s \times L_2) \in \mathfrak{M}$. По теореме 3 $L_1 \times L_2 \in \mathfrak{M}$.

Следствие. *Геометрическое произведение примитивно-рекурсивных множеств примитивно-рекурсивно.*

Как уже отмечалось в п. 4 § 2, график функции типа $N^s \to N$ есть множество в N^{s+1}.

Теорема 6. *Если функция f типа $N^s \to N$ принадлежит к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, то ее график принадлежит к этому же классу.*

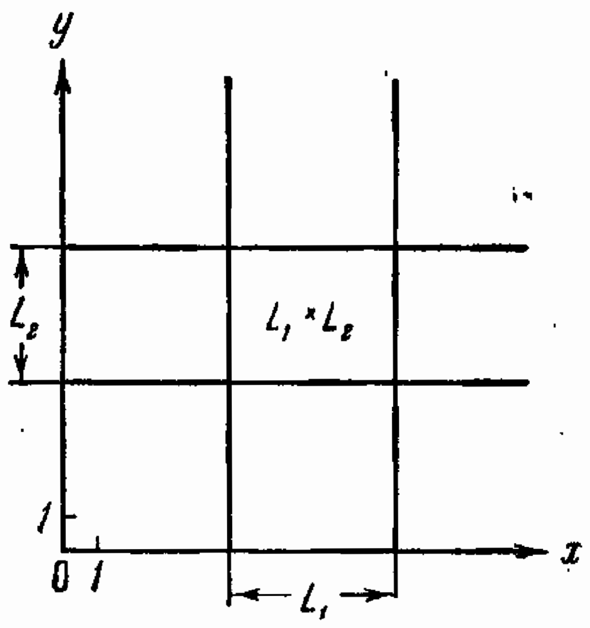


Рис. 8.

Доказательство. Характеристическая функция χ_{G_f} графика G_f задается равенством: $\chi_{G_f}(x_1, \ldots, x_s, y) = \overline{\mathrm{sg}}\,|y - f(x_1, \ldots, x_s)|$. Следовательно, функция χ_{G_f} может быть получена подстановкой функции f в функцию $z = \overline{\mathrm{sg}}\,|x - y|$. Функция $z = \overline{\mathrm{sg}}\,(\mathrm{adif}\,(x, y))$ даже примитивно-рекурсивна. $f \in \mathfrak{M}$. Значит, $\chi_{G_f} \in \mathfrak{M}$.

Следствие 1. *График примитивно-рекурсивной функции есть примитивно-рекурсивное множество.*

Замечание. Обратное не верно. Пример всюду определенной не примитивно-рекурсивной функции с примитивно-рекурсивным графиком будет построен в § 8 (п. 3, пример 10). Однако, если всюду определенная функция f с примитивно-рекурсивным графиком G_f мажорируется некоторой примитивно-рекурсивной функцией g *), то f примитивно-рекурсивна, что следует, например (в силу теоремы 14), из равенства

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \underset{y \leqslant g(x_1, \ldots, x_s)}{(\mu y)} [\langle x_1, \ldots, x_s, y \rangle \in G_f].$$

---

*) Говорят, что всюду определенная функция f типа $N^s \to N$ *мажорируется* всюду определенной функцией g того же типа, если для всякого кортежа $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle \in N^s$ выполняется неравенство $f(x_1, \ldots, x_s) \leqslant g(x_1, \ldots, x_s)$.

Следствие 2. *Пусть r-местные функции $f_1, \ldots, f_s$ осуществляют частичное отображение N^r в N^s $(s > 0)$ и пусть $f_1, \ldots, f_s \in \mathfrak{M}$. Тогда график этого частичного отображения также принадлежит к* $\mathfrak{M}$ (см. (2) из п. 4 § 2).

Отображение пространства N^r в N^s $(s > 0)$, осуществляемое примитивно-рекурсивными функциями, мы будем называть *примитивно-рекурсивным* отображением.

Следствие 3. *График примитивно-рекурсивного отображения пространства N^r в N^s есть примитивно-рекурсивное множество* *).

Пусть f — функция типа $N^s \to N$. *Множеством уровня* функции f по числу y_0 называется множество $\mathcal{E}\{\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in N^s \mid f(x_1, \ldots, x_s) = y_0\}$.

Теорема 7. *Если функция f типа $N^s \to N$ принадлежит к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, то все ее множества уровня также принадлежат к $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Характеристическая функция χ_L множества уровня L функции f по числу y_0 задается равенством $\chi_L(x_1, \ldots, x_s) = \overline{\mathrm{sg}}\,|y_0 - f(x_1, \ldots, x_s)|$, из которого видно, что χ_L, а значит и L, принадлежит к классу $\mathfrak{M}$.

Следствие 1. *Множество уровня примитивно-рекурсивной функции* (по любому числу) *примитивно-рекурсивно.*

Следствие 2. *Множество* L (в N^s) *тогда и только тогда принадлежит к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, когда оно является множеством уровня* (по некоторому числу) *некоторой функции типа $N^s \to N$, принадлежащей к $\mathfrak{M}$.*

Следствие 3. *Множество тогда и только тогда примитивно-рекурсивно, когда оно является множеством уровня некоторой примитивно-рекурсивной функции.*

---

*) Как видит читатель, мы все время наши результаты формулируем сначала для множеств и функций, принадлежащих к произвольному примитивно-рекурсивно замкнутому классу, а потом — для одного и того же конкретного класса, класса $\mathcal{P}$. Такая общность в изложении нам нужна потому, что ниже, в § 7, нами будет изучаться еще один конкретный примитивно-рекурсивно замкнутый класс, к которому мы и применим сразу все эти теоремы.

Функцию типа $N^s \to N$ часто бывает нужно задавать «кусочно», т. е. на разных участках области определения задавать по-разному.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — непересекающиеся множества в N^s, а $f_1, \ldots, f_n$ — функции типа $N^s \to N$. Тогда схема

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_s), \text{ если *) } \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in A_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_s), \text{ если *) } \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in A_n \end{cases} \tag{1}$$

определяет некоторую функцию f типа $N^s \to N$ **). Про функцию f, определенную по схеме (1), мы будем говорить, что функция f *кусочно задана при помощи множеств* $A_1, \ldots, A_n$ *и функций* $f_1, \ldots, f_n$.

Если $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \neq N^s$, то функция f заведомо не всюду определена. Может также случиться, что для некоторого $\langle x_1^0, \ldots, x_s^0\rangle \in A_i$ значение $f_i(x_1^0, \ldots, x_s^0)$ не определено. Тогда и $f(x_1^0, \ldots, x_s^0)$ не определено.

Замечание. Схема

$$f(x_1, \ldots, x_s) = g(x_1, \ldots, x_s), \text{ если } \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in A, \tag{1'}$$

является частным случаем схемы (1). Она задает функцию, областью определения которой служит совокупность тех кортежей из A, для которых определена функция g.

Теорема 8. *Пусть функция f типа $N^s \to N$ кусочно задана при помощи множеств $A_1, \ldots, A_n$ и функций $f_1, \ldots, f_n$, причем $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = N^s$, и пусть все множества $A_1, \ldots, A_n$ и все функции $f_1, \ldots, f_n$ принадлежат к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$. Тогда и функция f принадлежит к $\mathfrak{M}$.*

---

*) Слова «если» в подобной схеме будут часто опускаться.

**) Приведенная схема молчаливо предполагает, что на кортеже $\langle x_1, \ldots, x_s\rangle$, не принадлежащем ни одному из $A_1, A_2, \ldots, A_n$, функция f не определена

Доказательство. Из схемы (1) следует, что

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \chi_{A_1}(x_1, \ldots, x_s) \cdot f_1(x_1, \ldots, x_s) + \ldots \\ \ldots + \chi_{A_n}(x_1, \ldots, x_s) \cdot f_n(x_1, \ldots, x_s). \quad (2)$$

Функция $\mathrm{sum}^{(n)}: \mathrm{sum}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ получается многократной подстановкой функции $\mathrm{sum}^{(2)}$ в функцию $\mathrm{sum}^{(2)}$. Следовательно, $\mathrm{sum}^{(n)} \in \mathscr{P}$ и, тем более, $\mathrm{sum}^{(n)} \in \mathfrak{M}$. Из (2) следует, что и $f \in \mathfrak{M}$.

Следствие. *Если функция f типа $N^s \to N$ кусочно задана при помощи примитивно-рекурсивных множеств $A_1, \ldots, A_n$ и примитивно-рекурсивных функций $f_1, \ldots, f_n$, причем $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = N^s$, то функция f примитивно-рекурсивна.*

Теорема 9. *Пусть r-местные функции $f_1, \ldots, f_s$ осуществляют частичное отображение φ пространства N^r в N^s $(s > 0)$ и пусть функции $f_1, \ldots, f_s$ принадлежат к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$. Если L — множество в N^s, принадлежащее к $\mathfrak{M}$, то его полный прообраз $\varphi^{-1}(L)$ при отображении φ также принадлежит к $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Легко видеть, что $\chi_{\varphi^{-1}(L)}(x_1, \ldots, x_r) = \chi_L(f_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_r))$. Следовательно, $\chi_{\varphi^{-1}(L)}$, а значит, и сам прообраз $\varphi^{-1}(L)$ принадлежат к $\mathfrak{M}$.

Следствие. *Прообраз примитивно-рекурсивного множества* (в N^s) *при примитивно-рекурсивном отображении* (N^r в N^s) *примитивно-рекурсивен.*

Замечание 1. Образ примитивно-рекурсивного множества при примитивно-рекурсивном отображении может и не быть примитивно-рекурсивным. В § 8 (п. 3, пример 8) будет построен пример примитивно-рекурсивного отображения N в N, при котором само N перейдет в не примитивно-рекурсивное множество.

Назовем взаимно-однозначное *соответствие* между N^r и N^s *примитивно-рекурсивным*, если оба задаваемых им отображения: N^r на N^s и N^s на N^r — примитивно-рекурсивны.

Замечание 2. Для любых r и s возможно такое взаимно-однозначное соответствие между N^r и N^s, которым в одну сторону задается примитивно-рекурсивное отображение, в другую — нет (см. § 8, п. 3, примеры 13, 14).

Замечание 3. Следствие теоремы 9 нами часто будет применяться к примитивно-рекурсивному взаимно-однозначному соответствию. Для случая примитивно-рекурсивного соответствия между N^r и N^s из него тривиальным образом вытекает, что если L – примитивно-рекурсивное множество в N^r (N^s), то соответствующее ему, в силу рассматриваемого примитивно-рекурсивного соответствия, множество в N^s (N^r) также примитивно-рекурсивно. Короче: *при примитивно-рекурсивном взаимно-однозначном соответствии как образ, так и прообраз примитивно-рекурсивного множества примитивно-рекурсивны.*

3. ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫЕ ПРЕДИКАТЫ

На стр. 68—69 было установлено «тройственное» взаимно-однозначное соответствие между подмножествами множества M, всюду определенными функциями типа $M \to \{0, 1\}$ и предикатами на M. Там же мы условились подмножество множества M, соответствующее предикату P (на M), обозначать через $\overline{P}$ (напомним, что $\overline{P}$ — это множество истинности предиката P), а характеристическую функцию $\chi_{\overline{P}}$ этого множества называть характеристической функцией самого предиката и обозначать через χ_P. Используем это соответствие и это соглашение.

Сначала (п. 1) примитивно-рекурсивно замкнутыми классами мы называли некоторые множества функций (типа $N^\infty \to N$). Потом (п. 2) мы присоединили к каждому примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$ все те множества (из каждого N^s), характеристическая функция которых лежит в этом классе $\mathfrak{M}$. Совершенно аналогично введем следующее

Определение. Условимся говорить, что предикат P (на N^s) *принадлежит к примитивно-рекурсивно замкнутому классу функций* $\mathfrak{M}$, если его характеристическая функция (или, что то же самое, если его множество истинности) принадлежит к $\mathfrak{M}$.

Определение. Предикат P (на N^s) называется *примитивно-рекурсивным*, если он принадлежит к классу $\mathscr{R}$, т. е. если его характеристическая функция (или, что то же самое, если его множество истинности) примитивно-рекурсивна *).

Из доказанного в п. 2 (на стр. 100—101) следует примитивно-рекурсивность предикатов „$x=a$“, „$x<a$“, „$x\leqslant a$“, „$x>a$“, „$x\geqslant a$“, „$x=y$“, „$x<y$“, „$x\leqslant y$“, „$x>y$“ и „$x\geqslant y$“.

Теорема 10. *Если предикат P и функции $f_1, \ldots, f_s$ принадлежат к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, то и любой предикат, получающийся в результате подстановки функций $f_1, \ldots, f_s$ в предикат P, принадлежит к $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из того, что характеристическая функция результата подстановки функций $f_1, \ldots, f_s$ в предикат P есть результат подстановки функций $f_1, \ldots, f_s$ в характеристическую функцию предиката P.

Следствие. *Предикат, являющийся результатом подстановки примитивно-рекурсивных функций в примитивно-рекурсивный предикат, примитивно-рекурсивен.*

Теорема 11. 1) *Если предикат P принадлежит к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, то и предикат $\overline{P}$ принадлежит к $\mathfrak{M}$.*

2) *Если предикаты P и Q принадлежат к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, то и любой предикат, являющийся конъюнкцией, дизъюнкцией или импликацией предикатов P и Q, принадлежит к $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. 1) Из равенства (5) на стр. 69 и теоремы 3 следует требуемое.

2) Докажем, например, для конъюнкции. Для простейшей конъюнкции требуемое следует из (9) на стр. 71 и теоремы 3. А тогда и для произвольной конъюнкции из теоремы 2 из § 3 и теоремы 10 следует желаемое. Для дизъюнкции и импликации доказывается аналогично.

---

*) С. К. Клини [1952] называет предикат примитивно-рекурсивным, если его представляющая функция (т. е. представляющая функция его множества истинности) примитивно-рекурсивна; ясно, что такое определение эквивалентно нашему (см. во втором подстрочном примечании на стр. 46 формулы перехода от характеристической функции к представляющей и обратно).

Следствие. *Операции исчисления высказываний* (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация) *сохраняют примитивно-рекурсивность предикатов.*

Операции навешивания неограниченных кванторов уже не обязательно оставляют предикат в том же примитивно-рекурсивно замкнутом классе *). Ограниченные кванторы, напротив, обладают таким свойством **). Чтобы доказать это, введем две вспомогательные операции и докажем две леммы.

Пусть f — функция типа $N^s \to N$. Оператор $\Sigma^{(i)}$ переводит функцию f в функцию $g = \Sigma^{(i)} f$ (снова типа $N^s \to N$), задаваемую равенством:

$$g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \sum_{j=0}^{x_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s).$$

Аналогично оператор $\Pi^{(i)}$ переводит функцию f в функцию $h = \Pi^{(i)} f$ (типа $N^s \to N$), задаваемую равенством:

$$h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \prod_{j=0}^{x_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s).$$

Лемма 1. *Если функция f принадлежит к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, то и функция $g = \Sigma^{(i)} f$ принадлежит к $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Получим функцию g примитивной рекурсией по i-му аргументу:

$$\begin{cases} g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \\ \qquad = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_s), \\ g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \\ \qquad = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) + \\ \qquad + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \ldots, x_s). \end{cases}$$

*) Например, для примитивно-рекурсивных предикатов и квантора существования это следует из того, что проекция примитивно-рекурсивного множества может и не быть примитивно-рекурсивным множеством (§ 8, п. 3, пример 9), и замечания на стр. 76.

**) Ср. п. 9 § 3.

$f \in \mathfrak{M}$, $\mathrm{sum} \in \mathscr{P}$ и, тем более, $\mathrm{sum} \in \mathfrak{M}$. Следовательно, и $g \in \mathfrak{M}$.

Следствие. *Оператор* $\Sigma^{(i)}$ *сохраняет примитивно-рекурсивность функций.*

Лемма 2. *Если функция f принадлежит к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, то и функция $h = \Pi^{(i)}f$ принадлежит к $\mathfrak{M}$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1 и предоставляется читателю.

Следствие. *Оператор* $\Pi^{(i)}$ *сохраняет примитивно-рекурсивность функций.*

Теорема 12. *Пусть P — предикат на N^s, принадлежащий к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, а Q — предикат на N^s, определяемый равенством*

$$Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s, z) = \\ = \underset{x_i \leqslant z}{(\exists x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s).$$

Тогда Q тоже принадлежит к $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Покажем, что характеристическая функция χ_Q предиката Q получается применением оператора $\Sigma^{(i)}$ к характеристической функции χ_P предиката P (и подстановкой). А именно легко видеть, что

$$\chi_Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s, z) = \\ = \mathrm{sg}\left(\sum_{j=0}^{j=z} \chi_P(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s)\right). \qquad (1)$$

Если $Q(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0, z^0) = \text{и}$, т. е. существует такое t^0, что $0 \leqslant t^0 \leqslant z^0$ и $P(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t^0, x_{i+1}^0, \ldots$ $\ldots, x_s^0) = \text{и}$, то $\chi_P(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0) = 1$. Тогда $\sum_{j=0}^{j=z^0} \chi_P(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, j, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0) > 0$ и, следовательно, $\mathrm{sg}\left(\sum_{j=0}^{j=z^0} \chi_P(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, j, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0)\right) = 1$.

Если $Q(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0, z^0) = \text{л}$, т. е. для всех t, $0 \leqslant t \leqslant z$, значение $P(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0)$ равно л, то $\chi_P(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0) = 0$ для всех t,

$0 \leqslant t \leqslant z$. Тогда $\sum_{j=0}^{j=z^0} \chi_P(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, j, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0) = 0$,

а следовательно, и $\mathrm{sg}\left(\sum_{j=0}^{j=z^0} \chi_P(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, j, x_{i+1}^0, \ldots, x_s^0)\right) = 0$.

Равенство (1) доказано. $P \in \mathfrak{M}$. Значит, $\chi_P \in \mathfrak{M}$. По лемме 1 $\Sigma^{(i)}\chi_P \in \mathfrak{M}$. $\mathrm{sg} \in \mathscr{T}$ и, тем более, $\mathrm{sg} \in \mathfrak{M}$. Из (1) $\chi_Q \in \mathfrak{M}$.

Следствие. *Навешивание нестрого ограниченного квантора существования сохраняет примитивно-рекурсивность предикатов.*

Замечание. Аналогичные теорема и следствие верны, разумеется, и для строго ограниченного квантора существования.

Теорема 13. *Пусть P — предикат на N^s, принадлежащий к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, а R — предикат на N^s, определяемый равенством*

$$R(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s, z) = \\ = \underset{x_i \leqslant z}{(\forall x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s).$$

Тогда R также принадлежит к $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Доказательство может быть проведено совершенно аналогично доказательству предыдущей теоремы со ссылкой уже на лемму 2, но проще, пожалуй, прямо сослаться на формулу

$$\underset{x_i \leqslant z}{(\forall x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \\ = \overline{\underset{x_i \leqslant z}{(\exists x_i)}}\, \overline{P}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$$

(ср. с (13) из п. 2 § 3) и теоремы 11, 12.

Следствие. *Навешивание нестрого ограниченного квантора общности сохраняет примитивно-рекурсивность предикатов.*

Замечание. Аналогичные теорема и следствие верны и для строго ограниченного квантора общности.

Теорема 14. *Если предикат P на N^s принадлежит к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, то* *функции* f_1, f_2, f_3 (типа $N^s \to N$), *определенные равенствами:*

$$f_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s, z) = \\ = \underset{x_i \leqslant z}{(\mu x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s), \quad (2)$$

$$f_2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s, z) = \\ = \underset{x_i \leqslant z}{(\mu' x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s), \quad (3)$$

$$f_3(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s, z) = \\ = \underset{x_i \leqslant z}{(\nu x_i)} P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s), \quad (4)$$

также принадлежат к $\mathfrak{M}$.

Доказательство. 1) Докажем, что

$$f_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s, z) = \\ = \sum_{t=0}^{z} \prod_{j=0}^{t} \overline{\mathrm{sg}}\, \chi_P(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s). \quad (5)$$

Допустим сначала, что существует x_i^0 такое, что $0 \leqslant x_i^0 \leqslant z$, $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \boldsymbol{u}$, но для всех t, $0 \leqslant t < x_i^0$, значение $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ равно $\boldsymbol{\jmath}$. Тогда $f_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s) = x_i^0$. Посчитаем, что дает нам в этом случае правая часть равенства (5). Если $x_i^0 > 0$, то для любого j, $0 \leqslant j < x_i^0$, значение $\chi_P(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ равно 0 и $\overline{\mathrm{sg}}\, \chi_P(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s) = 1$. В этом подслучае для любого t, $0 \leqslant t < x_i^0$, справедливо равенство $\prod_{j=0}^{t} \overline{\mathrm{sg}}\, \chi_P(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s) = 1$. Тогда $\sum_{t=0}^{x_i^0-1} \prod_{j=0}^{t} \overline{\mathrm{sg}}\, \chi_P(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s) = x_i^0$ (ведь на сегменте $[0, x_i^0 - 1]$ ровно x_i^0 слагаемых). Так как $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \boldsymbol{\jmath}$, и, значит, $\chi_P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots, x_s) = 1$, то для любого t, $t \geqslant x_i^0$, значение $\prod_{j=0}^{t} \overline{\mathrm{sg}}\, \chi_P(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s)$

равно 0. А значит, $\sum_{t=0}^{z}\prod_{j=0}^{t}\overline{\mathrm{sg}}\,\chi_P(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s) =$
$= \sum_{t=0}^{x_i^0-1}\prod_{j=0}^{t}\overline{\mathrm{sg}}\,\chi_P(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s) = x_i^0$. Если $x_i^0 = 0$, то, как легко видеть, правая часть равенства (5) тоже равна 0, т. е. опять равна x_i^0. Итак, в том случае, когда существует наименьшее x_i, не превосходящее z, такое, что $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s) = \boldsymbol{u}$, равенство (5) верно. Если же такого x_i не существует, т. е. для всех j, $0 \leqslant j \leqslant z$, значение $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ равно $\boldsymbol{л}$, то $\underset{x_i \leqslant z}{(\mu x_i)}\, P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ по определению (§ 3, п. 6) равно $z+1$, а правая часть равенства (5) в этом случае как раз и дает $z+1$ *). Равенство (5) доказано. Из (5), примитивно-рекурсивности функции $\overline{\mathrm{sg}}$ и лемм 1, 2 следует, что $f_1 \in \mathfrak{M}$.

2) Вследствие (1) из п. 7 § 3, примитивно-рекурсивности предиката „$x > y$“, теорем 11, 13 и уже доказанного первого пункта данной теоремы $f_2 \in \mathfrak{M}$.

3) Легко видеть, что $f_3(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_s, z) =$
$= \sum_{j=0}^{j=z}\chi_P(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \ldots, x_s)$. Следовательно, $f_3 = \Sigma^{(i)}\chi_P$. Из леммы 1 следует, что $f_3 \in \mathfrak{M}$.

Следствие. *При применении нестрого ограниченных операторов «наименьшее число», «наибольшее число» и «число тех, которые» к примитивно-рекурсивным предикатам получаются примитивно-рекурсивные функции.*

Замечание. Аналогичные теорема и следствие верны, конечно, и для строго ограниченных операторов «наименьшее число», «наибольшее число» и «число тех, которые».

---

*) Разумеется, мы именно так доопределили в п. 6 § 3 выражение $\underset{x_i \leqslant z}{(\mu x_i)}\, P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$ для того, чтобы было верно во всех случаях равенство (5). Аналогичное замечание можно сделать по поводу доопределения строго ограниченного оператора «наименьшее число» и операторов «наибольшее число», «число тех, которые».

Предлагаем читателю сравнить точные результаты, полученные нами в следствиях к теоремам 11—14, с теми интуитивными рассмотрениями, которые мы проводили в п. 9 § 3.

Доказанную в п. 2 теорему 8 удобнее чаще всего применять в несколько иной формулировке.

Теорема 15. *Пусть* $f_1, \ldots, f_n$ — *функции* (типа $N^s \to N$), *а* $P_1, \ldots, P_n$ — *предикаты* (на N^s), *принадлежащие к примитивно-рекурсивно замкнутому классу* $\mathfrak{M}$, *причем* $\overline{P_i} \cap \overline{P_j} = \Lambda$ $(i \neq j)$ *и* $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{P_i} = N^s$. *Тогда функция* f, *определяемая схемой*

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_s), \text{ если}^{*)}\ P_1(x_1, \ldots, x_s) = u, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_s), \text{ если}^{*)}\ P_n(x_1, \ldots, x_s) = u, \end{cases} \tag{6}$$

также принадлежит к $\mathfrak{M}$.

Функция f, определяемая по схеме (6), где $\overline{P_i} \cap \overline{P_j} = \Lambda$ $(i \neq j)$, называется *кусочно заданной при помощи предикатов* $P_1, \ldots, P_n$ *и функций* $f_1, \ldots, f_n$.

Заметим, что схему (6) мы могли бы записать и так (см. замечание 1 на стр. 66):

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_s) \quad P_1(x_1, \ldots, x_s), \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_s) \quad P_n(x_1, \ldots, x_s). \end{cases}$$

Следствие. *Если функция* f *кусочно задана при помощи примитивно-рекурсивных предикатов* $P_1, \ldots, P_n$ *и примитивно-рекурсивных функций* $f_1, \ldots, f_n$, *причем* $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{P_i} = N^s$, *то функция* f *примитивно-рекурсивна.*

---

*) Слова «если» в подобной схеме будут чаще всего опускаться.

4. ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ (ОКОНЧАНИЕ)

Продолжим начатое в п. 1 изучение класса $\mathscr{P}r$. Сейчас мы увидим, какое сильное оружие мы приобрели, доказав теоремы 10 — 15.

Прежде всего выполним данное в п. 1 обещание: докажем примитивно-рекурсивность функции div : $\operatorname{div}(x,y) = \left[\frac{x}{y}\right]$ *). Легко видеть, что 17

$$\left[\frac{x}{y}\right] = (\mu' t)\,[ty \leqslant x]. \tag{1}$$

Предикат „$ty \leqslant x$" получается подстановкой функции prod в предикат „$y \leqslant x$" и, следовательно, по теореме 10 примитивно-рекурсивен. Но теорема 14 доказана для ограниченного оператора μ'. И поэтому, хотя равенство (1) безусловно верно, мы вынуждены искать ограничение для t. Очевидно, что соответствующее t не превосходит, например, x. Поэтому наряду с верным равенством (1) имеет место также равенство

$$\left[\frac{x}{y}\right] = \underset{t \leqslant x}{(\mu' t)}\,[ty \leqslant x]. \tag{1'}$$

Правая часть равенства (1′) имеет смысл и при $y = 0$, а именно $\underset{t \leqslant x}{(\mu' t)}\,[t0 \leqslant x] = x$.

Доопределим функцию div согласно равенству (1′). Будем считать, что $\operatorname{div}(x, y) = \begin{cases} \left[\frac{x}{y}\right] & y \neq 0, \\ x & y = 0. \end{cases}$ Примитивно-рекурсивность именно такой, так доопределенной функции div мы сейчас — при помощи (1′) — и докажем.

Итак, докажем, на первый раз подробно, примитивно-рекурсивность функции

$$\operatorname{div}(x, y) = \underset{t \leqslant x}{(\mu' t)}\,[ty \leqslant x].$$

Как мы уже заметили, предикат „$ty \leqslant x$" примитивно-рекурсивен. По теореме 14 функция $g(x, y, z) =$

---

*) Точнее, некоторого ее доопределения (ср. с подстрочным примечанием на стр. 97).

$=(\mu' t)_{t \leqslant z}[ty \leqslant x]$ также примитивно-рекурсивна. Но функция div получается из функции g идентификацией аргументов (а поэтому, можно сказать, подстановкой любой примитивно-рекурсивной функции — см. § 2, п. 3, особенно пример 2). Следовательно, функция div примитивно-рекурсивна.

Из курса арифметики для 5 класса известно, что каждое число, большее единицы, однозначно (с точностью до порядка множителей) разлагается в произведение простых множителей. Обозначим n-е в порядке возрастания простое число через p_n. При этом нам удобно нумерацию начинать с 0. Таким образом, $p_0=2$, $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=7$, $p_4=11$ и т. д. Можно тогда для каждого числа, большего единицы, указать совсем уже единственное, каноническое разложение:

$$a=p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\ldots p_{n(a)}^{\alpha_{n(a)}}, \tag{2}$$

где $\alpha_i \geqslant 0$ для $i=0, 1, 2, \ldots, n(a)-1$ и $\alpha_{n(a)}>0$ ($2=2^1$, $3=2^0\cdot 3^1$, $4=2^2$, $5=2^0\cdot 3^0\cdot 5^1$, $6=2^1\cdot 3^1$, $7=2^0\times\times 3^0\cdot 5^0\cdot 7^1$, $8=2^3$, $9=2^0\cdot 3^2$, $10=2^1\cdot 3^0\cdot 5^1$ и т. д.). Назовем i-й *экспонентой* числа a при $i \leqslant n(a)$ число α_i и при $i>n(a)$ число 0 и обозначим i-ю экспоненту числа a через $\exp_i(a)$. Докажем, что функция $\exp^{(2)}$, ставящая числам a и i в соответствие число $\exp_i(a)$:

$$\exp(a, i)=\exp_i(a), \tag{3}$$

примитивно-рекурсивна.

Впрочем, если понимать под функцией exp именно функцию, заданную равенством (3), то такая функция exp не будет примитивно-рекурсивной, так как она даже не всюду определена. Число $\exp_i a$, а следовательно, и функция exp не определены при $a=0$ и $a=1$: Мы доопределим функцию exp в этих двух случаях так, как нам будет удобно, так, как «получится» (см. ниже (5), (6)), и вот эта доопределенная функция будет уже примитивно-рекурсивной. Наше утверждение о примитивно-рекурсивности функции exp нужно понимать, как утверждение о возможности доопределить ее до примитивно-рекурсивной. Выше, при доказательстве примитивно-рекурсивности функции div, мы имеем дело с подобной ситуацией.

Для доказательства примитивно-рекурсивности функции exp нам нужно будет сначала доказать примитивно-рекурсивность предиката Div: $\mathrm{Div}(x, y) = (y$ делится на $x)$, предиката Prim: $\mathrm{Prim}(n) = (n$ есть простое число) и функции $\mathrm{prim}^{(1)}: \mathrm{prim}(n) = p_n$. Докажем примитивно-рекурсивность предиката Div.

$$\mathrm{Div}(x, y) = (\exists t)[xt = y]. \tag{4}$$

Равенство (4) верно, но нас еще не устраивает. Нам нужно, чтобы квантор был ограниченным. Заметим, что если $(\exists t)[xt = y]$, то $(\exists t)_{t \leqslant y}[xt = y]$. Следовательно,

$$\mathrm{Div}(x, y) = (\exists t)_{t \leqslant y}[xt = y]. \tag{4'}$$

Равенство (4′) показывает, что предикат Div может быть получен подстановкой функции prod в предикат „$x = y$“, навешиванием ограниченного квантора существования на результат подстановки и подстановкой (а именно, идентификацией аргументов). Из теорем 10 и 12 заключаем, что предикат Div примитивно-рекурсивен.

$$\mathrm{Prim}(n) = (n > 1) \,\&\, (\forall x)_{x \leqslant n}[(x = 1) \vee (x = n) \vee \overline{\mathrm{Div}}(x, n)].$$

Из теорем 10, 11, 13 и примитивно-рекурсивности предикатов „$x = a$“, „$x > a$“ и Div заключаем, что предикат Prim примитивно-рекурсивен.

Докажем теперь примитивно-рекурсивность функции $\mathrm{prim}: \mathrm{prim}(n) = p_n$. Очевидно, что $p_{n+1} = (\mu y)[(y > p_n) \,\&\, \&\, \mathrm{Prim}(y)]$. Как и раньше, надо ввести ограничение для y. Легко видеть, что $p_{n+1} \leqslant p_n! + 1$. Следовательно, $p_{n+1} = (\mu y)_{y \leqslant p_n! + 1}[(y > p_n) \,\&\, \mathrm{Prim}(y)]$. Окончательно, функцию prim получим по схеме примитивной рекурсии:

$$\begin{cases} p_0 = 2, \\ p_{n+1} = (\mu y)_{y \leqslant p_n! + 1}[(y > p_n) \,\&\, \mathrm{Prim}(y)], \end{cases}$$

из функций $2^{(0)}$ и $f^{(2)}: f(u, v) = (\mu y)_{y \leqslant v! + 1}[(y > v) \,\&\, \mathrm{Prim}(y)]$ (u — фиктивный аргумент). Докажем примитивно-реку сивность функции f. Предикат „$(y > v)\,\&\,\mathrm{Prim}(y)$“ примитивно-рекурсивен. По теореме 14 будет примитивно-рекурсивной функция $g^{(2)}: g(v, z) = \underset{y \leqslant z}{(\mu y)}\,[(y > v)\,\&\,\mathrm{Prim}(y)]$. А функция f получается подстановкой (вместо z) в функцию g примитивно-рекурсивной функции $w = v! + 1$.

Теперь мы, наконец, можем доказать примитивно-рекурсивность функции exp. Из определения числа $\mathrm{exp}_i(a)$ следует, что

$$\mathrm{exp}_i(a) = (\mu' y)\,\mathrm{Div}(p_i^y, a). \tag{5}$$

Очевидно, что $\mathrm{exp}_i(a) \leqslant a$. Следовательно,

$$\mathrm{exp}_i(a) = \underset{y \leqslant a}{(\mu' y)}\,\mathrm{Div}(p_i^y, a). \tag{5'}$$

Правая часть равенства (5′) при $a = 0$ и при $a = 1$ (и при любом i) равна 0. Так и доопределим функцию exp:

$$\mathrm{exp}(a, i) = \begin{cases} \mathrm{exp}_i(a) & a > 1, \\ 0 & a \leqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

Из равенств (5′), (6), примитивно-рекурсивности предиката Div и функций prim и $0^{(2)}$, теоремы 10, замечания после теоремы 14 и теоремы 15 следует примитивно-рекурсивность так доопределенной функции exp.

Докажем еще ряд утверждений о примитивно-рекурсивных множествах и функциях.

Условимся говорить, что функция f *порождает* множество L, если L есть множество значений функции f. Если функция f, определенная на всем натуральном ряду, порождает множество L, мы будем говорить также, что функция f *пересчитывает*, или *перечисляет* множество L и называть функцию f *пересчетом* множества L. Для бесконечного множества L натуральных чисел введем еще понятие прямого пересчета. Пересчет f бесконечного множества L натуральных чисел называется *прямым пересчетом* *) множества L, если f — возрастающая функция, т. е. если для любого k значение $f(k)$ равно $(k+1)$-му (в смысле естественной упорядоченности по величине) числу из L.

---

*) Термин предложен А. В. Кузнецовым

Теорема 16. *Если функция f является прямым пересчетом множества L и f принадлежит к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$, то и множество L принадлежит к $\mathfrak{M}$.*

Доказательство

$$(y \in L) = (\exists x)\,[y = f(x)]. \tag{7}$$

Равенство (7) использует только то, что f является пересчетом множества L. Поскольку f является прямым пересчетом, соответствующее x не превосходит y

$$(y \in L) = (\exists x)_{x \leqslant y}\,[y = f(x)]. \tag{7'}$$

Из теорем 6, 12, 10 следует, что предикат „$y \in L$“, а значит, и множество L принадлежат к $\mathfrak{M}$.

Следствие. *Если примитивно-рекурсивная функция f является прямым пересчетом некоторого множества L, то множество L примитивно-рекурсивно.*

Замечание. Обратное не верно. В § 8 будет построен пример примитивно-рекурсивного (бесконечного) множества, прямой пересчет которого не примитивно-рекурсивен (п. 3, пример 12).

Пусть L — множество в N^{s+1} ($s \geqslant 1$). Кортеж $\langle x_1, \ldots, x_s, y\rangle$ мы будем называть *нижней точкой* *) множества L, если $\langle x_1, \ldots, x_s, y\rangle \in L$, но для всякого z, $z < y$, выполняется $\langle x_1, \ldots, x_s, z\rangle \overline{\in} L$. В частности, если L — множество в N^2, под нижними точками множества L мы будем понимать такие точки $\langle x, y\rangle$, что $\langle x, y\rangle \in L$, но для всех z, $z < y$, выполняется $\langle x, z\rangle \overline{\in} L$.

Теорема 17. *Пусть L — множество в N^2, принадлежащее к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathfrak{M}$. Тогда множество $L_н$ его нижних точек также принадлежит к $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Обозначим через P предикат „$\langle x, y\rangle \in L$“, через $P_н$ — предикат „$\langle x, y\rangle \in L_н$“. Тогда

$$P_н(x, y) = P(x, y) \,\&\, (\forall z)_{z<y}\,\overline{P}(x, z), \tag{8}$$

---

*) Точнее, нижней точкой вдоль $(s+1)$-й оси.

$P \in \mathfrak{M}$. Из теоремы 11 и замечания к теореме 13 вытекает, что предикат $P_н$, а значит и множество $L_н$, принадлежит к $\mathfrak{M}$.

Следствие. *Множество нижних точек примитивно-рекурсивного множества* (в N^2) *примитивно-рекурсивно.*

Замечание. Теорема 17 и следствие из нее верны также для множеств в N^s ($s > 2$).

Теорема 18. *Если f_1 — **примитивно-рекурсивная** функция большого размаха, то существует такая **примитивно-рекурсивная** функция f_2* (типа $N \to N$), *что функции f_1, f_2 осуществляют взаимно-однозначное отображение N на N^2* (ср. с теоремой 2 из § 2).

Доказательство. При доказательстве теоремы 2 из § 2 мы по произвольной функции большого размаха f_1 построили такую функцию f_2 (типа $N \to N$), что функции f_1, f_2 осуществляли взаимно-однозначное отображение N на N^2. Используя введенный в п. 8 § 3 оператор «число тех, которые», мы можем приведенное в доказательстве теоремы 2 из § 2 определение функции f_2 записать в виде равенства

$$f_2(t) = \underset{p<t}{(\nu p)} [f_1(p) = f_1(t)]. \tag{9}$$

Предикат „$x = y$“ примитивно-рекурсивен. Если функция f_1 примитивно-рекурсивна, то по теоремам 10, 14 и функция f_2, определенная через функцию f_1 равенством (9), примитивно-рекурсивна.

5. ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНОЕ СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ N И N^s

Теорема 19. *Для любого положительного s существует примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие $\varkappa^{[s]}$ между N и N^s.*

Замечание. Существует такое взаимно-однозначное примитивно-рекурсивное отображение N на N^s, для которого обратное отображение не примитивно-рекурсивно; существует такое взаимно-однозначное примитивно-рекурсивное отображение N^s на N, для которого обратное отображение не примитивно-рекурсивно (§ 8, п. 3, пример 14).

Согласно определению примитивно-рекурсивного взаимно-однозначного соответствия (стр. 105), теореме 3 из § 2 и замечанию 3 перед ней, для доказательства теоремы 19 нам достаточно построить такие примитивно-рекурсивные функции $\varkappa_1^{[s]}, \varkappa_2^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}$ типа $N \to N$ и такую примитивно-рекурсивную функцию $\varkappa_0^{[s]}$ типа $N^s \to N$, чтобы для всех $t \in N$ и для всех $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle \in N^s$ выполнялись равенства:

$$\varkappa_i^{[s]}(\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s)) = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{1}$$

$$\varkappa_0^{[s]}(\varkappa_1^{[s]}(t), \ldots, \varkappa_s^{[s]}(t)) = t. \tag{2}$$

Доказательство. Требуемое соответствие будет построено индуктивно.

1) Сначала отдельно выделим случай $s = 1$. Примитивно-рекурсивное соответствие $\varkappa^{[1]}$ между N и N строится тривиально. Искомые функции $\varkappa_1^{[1]} = \varkappa_0^{[1]} = I_1^{(1)}$, $\varkappa_1^{[1]}(t) = t$, $\varkappa_0^{[1]}(x) = x$.

2) Теперь в качестве базиса индуктивного построения построим примитивно-рекурсивное соответствие $\varkappa^{[2]}$ между N и N^2. Как уже сказано выше, для этого достаточно определить такие примитивно-рекурсивные функции $\varkappa_1^{[2]}, \varkappa_2^{[2]}$ типа $N \to N$ и такую примитивно-рекурсивную функцию $\varkappa_0^{[2]}$ типа $N^2 \to N$, чтобы для всех $t \in N$ и для всех $\langle x_1, x_2 \rangle \in N^2$ выполнялись равенства:

$$\varkappa_i^{[2]}(\varkappa_0^{[2]}(x_1, x_2)) = x_i \qquad (i = 1, 2), \tag{3}$$

$$\varkappa_0^{[2]}(\varkappa_1^{[2]}(t), \varkappa_2^{[2]}(t)) = t. \tag{4}$$

Легко видеть, что каждое $t \in N$ однозначно представимо в виде

$$t = 2^{x_1}(2x_2 + 1) \dot{-} 1 \tag{5}$$

[$0 = 2^0(2 \cdot 0 + 1) \dot{-} 1$, $1 = 2^1(2 \cdot 0 + 1) \dot{-} 1$,

$2 = 2^0(2 \cdot 1 + 1) \dot{-} 1$, $3 = 2^2(2 \cdot 0 + 1) \dot{-} 1$ и т. д.].

Согласно равенству (5), определим искомые функции так:

$$\left\{\begin{aligned} &\varkappa_1^{[2]}(t) = \exp_0(t+1), \\ &\varkappa_2^{[2]}(t) = \left[\frac{\left[\dfrac{t+1}{2^{\exp_0(t+1)}}\right] \dot{-} 1}{2}\right], \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$\varkappa_0^{[2]}(x_1, x_2) = 2^{x_1}(2x_2+1) \dot{-} 1. \tag{7}$$

Очевидно, что заданные равенствами (6), (7) функции $\varkappa_1^{[2]}$, $\varkappa_2^{[2]}$, $\varkappa_0^{[2]}$ удовлетворяют условиям (3), (4). Из примитивно-рекурсивности функций sum, prod, pot, dif (п. 1)

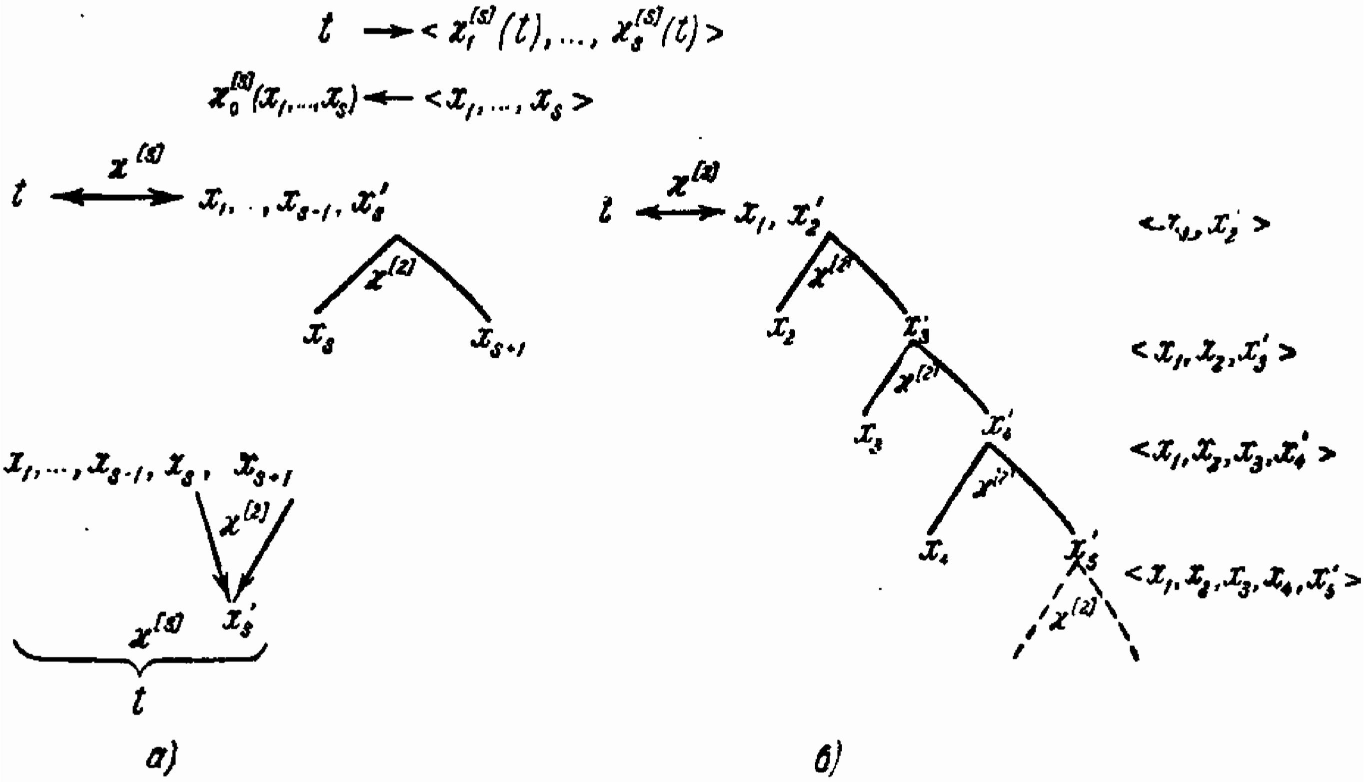


Рис. 9.

и функций div, exp (п. 4) следует примитивно-рекурсивность функций $\varkappa_1^{[2]}$, $\varkappa_2^{[2]}$, $\varkappa_0^{[2]}$, определенных равенствами (6), (7). Примитивно-рекурсивное соответствие $\varkappa^{[2]}$ построено.

3) Пусть у нас уже построено примитивно-рекурсивное соответствие $\varkappa^{[s]}$ между N и N^s, т. е. определены такие примитивно-рекурсивные функции $\varkappa_1^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}$ типа $N \to N$ и такая примитивно-рекурсивная функция $\varkappa_0^{[s]}$ типа $N^s \to N$, что для всех $t \in N$ и для всех

$\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in N^s$ имеют место равенства (1), (2). Тогда примитивно-рекурсивное соответствие $\varkappa^{[s+1]}$ между N и N^{s+1} мы построим следующим образом. По произвольному $t \in N$ мы сначала найдем соответствующий, согласно соответствию $\varkappa^{[s]}$, кортеж в N^s (ведь соответствие $\varkappa^{[s]}$ между N и N^s — по предположению индукции — уже построено): $\langle x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, x_s'\rangle$; затем для последней компоненты x_s' найдем соответствующую, согласно соответствию $\varkappa^{[2]}$, пару в N^2 (соответствие $\varkappa^{[2]}$ между N и N^2 тоже уже построено): $\langle x_s, x_{s+1}\rangle$. А теперь числу $t \in N$ поставим в соответствие следующий кортеж в N^{s+1}: $\langle x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}\rangle$. Обратно. Возьмем произвольный кортеж в N^{s+1}: $\langle x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}\rangle$. Сначала для пары $\langle x_s, x_{s+1}\rangle$ найдем соответствующее, согласно $\varkappa^{[2]}$, x_s' в N. Затем для кортежа $\langle x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s'\rangle$ найдем соответствующее (по $\varkappa^{[s]}$) $t \in N$. Окончательно: кортежу $\langle x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}\rangle$ поставим в соответствие именно это $t \in N$ (см. рис. 9). Требуемые функции задаются равенствами:

$$\left\{\begin{aligned}
&\varkappa_1^{[s+1]}(t) = \varkappa_1^{[s]}(t),\\
&\varkappa_2^{[s+1]}(t) = \varkappa_2^{[s]}(t),\\
&\vdots\\
&\varkappa_{s-1}^{[s+1]}(t) = \varkappa_{s-1}^{[s]}(t),\\
&\varkappa_s^{[s+1]}(t) = \varkappa_1^{[2]}(\varkappa_s^{[s]}(t)),\\
&\varkappa_{s+1}^{[s+1]}(t) = \varkappa_2^{[2]}(\varkappa_s^{[s]}(t)),
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$\varkappa_0^{[s+1]}(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}) = \\ = \varkappa_0^{[s]}(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, \varkappa_0^{[2]}(x_s, x_{s+1})). \tag{9}$$

Из равенств (3), (4), (1), (2) и (8), (9) следуют соответствующие равенства для функций $\varkappa_1^{[s+1]}, \ldots, \varkappa_{s+1}^{[s+1]}, \varkappa_0^{[s+1]}$:

$$\varkappa_i^{[s+1]}(\varkappa_0^{[s+1]}(x_1, \ldots, x_{s+1})) = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s, s+1),$$
$$\varkappa_0^{[s+1]}(\varkappa_1^{[s+1]}(t), \varkappa_2^{[s+1]}(t), \ldots, \varkappa_s^{[s+1]}(t), \varkappa_{s+1}^{[s+1]}(t)) = t.$$

Из равенств (8), (9), и примитивно-рекурсивности функций $\varkappa_1^{[2]}$, $\varkappa_2^{[2]}$, $\varkappa_0^{[2]}$, $\varkappa_1^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}$, $\varkappa_0^{[s]}$ следует примитивно-рекурсивность функций $\varkappa_1^{[s+1]}, \ldots, \varkappa_{s+1}^{[s+1]}$, $\varkappa_0^{[s+1]}$.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, специального труда от нас потребовал только базис индуктивного построения: соответствие $\varkappa^{[2]}$ между N и N^2. Переход от соответствия $\varkappa^{[s]}$ между N и N^s к соответствию $\varkappa^{[s+1]}$ между N и N^{s+1} был выполнен некоторым стандартным образом (см. (8), (9)), опирающимся только на индуктивное предположение о существовании примитивно-рекурсивного соответствия $\varkappa^{[s]}$ между N и N^s и на факт существования (но не на конкретный способ его построения) примитивно-рекурсивного соответствия $\varkappa^{[2]}$ между N и N^2. Базис индуктивного построения: примитивно-рекурсивное соответствие $\varkappa^{[2]}$ между N и N^2 — может быть выполнен, конечно, многими различными способами.

Теорема 20. *Для любого положительного s существует такое примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между N и N^s, что функции $\varkappa_1^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}$, $\varkappa_0^{[s]}$, его осуществляющие, обладают двумя свойствами:*

1) (Свойство прямой мажорируемости.)

$$\varkappa_i^{[s]}(t) \leqslant t \quad (1 \leqslant i \leqslant s).$$

2) (Свойство обратной мажорируемости.) *Существует такая примитивно-рекурсивная функция $\pi^{(2)}$, что из $x_i \leqslant y$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ следует $\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s) \leqslant \pi(y, s)$.*

Доказательство. Докажем, что обоими требуемыми нам свойствами обладает то конкретное примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие $\varkappa^{[s]}$ между N и N^s, которое мы построили для доказательства теоремы 19.

1) Докажем сначала свойство прямой мажорируемости. При $s = 1$ $\varkappa_i^{[s]}(t) = \varkappa_1^{[1]}(t) = t$. При $s = 2$ требуемое неравенство следует из равенств (6) или равенства (5). Если же оно выполняется для некоторого s, то из равенств (8) и доказанной его верности для $s = 2$ следует выполнение свойства прямой мажорируемости и для $s + 1$.

2) Докажем свойство обратной мажорируемости. Для доказательства нам понадобится равенство

$$\varkappa_0^{[s+1]}(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}) = \\ = \varkappa_0^{[2]}(x_1, \varkappa_0^{[s]}(x_2, \ldots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1})), \quad (9')$$

верное для $s \geqslant 2$. Равенство (9′) легко доказывается индукцией по s с помощью равенства (9) (впрочем, его можно усмотреть и из рис. 9, *б*). Определим теперь «кусочно» функцию $g^{(3)}$

$$g(y, s, z) = \begin{cases} y & s = 0 \\ 2^{2^{z+1}} & s > 0, \end{cases} \quad (10)$$

По следствию из теоремы 15 функция g примитивно-рекурсивна. Возьмем произвольную примитивно-рекурсивную функцию от одного аргумента: $f^{(1)}$.

Определим теперь функцию $\pi^{(2)}$ примитивной рекурсией через функции $f^{(1)}$, $g^{(3)}$:

$$\begin{cases} \pi(y, 0) = f(y), \\ \pi(y, s+1) = g(y, s, \pi(y, s)). \end{cases} \quad (11)$$

Функция π примитивно-рекурсивна *). Докажем, что она — искомая. Прежде всего заметим, что для $s > 0$ выполняется неравенство

$$\pi(y, s) \geqslant y. \quad (12)$$

Для $s = 1$: $\pi(y, 1) = g(y, 0, \pi(y, 0)) = y \geqslant y$.

Для $s > 1$: $\pi(y, s) = g(y, s-1, \pi(y, s-1)) =$
$$= 2^{2\pi(y, s-1)+1} \geqslant \pi(y, s-1).$$

Следовательно, $\pi(y, 2) \geqslant \pi(y, 1) \geqslant y$. $\pi(y, 3) \geqslant \pi(y, 2) \geqslant y$ и т. д.

---

*) Обратим внимание читателя на ту своеобразную форму схемы примитивной рекурсии, при помощи которой мы задали функцию π. Нас функция π интересует только при $s > 0$. По существу нам нужна была функция $\begin{cases} \pi(y, 1) = y, \\ \pi(y, s+1) = 2^{2\pi(y, s+1)} \ (s > 0) \end{cases}$. Но рекурсию полагается начинать с нуля. Мы очень просто обошли эту трудность при помощи вспомогательной функции g. Значение $\pi(y, 0)$ у нас не участвует при вычислении $\pi(y, 1)$. При помощи аналогичной уловки можно начинать примитивную рекурсию с любого места и получать при этом примитивно-рекурсивную функцию.

Докажем теперь индукцией по s следующее утверждение:

если $x_i \leqslant y$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то $\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s) \leqslant \pi(y, s)$.

При $s = 1$: если $x \leqslant y$, то $\varkappa_0^{[1]}(x) = x \leqslant y \leqslant \pi(y, 1)$.

Пусть $s = 2$ и $x_i \leqslant y$ $(i = 1, 2)$. Из (7)

$$\varkappa_0^{[2]}(x_1, x_2) = 2^{x_1}(2x_2 + 1) \dot{-} 1 \leqslant 2^{x_1}(2x_2 + 1) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{x_1} \cdot 2^{x_2+1} = 2^{x_1+x_2+1} \leqslant 2^{2y+1}.$$

Но $\pi(y, 2) = g(y, 1, \pi(y, 1)) = g(y, 1, y) = 2^{2y+1}$. Следовательно, $\varkappa_0^{[2]}(x_1, x_2,) \leqslant \pi(y, 2)$. Пусть утверждение «если $x_i \leqslant y$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то $\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s) \leqslant \pi(y, s)$» уже доказано для некоторого $s \geqslant 2$. Пусть $x_i \leqslant y$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s, s + 1)$. Докажем, что $\varkappa_0^{[s+1]}(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}) \leqslant$ $\leqslant \pi(y, s + 1)$. Действительно, $x_2, x_3, \ldots, x_s, x_{s+1} \leqslant y$. Следовательно, по предположению индукции,

$$\varkappa_0^{[s]}(x_2, x_3, \ldots, x_s, x_{s+1}) \leqslant \pi(y, s) \qquad (13)$$

$x_1 \leqslant y$. По (12)

$$x_1 \leqslant \pi(y, s). \qquad (14)$$

Из (9′), (13) и (14) и уже доказанного для $s = 2$ следует:

$$\varkappa_0^{[s+1]}(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}) \leqslant \pi(\pi(y, s), 2).$$

Но $\pi(y, 2) = 2^{2y+1}$. Следовательно,

$$\varkappa_0^{[s+1]}(x_1, \ldots, x_{s+1}) \leqslant 2^{2\pi(y, s)+1} = g(y, s, \pi(y, s)) = \pi(y, s+1).$$

Замечание. *Для любых двух примитивно-рекурсивных взаимно-однозначных соответствий между N и N^s существует примитивно-рекурсивная функция типа $N \longrightarrow N$, дающая по числу, соответствующему какому-либо кортежу при первом соответствии, число, соответствующее этому же кортежу при втором соответствии.* Действительно, если первое соответствие обозначить через $\bar{\varkappa}^{[s]}$, а второе — через $\bar{\bar{\varkappa}}^{[s]}$, то такой функцией будет служить функция η, введенная равенством

$$\eta(t) = \bar{\bar{\varkappa}}_0^{[s]}(\bar{\varkappa}_1^{[s]}(t), \bar{\varkappa}_2^{[s]}(t), \ldots, \bar{\varkappa}_s^{[s]}(t)).$$

6. ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫЙ ПЕРЕСЧЕТ МНОЖЕСТВА N^∞

В настоящем пункте мы хотим построить некоторое специальное взаимно-однозначное соответствие между множествами N и N^∞.

Займемся сперва отображениями множества N в множество N^∞. Условимся рассматривать только такие отображения множества N в N^∞, при которых числу $0 \in N$ соответствует пустой кортеж $\Lambda \in N^\infty$. Чтобы задать отображение множества N в N^∞, нужно теперь каждому положительному $t \in N$ поставить в соответствие некоторый определенный кортеж $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle \in N^\infty$ $(s > 0)$, причем s уже не фиксировано и зависит от t. Следовательно, нам нужно научиться по $t > 0$ находить, во-первых, длину s соответствующего ему в N^∞ кортежа, и, во-вторых, s компонент этого кортежа. Обозначим длину кортежа в N^∞, соответствующего положительному числу t, через $\iota_1(t)$, а i-ю компоненту этого кортежа через $\iota_2(t, i)$. Следовательно, кортеж, соответствующий числу t, будет в наших обозначениях выглядеть так: $\langle \iota_2(t, 1), \iota_2(t, 2), \ldots, \iota_2(t, \iota_1(t)) \rangle$.

По смыслу наших обозначений функция ι_1 определена для $t > 0$ и принимает только положительные значения (число 0 занято для пустого кортежа Λ, единственного кортежа длины 0), а функция ι_2 определена для $t > 0$ и для i: $1 \leqslant i \leqslant \iota_1(t)$.

Про функции $\iota_1^{(1)}$ и $\iota_2^{(2)}$ условимся говорить, что они *осуществляют* отображение множества $N \setminus \{0\}$ в множество $N^\infty \setminus \{\Lambda\}$.

Отображение множества N в множество N^∞, при котором число 0 отображается в пустой кортеж, мы назовем *примитивно-рекурсивным*, если функции ι_1, ι_2, осуществляющие отображение множества $N \setminus \{0\}$ в множество $N^\infty \setminus \{\Lambda\}$, можно продолжить до примитивно-рекурсивных, т. е. если существуют такие примитивно-рекурсивные функции ι_1^*, ι_2^*, что $\iota_1^*(t) = \iota_1(t)$ для $t > 0$ и $\iota_2^*(t, i) = \iota_2(t, i)$ для $t > 0$ и для всех i: $1 \leqslant i \leqslant \iota_1(t)$.

Перейдем к отображениям множества N^∞ в множество N.

Займемся сначала **взаимно-однозначными** отображениями множества N^∞ на множество N — другие отображения множества N^∞ в множество N нам в этой книге и не понадобятся. Условимся рассматривать только такие взаимно-однозначные отображения множества N^∞ на N, при которых пустому кортежу $\Lambda \in N^\infty$ соответствует число $0 \in N$. Взаимно-однозначное отображение множества N^∞ на N полностью определяется следующими двумя функциями: 1) функцией $\iota_3^{(1)}$, дающей по кортежу $\langle x \rangle \in N^\infty$ длины 1 его образ $t = \iota_3(x)$ в N, и 2) функцией $\iota_4^{(2)}$, дающей по образам t' и t'' кортежей $\langle x_1', \ldots, x_{s'}' \rangle \in N^\infty$ и $\langle x_1'', \ldots, x_{s''}'' \rangle \in N^\infty$ образ $t = \iota_4(t', t'')$ кортежа $\langle x_1', \ldots$ $\ldots, x_{s'}', x_1'', \ldots, x_{s''}'' \rangle$. Действительно, если мы имеем функции ι_3 и ι_4, то само отображение восстанавливается следующим образом: пустому кортежу соответствует число 0; кортежу $\langle x \rangle$ длины 1 соответствует число $\iota_3(x)$; кортежу же $\langle x_1, \ldots, x_s, x_{s+1} \rangle$ $(s \geqslant 1)$ соответствует число $t = \iota_4(u, \iota_3(x_{s+1}))$, где u — число соответствующее кортежу $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$. Про функции $\iota_3^{(1)}$ и $\iota_4^{(2)}$ условимся говорить, что они *осуществляют* взаимно-однозначное отображение множества N^∞ на N.

Взаимно-однозначное отображение множества N^∞ на множество N, при котором пустой кортеж отображается в число 0, назовем *примитивно-рекурсивным*, если осуществляющие его функции примитивно-рекурсивны.

Отображение (не обязательно — взаимно-однозначное) множества N^∞ в множество N можно представить как результат последовательного выполнения двух отображений: некоторого (даже любого наперед заданного) взаимно-однозначного отображения множества N^∞ на множество N и некоторого отображения множества N в себя; отображение множества N^∞ в множество N назовем *примитивно-рекурсивным*, если его можно представить как результат последовательного выполнения двух примитивно-рекурсивных отображений. Впрочем, как уже было сказано выше, не взаимно-однозначные отображения множества N^∞ в множество N нам не понадобятся.

Взаимно-однозначное *соответствие* между N и N^∞ назовем *примитивно-рекурсивным*, если оба задаваемые им отображения: N на N^∞ и N^∞ на N — примитивно-рекурсивны.

Замечание. Существует взаимно-однозначное примитивно-рекурсивное отображение множества N на N^∞, обратное к которому не примитивно рекурсивно (пример 15 из п. 3 § 8). Существует взаимно-однозначное примитивно-рекурсивное отображение множества N^∞ на N, обратное к которому не примитивно-рекурсивно (пример 16 из п. 3 § 8).

Теорема 21. *Существует примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между множествами N и N^∞.*

Доказательство. Согласно теореме 19, для любого положительного s существует примитивно-рекурсивное соответствие $\varkappa^{[s]}$ между N и N^∞. Фиксируем для каждого положительного s соответствие $\varkappa^{[s]}$ или, что то же самое, функции $\varkappa_1^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}, \varkappa_0^{[s]}$, его осуществляющие. При этом мы предполагаем выполненными равенства (8), (9) на стр. 122, связывающие соответствия $\varkappa^{[s]}$ и $\varkappa^{[s+1]}$ ($s \geqslant 2$); соответствия $\varkappa^{[1]}$, $\varkappa^{[2]}$ выбираются произвольно *). Все эти соответствия $\varkappa^{[s]}$ нам понадобятся для построения искомого примитивно-рекурсивного соответствия.

Искомое соответствие мы построим в виде взаимно-однозначного отображения множества N на N^∞. Дадим сначала идею построения отображения множества N на множество N^∞, а потом внесем две поправки. Числу $0 \in N$ мы раз навсегда поставили в соответствие пустой кортеж $\Lambda \in N^\infty$. Каждому положительному $t \in N$ мы сначала, согласно соответствию $\varkappa^{[2]}$, поставим в соответствие пару $\langle x, y\rangle$. Пусть искомая длина s кортежа, который мы хотим поставить в соответствие числу t, будет x: $s = x$. Затем, согласно соответствию $\varkappa^{[s]}$, мы найдем кортеж, соответствующий числу y. Этот кортеж мы и будем считать образом числа t при строящемся отображении. Необходимо внести две поправки. Во-первых, длина s

*) Ср. с замечанием на стр. 123.

должна быть положительной (единственный кортеж длины 0, пустой кортеж, мы уже учли), а по соответствию $\varkappa^{[2]}$ мы будем из числа t часто получать пары вида $\langle 0, y\rangle$. Поэтому пусть искомая длина s будет равна не x, а $x+1$: $s=x+1$. Во-вторых, так как t пробегает у нас только все положительные числа ($t=0\in N$ уже ушло у нас на $\Lambda\in N^{\infty}$), то мы на промежуточном этапе не получим пару $\langle x_0, y_0\rangle$, соответствующую (согласно $\varkappa^{[2]}$) числу 0, а следовательно, не получим и кортежа длины x_0+1, соответствующего по закону $\varkappa^{[x_0+1]}$ числу y_0. Поэтому, взяв $t\in N$, мы соответствующую промежуточную пару $\langle x, y\rangle$ будем брать, согласно соответствию $\varkappa^{[2]}$, не для t, а для $t-1$. Итак, окончательно искомое отображение множества N на множество N^{∞} будет выглядеть так:

$$0\to\Lambda. \tag{1}$$

Для $t>0$

$$\iota_1(t)=\varkappa_1^{[2]}(t\dot{-}1)+1. \tag{2}$$

Для $t>0$ и i: $1\leqslant i\leqslant\iota_1(t)$

$$\iota_2(t, i)=\varkappa_i^{[\varkappa_1^{[2]}(t\dot{-}1)+1]}(\varkappa_2^{[2]}(t\dot{-}1)). \tag{3}$$

Функции ι_1, ι_2 отображают $N\setminus\{0\}$ на $N^{\infty}\setminus\{\Lambda\}$ взаимно-однозначно. Действительно. Когда t пробегает все положительные числа, $t\dot{-}1$ пробегает всё N, а пары $\langle\varkappa_1^{[2]}(t\dot{-}1), \varkappa_2^{[2]}(t\dot{-}1)\rangle$ пробегают взаимно-однозначно всё N^2. В частности, когда пары $\langle\varkappa_1^{[2]}(t\dot{-}1), \varkappa_2^{[2]}(t\dot{-}1)\rangle$ пробегают множество $\mathscr{E}\{\langle x, y\rangle\in N^2\mid x=x_0\}$, соответствующие кортежи пробегают взаимно-однозначно всё N^{x_0+1}.

Нетрудно от кортежа $\langle x_1, \ldots, x_s\rangle\in N^{\infty}$ возвратиться к его (единственному) прообразу $t\in N$. Легко видеть, что

$$t=\varkappa_0^{[2]}(s\dot{-}1, \varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s))+1. \tag{4}$$

В частности, кортежу $\langle x\rangle$ длины 1 соответствует число

$$\iota_3(x)=\varkappa_0^{[2]}(0, \varkappa_0^{[1]}(x))+1. \tag{5}$$

Итак, взаимно-однозначное отображение множества N на N^{∞}, а следовательно, и взаимно-однозначное соответствие между N и N^∞ построено. Осталось показать, что оба задаваемые им отображения: N на N^∞ и N^∞ на N — примитивно-рекурсивны.

Покажем сперва, что отображение множества N на множество N^∞, которое мы построили, является примитивно-рекурсивным, т. е. что функции ι_1, ι_2 можно продолжить до примитивно-рекурсивных. Для функции ι_1 это, по существу, уже сделано. Если положить $\iota_1^*(t) = \varkappa_1^{[2]}(t \dot{-} 1) + 1$, то по равенству (2) $\iota_1(t) = \iota_1^*(t)$ для $t > 0$. Функция ι_1^*, очевидно, примитивно-рекурсивна.

С продолжением функции ι_2 придется повозиться немного дольше. Функция ι_2 не определена при $t = 0$, при $i = 0$ и при $i > \iota_1(t)$. Введем функцию $\varkappa^{(3)}$

$$\varkappa(s, i, t) = \begin{cases} 0, & s = 0, \quad i \text{ — любое}, \\ 0, & s > 0, \quad i = 0, \\ \varkappa_i^{[s]}(t), & s > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \\ \varkappa_s^{[s]}(t), & s > 0, \quad i > s. \end{cases} \tag{6}$$

Функция $\varkappa$ всюду определена. Докажем, что она примитивно-рекурсивна. Сразу применить к равенствам (6) следствие из теоремы 15 нельзя, так как в выражении $\varkappa_i^{[s]}(t)$ переменными являются s, i и t, а раньше мы доказали примитивно-рекурсивность функции $\varkappa_i^{[s]}$, зависящей только от t (при фиксированных s и i). Перепишем равенства (6) по-другому, более подробно:

$$\varkappa(s, i, t) = \begin{cases} 0, & s = 0, & i \text{ — любое} \\ 0, & s = 1, & i = 0, \\ \varkappa_1^{[1]}(t), & s = 1, & i > 0, \\ 0, & s = 2, & i = 0, \\ \varkappa_1^{[2]}(t), & s = 2, & i = 1, \\ \varkappa_2^{[2]}(t), & s = 2, & i > 1, \\ \varkappa(s-1, i, t), & s > 2, & i \leqslant s-2, \\ \varkappa_1^{[2]}(\varkappa(s-1, s-1, t)), & s > 2, & i = s-1, \\ \varkappa_2^{[2]}(\varkappa(s-1, i, t)), & s > 2, & i \geqslant s. \end{cases} \tag{7}$$

Пояснения требуют только три последних строчки схемы (7). Пусть $s>2$ и i: $1\leqslant i\leqslant s-2$. Тогда по (6) и (8) из п. 5 $\varkappa(s, i, t)=\varkappa_i^{[s]}(t)=\varkappa_i^{[s-1]}(t)=\varkappa(s-1, i, t)$. Если же $s>2$ и $i=0$, то $\varkappa(s, i, t)=0$ и $\varkappa(s-1, i, t)=0$ и, следовательно, опять $\varkappa(s, i, t)=\varkappa(s-1, i, t)$. Пусть теперь $s>2$, $i=s-1$. По предпоследнему из равенств (8) из п. 5 и по (6) $\varkappa(s, i, t)=\varkappa(s, s-1, t)=\varkappa_{s-1}^{[s]}(t)=\varkappa_1^{[2]}(\varkappa_{s-1}^{[s-1]}(t))=$ $=\varkappa_1^{[2]}(\varkappa(s-1, s-1, t))$. И, наконец, пусть $s>2$ и $i\geqslant s$. Если $i=s$, то $\varkappa(s, i, t)=\varkappa(s, s, t)=\varkappa_s^{[s]}(t)$. По последнему из равенств (8) из п. 5 и по (6) $\varkappa(s, i, t)=\varkappa_s^{[s]}(t)=$ $=\varkappa_2^{[2]}(\varkappa_{s-1}^{[s-1]}(t))=\varkappa_2^{[2]}(\varkappa(s-1, s-1, t))=\varkappa_2^{[2]}(\varkappa(s-1, s, t))=$ $=\varkappa_2^{[2]}(\varkappa(s-1, i, t))$. Если же $s>2$ и $i>s$, то $\varkappa(s, i, t)=$ $=\varkappa_s^{[s]}(t)=\varkappa_2^{[2]}(\varkappa_{s-1}^{[s-1]}(t))=\varkappa_2^{[2]}(\varkappa(s-1, s-1, t))=$ $=\varkappa_2^{[2]}(\varkappa(s-1, i, t))$. Эквивалентность схем (6) и (7) доказана. Схему (7) нетрудно преобразовать в схему примитивной рекурсии, задающую ту же функцию $\varkappa$. Введем функцию $g^{(4)}$:

$$g(n, i, t, u)=\begin{cases} 0, & n=0, \quad i=0,\\ \varkappa_1^{[1]}(t), & n=0, \quad i>0,\\ 0, & n=1, \quad i=0,\\ \varkappa_1^{[2]}(t), & n=1, \quad i=1,\\ \varkappa_2^{[2]}(t), & n=1, \quad i>1,\\ u, & n>1, \quad i\leqslant n-1,\\ \varkappa_1^{[2]}(u), & n>1, \quad i=n\\ \varkappa_2^{[2]}(u), & n>1, \quad i>n. \end{cases} \tag{8}$$

По следствию теоремы 15 функция g примитивно-рекурсивна. Сравнивая схемы (7) и (8), легко увидеть, что схема

$$\begin{cases} \varkappa(0, i, t)=0^{(2)}(i, t),\\ \varkappa(s+1, i, t)=g(s, i, t, \varkappa(s, i, t)) \end{cases}$$

задает примитивно-рекурсивно функцию $\varkappa$ через примитивно-рекурсивные функции $0^{(2)}$, g. Следовательно, функция $\varkappa$ примитивно-рекурсивна. Из (3), (2) и (6) следует, что для $t>0$ и i: $i\leqslant\iota_1(t)$

$$\iota_2(t, i)=\varkappa_i^{[\varkappa_1^{[2]}(t\dot{-}1)+1]}(\varkappa_2^{[2]}(t\dot{-}1))=$$
$$=\varkappa(\varkappa_1^{[2]}(t\dot{-}1)+1, i, \varkappa_2^{[2]}(t\dot{-}1)). \qquad (9)$$

Функция ι_2^*: $\iota_2^*(t, i)=\varkappa(\varkappa_1^{[2]}(t\dot{-}1)+1, i, \varkappa_2^{[2]}(t\dot{-}1))$ примитивно-рекурсивна и по (9) для $t>0$ и i: $1\leqslant i\leqslant\iota_1(t)$ $\iota_2(t, i)=\iota_2^*(t, i)$.

Докажем теперь, что полученное взаимно-однозначное отображение множества N^∞ на N примитивно-рекурсивно, т. е. что осуществляющие его функции ι_3, ι_4 примитивно-рекурсивны. Примитивно-рекурсивность функции ι_3 вытекает из равенства (5).

Осталось доказать примитивно-рекурсивность функции ι_4. Чтобы доказать это, постараемся описать, как по числам t' и t'', соответствующим кортежам $\alpha'=\langle x_1', \ldots, x_{s'}'\rangle$ и $\alpha''=\langle x_1'', \ldots, x_{s''}''\rangle$, получить число t, соответствующее кортежу

$$\alpha=\langle x_1', \ldots, x_{s'}', x_1'', \ldots, x_{s''}''\rangle.$$

Очевидно,

$$\alpha=\langle\iota_2(t', 1), \iota_2(t', 2), \ldots, \iota_2(t', \iota_1(t')),$$
$$\iota_2(t'', 1), \iota_2(t'', 2), \ldots, \iota_2(t'', \iota_1(t''))\rangle.$$

Поэтому, если ввести функцию $\varphi^{(3)}$ по схеме

$$\varphi(k, t', t'')=$$
$$=\begin{cases} 0, & k=0\\ \iota_2(t', k), & 1\leqslant k\leqslant\iota_1(t'),\\ \iota_2(t'', k\dot{-}\iota_1(t')), & \iota_1(t')+1\leqslant k\leqslant\iota_1(t')+\iota_1(t''),\\ 0, & k>\iota_1(t')+\iota_1(t''),\end{cases} \qquad (10)$$

то $\varphi(k, t', t'')$ даст k-й член кортежа α. Введем функцию $\beta^{(4)}$ посредством примитивной рекурсии

$$\begin{cases} \beta(0, k, t', t'')=\varkappa_0^{[1]}(\varphi(k, t', t'')),\\ \beta(i+1, k, t', t'')=\\ \quad=\varkappa_0^{[2]}(\varphi(k\dot{-}(i+1), t', t''), \beta(i, k, t', t''))\,\mathrm{sg}\, i+\\ \qquad\qquad+\varkappa_0^{[2]}(\varphi(k\dot{-}1, t', t''), \varphi(k, t', t''))\,\overline{\mathrm{sg}}\, i.\end{cases} \qquad (11)$$

Как легко видеть, схема (11) эквивалентна схеме

$$\begin{cases} \beta(0, k, t', t'') = \varkappa_0^{[1]}(\varphi(k, t', t'')), \\ \beta(1, k, t', t'') = \varkappa_0^{[2]}(\varphi(k \dot{-} 1, t', t''), \varphi(k, t', t'')), \\ \beta(i+2, k, t', t'') = \\ \qquad = \varkappa_0^{[2]}(\varphi(k \dot{-} (i+2), t', t''), \beta(i+1, k, t', t'')). \end{cases} \tag{11'}$$

Схема (11′) задает функцию β так называемой (примитивной) «рекурсией по двойному базису». При помощи функций sg, $\overline{\text{sg}}$ мы задали ту же функцию обычной примитивной рекурсией. Из (11′), с помощью равенства (9′) из п. 5, следует, что кортежу

$$\langle \varphi(k - i, t', t''), \varphi(k - i + 1, t', t''), \ldots, \varphi(k, t', t'') \rangle$$

при соответствии $\varkappa^{[i+1]}$ соответствует число $\beta(i, k, t', t'')$. Этому же кортежу при построенном соответствии между N^∞ и N соответствует число $\varkappa_0^{[2]}(i, \beta(i, k, t', t'')) + 1$ (см. (4)). Поэтому, если мы положим последовательно

$$\gamma(t', t'') = \iota_1(t') + \iota_1(t''), \tag{12}$$

$$\delta(t', t'') = \\ = \varkappa_0^{[2]}(\gamma(t', t'') \dot{-} 1, \beta(\gamma(t', t'') \dot{-} 1, \gamma(t', t''), t', t'')) + 1, \tag{13}$$

$$\iota_4(t', t'') = \begin{cases} t'', & t' = 0, \\ t', & t'' = 0, \\ \delta(t', t''), & t' \neq 0 \text{ и } t'' \neq 0, \end{cases} \tag{14}$$

то так построенная функция $\iota_4^{(2)}$ будет искомой, т. е. для каждых t' и t'' она будет давать номер соответствующего кортежа α. Из (10) – (14) и следствия теоремы 15 вытекает последовательно примитивно-рекурсивность функций φ, β, γ, δ и, наконец, ι_4 *). Теорема доказана.

Теорема 22. *Существует примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между множествами N и N^∞, обладающее двумя свойствами:*

---

*) Более точно: для доказательства примитивно-рекурсивности функций φ и γ в (10) и (12) функции ι_1, ι_2 нужно сначала заменить на их примитивно-рекурсивные продолжения ι_1^*, ι_2^*.

1) (Свойство прямой мажорируемости.) *Функция* ι_2, *осуществляющая* (вместе с функцией ι_1) *отображение множества* $N \setminus \{0\}$ *на множество* $N^\infty \setminus \{\Lambda\}$, *подчиняется неравенству*: $\iota_2(t, i) < t$ $(t > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant \iota_1(t))$.

2) (Свойство обратной мажорируемости.) *Существует такая примитивно-рекурсивная функция* $\tau^{(2)}$, *что, какой бы мы кортеж* $\alpha = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle$ *из* N^∞ *ни взяли, если* $x_i \leqslant y$ $(i = 1, \ldots, s)$, *то число* t, *соответствующее кортежу* α, *удовлетворяет неравенству* $t \leqslant \tau(y, s)$.

Доказательство. Построенное нами для доказательства теоремы 21 конкретное (см. (2), (3)) примитивно-рекурсивное соответствие между множеством N и множеством N^∞ будет обладать обоими требуемыми свойствами, если для его построения брать не произвольные примитивно-рекурсивные соответствия $\varkappa^{[s]}$, удовлетворяющие только равенствам (8) из п. 5 и (9) из п. 5, но соответствия, обладающие «свойством прямой мажорируемости»: $\varkappa_i^{[s]}(t) \leqslant t$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ и «свойством обратной мажорируемости»: существует такая примитивно-рекурсивная функция $\pi^{(2)}$, что из $x_i \leqslant y$ $(i = 1, \ldots, s)$ следует $\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s) \leqslant \pi(y, s)$. Такие соответствия существуют для каждого положительного s по теореме 20.

1) Учитывая (3) и свойство прямой мажорируемости, получим:

$$\iota_2(t, i) = \varkappa_i^{[\varkappa_1^{[2]}(t \dot{-} 1) + 1]}(\varkappa_2^{[2]}(t \dot{-} 1)) \leqslant \varkappa_2^{[2]}(t \dot{-} 1) \leqslant t \dot{-} 1.$$

Так как $t > 0$, то $t \dot{-} 1 < t$. Следовательно, $\iota_2(t, i) < t$.

2) Возьмем произвольный кортеж $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle \in N^\infty$ $(s > 0)$. Соответствующее $t \in N$ равно: $t = \varkappa_0^{[2]}(s \dot{-} 1, \varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s)) + 1$ (см. (4)). Если $x_i \leqslant y$ $(i = 1, \ldots, s)$, то по свойству обратной мажорируемости $\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s) \leqslant \pi(y, s)$. Очевидно, $s \dot{-} 1 \leqslant \max(s \dot{-} 1, \pi(y, s))$ и $\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s) \leqslant \pi(y, s) \leqslant \max(s \dot{-} 1, \pi(y, s))$. Тогда, также по свойству обратной мажорируемости,

$$\varkappa_0^{[2]}(s \dot{-} 1, \varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s)) \leqslant \pi(\max(s \dot{-} 1, \pi(y, s)), 2).$$

Следовательно, $t \leqslant \pi(\max(s \dot{-} 1, \pi(y, s)), 2) + 1$.

Искомая примитивно-рекурсивная функция $\tau(y, s) = \pi(\max(s \dot{-} 1, \pi(y, s)), 2) + 1$.

Замечание. *Пусть $\bar{\iota}$ и $\bar{\bar{\iota}}$ — два примитивно-рекурсивных взаимно-однозначных соответствия между N и N^∞. Тогда существует примитивно-рекурсивная функция η типа $N \to N$, дающая по всякому числу, соответствующему какому-либо кортежу в соответствии $\bar{\iota}$, число, соответствующее тому же кортежу в соответствии $\bar{\bar{\iota}}$.* Докажем это. Пусть соответствие $\bar{\iota}$ характеризуется функциями $\bar{\iota}_1$, $\bar{\iota}_2$, осуществляющими отображение $N \setminus \{0\}$ на $N^\infty \setminus \{\Lambda\}$, и функциями $\bar{\iota}_3$, $\bar{\iota}_4$, осуществляющими отображение N^∞ на N. Пусть аналогичные функции для $\bar{\bar{\iota}}$ будут $\bar{\bar{\iota}}_1$, $\bar{\bar{\iota}}_2$, $\bar{\bar{\iota}}_3$, $\bar{\bar{\iota}}_4$. Возьмем число $t > 0$. При соответствии $\bar{\iota}$ ему соответствует кортеж

$$\langle \bar{\iota}_2(t, 1), \bar{\iota}_2(t, 2), \ldots, \bar{\iota}_2(t, \bar{\iota}_1(t)) \rangle.$$

Введем функцию $\gamma^{(2)}$:

$$\begin{cases} \gamma(t, 0) = 0 \\ \gamma(t, i+1) = \bar{\bar{\iota}}_4(\gamma(t, i), \bar{\bar{\iota}}_3(\bar{\iota}_2(t, i+1))). \end{cases}$$

Очевидно, число $\gamma(t, i)$ соответствует при соответствии $\bar{\bar{\iota}}$ кортежу

$$\langle \bar{\iota}_2(t, 1), \bar{\iota}_2(t, 2), \ldots, \bar{\iota}_2(t, i) \rangle.$$

Поэтому, если мы положим

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \gamma(t, \bar{\iota}_1(t)), & t > 0, \end{cases}$$

то так построенная функция η будет искомой.

§ 5. РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА И ПРЕДИКАТЫ

В п. 1 этого параграфа вводится и изучается одно из основных понятий книги — понятие рекурсивно-перечислимого множества, являющееся уточнением интуитивного понятия перечислимого множества. В п. 2 исследуются рекурсивно-перечислимые предикаты — предикаты с рекурсивно-перечислимыми множествами истинности.

Понятие рекурсивно-перечислимого множества вводится нами в настоящих «Лекциях» (см. определение на этой же странице) через понятие примитивно-рекурсивного множества. Тем самым мы отступаем от традиционного порядка изложения, согласно которому рекурсивно-перечислимые множества определяются (для случая непустых линейных множеств) как множества, пересчитываемые обще-рекурсивными функциями (см., например, стр. 272 русского издания книги С. К. Клини [1952]), а определение, выбранное нами в качестве исходного, формулируется в виде теоремы (см., например, теорему XIV в § 60 упомянутой книги С. К. Клини). Заметим, что в этом параграфе рекурсивно-перечислимые множества изучаются нами д о введения обще-рекурсивных функций; связь между этими понятиями будет установлена лишь в § 7 (теоремы 23—24).

1. РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА

В п. 1 § 2 было определено понятие проекции множества $L (\subseteq M^s)$ на оси с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant s)$. Напомним, что $\text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} L \subseteq M^k$. Понятие проекции послужит нам основой для введения одного из важнейших в нашем курсе понятий — понятия рекурсивно-перечислимого множества.

О п р е д е л е н и е. Множество L в N^k называется *рекурсивно-перечислимым*, если оно является проекцией какого-нибудь примитивно-рекурсивного множества. Другими словами, множество L в N^k называется *рекурсивно-перечислимым*, если в каком-нибудь N^{k+s} $(s \geqslant 0)$ существует такое примитивно-рекурсивное множество L, что проекция множества L_1 на какие-то k осей $(1 \leqslant i_1 < \ldots$ $\ldots < i_k \leqslant k+s)$ равна L: $\text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} L_1 = L$.

Замечание 1. Нам часто будет полезным (например, когда мы строим отображение множества N на $N^\infty = N^0 \bigcup N^1 \bigcup N^2 \bigcup \ldots$) различать натуральные числа, т. е. элементы из $N = \{0, 1, 2, \ldots,\}$, и элементы множества $N^1 = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle \ldots\}$. Формально говоря, только что сформулированным определением не охватывается случай множества в N. Введем самое естественное определение: множество L в N называется *рекурсивно-перечислимым*, если рекурсивно-перечислимо множество L_1 в N^1, получающееся из L отображением $n \longrightarrow \langle n \rangle$.

Замечание 2. Из замечания после определения примитивно-рекурсивного множества следует, что *рекурсивно-перечислимых множеств* (как в каждом N^k, так и всего) — *счетное число*. Поскольку множество подмножеств в N^k несчетно, *существуют не рекурсивно-перечислимые множества*. Примеры таких множеств будут построены в § 9 (п. 2, пример 6).

Теорема 1. *Если L — рекурсивно-перечислимое множество в N^k, то, каково бы ни было положительное t и каков бы ни был набор номеров осей: $j_1, \ldots, j_k$ $(1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant k+t)$, найдется такое примитивно-рекурсивное множество L_2 в N^{k+t}, что $L = \text{пр}_{j_1, \ldots, j_k} L_2$.*

Доказательство. 1) Докажем сначала, что номера осей не являются существенными. Точнее. По условию, L — рекурсивно-перечислимое множество в N^k. Значит, существует такое s, такие номера $i_1, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots$ $\ldots < i_k \leqslant k+s)$ и такое примитивно-рекурсивное множество L_1 в N^{k+s}, что $L = \text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} L_1$. Возьмем произвольные номера $j_1, \ldots, j_k$ такие, что $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant$ $\leqslant k+s$, и докажем, что в N^{k+s} найдется такое примитивно-рекурсивное множество L_2, что $L = \text{пр}_{j_1, \ldots, j_k} L_2$.

Для того чтобы это доказать, нам понадобится понятие «образа кортежа при подстановке». Возьмем какой-нибудь кортеж в N^l:

$$\alpha = \langle x_1, \ldots, x_l \rangle$$

и какую-нибудь подстановку l-й степени *):

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & l \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \ldots & \mathfrak{a}_l \end{pmatrix}.$$

Образом кортежа α *при подстановке* $\mathfrak{a}$ называется кортеж

$$\beta = \mathfrak{a}(\alpha) = \langle x_{\mathfrak{a}_1}, x_{\mathfrak{a}_2}, \ldots, x_{\mathfrak{a}_l} \rangle,$$

т. е. кортеж, у которого на i-ом месте стоит $x_{\mathfrak{a}_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, l$). *Образом множества* L_1 ($\subseteq N^l$) *при подстановке* $\mathfrak{a}$ называется множество

$$L_2 = \mathfrak{a}(L_1) = \mathscr{E}\,\{\beta \in N^l \mid \text{Существует в } L_1 \text{ такое } \alpha, \text{ что } \beta = \mathfrak{a}(\alpha)\},$$

т. е. множество образов всех кортежей из L_1 при подстановке $\mathfrak{a}$. Очевидно, что если $L_2 = \mathfrak{a}(L_1)$, то множества L_1 и L_2 равномощны, причем $\mathfrak{a}$ осуществляет взаимно-однозначное отображение множества L_1 на множество L_2.

Приступим к доказательству существования искомого множества L_2. Возьмем подстановку $\mathfrak{b}$ $(k+s)$-й степени такую, что числу j_m в ней соответствует число i_m ($m = 1, 2, \ldots, k$), а в остальном она произвольная (но, разумеется, фиксированная):

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} \ldots & j_1 & \ldots & j_2 & \ldots & j_k & \ldots \\ \ldots & i_1 & \ldots & i_2 & \ldots & i_k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{c}$ обозначим подстановку, обратную к подстановке $\mathfrak{b}$. Пусть

$$\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k+s \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \ldots & \mathfrak{c}_{k+s} \end{pmatrix}.$$

*) Напомним, что подстановкой n-й степени называется взаимно-однозначное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя. Запись подстановки в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \ldots & \mathfrak{a}_n \end{pmatrix}$ означает, что число i переходит при рассматриваемом отображении в число $\mathfrak{a}_i$.

Искомым множеством L_2 будет множество $\mathfrak{b}(L_1)$. Во-первых, множество $L_2 = \mathfrak{b}(L_1)$ примитивно-рекурсивно, так как его характеристическая функция χ_{L_2} получается из характеристической функции χ_{L_1} примитивно-рекурсивного множества L_1 перестановкой аргументов, а именно: $\chi_{L_2}(x_1, x_2, \ldots, x_{k+s}) = \chi_{L_1}(x_{c_1}, x_{c_2}, \ldots, x_{c_{k+s}})$. Во-вторых, $\text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} L_1 = \text{пр}_{j_1, \ldots, j_k} L_2$, так как если $\beta = \mathfrak{b}(\alpha)$, то у кортежа β на j_1-ом месте стоит то число, которое у кортежа α стояло на i_1-ом месте, на j_2-ом месте стоит то число, которое у кортежа α стояло на i_2-ом месте, и т. д. Следовательно, $\text{пр}_{i_1, \ldots, i_k}\alpha = \text{пр}_{j_1, \ldots, j_k}\beta$.

2) Докажем теперь, что размерность пространства, в котором лежит проектируемое множество, также не существенна.

Пусть $L = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_1$, где L_1 — примитивно-рекурсивное множество в N^{k+s}.

Докажем сначала, что в N^{k+1} найдется такое примитивно-рекурсивное множество L_2, что $L = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_2$. Если $s = 0$, то достаточно положить $L_2 = L_1 \times N$ (следствие теоремы 4 из § 4). Пусть теперь $s > 0$. Искомое множество L_2 в N^{k+1} мы получим тогда из множества $L_1 \subseteq N^{k+s}$ при помощи функций $\varkappa_1^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}, \varkappa_0^{[s]}$, осуществляющих примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие $\varkappa^{[s]}$ между N и N^s (такие функции существуют по теореме 19 из § 4). Множество L_2 в N^{k+1} мы построим так: из каждого $\alpha = \langle x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots$ $\ldots, x_{k+s}\rangle \in L_1$ мы образуем $\beta = \langle x_1, x_2, \ldots, x_k, \varkappa_0^{[s]}(x_{k+1}, \ldots$ $\ldots, x_{k+s})\rangle$. Множество всех таких β мы и обозначим через L_2. Другими словами,

$$L_2 = \mathscr{E}\{\langle y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}\rangle \in N^{k+1} \mid \langle y_1, y_2, \ldots$$
$$\ldots, y_k, \varkappa_1^{[s]}(y_{k+1}), \varkappa_2^{[s]}(y_{k+1}), \ldots, \varkappa_s^{[s]}(y_{k+1})\rangle \in L_1\}.$$

Тогда очевидно, что $\text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_2 = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_1$. Множество L_2 примитивно-рекурсивно, так как его характеристическая функция χ_{L_2} получается подстановкой примитивно-рекурсивных функций $\varkappa_1^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}$ в характеристическую функцию χ_{L_1} примитивно-рекурсивного множества L_1, а именно:

$$\chi_{L_2}(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) =$$
$$= \chi_{L_1}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \varkappa_1^{[s]}(x_{k+1}), \ldots, \varkappa_s^{[s]}(x_{k+1})).$$

Теперь докажем, что при любом $t > 1$ в N^{k+t} найдется такое примитивно-рекурсивное множество L_3, что $L = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_3$. В качестве L_3 можно взять просто цилиндр в N^{k+t}, восставленный из $L_2 \subseteq N^{k+1}$ вдоль осей с номерами $k+2, k+3, \ldots, k+t$ ($L_3 = L_2 \times N^{t-1}$). По следствию теоремы 4 из § 4 L_3 примитивно-рекурсивно. Очевидно, что $\text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_3 = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_2$.

3) Наконец, окончательно. Пусть $L = \text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} L_1$, где L_1 — примитивно-рекурсивное множество в N^{k+s}. Возьмем произвольное положительное t и номера $j_1, j_2, \ldots, j_k$ $(1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant k+t)$. Покажем, что в N^{k+t} найдется такое примитивно-рекурсивное множество L_2, что $L = \text{пр}_{j_1, \ldots, j_k} L_2$. Сначала найдем в N^{k+s} такое примитивно-рекурсивное множество L_3, что $L = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_3$. Такое множество L_3 существует по первому пункту доказательства. Затем в N^{k+t} найдем такое примитивно-рекурсивное множество L_4, что $L = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_4$. Такое множество L_4 найдется (в два приема) по второму пункту доказательства. И, наконец, в N^{k+t}, опять-таки по первому пункту доказательства, найдется такое примитивно-рекурсивное множество L_2, что $L = \text{пр}_{j_1, \ldots, j_k} L_2$. Теорема 1 доказана.

Итак, если L — рекурсивно-перечислимое множество в N^k, то в любом N^{k+s} $(s > 0)$ и для любых номеров осей $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant k+s)$ найдется такое примитивно-рекурсивное множество L_1, что $L = \text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} L_1$. Нам чаще всего (но не всегда) будет удобно считать, что $L = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_1$, где L_1 — некоторое примитивно-рекурсивное множество в N^{k+1}.

Отметим, что так как пустое множество примитивно-рекурсивно, а проекцией пустого множества является пустое же множество, пустое множество относится к числу рекурсивно-перечислимых. Пустое множество будет в нашей теории, так сказать, вырожденным, «несобственным» случаем рекурсивно-перечислимых множеств. Главные теоремы, вскрывающие суть понятия рекурсивно-перечислимого множества, которые мы вскоре докажем (теоремы 9 и 10 или теоремы 23 из § 7 и 24 из § 7), будут верны только для непустых рекурсивно-перечислимых множеств.

В предыдущем параграфе мы изучали примитивно-рекурсивные множества (п. 2). Обозначим класс всех примитивно-рекурсивных множеств через **П**, класс всех рекурсивно-перечислимых множеств через **Р**. Прежде всего, имеет место

Теорема 2. *Каждое примитивно-рекурсивное множество рекурсивно-перечислимо:*

$$\mathbf{П} \subseteq \mathbf{P}. \tag{1}$$

Доказательство. Если M — примитивно-рекурсивное множество в N^k, то $M = \text{пр}_{1,2,\ldots,k} M$.

Замечание. Обратное утверждение неверно. В § 8 (п. 3, пример 7) будет построен пример рекурсивно-перечислимого, но не примитивно-рекурсивного множества.

Посмотрим, какие теоремы из п. 2 § 4 можно перенести на рекурсивно-перечислимые множества и что можно доказать про эти множества нового.

Теорема 3. *Проекция рекурсивно-перечислимого множества рекурсивно-перечислима.*

Доказательство. Если $L_1 = \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_l} L_2$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant k)$ и $L_2 = \text{пр}_{1,2,\ldots,k} L_3$, где L_3 — примитивно-рекурсивное множество в N^{k+1}, то $L_1 = \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_l} L_3$ и, следовательно, L_1 рекурсивно-перечислимо.

Теорема 4. *Класс всех рекурсивно-перечислимых подмножеств множества* N^k есть кольцо множеств*).

Доказательство. 1) Соединение рекурсивно-перечислимых множеств рекурсивно-перечислимо, так как

$$\text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} (L_1 \cup L_2) = \text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} L_1 \cup \text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} L_2.$$

---

*) Система подмножеств некоторого множества M называется *кольцом множеств*, если наряду с любыми двумя своими элементами (являющимися подмножествами множества M) она содержит их соединение и пересечение.

2) Но множества $\text{пр}_{i_1, \ldots, i_k}(L_1 \bigcap L_2)$ и $\text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} L_1 \bigcap \bigcap \text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} L_2$, вообще говоря, не равны (см. рис. 10). И все-таки пересечение рекурсивно-перечислимых множеств рекурсивно-перечислимо. Докажем это. Пусть L' и L'' — рекурсивно-перечислимые множества в N^k. Пусть $L' = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_1$, а $L'' = \text{пр}_{2, 3, \ldots, k, k+1} L_2$, где L_1 и L_2 — примитивно-рекурсивные множества в N^{k+1} *). Докажем, что тогда

$$L' \bigcap L'' = \text{пр}_{2, 3, \ldots, k, k+1} [(N \times L_1) \bigcap (L_2 \times N)]. \qquad (2)$$

Если $\alpha = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle \in L' \bigcap L''$, то $\alpha \in L'$ и $\alpha \in L''$. Так как $\alpha \in L'$, существует $x' \in N$ такой, что $\alpha_1 = \langle x_1, \ldots, x_k, x' \rangle \in L_1$. Так как $\alpha \in L''$, существует $x'' \in N$ такой, что $\alpha_2 = \langle x'', x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle \in L_2$. Тогда $\alpha_3 = \langle x'', x_1, x_2, \ldots, x_k, x' \rangle \in N \times L_1$, так как $\alpha_1 \in L_1$, и $\alpha_3 \in L_2 \times N$, так как $\alpha_2 \in L_2$. Следовательно, $\alpha_3 \in (N \times L_1) \bigcap (L_2 \times N)$. Но $\text{пр}_{2, 3, \ldots, k, k+1} \alpha_3 = \alpha$. Следовательно, $\alpha \in \text{пр}_{2, 3, \ldots, k, k+1} [(N \times L_1) \bigcap (L_2 \times N)]$.

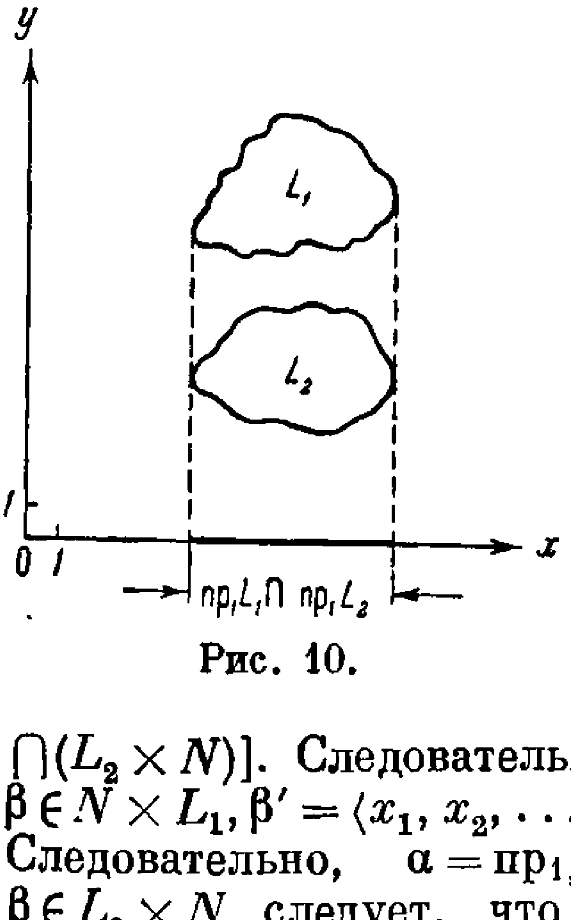


Рис. 10.

Пусть теперь $\alpha = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle \in \text{пр}_{2, 3, \ldots, k, k+1} [(N \times L_1) \bigcap \bigcap (L_2 \times N)]$. Тогда существуют такие x', $x'' \in N$, что $\beta = \langle x'', x_1, x_2, \ldots, x_k, x' \rangle \in (N \times L_1) \bigcap \bigcap (L_2 \times N)]$. Следовательно, $\beta \in N \times L_1$ и $\beta \in L_2 \times N$. Так как $\beta \in N \times L_1$, $\beta' = \langle x_1, x_2, \ldots, x_k, x' \rangle \in L_1$. Но $L' = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_1$. Следовательно, $\alpha = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} \beta' \in L'$. Аналогично: из $\beta \in L_2 \times N$ следует, что $\beta'' = \langle x'', x_1, x_2, \ldots x_k \rangle \in L_2$, но $L'' = \text{пр}_{2, 3, \ldots, k, k+1} L_2$. Следовательно, $\alpha = \text{пр}_{2, 3, \ldots, k, k+1} \beta'' \in L''$. Итак, $\alpha \in L'$ и $\alpha \in L''$. Значит, $\alpha \in L' \bigcap L''$. Равенство (2) доказано.

Из (2), следствия теоремы 4 из § 4 и следствия 1 теоремы 3 из § 4 вытекает рекурсивно-перечислимость множества $L' \bigcap L''$. Теорема 4 доказана.

---

*) Здесь существенно используется теорема 1: номера осей, по которым производится проектирование соответствующих примитивно-рекурсивных множеств, целиком находятся в нашей власти.

Замечание. Рекурсивно-перечислимые множества из N^k не составляют тела множеств (ср. с теоремой 3 из § 4): дополнение к рекурсивно-перечислимому множеству не обязано быть рекурсивно-перечислимым. Этот факт является центральным фактом в теории рекурсивно-перечислимых множеств и, по существу, на нем основаны (или могут быть основаны) все известные примеры несуществования алгоритмов. Пример рекурсивно-перечислимого множества, дополнение к которому не рекурсивно-перечислимо, будет построен в § 9 (п. 2, пример 5).

Определение. Множество в N^k называется *обще-рекурсивным*, если оно само и его дополнение (до N^k) являются рекурсивно-перечислимыми множествами.

Обозначим класс всех обще-рекурсивных множеств через **О**. Из теоремы 3 из § 4, теоремы 2 и определения обще-рекурсивного множества вытекает «тройное включение»:

$$\mathbf{П} \subseteq \mathbf{О} \subseteq \mathbf{Р}. \tag{3}$$

Замечание 1. Существование обще-рекурсивных, но не примитивно-рекурсивных множеств будет доказано в § 8 (п. 3, примеры 4 и 5). Существование рекурсивно перечислимых, но не обще-рекурсивных множеств будет доказано в § 9 (п. 2, пример 4).

Замечание 2. Определение понятия «рекурсивно-перечислимое множество» можно дать также и в следующей форме: множество называется *рекурсивно-перечислимым*, если оно служит проекцией некоторого обще-рекурсивного множества*). Если множество L_1 рекурсивно-перечислимо, оно — по определению — является проекцией некоторого примитивно-рекурсивного множества L_2, но $\mathbf{П} \subseteq \mathbf{О}$ и, значит, оно является проекцией обще-рекурсивного множества L_2. Пусть теперь множество L_1 является проекцией обще-рекурсивного множества L_2. $\mathbf{О} \subseteq \mathbf{Р}$. Значит, L_1 является проекцией рекурсивно-перечислимого множества L_2. По теореме 3 L_1 рекурсивно-перечислимо.

*) Понятие обще-рекурсивного множества может быть определено независимо от понятия рекурсивно-перечислимого множества (см., например, теорему 2 из § 7).

Проекция обще-рекурсивного множества может и не быть обще-рекурсивной (пример 8 из п. 2 § 9).

Класс $\mathfrak{O}$ обще-рекурсивных множеств*) мы будем специально изучать в § 7.

Теорема 5. *Геометрическое произведение рекурсивно-перечислимых множеств рекурсивно-перечислимо.*

Доказательство. Если L' — рекурсивно-перечислимое множество в N^k (скажем, $L = \text{пр}_{1,2,\ldots,k} L_1$, где L_1 — примитивно-рекурсивное множество в N^{k+1}), а L'' — рекурсивно-перечислимое множество в N^l (скажем, $L'' = \text{пр}_{1,2,\ldots,l} L_2$, где L_2 — примитивно-рекурсивное множество в N^{l+1}), то $L' \times L''$ тоже рекурсивно-перечислимо, так как $L' \times L'' = \text{пр}_{1,2,3,\ldots,k,k+2,k+3,k+4,\ldots,k+l+1}(L_1 \times L_2)$, а $L_1 \times L_2$ — примитивно-рекурсивное множество в N^{k+l+2} (следствие теоремы 5 из § 4).

Теорема 6. *Если L — рекурсивно-перечислимое множество в N^k, а $\mathfrak{a}$ — подстановка k-й степени, то $\mathfrak{a}(L)$ — рекурсивно-перечислимое множество.*

Доказательство. Пусть $L = \text{пр}_{1,2,\ldots,k} L_1$, где L_1 — примитивно-рекурсивное множество в N^{k+1}. Пусть $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \ldots & \mathfrak{a}_k \end{pmatrix}$. Образуем из $\mathfrak{a}$ следующую подстановку $(k+1)$-й степени: $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \ldots & \mathfrak{a}_k & k+1 \end{pmatrix}$. Обозначим через $\mathfrak{c}$ подстановку $(k+1)$-й степени, обратную для $\mathfrak{b}$. Пусть $\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \ldots & \mathfrak{c}_k & k+1 \end{pmatrix}$. Множество $\mathfrak{b}(L_1)$ примитивно-рекурсивно, так как $\chi_{\mathfrak{b}(L_1)}(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) = \chi_{L_1}(x_{\mathfrak{c}_1}, x_{\mathfrak{c}_2}, \ldots, x_{\mathfrak{c}_k}, x_{k+1})$ (ср. с первым пунктом доказательства теоремы 1). И $\mathfrak{a}(L) = \text{пр}_{1,2,\ldots,k} \mathfrak{b}(L_1)$.

Замечание. Аналогичная теорема тем более верна и для примитивно-рекурсивных множеств, но она нам не понадобится.

Теорема 7. *Цилиндр в N^{k+s}, восставленный из рекурсивно-перечислимого множества $L \subseteq N^k$ вдоль осей с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_s$ $(1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leqslant k+s)$, рекурсивно-перечислим.*

*) Обще-рекурсивные множества называют иногда также *рекурсивными* множествами.

Доказательство. Дадим два доказательства этой теоремы.

1) Обозначим через $i_1, i_2, \ldots, i_k$ номера осей, не совпадающие с $j_1, j_2, \ldots, j_s$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant k+s)$. По условию, L — рекурсивно-перечислимое множество, N^s — примитивно-рекурсивное, а значит (теорема 2), и рекурсивно-перечислимое множество. По теореме 5 геометрическое произведение $L \times N^s$ также рекурсивно-перечислимо. Но $L \times N^s$, конечно, еще не исследуемый цилиндр. Чтобы получить из множества $L \times N^s$ исследуемый цилиндр, надо в каждом кортеже из $L \times N^s$ переставить компоненты согласно некоторой подстановке $(k+s)$-й степени. А именно, если через $\mathfrak{a}$ обозначить подстановку $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & k+2 & \ldots & k+s \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k & j_1 & j_2 & \ldots & j_s \end{pmatrix}$, а через $\mathfrak{b}$ — обратную к ней, то легко видеть, что исследуемый цилиндр H есть образ множества $L \times N^s$ при подстановке $\mathfrak{b}: H = \mathfrak{b}(L \times N^s)$. По теореме 6 H рекурсивно-перечислимо.

2) Пусть L_1 — примитивно-рекурсивное множество в N^{k+1} такое, что $L = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k} L_1$. Обозначим через H_1 цилиндр в N^{k+s+1}, восставленный из L_1 вдоль осей с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_s$. По следствию теоремы 4 из § 4 H_1 примитивно-рекурсивно. Исследуемый цилиндр H равен проекции цилиндра H_1:

$$H = \text{пр}_{1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, k+s} H_1.$$

Теорема 8. *Пусть r-местные примитивно-рекурсивные* функции $f_1, \ldots, f_s$ *осуществляют отображение* φ *пространства N^r в пространство N^s* $(s > 0)$.

1) *Если L — рекурсивно-перечислимое множество в N^r, то $\varphi(L)$ — рекурсивно-перечислимое множество в N^s.*

2) *Если L — рекурсивно-перечислимое множество в N^s,* то $\varphi^{-1}(L)$ — *рекурсивно-перечислимое множество в N^r.*

Доказательство. По следствию 3 теоремы 6 из § 4 график G_φ отображения φ примитивно-рекурсивен, и, следовательно, рекурсивно-перечислим (теорема 2). А тогда, в силу равенства (9) из п. 4 § 2, равенства (10) из п. 4 § 2 и теорем 7, 4, 3, исследуемые множества рекурсивно-перечислимы.

Замечание 1. В § 6 будет доказана гораздо более сильная теорема (см. следствия 1, 2 теоремы 5 из § 6).

Замечание 2. Теорема 8 говорит, что как образ, так и прообраз рекурсивно-перечислимого множества при примитивно-рекурсивном отображении рекурсивно-перечислимы*). Эта теорема нами чаще всего будет применяться к случаю примитивно-рекурсивного взаимно-однозначного соответствия $\varkappa^{[s]}$ между N и N^s. Примитивно-рекурсивное соответствие задает в обе стороны (а для применения теоремы 8 достаточно — в одну) примитивно-рекурсивное отображение. Поэтому, если L — рекурсивно-перечислимое множество в N, то $\varkappa^{[s]}(L)$ — рекурсивно-перечислимое множество в N^s. И обратно: если L — рекурсивно-перечислимое множество в N^s, то $\varkappa^{[s]}(L)$ — рекурсивно-перечислимое множество в N **).

Теперь мы в состоянии доказать две теоремы, которые в значительной степени прояснят суть понятия «рекурсивно-перечислимое множество» и дадут ему еще одно определение.

Теорема 9. *Для того, чтобы непустое множество L в N было* ***рекурсивно-перечислимым***, *необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством значений какой-нибудь примитивно-рекурсивной функции типа $N \to N$.*

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть $L = \text{пр}_2 L_1$, где L_1 — некоторое непустое примитивно-рекурсивное множество в N^2 (см. рис. 11). L не пусто. Фиксируем в L какой-нибудь элемент b. Возьмем какое-нибудь примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие $\varkappa^{[2]}$ (т. е. функции $\varkappa_1^{[2]}$, $\varkappa_2^{[2]}$, $\varkappa_0^{[2]}$), существующее по теореме 19 из § 4. В силу $\varkappa^{[2]}$ множеству $L \subseteq N^2$ соответствует в N некоторое примитивно-рекурсивное множество P (см. замечание 3 после теоремы 9 из § 4). Введем функцию f типа $N \to N$:

$$f(t) = \begin{cases} \varkappa_2^{[2]}(t) & t \in P, \\ b & t \overline{\in} P. \end{cases}$$

*) Ср. со следствием теоремы 9 из § 4 и с замечанием 1 после теоремы 9 из § 4. Причиной разницы служит теорема 3, не имеющая места для примитивно-рекурсивных множеств (см. замечание после теоремы 3).

**) Ср. с замечанием 3 после теоремы 9 из § 4

По теореме 3 из § 4 и по следствию теоремы 8 из § 4 f примитивно-рекурсивна. Если $t \in P$, то $f(t) = \varkappa_2^{[2]}(t)$. Но, с другой стороны, в этом случае $\alpha = \langle \varkappa_1^{[2]}(t), \varkappa_2^{[2]}(t) \rangle \in L_1$ и, следовательно, $\text{пр}_2 \alpha = \varkappa_2^{[2]}(t) \in L$. Если $t \overline{\in} P$, то $f(t) = b \in L$. И, конечно, обратно: если $y_0 \in L$, то в L_1 найдется пара $\beta = \langle x_0, y_0 \rangle$, вторая координата которой равна y_0. Тогда $\varkappa_0^{[2]}(x_0, y_0) \in P$ и, следовательно, $f(\varkappa_0^{[2]}(x_0, y_0)) = \varkappa_2^{[2]}(\varkappa_0^{[2]}(x_0, y_0)) = y_0$ [(3) из п. 5 § 4].

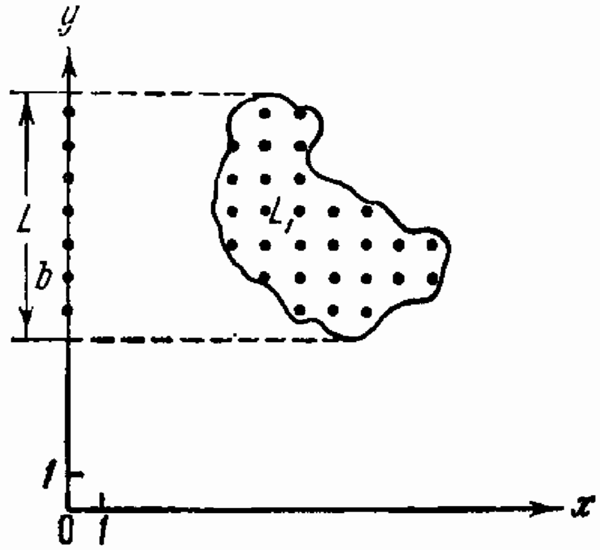


Рис. 11.

2) Достаточность. Пусть (непустое) множество L (в N) является множеством значений примитивно-рекурсивной функции f. Значит, L является образом множества N при отображении (N в N), осуществляемом функцией f. Из рекурсивно-перечислимости множества N и теоремы 8 следует рекурсивно-перечислимость множества L.

Теорема 10. *Для того, чтобы непустое множество L в N^k было* ***рекурсивно-перечислимым****, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие примитивно-рекурсивные функции $f_1, f_2, \ldots, f_k$ типа $N \to N$, что*

$$L = \mathscr{E}\{\langle y_1, y_2, \ldots, y_k \rangle \in N^k \mid \text{Существует такое } t, \text{ что } y_i = f_i(t) \ (i = 1, 2, \ldots, k)\},$$

т. е. чтобы L было множеством всех кортежей вида $\langle f_1(t), \ldots, f_k(t) \rangle$, где t пробегает всё N.

Доказательство. 1) Необходимость. Возьмем какое-нибудь примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие $\varkappa^{[k]}(\varkappa_1^{[k]}, \varkappa_2^{[k]}, \ldots, \varkappa_k^{[k]}, \varkappa_0^{[k]})$ между N и N^k, существующее по теореме 19 из § 4. Пусть L — непустое рекурсивно-перечислимое множество в N^k. Тогда $\varkappa^{[k]}(L)$ — непустое рекурсивно-перечислимое множество в N (замечание 2 после теоремы 8). По теореме 9 найдется такая примитивно-рекурсивная функция g, что $\varkappa^{[k]}(L)$ окажется множеством всех кортежей $\langle g(t)\rangle$, где t пробегает натуральный ряд. Но тогда L будет множеством всех кортежей вида $\langle \varkappa_1^{[k]}(g(t)), \varkappa_2^{[k]}(g(t)), \ldots, \varkappa_k^{[k]}(g(t))\rangle$ $(t \in N)$. Следовательно, искомые примитивно-рекурсивные функции равны $f_1(t) = \varkappa_1^{[k]}(g(t))$, $f_2(t) = \varkappa_2^{[k]}(g(t))$ и т. д.

2) Достаточность. L является образом рекурсивно-перечислимого множества N при отображении (N в N^k), осуществляемом функциями $f_1, f_2, \ldots, f_k$. По теореме 8 L рекурсивно-перечислимо.

Теоремы 9, 10 дают новое определение понятию «рекурсивно-перечислимое множество»: множество $L \subseteq N$ называется *рекурсивно-перечислимым*, если оно либо пустое, либо является множеством значений какой-нибудь примитивно-рекурсивной функции (типа $N \to N$); множество $L \subseteq N^k$ $(k > 1)$ называется *рекурсивно-перечислимым*, если оно либо пустое, либо является множеством значений какого-нибудь примитивно-рекурсивного отображения N в N^k, т. е. множеством всех кортежей вида $\langle f_1(t), f_2(t), \ldots \ldots, f_k(t)\rangle$, где $f_1, \ldots, f_k$—примитивно-рекурсивные функции и t пробегает натуральный ряд. Это определение показывает, что рекурсивно-перечислимые множества являются уточнением интуитивного понятия перечислимого множества (§ 1, стр. 21). Действительно, поскольку примитивно-рекурсивные функции интуитивно-вычислимы, из теорем 9, 10 следует, что рекурсивно-перечислимые множества перечислимы*).

Утверждение о том, что понятие рекурсивно-перечислимого множества есть математический аналог интуитивного понятия перечислимого множества, будет нам постоянно помогать эвристическим образом. Например, становится ясным, что дополнение к рекурсивно-перечислимому множеству L (в N, для простоты) совсем не обязано быть рекурсивно-перечислимым (см. замечание после теоремы 4). В самом деле, из алгоритма перечисления элементов множества L (вычисление значений соответствующей примитивно-рекурсивной функции f)

---

*) Обратное будет следовать из Основной гипотезы и следствия 6 теоремы 5 из § 6.

никак нельзя (более осторожно: неясно, как) получить алгоритм перечисления элементов множества $N \setminus L$. Если $b \in L$, то, вычисляя последовательно $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ и т. д., мы это узнаем. Но если $b \bar{\in} L$, то, вообще говоря, в случае произвольного рекурсивно-перечислимого множества мы это узнать не сможем (более осторожно: пока что неясно, как это узнать). Ведь даже если 1 000 000 первых значений f не дал числа b, отсюда вовсе не следует, что $b \bar{\in} L$ — вполне возможно, что $f(1\,000\,001) = b$.

По другому обстоит дело, если L — не только рекурсивно-перечислимое, но и обще-рекурсивное множество. В этом случае существуют как примитивно-рекурсивная функция f, порождающая L, так и примитивно-рекурсивная функция g, порождающая $N \setminus L$. Вычисляя одновременно обе последовательности $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... и $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, ..., мы любое $b \in N$ раньше или позже получим в одной из них и узнаем тем самым: $b \in L$ или $b \in N \setminus L$. Следовательно, понятие обще-рекурсивного множества является математическим аналогом интуитивного понятия разрешимого множества (§ 1, стр. 20)*).

2. РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ ПРЕДИКАТЫ

Определение. Предикат P (в N^k) называется *рекурсивно-перечислимым*, если его множество истинности рекурсивно-перечислимо.

Замечание. Очевидно, что если Q — рекурсивно-перечислимый предикат в N^k и для всех $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle \in N^k$

$$P(x_1, \ldots, x_k) \sim Q(x_1, \ldots, x_k),$$

то предикат P тоже рекурсивно-перечислим. Это тривиальное обстоятельство мы будем часто использовать в дальнейшем.

Теорема 11. *Предикат P на N^k тогда и только тогда является **рекурсивно-перечислимым**, когда*

*) Сейчас мы убедились лишь, что всякое обще-рекурсивное множество является разрешимым. Обратное будет следовать из Основной гипотезы и теоремы 2 из § 7.

он может быть получен навешиванием (неограниченного) *квантора существования на некоторый примитивно-рекурсивный предикат* P_1 (на N^{k+1}).

Доказательство. 1) Необходимость («только тогда»). Пусть предикат P (на N^k) рекурсивно-перечислим. Обозначим его множество истинности $\overline{P}$ (нам так сейчас будет удобнее) через L, $\overline{P}=L$. По определению рекурсивно-перечислимого предиката L — рекурсивно-перечислимое множество в N^k. Возьмем такое примитивно-рекурсивное множество L_1 в N^{k+1}, что $L=\text{пр}_{1,2,\ldots,k}L_1$. Обозначим через P_1 предикат „$\langle x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\rangle \in L_1$“. По определению примитивно-рекурсивного предиката P_1 примитивно-рекурсивен. Кроме того, $P(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (\exists x_{k+1}) P_1(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ (см. замечание на стр. 76).

2) Достаточность («тогда»). Если $P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{k+1}) = (\exists x_i) P_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{k+1})$, где P_1 — примитивно-рекурсивный предикат (на N^{k+1}), то из равенства $\overline{P}=\text{пр}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k+1}\overline{P_1}$ [(23) из п. 3 § 3] следует рекурсивно-перечислимость предиката P.

Теорема 11 дает второе определение понятию «рекурсивно-перечислимый предикат». В п. 3 § 4 мы изучали класс примитивно-рекурсивных предикатов. Посмотрим, какие из теорем п. 3 § 4 можно перенести на класс рекурсивно-перечислимых предикатов и что можно доказать нового.

Теорема 12. *Если предикат примитивно-рекурсивен, то он рекурсивно-перечислим.*

Это следует непосредственно из теоремы 2.

Теорема 13. *Навешивание* (неограниченного) *квантора существования сохраняет рекурсивно-перечислимость предиката.*

Это следует из соотношения (23) из п. 3 § 3 и теоремы 3. Для неограниченного квантора общности соответствующая теорема не имеет места.

Лемма. *Результат подстановки примитивно-рекурсивных функций в рекурсивно-перечислимый предикат также является рекурсивно-перечислимым предикатом* *).

*) § 6 будет доказана гораздо более общая теорема (см. теорему 6 из § 6).

Доказательство. Произвольная подстановка примитивно-рекурсивных функций всегда может быть заменена на (многократную) регулярную подстановку тех же функций и еще некоторых примитивно-рекурсивных функций (теорема 1 из § 3). Поэтому достаточно доказать лемму для случая регулярной подстановки. Для случая же регулярной подстановки нужный нам результат следует из того, что множество истинности результата регулярной подстановки в предикат P есть прообраз множества истинности предиката P при отображении, совершаемом подставляемыми функциями (теорема 8).

Теорема 14. *Конъюнкция и дизъюнкция рекурсивно-перечислимых предикатов рекурсивно-перечислимы.*

Доказательство. 1) Для простейшей конъюнкции это следует из равенства (9) из п. 3 § 3 и теоремы 4. Для общего случая это следует из уже доказанного для простейшей конъюнкции, теоремы 3 из § 3 и леммы.

2) Для дизъюнкции доказывается аналогично со ссылкой, соответственно, на равенство (12) из п. 3 § 3 и теорему 5 из § 3.

Замечание. Операция отрицания не обязана сохранять рекурсивно-перечислимость даже всюду определенных предикатов, так как дополнение к рекурсивно-перечислимому множеству не обязано быть рекурсивно-перечислимым (см. равенство (5) из п. 3 § 3 и замечание после теоремы 4).

Теорема 15. *Навешивание ограниченного квантора существования сохраняет рекурсивно-перечислимость предиката.*

Доказательство. $\underset{x_i \leqslant z}{(\exists x_i)}\, P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i\; x_{i+1}, \ldots$
$\ldots, x_k) = (\exists y)\,[[y \leqslant z]\;\&\; P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_k)]$. Предикат „$y \leqslant z$“ примитивно-рекурсивен и, тем более (теорема 12), рекурсивно-перечислим. Из теорем 14, 13 следует желаемое.

Теорема 16. *Навешивание ограниченного квантора общности сохраняет рекурсивно-перечислимость предиката.*

Доказательство. Пусть P — рекурсивно-перечислимый предикат. Для простоты записи будем считать, что P — предикат в N^2. Читатель увидит, что доказательство для общего случая проделывается абсолютно так же. Докажем, что предикат Q: $Q(x, z) = (\forall y)_{y \leqslant z} P(x, y)$ — рекурсивно-перечислим. Положим P_1: $P_1(x, y) = (\langle x, y \rangle \in \overline{P})$. Очевидно, P_1 — рекурсивно-перечислимый предикат на N^2 и $Q(x, z) \sim (\forall y)_{y \leqslant z} P_1(x, y)$. По теореме 11 существует такой примитивно-рекурсивный предикат R на N^3, что $P_1(x, y) = (\exists u) R(x, y, u)$. Следовательно, $Q(x, z) \sim (\forall y)_{y \leqslant z} (\exists u) R(x, y, u)$. Но легко видеть, что

$$(\forall y)_{y \leqslant z} (\exists u) R(x, y, u) = (\exists v) (\forall y)_{y \leqslant z} R(x, y, \exp_y v). \tag{1}$$

В самом деле. Пусть при некотором $x = x_0$ имеет место $(\forall y)_{y \leqslant z} (\exists u) R(x_0, y, u)$. Это означает, что для каждого $y: 0 \leqslant y \leqslant z$ — существует такое u_y, что имеет место $R(x_0, y, u_y)$. Докажем, что тогда имеет место и $(\exists v) (\forall y)_{y \leqslant z} R(x_0, y, \exp_y v)$. Действительно. При $v = \prod_{i=0}^{z} p_i^{u_i}$ для любого $y: 0 \leqslant y \leqslant z$, очевидно, имеет место $R(x_0, y, \exp_y v) = R(x_0, y, u_y)$. Обратно. Пусть при некотором $x = x_0$ имеет место $(\exists v) (\forall y)_{y \leqslant z} R(x_0, y, \exp_y v)$. Это означает, что существует такое v, что для каждого $y: 0 \leqslant y \leqslant z$ — имеет место $R(x_0, y, \exp_y v)$. Тогда, если для каждого $y: 0 \leqslant y \leqslant z$ положить $u_y = \exp_y v$, то для каждого $y: 0 \leqslant y \leqslant z$ будет иметь место $R(x_0, y, u_y)$ и, следовательно, будет иметь место $(\forall y)_{y \leqslant z} (\exists u) R(x_0, y, u)$. Равенство (1) доказано.

В силу (1) $Q(x, z) \sim (\exists v)(\forall y)_{y \leqslant z} R(x, y, \exp_y v)$. Предикат R примитивно-рекурсивен. Из примитивно-рекурсивности функции $\exp^{(2)}$ (§ 4, п. 4) и следствия теоремы 10 из § 4 вытекает примитивно-рекурсивность предиката „$R(x, y, \exp_y v)$“. Тогда по следствию теоремы 13 из § 4 примитивно-рекурсивен и предикат „$(\forall y)_{y \leqslant z} R(x, y, \exp_y v)$“. И, наконец, из теоремы 11 следует рекурсивно-перечислимость предиката Q.

§ 6. ЧАСТИЧНО-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе вводится самое главное понятие книги — понятие частично-рекурсивной функции. Это понятие принимается в качестве искомого уточнения интуитивного понятия вычислимой функции. Разумеется, совпадение понятий «частично-рекурсивная функция» и «вычислимая функция с натуральными аргументами и значениями» не может быть доказано. Это совпадение представляет собой естественно-научный закон, или гипотезу — «Основную гипотезу теории вычислимых функций». Определение частично-рекурсивной функции и Основная гипотеза рассматриваются в п. 1. В п. 2 изложение на некоторое время уходит в сторону от изучения частично-рекурсивных функций, и исследованию подвергаются функции, графиками которых служат рекурсивно-перечислимые множества,— однако лишь затем, чтобы показать (в Теореме о графике), что функции с рекурсивно-перечислимыми графиками и частично-рекурсивные функции — это одно и то же. Из этого обстоятельства проистекает много полезных следствий, которые излагаются в п. 3. Среди этих следствий — теорема о нормальной форме, показывающая, что всякая частично-рекурсивная функция f может быть стандартным способом (одним применением оператора μ и одной регулярной подстановкой) получена из двух примитивно-рекурсивных функций, из которых одна зависит от f, а другая — может быть выбрана произвольно.

Возможны различные эквивалентные друг другу уточнения понятия вычислимой функции. Одно из первых уточнений — для случая в с ю д у о п р е д е л е н н ы х (!) функций с натуральными аргументами и значениями — было сделано А. Чёрчем [1936], предложившим отождествлять такие функции с обще-рекурсивными функциями. «Определение обще-рекурсивной функции натурального числа было сообщено Ж. Эрбраном К. Гёделю, который использовал его со значительным изменением в серии лекций в Принстоне в 1934 г.» (С. К. Клини [1936], стр. 726) *). Согласно эрбранову-геделеву определению, которое можно найти на стр. 244 русского издания книги С. К. Клини [1952], всюду определенная функция f называется обще-рекурсивной, если все ее значения (точнее, все верные и только верные равенства вида $f(x_1, \ldots, x_s)=y$) могут быть получены по определенным правилам из некоторой (своей для каждой функции) системы определяющих равенств. Если в этом определении избавиться от всюду-определенности функции f и не требовать, таким образом, чтобы для всякого кортежа $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$ было выводимо равенство $f(x_1, \ldots, x_s)=$ $=y$(при некотором y), то мы получим предложенное С. К. Клини ([1938]; см. также стр. 291 русского издания книги [1952]) определение *частично-рекурсивной* функции; понятие частично-рекурсивной функции было введено С. К. Клини [1938] в качестве уточнения понятия произвольной (а не только всюду определенной) вычислимой функции с натуральными аргументами и значениями. Исходя из этого определения, С. К. Клини доказал ([1943], теорема 3 и следствие теоремы 4; см. также [1952], § 63, теорему XVIII и следствие теоремы XIX), что все частично-рекурсивные функции и только они могут быть получены применением некоторых стандартных операций к некоторым исходным функциям. Вот это-то характеристическое свойство частично-рекурсивных функций и принимается в наших «Лекциях» в качестве определения понятия «частично-рекурсивная функция» (см. определение на следующей странице и теорему 1). Эрбраново-геделево-клиниево определение частично-рекурсивной функции, требующее, по существу, построения некоторого *исчисления*, в данной книге не рассматривается вовсе. В § 14 будет сформулировано уточнение понятия вычислимой функции, основанное на совершенно других представлениях (а именно, на представлениях о вычислении функций на машинах; первые основанные на этих представлениях уточнения понятия вычислимой функции предложили в 1936 г. Э. Л. Пост [1936] и А. М. Тьюринг [1936]); там же будет установлена эквивалентность обоих рассматриваемых нами уточнений.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНАЯ ГИПОТЕЗА

В этом параграфе нам понадобится неограниченный оператор «наименьшее число», или оператор μ, применяемый к функциям. Напомним, что под оператором μ, примененным к функции $f^{(s)}$, мы условились (§ 3, п. 5) понимать оператор μ, навешенный на предикат „$f(x_1, \ldots, x_s)=0$“. Слова «примененный к функции» мы

*) Хотя записи этих лекций и были изданы (см. К. Гёдель [1934]), автор не имел возможности с ними ознакомиться.

часто будем опускать. Из контекста всегда будет ясно: к произвольному ли предикату или «к функции» (т. е. к предикату вида „$f(x_1, \ldots, x_s)=0$") применен оператор. Операцию применения (неограниченного) оператора μ к функции мы будем коротко называть: «*операция* μ».

Определение. Класс функций называется *частично-рекурсивно замкнутым*, если он 1) содержит функции $0^{(0)}$ и $\lambda_1^{(1)}$ и 2) замкнут относительно операций подстановки, примитивной рекурсии и операции μ.

Вспоминая определение примитивно-рекурсивно замкнутого класса, можно определение понятия «частично-рекурсивно замкнутый класс» сформулировать по-другому: класс функций называется *частично-рекурсивно замкнутым*, если он является примитивно-рекурсивно замкнутым классом и замкнут относительно операции μ.

Итак, из семейства всех примитивно-рекурсивно замкнутых классов мы выделили классы, замкнутые относительно операции μ, и назвали их частично-рекурсивно замкнутыми. Класс всех функций, разумеется, частично-рекурсивно замкнут. Класс $\mathcal{P}$ примитивно-рекурсивных функций не является частично-рекурсивно замкнутым, так как операция μ не сохраняет, вообще говоря, всюду определенность функции (см. пример 3 из п. 5 § 3), а любая примитивно-рекурсивная функция всюду определена (следствие 2 теоремы 2 из § 4). Но — и это для нас сейчас самое главное — класс всех интуитивно-вычислимых функций частично-рекурсивно замкнут (см. замечание в п. 9 § 3).

Определение. Минимальный частично-рекурсивно замкнутый класс (т. е. такой, который содержится в любом другом частично-рекурсивно замкнутом классе) называется *классом частично-рекурсивных функций*, а его члены, соответственно,— *частично-рекурсивными функциями*.

Класс частично-рекурсивных функций совпадает, очевидно, с пересечением всех частично-рекурсивно замкнутых классов, которое частично-рекурсивно замкнуто, не пусто (содержит $0^{(0)}$ и $\lambda_1^{(1)}$) и содержится в любом другом частично-рекурсивно замкнутом классе. Обозначим класс частично-рекурсивных функций русской заглавной буквой $\mathcal{Ч}$.

Кортеж функций $\langle f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$ называется *частично-рекурсивным описанием функции* f, если $f_k = f$ и каждая $f_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ либо 1) является одной из функций $0^{(0)}$, $\lambda_1^{(1)}$, либо 2) получается из предыдущих функций кортежа при помощи операции подстановки, или операции примитивной рекурсии, или операции μ.

По аналогии с теоремой 2 из § 4 может быть доказана следующая.

Теорема 1. *Функция является частично-рекурсивной тогда и только тогда, когда она имеет какое-нибудь частично-рекурсивное описание.* Другая формулировка: *Функция является частично-рекурсивной тогда и только тогда, когда она может быть получена из функций* $0^{(0)}$ *и* $\lambda_1^{(1)}$ *при помощи операций подстановки, примитивной рекурсии и операции* μ *в конечное число шагов.*

Как и в п. 1 § 4, отсюда вытекает следующее

Следствие 1. *Частично-рекурсивных функций — счетное множество.* Поскольку множество $\mathfrak{F}$ несчетно, *существуют не частично-рекурсивные функции.* Примеры таких функций будут построены в § 9 (п. 2, примеры 2, 10, 11).

Из второго варианта определения примитивно-рекурсивной функции (стр. 89) и теоремы 1 вытекают также следствия 2 и 3.

Следствие 2. *Каждая примитивно-рекурсивная функция частично-рекурсивна.* Следствие 2 вытекает также из того, что класс примитивно-рекурсивных функций, содержась в любом примитивно-рекурсивно замкнутом классе, содержится и в классе частично-рекурсивных функций.

Следствие 3. *Функция тогда и только тогда частично-рекурсивна, когда она может быть получена из примитивно-рекурсивных функций при помощи операций подстановки, примитивной рекурсии и операции* μ *в конечное число шагов.*

Применяя теорему 1 из § 4, получим еще одно следствие только что сформулированной теоремы:

Следствие 4. *Функция тогда и только тогда частично-рекурсивна, когда она может быть получена из функций* $0^{(0)}$, $\lambda_1^{(1)}$ *и функций выбора аргумента при помощи* *операций регулярной подстановки, примитивной рекурсии и операции μ в конечное число шагов.*

Частично-рекурсивные функции уже не обязательно всюду определены. Например, даже «нигде не определенная» функция также частично-рекурсивна (см. пример 3 из п. 5 § 3).

Определение. Функция называется *обще-рекурсивной*, если она частично-рекурсивна и всюду определена.

Обозначим класс обще-рекурсивных функций русской заглавной буквой $\mathcal{O}$. Непосредственно ясно (см., например, следствие 2 теоремы 1 и следствие 2 теоремы 2 из § 4), что

$$\dot{\mathcal{П}} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{Ч}. \tag{1}$$

Примером частично-рекурсивной, но не обще-рекурсивной функции может служить хотя бы нигде не определенная функция. Поэтому уже сейчас мы можем заменить (1) на более сильное:

$$\mathcal{П} \subseteq \mathcal{O} \subset \mathcal{Ч}. \tag{1'}$$

Существование обще-рекурсивной, но не примитивно-рекурсивной функции будет доказано в § 8 (п. 3, примеры 1, 2, 3, 6). Класс обще-рекурсивных функций будет изучаться нами в § 7.

Как уже было отмечено выше, класс всех интуитивно-вычислимых функций является одним из частично-рекурсивно замкнутых классов. Следовательно, любая частично-рекурсивная функция интуитивно-вычислима. В современной теории вычислимых функций считают, что верно и обратное.

Основная гипотеза теории вычислимых функций. ***Любая вычислимая*** (в интуитивном смысле) ***функция типа $N^s \to N$ частично-рекурсивна****).

Основную гипотезу теории вычислимых функций можно также высказать в следующей форме: понятие частично-рекурсивной функции является искомым уточнением, точ-

---

*) Утверждение «любая вычислимая всюду определенная функция типа $N^s \to N$ обще-рекурсивна» часто называют тезисом Чёрча.

ным математическим аналогом понятия функции, вычислимой в интуитивном смысле.

Только после формулирования (и принятия) Основной гипотезы приобретают точный смысл и могут быть доказаны утверждения такого типа, как «не существует вычислимой функции такой, что...», «для всякой вычислимой функции...» и т. п.

Основная гипотеза, разумеется, не может быть доказана, поскольку содержит в своей формулировке такое расплывчатое понятие, как «функция, вычислимая в интуитивном смысле». Какие же аргументы можно высказать в пользу Основной гипотезы? В чем заключается ее обоснование? Основным аргументом в пользу Основной гипотезы является многовековой опыт человечества. Все функции (типов $N^s \to N$), с которыми когда-либо приходилось иметь дело математикам и которые математики признавали вычислимыми (в интуитивном смысле), оказались частично-рекурсивными *). В § 4 (пп. 1, 4) мы без труда доказали, что многие функции даже примитивно-рекурсивны и, тем более, частично-рекурсивны (следствие 2 теоремы 1). Пусть читатель попробует взять какую-нибудь интуитивно-вычислимую функцию типа $N^s \to N$ и доказать ее частично-рекурсивность. После достаточно большого числа подобных опытов-упражнений он приобретет интуитивную уверенность в верности Основной гипотезы. А впрочем, заметим тут же, нам — в некотором смысле — не особенно важно, чтобы читатель согласился с Основной гипотезой. На протяжении §§ 4—11 и § 14 мы никаких ссылок на Основную гипотезу делать не будем (за исключением мелкого шрифта в п. 3 § 10). Таким образом, читатель, который не согласится принять Основную гипотезу, будет и дальше все «понимать» и все «принимать». Но для такого читателя будет непонятно то внимание, которое мы будем уделять понятию частично-рекурсивной функции. Для такого читателя теория частично-рекурсивных функций будет всего лишь теорией некоторого конкретного подкласса класса всех интуитивно-вычислимых функций. Мы же

*) В этом отношении Основная гипотеза имеет такой же характер, как и другие естественно-научные законы. Она является результатом большого человеческого опыта, итогом многих тысяч испытаний, проверок, экспериментов.

в дальнейшем будем теорию частично-рекурсивных функций воспринимать как теорию вычислимых (в интуитивном смысле) функций *).

Аргументом в пользу Основной гипотезы будут также результаты § 14 (теоремы 5, 6, 7, 10).

2. ФУНКЦИИ С РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫМ ГРАФИКОМ

Теорема 2. *Для любого положительного* s, *для любой функции* f (типа $N^s \to N$), *график которой* G_f *является рекурсивно-перечислимым множеством, и для любой примитивно-рекурсивной функции большого размаха* φ *существует примитивно-рекурсивная функция* ψ (типа $N^{s+1} \to N$) *такая, что*

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi((\mu t)[\psi(x_1, \ldots, x_s, t) = 0]). \tag{1}$$

Доказательство. По теореме 18 из § 4 существует такая примитивно-рекурсивная функция τ (типа $N \to N$), что функции φ и τ осуществляют взаимно-однозначное отображение пространства N на N^2. Это отображение нам сейчас понадобится.

График G_f функции f — рекурсивно-перечислимое множество в N^{s+1}. По теореме 1 из § 5 в N^{s+2} существует такое примитивно-рекурсивное множество D, что $G_f = \text{пр}_{1, 2, \ldots, s, s+1} D$. Характеристическая функция χ_D множества D есть примитивно-рекурсивная функция типа $N^{s+2} \to N$. Введем функцию Z_D типа $N^{s+2} \to N$:

$$Z_D(x_1, \ldots, x_s, y, z) = \overline{\text{sg}}\, \chi_D(x_1, \ldots, x_s, y, z)$$

Z_D также примитивно-рекурсивна. Когда

$$\langle x_1, \ldots, x_s, y, z\rangle \in D,\ Z_D(x_1, \ldots, x_s, y, z) = 0.$$

Когда $\langle x_1, \ldots, x_s, y, z\rangle \bar{\in} D$, $Z_D(x_1, \ldots, x_s, y, z) = 1$ **).

*) Заметим, что иногда, вследствие Основной гипотезы, частично-рекурсивные функции называют просто *вычислимыми*, а обще-рекурсивные функции — *всюду вычислимыми* (ведь понятие обще-рекурсивной функции оказывается — в силу Основной гипотезы — уточнением интуитивного понятия всюду определенной вычислимой функции).

**) Z_D является просто представляющей функцией множества D (см. сноску **) на стр. 46).

Определим функцию ψ типа $N^{s+1} \to N$ равенством:

$$\psi(x_1, \ldots, x_s, t) = Z_D(x_1, \ldots, x_s, \varphi(t), \tau(t)). \qquad (2)$$

Функция ψ примитивно-рекурсивна. Докажем, что она искомая. Пусть мы хотим посчитать значение функции f на некотором кортеже $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$, т. е. посчитать $f(x_1, \ldots, x_s)$. Для этого нам необходимо и достаточно найти такое y, что $\langle x_1, \ldots, x_s, y \rangle \in G_f$. Но $\langle x_1, \ldots, x_s, y \rangle \in G_f$ тогда и только тогда, когда существует такое z, что $\langle x_1, \ldots, x_s, y, z \rangle \in D$. Используя свойства функции Z_D, можно сказать, что $f(x_1, \ldots, x_s)$ равно такому y, для которого найдется такое z, что $Z_D(x_1, \ldots, x_s, y, z) = 0$. Значит, чтобы сосчитать $f(x_1, \ldots, x_s)$, надо найти такую пару $\langle y, z \rangle$, что $Z_D(x_1, \ldots, x_s, y, z) = 0$ и взять первую компоненту этой пары: если $Z_D(x_1, \ldots, x_s, y, z) = 0$, то $f(x_1, \ldots, x_s) = y$ (и обратно). Но вместо пары $\langle y, z \rangle$ можно искать ее «номер», т. е. прообраз при (взаимно-однозначном) отображении пространства N на N^2, осуществляемом функциями φ, τ.

Поэтому можно сказать так: чтобы сосчитать $f(x_1, \ldots, x_s)$, нужно найти такое $t \in N$, что $Z_D(x_1, \ldots, x_s, \varphi(t), \tau(t)) = 0$ и тогда $f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi(t)$. Используя (2), можно то же самое сказать так: для того, чтобы сосчитать $f(x_1, \ldots, x_s)$, нужно найти такое t, что $\psi(x_1, \ldots, x_s, t) = 0$, и тогда $f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi(t)$. Таких t, что $\psi(x_1, \ldots, x_s, t) = 0$, может быть, конечно, много (в D может найтись несколько кортежей, проектирующихся в $\langle x_1, \ldots, x_s, y \rangle$). Но нам годится любое из них, например наименьшее. Поэтому можно сказать и так: $f(x_1, \ldots, x_s)$ равно значению функции φ от наименьшего t такого, что $\psi(x_1, \ldots, x_s, t) = 0$. Окончательно получаем:

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi((\mu t)[\psi(x_1, \ldots, x_s, t) = 0]).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Функция f может быть не всюду определена. Из доказательства теоремы видно, что равенство (1) верно именно в том смысле, в каком мы условились на стр. 30 понимать подобные равенства: функция f определена тогда и только тогда, когда определена функция $y = (\mu t)[\psi(x_1, \ldots, x_s, t) = 0]$ и для кортежа $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$ из области их определения верно (1).

Лемма 1. *Если график функции f (типа $N^r \to N$) есть рекурсивно-перечислимое множество, то область определения функции f также рекурсивно-перечислима.*

Доказательство. Область определения функции типа $N^r \to N$ есть проекция ее графика на первые r осей (стр. 42). По теореме 3 из § 5 следует желаемое.

Лемма 2. *Если функция f типа $N^r \to N$ имеет рекурсивно-перечислимый график, то прообраз рекурсивно-перечислимого множества в N при частичном отображении пространства N^r в N, осуществляемом функцией f, также рекурсивно-перечислим.*

Доказательство. В силу равенства (6) из п. 4 § 2 и теорем 7 из § 5, 4 из § 5 и 3 из § 5, исследуемый прообраз рекурсивно-перечислим.

Теперь мы можем, наконец, сформулировать и доказать Теорему о графике, которая свяжет два важнейших понятия нашей теории: понятие частично-рекурсивной функции и понятие рекурсивно-перечислимого множества, даст еще одно определение понятию «частично-рекурсивная функция» и явится еще одним аргументом в пользу Основной гипотезы.

Теорема 3. (Теорема о графике.) *Функция f* (типа $N^s \to N$) *тогда и только тогда является* ***частично-рекурсивной****, когда ее график G_f является рекурсивно-перечислимым множеством* (в N^{s+1}).

Теорема 3 представляет собой математический аналог следующего интуитивного утверждения, о котором мы уже говорили на стр. 22: функция тогда и только тогда вычислима, когда ее график является перечислимым множеством. Поэтому теорема 3 является еще одним подтверждением Основной гипотезы.

Доказательство. 1) Достаточность («тогда»). Пусть график функции f типа $N^s \to N$ рекурсивно-перечислим.

Возьмем произвольную примитивно-рекурсивную функцию большого размаха φ (такая функция существует в силу замечания 1 из п. 5 § 2 и теоремы 19 из § 4). По теореме 2 существует примитивно-рекурсивная функция ψ (типа $N^{s+1} \to N$) такая, что

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi((\mu t)[\psi(x_1, \ldots, x_s, t) = 0]). \quad (3)$$

Равенство (3) показывает, что функция f может быть получена подстановкой в примитивно-рекурсивную функцию (φ) результата применения операции μ к другой примитивно-рекурсивной функции (ψ). По следствию 3 теоремы 1 функция f частично-рекурсивна.

2) Необходимость («только тогда»). Докажем, что класс функций, графики которых являются рекурсивно-перечислимыми множествами, частично-рекурсивно замкнут. Отсюда будет следовать, что любая частично-рекурсивная функция f лежит в этом классе, т. е. что ее график G_f рекурсивно-перечислим. Обозначим исследуемый класс русской заглавной буквой $\mathscr{B}$.

В силу следствия 1 теоремы 6 из § 4 и теоремы 2 из § 5 $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{B}$. В частности, $0^{(0)} \in \mathscr{B}$ и $\lambda_1^{(1)} \in \mathscr{B}$.

Остается проверить, что класс $\mathscr{B}$ замкнут относительно операций подстановки, примитивной рекурсии и операции μ.

1. Подстановка. Для простоты записи докажем на примере. Пусть функция $g^{(4)}$ получается подстановкой функций $f_1^{(2)}$, $f_2^{(2)}$ в функцию $f^{(3)}$ по закону:

$$g(x, y, z, u) = f(f_1(y, z),\ u,\ f_2(x, z)).$$

И пусть f, f_1, f_2 принадлежат к $\mathscr{B}$, т. е. их графики G_f, G_{f_1}, G_{f_2} рекурсивно-перечислимы. Докажем, что тогда и график G_g функции g рекурсивно-перечислим

$$\begin{aligned}[\langle x, y, z, u, v\rangle \in G_g] &\sim [g(x, y, z, u) = v] \sim \\ &\sim (\exists w_1)(\exists w_2)[(f_1(y, z) = w_1)\ \& \\ &\& (f_2(x, z) = w_2)\ \&\ (f(w_1, u, w_2) = v)] \sim \\ &\sim (\exists w_1)(\exists w_2)[(\langle y, z, w_1\rangle \in G_{f_1})\ \& \\ &\& (\langle x, z, w_2\rangle \in G_{f_2})\ \&\ (\langle w_1, u, w_2, v\rangle \in G_f)].\end{aligned}$$

Рекурсивно-перечислимость произвольного множества L (скажем, в N^3) эквивалентна, по определению рекурсивно-перечислимого предиката, рекурсивно-перечислимости предиката „$\langle x, y, z\rangle \in L$“. Множества G_{f_1}, G_{f_2}, G_f рекурсивно-перечислимы. Из теорем 14 из § 5 и 13 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость предиката „$\langle x, y, z, u, v\rangle \in G_g$“, а следовательно, и множества G_g. Значит, $g \in \mathscr{B}$. Итак, класс $\mathscr{B}$ замкнут относительно подстановки.

2. Примитивная рекурсия. Фиксируем какое-нибудь примитивно-рекурсивное отображение множества N на множество N^∞ (такое существует по теореме 21 из § 4). Функции ι_1, ι_2, отображающие $N \setminus \{0\}$ на $N^\infty \setminus \{\Lambda\}$, нам вскоре понадобятся.

Пусть функция $g^{(s)}$ получается примитивной рекурсией из функций $f_1^{(s-1)}$, $f_2^{(s+1)}$.

$$\begin{cases} g(0, x_2, \ldots, x_s) = f_1(x_2, \ldots, x_s), & (4) \\ g(n+1, x_2, \ldots, x_s) = f_2(n, x_2, \ldots, x_s, g(n, x_2, \ldots, x_s)). & (5) \end{cases}$$

И пусть $f_1, f_2 \in \mathscr{F}$, т. е. их графики G_{f_1}, G_{f_2} рекурсивно-перечислимы. Докажем, что тогда и график G_g функции g рекурсивно-перечислим. $G_g \subseteq N^{s+1}$. Разобьем G_g на два непересекающихся подмножества. Пусть

$$G_1 = \mathscr{E}\{\langle n, x_2, \ldots, x_s, y\rangle \in G_g \mid n = 0\},$$
$$G_2 = \mathscr{E}\{\langle n, x_2, \ldots, x_s, y\rangle \in G_g \mid n > 0\}.$$

Тогда $G_1 \cap G_2 = \Lambda$ и $G_g = G_1 \cup G_2$.

Из (4) следует, что $G_1 = \{0\} \times G_{f_1}$. Следовательно, G_1 рекурсивно-перечислимо (теорема 5 из § 5). Остается доказать рекурсивно-перечислимость множества G_2. Изучим предикат „$\langle n, x_2, \ldots, x_s, y\rangle \in G_2$“. Если $\langle n, x_2, \ldots$ $\ldots, x_s, y\rangle \in G_2$, то $g(n, x_2, \ldots, x_s) = y$ и $n > 0$. Вспомним, как вычисляется $g(n, x_2, \ldots, x_s)$ при $n > 0$. Для того, чтобы вычислить $g(n, x_2, \ldots, x_s)$ при $n > 0$, надо последовательно вычислить $g(i, x_2, \ldots, x_s)$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$ и, наконец, $g(n, x_2, \ldots, x_s)$. Обозначим $g(i, x_2, \ldots, x_s)$ через u_{i+1} $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. По (4)

$$g(0, x_2, \ldots, x_s) = f_1(x_2, \ldots, x_s) = u_1.$$

Тогда по (5)

$$g(1, x_2, \ldots, x_s) = f_2(0, x_2, \ldots, x_s, g(0, x_2, \ldots, x_s)) =$$
$$= f_2(0, x_2, \ldots, x_s, u_1) = u_2$$

Снова по (5)

$$g(2, x_2, \ldots, x_s) = f_2(1, x_2, \ldots, x_s, g(1, x_2, \ldots, x_s)) =$$
$$= f_2(1, x_2, \ldots, x_s, u_2) = u_3$$

и т. д.

Наконец,

$$g(n-1, x_2, \ldots, x_s) = \\ = f_2(n-2, x_2, \ldots, x_s, g(n-2, x_2, \ldots, x_s)) = \\ = f_2(n-2, x_2, \ldots, x_s, u_{n-1}) = u_n,$$

$$g(n, x_2, \ldots, x_s) = \\ = f_2(n-1, x_2, \ldots, x_s, g(n-1, x_2, \ldots, x_s)) = \\ = f_2(n-1, x_2, \ldots, x_s, u_n) = y.$$

Следовательно,

$$[\langle n, x_2, \ldots, x_s, y\rangle \in G_2] \sim [[g(n, x_2, \ldots, x_s) = y] \,\&\, [n > 0]] \sim \\ \sim (\exists u_1)(\exists u_2)\ldots(\exists u_n)\{[f_1(x_2, \ldots, x_s) = u_1] \,\& \\ \& [f_2(0, x_2, \ldots, x_s, u_1) = u_2] \,\& \\ \& [f_2(1, x_2, \ldots, x_s, u_2) = u_3] \,\& \ldots \\ \ldots \& [f_2(n-2, x_2, \ldots, x_s, u_{n-1}) = u_n] \,\& \\ \& [f_2(n-1, x_2, \ldots, x_s, u_n) = y]\} \,\&\, [n > 0] \sim \\ \sim (\exists u_1)(\exists u_2)\ldots(\exists u_n)\{[f_1(x_2, \ldots, x_s) = u_1] \,\& \\ \& \underset{i \leqslant n-1}{(\forall i)} [(i > 0) \rightarrow (f_2(i-1, x_2, \ldots, x_s, u_i) = u_{i+1})] \,\& \\ \& [f_2(n-1, x_2, \ldots, x_s, u_n) = y]\} \,\&\, [n > 0] \qquad (6)$$

(последний переход ср. с (17) из п. 4 § 3).

Согласно фиксированному нами примитивно-рекурсивному отображению множества N на множество N^∞, для кортежа $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle$ существует такое $t > 0$, что $\iota_1(t) = n$ и $\iota_2(t, i+1) = u_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Следовательно, (6) можно переписать так:

$$[\langle n, x_2, \ldots, x_s, y\rangle \in G_2] \sim (\exists t)\{[\iota_1(t) = n] \,\&\, [\iota_2(t, 1) = \\ = f_1(x_2, \ldots, x_s)] \,\&\, \underset{i \leqslant n \dot{-} 1}{(\forall i)} [(i = 0) \vee (\iota_2(t, i+1) = \\ = f_2(i \dot{-} 1, x_2, \ldots, x_s, \iota_2(t, i)))] \,\&\, [y = f_2(n \dot{-} 1, x_2, \ldots \\ \ldots, x_s, \iota_2(t, n))]\} \,\&\, [n > 0]. \qquad (7)$$

По определению примитивно-рекурсивного отображения множества N на N^∞ существуют такие примитивно-рекурсивные функции ι_1^*, ι_2^*, что $\iota_1(t)=\iota_1^*(t)$ для $t>0$ и $\iota_2(t, i)=\iota_2^*(t, i)$ для $t>0$ и $i: 1\leqslant i\leqslant \iota_1(t)$. Перепишем равенство (7), заменив в нем функции ι_1, ι_2 на ι_1^* и ι_2^* *).

$$[\langle n, x_2, \ldots, x_s, y\rangle \in G_2] \sim (\exists t)\,\{[\iota_1^*(t)=n]\,\&\,[\iota_2^*(t, 1)= \\ =f_1(x_2, \ldots, x_s)]\,\&\,\underset{i\leqslant n\dot{-}1}{(\forall i)}\,[(i=0)\vee(\iota_2^*(t, i+1)= \\ =f_2(i\dot{-}1, x_2, \ldots, x_s, \iota_2^*(t, i)))]\,\& \\ \&\,[y=f_2(n\dot{-}1, x_2, \ldots, x_s, \iota_2^*(t, n))]\}\,\&\,[n>0]. \qquad (8)$$

Обозначая (некоторые) предикаты, имеющиеся в правой части (8), соответственно через P_1, P_2, P_3, P_4, можно (8) переписать так:

$$[\langle n, x_2, \ldots, x_s, y\rangle \in G_2] \sim (\exists t)\,\{P_1(t, n)\,\&\,P_2(t, x_2, \ldots, x_s)\,\& \\ \&\,\underset{i\leqslant n\dot{-}1}{(\forall i)}\,[(i=0)\vee P_3(t, i, x_2, \ldots, x_s)]\,\& \\ \&\,P_4(y, n, x_2, \ldots, x_s, t)\}\,\&\,[n>0]. \qquad (9)$$

Докажем рекурсивно-перечислимость, например, предиката P_3. Примитивно-рекурсивные функции $z=i\dot{-}1$ и $z=\iota_2^*(t, i)$ принадлежат к $\mathscr{R}$, так как (см. выше) $\mathscr{T\!\!\iota}\subseteq\mathscr{R}$. По условию $f_2\in\mathscr{R}$. Следовательно, и функция $z=f_2(i\dot{-}1, x_2, \ldots, x_s, \iota_2^*(t, i))$ принадлежит к $\mathscr{R}$, так как мы уже доказали замкнутость класса $\mathscr{R}$ относительно операции подстановки. Примитивно-рекурсивная функция $z=\iota_2^*(t, i+1)$ также принадлежит к $\mathscr{R}$. А тогда предикат P_3 рекурсивно-перечислим, так как если две функции: h_1 и h_2 — имеют рекурсивно-перечислимые графики, то рекурсивно-перечислимым будет и предикат „$h_1=h_2$“: его множество истинности есть проекция пересечения графиков на «оси аргументов» (теоремы 4 из § 5 и 3 из § 5).

Аналогично доказывается рекурсивно-перечислимость предикатов P_1, P_2, P_4. Предикаты „$i=0$“ и „$n>0$“ даже примитивно-рекурсивны и, тем более, рекурсивно-пере-

*) Сейчас у нас уже есть понятие частично-рекурсивной функции, но еще не доказано про него необходимых теорем. Иначе перехода от (7) к (8) можно было бы не делать (ср. со сноской на стр. 133).

числимы (теорема 12 из § 5). Из (9) и теорем 14 из § 5, 16 из § 5 и 13 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость предиката „$\langle n, x_2, \ldots, x_s, y\rangle \in G_2$“, а значит, и множества G_2. Но $C_g = C_1 \bigcup C_2$. Множества G_1 и G_2 рекурсивно-перечислимы. Значит, рекурсивно-перечислимо и множество G_g (теорема 4 из § 5). Следовательно, $g \in \mathscr{R}$. Итак, класс $\mathscr{R}$ замкнут и относительно операции примитивной рекурсии.

3. Операция μ. Пусть функция $g^{(s)}$ получается из функции $f^{(s+1)}$ применением оператора μ по последнему (для простоты записи) аргументу

$$g(x_1, \ldots, x_s) = (\mu y)[f(x_1, \ldots, x_s, y) = 0]. \tag{10}$$

И пусть график G_f функции f рекурсивно-перечислим. Докажем, что тогда и график G_g функции g также рекурсивно-перечислим. Разобьем исследуемое множество G_g на две непересекающиеся части. Пусть

$$G_1 = \mathscr{E}\{\langle x_1, \ldots, x_s, y\rangle \in G_g \mid y = 0\},$$
$$G_2 = \mathscr{E}\{\langle x_1, \ldots, x_s, y\rangle \in G_g \mid y > 0\}.$$

Тогда $G_1 \bigcap G_2 = \Lambda$ и $G_g = G_1 \bigcup G_2$. Обозначим через F область определения функции f. $F \subseteq N^{s+1}$. Разобьем F также на две части. Пусть

$$F_1 = \mathscr{E}\{\langle x_1, \ldots, x_s, y\rangle \in F \mid f(x_1, \ldots, x_s, y) = 0\},$$
$$F_2 = \mathscr{E}\{\langle x_1, \ldots, x_s, y\rangle \in F \mid f(x_1, \ldots, x_s, y) > 0\}.$$

Тогда $F_1 \bigcap F_2 = \Lambda$ и $F = F_1 \bigcup F_2$.

Из определения оператора «наименьшее число» следует, что

$$G_g \subseteq F_1.$$

Какие кортежи из F_1 принадлежат к G_g? Во-первых, все кортежи вида $\langle x_1, \ldots, x_1, 0\rangle$. Если $\langle x_1, \ldots, x_s\ 0\rangle \in F_1$, то $f(x_1, \ldots, x_s, 0)$ определено и равно 0. А тогда $g(x_1, \ldots, x_s) = 0$ и, следовательно, $\langle x_1, \ldots, x_s, 0\rangle \in G_g$. Точнее: $\langle x_1, \ldots, x_s, 0\rangle \in G_1$. Итак, если $\langle x_1, \ldots, x_s, 0\rangle \in F_1$, то $\langle x_1, \ldots, x_s, 0\rangle \in G_1$. Следовательно,

$$G_1 = [N^s \times \{\langle 0\rangle\}] \bigcap F_1. \tag{11}$$

Во-вторых, к G_g принадлежат все те кортежи $\langle x_1, \ldots, x_s, y\rangle$ из F_1, для которых $y > 0$, $f(x_1, \ldots, x_s, y) = 0$ и для всех z, $z < y$, выполняется $\langle x_1, \ldots, x_s, z\rangle \in F_2$. Такие кортежи из F_1 составят, очевидно, G_2. Пусть $F_3 = \mathscr{E}\{\langle x_1, \ldots, x_s, y\rangle \in F \mid [y > 0] \mathbin{\&} (\forall z)_{z<y} [\langle x_1, \ldots, x_s, z\rangle \in F_2]\}$. Тогда

$$G_2 = F_3 \bigcap F_1. \tag{12}$$

Множество F рекурсивно-перечислимо по лемме 1. Множество F_1 рекурсивно-перечислимо по лемме 2 (прообраз рекурсивно-перечислимого множества $\{0\}$). Множество F_2 рекурсивно-перечислимо также по лемме 2 (прообраз рекурсивно-перечислимого множества $N \setminus \{0\}$). Из (11) и теорем 2 из § 5, 5 из § 5 и 4 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость множества G_1. Множество F_3 также рекурсивно перечислимо. Докажем это.

$$[\langle x_1, \ldots, x_s, y\rangle \in F_3] \sim [(\langle x_1, \ldots, x_s, y\rangle \in F) \mathbin{\&} (y > 0) \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} (\forall z)_{z<y} (\langle x_1, \ldots, x_s, z\rangle \in F_2)]. \tag{13}$$

Множества F и F_2 рекурсивно-перечислимы. Из (13), теоремы 16 из § 5, теоремы 12 из § 5, примененной к предикату „$y > 0$", и теоремы 14 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость предиката „$\langle x_1, \ldots, x_s, y\rangle \in F_3$", а значит, и множества F_3. Из (12) следует тогда рекурсивно-перечислимость множества G_2. Итак, множества G_1 и G_2 рекурсивно-перечислимы. Но $G_g = G_1 \bigcup G_2$; следовательно, рекурсивно-перечислимо и множество G_g (теорема 4 из § 5). Значит $g \in \mathscr{R}$. Итак, класс $\mathscr{R}$ замкнут и относительно операции μ.

Подведем итог. $0^{(0)} \in \mathscr{R}$ и $\lambda_1^{(1)} \in \mathscr{R}$. Класс $\mathscr{R}$ замкнут относительно операций подстановки, примитивной рекурсии и операции μ. Следовательно, $\mathscr{R}$ — частично-рекурсивно замкнутый класс. А тогда $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{R}$. Теорема доказана.

3. СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМЫ О ГРАФИКЕ

Теорема 3 дала нам в руки очень сильное оружие для изучения класса $\mathscr{C}$ частично-рекурсивных функций.

Прежде всего перефразируем теорему 2.

Теорема 4*). (Слабая теорема о нормальной форме**).) *Для любого положительного s, для любой частично-рекурсивной функции f типа $N^s \to N$ и для любой примитивно-рекурсивной функции большого размаха φ существует примитивно-рекурсивная функция τ типа $N^{s+1} \to N$, такая, что*

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi((\mu t)[\tau(x_1, \ldots, x_s, t) = 0]). \qquad (1)$$

Замечание. Однако не всякая частично-рекурсивная функция f типа $N^s \to N$ допускает представление вида

$$f(x_1, \ldots, x_s) = (\mu t)[\tau(x_1, \ldots, x_s, t) = 0],$$

где τ примитивно-рекурсивна. Действительно, если τ — примитивно-рекурсивная функция, то график функции $y = (\mu t)[\tau(x_1, \ldots, x_s, t) = 0]$ примитивно-рекурсивен (следствие теоремы 17 из § 4). В то же время существуют частично-рекурсивные (и даже обще-рекурсивные) функции с не примитивно-рекурсивным графиком (пример 17 из п. 3 § 8).

Частичное отображение пространства N^r в пространство N^s ($s > 0$), осуществляемое частично-рекурсивными функциями, мы будем называть *частично-рекурсивным отображением*. Подчеркнем, что частично-рекурсивное отображение является, вообще говоря, частичным отображением***).

---

*) Для некоторой фиксированной функции большого размаха φ эту теорему доказал впервые С. К. Клини (см. [1936], теорему IX). То, что функцию φ можно выбрать произвольно (лишь бы она оставалась примитивно-рекурсивной функцией большого размаха), установил А. А. Марков [1947, 1949]. Кроме того, А. А. Марков доказал также следующее утверждение: пусть примитивно-рекурсивная функция φ типа $N \to N$ такова, что при некотором s для любой обще-рекурсивной функции f типа $N^s \to N$ существует такая примитивно-рекурсивная функция τ типа $N^{s+1} \to N$, что выполняется равенство (1); тогда φ — функция большого размаха. Подробное изложение этих результатов А. А. Маркова можно найти в его статье [1949], а также в пп. 6—9 § 18 книги Р. Петер [1951].

**) Ср. теорему 2 из § 9.

***) Точнее, быть может, поэтому было бы говорить о частично-рекурсивном частичном отображении. Мы все-таки сохраним эту более краткую терминологию.

Докажем теорему, являющуюся обобщением Теоремы о графике (теорема 3).

Теорема 5. *Частичное отображение пространства N^r в N^s $(s > 0)$ тогда и только тогда* ***частично-рекурсивно****, когда его график рекурсивно-перечислим.*

Доказательство. Рекурсивно-перечислимость графика частично-рекурсивного отображения (пространства N^r в N^s) немедленно следует из Теоремы о графике (теорема 3), равенства (2) из п. 4 § 2 и теорем 7 из § 5 и 4 из § 5. Если же функции $f_1^{(r)}, \ldots, f_s^{(r)}$ осуществляют частичное отображение пространства N^r в N^s и график G этого отображения рекурсивно-перечислим, то рекурсивно-перечислимыми будут и графики G_{f_i} функций f_i $(i=1, 2, \ldots, s)$, так как $G_{f_i} = \text{пр}_{1, 2, \ldots, r, r+i}\, G$ (теорема 3 из § 5). Из рекурсивно-перечислимости графиков G_{f_i} следует частично-рекурсивность функций f_i (Теорема о графике), т. е. частично-рекурсивность отображения.

Следствие 1. *Образ рекурсивно-перечислимого множества при частично-рекурсивном отображении рекурсивно-перечислим.* (См. (9) из п. 4 § 2 и теоремы 7 из § 5, 4 из § 5 и 3 из § 5.)

Следствие 2. *Полный прообраз рекурсивно-перечислимого множества при частично-рекурсивном отображении рекурсивно-перечислим.* (См. (10) из п. 4 § 2 и теоремы 7 из § 5, 4 из § 5, и 3 из § 5.) *)

Следствие 3. *Область определения частично-рекурсивного отображения рекурсивно-перечислима.* (См. стр. 42 и теорему 3 из § 5.)

Следствие 4. *Область определения частично-рекурсивной функции рекурсивно-перечислима* (частный случай следствия 3) **).

Следствие 5. *Область значений частично-рекурсивного отображения рекурсивно-перечислима.* (См. стр. 42 и теорему 3 из § 5.)

Следствие 6. *Область значений частично-рекурсивной функции рекурсивно-перечислима* (частный случай следствия 5).

---

*) Ср. с леммой 2 из п. 2.

**) Ср. с леммой 1 из п. 2.

Замечание. Например, областью значений «нигде не определенной» функции является пустое множество.

Следствие 7. *Множество уровня частично-рекурсивного отображения* φ, осуществляемого функциями $f_1^{(r)}, \ldots, f_s^{(r)}$, по любому кортежу $\langle y_1, \ldots, y_s\rangle$, т. е. множество $\mathscr{E}\{\langle x_1, \ldots, x_r\rangle \in N^r \mid f_i(x_1, \ldots, x_r) = y_i \; (i = 1, 2, \ldots, s)\}$ *рекурсивно-перечислимо.* (Исследуемое множество уровня равно $\text{пр}_{1, 2, \ldots, r}[G_\varphi \bigcap (N^r \times \langle y_1, y_2, \ldots, y_s\rangle)]$. Оно рекурсивно-перечислимо по теоремам 2 из § 5, 7 из § 5, 4 из § 5 и 3 из § 5.)

Следствие 8. *Множество уровня частично-рекурсивной функции рекурсивно-перечислимо* (частный случай следствия 7) *).

Следствие 9. *Всякое множество, характеристическая функция которого частично-рекурсивна, является рекурсивно-перечислимым.* (Для доказательства достаточно заметить, что всякое множество есть множество уровня своей характеристической функции по числу 1, и применить следствие 8.)

Теорема 6. *Подстановка частично-рекурсивных функций в рекурсивно-перечислимый предикат сохраняет рекурсивно-перечислимость предиката* **).

Доказательство. Произвольная подстановка некоторых функций всегда может быть заменена на (многократную) регулярную подстановку тех же функций и некоторых частично-рекурсивных функций (теорема 1 из § 3 и следствие 2 теоремы 1). Поэтому достаточно доказать теорему для случая регулярной подстановки. Для случая же регулярной подстановки нужный нам результат следует из того, что множество истинности результата регулярной подстановки в предикат P есть прообраз множества истинности предиката P при отображении, совершаемом поставляемыми функциями (следствие 2 из теоремы 5).

Теорема 7. *Пусть функция* f (типа $N^s \to N$) *кусочно задана при помощи частично-рекурсивных функций*

---

*) Следствия 4, 6, 8 можно было, конечно, вывести сразу из Теоремы о графике (теорема 3).

**) Ср. с леммой из п. 2 § 5 и с доказательством Теоремы о графике.

$f_1^{(s)}, \ldots, f_n^{(s)}$ *и рекурсивно-перечислимых множеств* $A_1, \ldots, A_n$ (в N^s). *Тогда функция f частично-рекурсивна.*

Доказательство. По Теореме о графике (теорема 3) графики $G_{f_1}, \ldots, G_{f_n}$ функций $f_1, \ldots, f_n$ рекурсивно-перечислимы. Если

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_s) & \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in A_1, \\ f_2(x_1, \ldots, x_s) & \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in A_2, \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ f_n(x_1, \ldots, x_s) & \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in A_n, \end{cases}$$

то $G_f = [G_{f_1} \cap (A_1 \times N)] \cup [G_{f_2} \cap (A_2 \times N)] \cup \ldots \cup [G_{f_n} \cap (A_n \times N)]$. Из теорем 7 из § 5 и 4 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость графика G_f. Из Теоремы о графике (теорема 3) следует частично-рекурсивность функции f.

Следствие 1. Пусть $g^{(s)}$ — частично-рекурсивная функция, а A — рекурсивно-перечислимое множество в N^s. Определим функцию $f^{(s)}$ так:

$$f(x_1, \ldots, x_s) = g(x_1, \ldots, x_s), \text{ если } \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in A.$$

Так определенная функция g частично-рекурсивна (см. замечание па стр. 104).

Следствие 2. *Функции* ι_1, ι_2, осуществляющие отображение множества $N \setminus \{0\}$ на множество $N^\infty \setminus \{\Lambda\}$ при примитивно-рекурсивном отображении множества N на N^∞, *частично-рекурсивны* *).

Доказательство. По определению примитивно-рекурсивного отображения множества N на множество N^∞ существуют такие примитивно-рекурсивные функции ι_1^*, ι_2^*, что $\iota_1(t) = \iota_1^*(t)$ для $t > 0$. И $\iota_2(t, i) = \iota_2^*(t, i)$ для $t > 0$ и $i : 1 \leqslant \iota_1(t)$. Множество $\mathscr{E}\{t > 0\}$ даже примитивно-рекурсивно. По следствию 2 теоремы 1, теореме 2 из § 5 и только что доказанному следствию 1 функция ι_1 частично-рекурсивна. Предикат „$[t > 0]$ & $[1 \leqslant i \leqslant z]$“ ⇌

---

*) Вот теперь, после теоремы 6 и следствия 2 теоремы 7, нам бы не нужен был переход от (7) к (8) при доказательстве Теоремы о графике (теорема 3). См. сноску на стр. 165.

$=$ „$[t>0]$ & $[i>0]$ & $[i \leqslant z]$“ примитивно-рекурсивен (теорема 11 из § 4), а значит, и рекурсивно-перечислим (теорема 12 из § 5). Предикат „$[t>0]$ & $[1 \leqslant i \leqslant \iota_1(t)]$“ получается подстановкой частично-рекурсивной функции ι_1 в рекурсивно-перечислимый предикат. По теореме 6 он тоже рекурсивно-перечислим. А тогда по следствию 2 теоремы 1 и по следствию 1 теоремы 7 частично-рекурсивна и функция ι_2.

Пример. Функции типа $N^2 \to N$:

$$z = x - y,$$

$$z = \frac{x}{y},$$

$$z = \sqrt[x]{y},$$

$$z = \log_x y$$

частично-рекурсивны, в силу следствия 1 теоремы 7, так как

$$x - y = \operatorname{dif}(x, y), \text{ если } x \geqslant y,$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{div}(x, y), \text{ если } (y \neq 0) \,\&\, \operatorname{Div}(y, x),$$

$$\sqrt[x]{y} = (\mu t)\,[\operatorname{pot}(t, x) = y], \text{ если } x > 0,$$

$$\log_x y = (\mu t)\,[\operatorname{pot}(x, t) = y], \text{ если } x > 0.$$

Теорема 8. *Множество L в N^s тогда и только тогда* ***рекурсивно-перечислимо,*** *когда оно является множеством уровня некоторой частично-рекурсивной функции $f^{(s)}$.*

Доказательство. В одну сторону это следует из следствия 8 теоремы 5. Докажем в другую. Пусть L — рекурсивно-перечислимое множество в N^s. Определим функцию $f^{(s)}$ «кусочно» при помощи частично-рекурсивной функции $1^{(s)}$ (следствие 2 теоремы 1) и множества L:

$$f(x_1, \ldots x_s) = 1, \text{ если } \langle x_1, \ldots, x_s \rangle \in L$$

(см. рис. 12). По следствию 1 теоремы 7 функция f частично-рекурсивна. Очевидно, L — множество уровня функции f по числу 1.

Результат этой теоремы любопытно сравнить с результатом следствия 3 теоремы 7 из § 4 и с теоремой 9 из § 7.

Ввиду этой аналогии рекурсивно-перечислимые множества можно было бы называть частично-рекурсивными. Однако эту аналогию (примитивно-рекурсивные функции — примитивно-рекурсивные множества; частично-рекурсивные функции — частично-рекурсивные множества) нельзя простирать слишком далеко *). Для примитивно-рекурсивных функций и множеств тривиальным образом выполняется следующее утверждение: множество тогда и только тогда примитивно-рекурсивно, когда его характеристическая функция примитивно-рекурсивна (см. определение примитивно-рекурсивного множества в п. 2 § 4). Для частично-рекурсивных функций и частично-рекурсивных (рекурсивно-перечислимых) множеств аналогичная теорема не верна. В силу следствия 9 из теоремы 5, если характеристическая функция χ_L некоторого множества L частично-рекурсивна, то множество L будет рекурсивно-перечислимым. Обратное же не верно. В § 9 (п. 2, пример 9) будет построен пример рекурсивно-перечислимого множества, характеристическая функция которого не частично-рекурсивна.

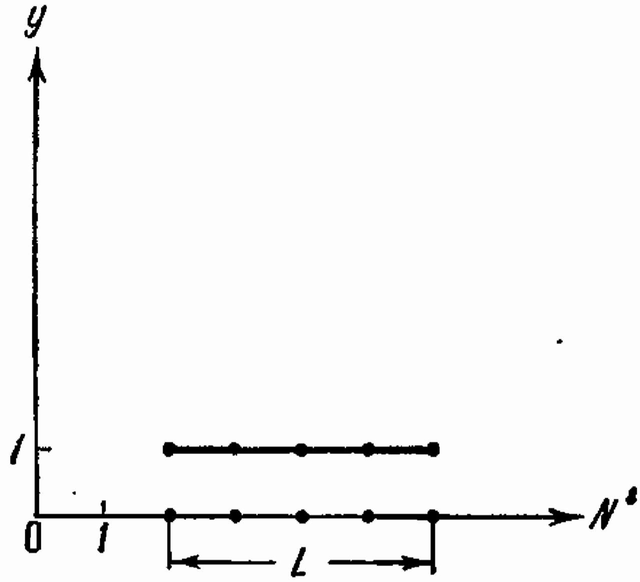


Рис. 12.

Теорема 9. *Множество L в N^s тогда и только тогда* ***рекурсивно-перечислимо****, когда оно является областью определения некоторой частично-рекурсивной функции.*

Доказательство. С одной стороны, для любого рекурсивно-перечислимого множества L в N^s существует

*) Ср. также теорему 3 и следствие 1 теоремы 6 из § 4, теорему 5 и следствие 3 теоремы 6 из § 4, теорему 6 и следствие теоремы 10 из § 4, теорему 7 и следствие теоремы 8 из § 4, следствие 8 теоремы 5 и следствие 1 теоремы 7 из § 4 и т. д. Но в то же время ср. теорему 3 и замечание после следствия 1 теоремы 6 из § 4, следствие 1 теоремы 5 и замечание 1 после теоремы 9 из § 4 и т. д.

частично-рекурсивная функция $f^{(s)}$, областью определения которой является L. Мы уже строили фактически искомую функцию для доказательства теоремы 8: $f(x_1, \ldots, x_s) = 1$, если $\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in L$ (см. рис. 12). С другой стороны, в силу следствия 4 теоремы 5, область определения всякой частично-рекурсивной функции рекурсивно-перечислима.

Теорема 10. *Множество L в N тогда и только тогда **рекурсивно-перечислимо**, когда оно является множеством значений некоторой частично-рекурсивной функции* f (типа $N \to N$).

Доказательство. Если множество L в N рекурсивно-перечислимо и не пусто, оно есть множество значений даже некоторой примитивно-рекурсивной функции (теорема 9 из § 5 и следствие 2 из теоремы 1). Пустое множество есть множество значений «нигде не определенной» функции (замечание после следствия 6 теоремы 5). С другой стороны, множество значений любой частично-рекурсивной функции рекурсивно-перечислимо (следствие 6 теоремы 5).

Аналогично, со ссылкой на теорему 10 из § 5 и следствие 5 теоремы 5, доказывается

Теорема 11. *Множество L в N^s $(s > 0)$ тогда и только тогда **рекурсивно-перечислимо**, когда оно является множеством значений некоторого частично-рекурсивного отображения* (пространства N *в* N^s).

Теоремы 10, 11 дают новый вариант определения рекурсивно-перечислимого множества.

Теорема 12. *Пусть* φ *и* ψ — *два взаимно-обратных частичных отображения*: φ — частичное отображение пространства N^r в N^s, ψ — частичное отображение пространства N^s в N^r $(r > 0,\ s > 0)$. *Если* φ — *частично-рекурсивное отображение, то и частичное отображение* ψ *частично-рекурсивно* *).

Доказательство. Пусть частично-рекурсивное отображение φ пространства N^r в N^s осуществляется функциями $f_1^{(r)}, \ldots, f_s^{(r)}$. Обозначим график частичного отображения φ через G_φ. По теореме 5 множество G_φ рекурсивно-перечислимо. Возьмем подстановку $(r+s)$-й

*) Ср. с замечанием 2 после теоремы 9 из § 4.

степени:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & r & r+1 & r+2 & \dots & r+s \\ r+1 & r+2 \dots & r+s & 1 & 2 & \dots & r \end{pmatrix}.$$

Подстановка α записана не корректно, так как, вообще говоря, $r \neq s$ и число $r+s$ не попадет под число r. В нижнем ряду подстановки α должна стоять перестановка $r+1$, $r+2$, ..., $r+s$, 1, 2, ..., r. А под какое число попадет, например, $r+s$, нам безразлично.

Подстановка α «перевернет» множество G_φ «около биссектрисы». Множество $\alpha(G_\varphi)$ будет графиком обратного частичного отображения, т. е. частичного отображения ψ. По теореме 6 из § 5 множество $\alpha(G_\varphi)$ рекурсивно-перечислимо. А тогда — снова по теореме 5 — будет частично-рекурсивным частичное отображение ψ.

Следствие. *Если f и g — две взаимно-обратные функции типа $N \to N$ и функция f частично-рекурсивна, то и функция g — частично-рекурсивна.*

§ 7. ОБЩЕ-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ, МНОЖЕСТВА, ПРЕДИКАТЫ

В п. 1 этого параграфа исследуются введенные ранее понятия обще-рекурсивного множества и обще-рекурсивной функции. Понятие обще-рекурсивной функции служит, как уже отмечалось, уточнением интуитивного понятия всюду определенной вычислимой функции. Понятие обще-рекурсивного множества служит, как показывают теоремы 1 и 2 этого параграфа, уточнением интуитивного понятия разрешимого множества. В п.2 вводится понятие обще-рекурсивного предиката, служащее уточнением интуитивного понятия вычислимого всюду определенного предиката. В п. 3 исследуются обще-рекурсивные пересчеты рекурсивно-перечислимых и, в частности, обще-рекурсивных множеств. Теоремы 23 и 24 этого пункта показывают, что понятие рекурсивно-перечислимого множества действительно является уточнением понятия перечислимого множества.

1. ОБЩЕ-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ И МНОЖЕСТВА

Обще-рекурсивные функции были у нас определены как всюду определенные частично-рекурсивные функции. Однако понятие обще-рекурсивной функции может быть определено и независимо от понятия частично-рекурсивной функции, а именно способами, совершенно аналогичными тем, которыми определялись примитивно-рекурсивные функции (на стр. 91 — 92 или 97 — 98) и частично-рекурсивные функции (на стр. 155 или 156).

Назовем применение оператора μ к всюду определенной функции f *обще-рекурсивным*, если в результате этого применения снова получается всюду определенная функция. Таким образом, применение оператора μ (по i-му аргументу) к всюду определенной функции $f^{(n)}$ будет обще-рекурсивным, если для каждого кортежа $\langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\rangle$ найдется такое y, что $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0$ и при всех $t < y$ значение $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) > 0$. Назовем класс функций *обще-рекурсивно замкнутым*, если он содержит функции $0^{(0)}$, $\lambda_1^{(1)}$ и замкнут относительно операций подстановки, примитивной рекурсии и обще-рекурсивного применения оператора μ. *Минимальный обще-рекурсивно замкнутый класс* (пересечение всех обще-рекурсивно замкнутых классов) *$\mathcal{O}'$ совпадает с $\mathcal{O}$*. Действительно. Если $f \in \mathcal{O}$, то, в силу Слабой теоремы о нормальной форме (теорема 4 из § 6) и очевидного включения $\mathcal{PR} \subseteq \mathcal{O}'$, имеем $f \in \mathcal{O}'$. С другой стороны, класс $\mathcal{O}$, очевидно, обще-рекурсивно замкнут. Поэтому, $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$. Таким образом, мы получаем второе определение понятия «обще-рекурсивная функция».

Назовем кортеж функций $\langle f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$ *обще-рекурсивным описанием функции* f, если $f_k = f$ и каждая f_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ либо 1) является одной из функций $0^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$, либо 2) получается из предыдущих функций кортежа при помощи операции подстановки, или операции примитивной рекурсии, или обще-рекурсивного применения оператора μ. Понятие обще-рекурсивного описания позволяет доказать теорему, являющуюся аналогом теоремы 2 из § 4 и теоремы 1 из § 6, и получить тем самым еще одно определение обще-рекурсивной функции: функция называется *обще-рекурсивной*, если она имеет какое-нибудь обще-рекурсивное описание.

В § 6 было указано (п. 1, (1′)), что между классом $\mathcal{PR}$ примитивно-рекурсивных функций, классом $\mathcal{O}$ обще-рекурсивных функций и классом $\mathcal{C}$ частично-рекурсивных функций имеет место следующее «включение»:

$$\mathcal{PR} \subseteq \mathcal{O} \subset \mathcal{C}. \tag{1}$$

В § 5 было указано (п. 1, (3)), что между классом **П** всех примитивно-рекурсивных множеств, классом **О** обще-рекурсивных множеств и классом **Р** рекурсивно-перечислимых множеств имеет место аналогичное отношение:

$$\mathbf{П} \subseteq \mathbf{О} \subseteq \mathbf{Р}. \tag{2}$$

Класс $\mathscr{P}$ — примитивно-рекурсивно замкнутый, но не частично-рекурсивно замкнутый класс. Класс **П** соответствует классу $\mathscr{P}$ в смысле определения на стр. 99: множество тогда и только тогда принадлежит к **П**, когда его характеристическая функция принадлежит к $\mathscr{P}$ (впрочем, это выполняется тривиально: именно это свойство и было взято за определение класса **П**). Класс $\mathscr{C}$ — даже частично-рекурсивно замкнутый (и тем более — примитивно-рекурсивно замкнутый). Между функциями из $\mathscr{C}$ и множествами из **Р** выполняется много отношений, аналогичных связям между $\mathscr{P}$ и **П**. Но в то же время теорема: «множество тогда и только тогда рекурсивно-перечислимо, когда его характеристическая функция частично-рекурсивна» — не верна. Как показывает следствие 9 теоремы 5 из § 6, если характеристическая функция некоторого множества частично-рекурсивна, то это множество рекурсивно-перечислимо. Но обратное не верно: в § 9 (п. 2, пример 9) будет построен пример рекурсивно-перечислимого множества, характеристическая функция которого не частично-рекурсивна *).

Класс $\mathscr{O}$ — конечно, не частично-рекурсивно замкнутый класс: операция μ легко может нарушить всюду-определенность функции и вывести из класса $\mathscr{O}$ (пример 3 из п. 5 § 3). Но класс $\mathscr{O}$ — примитивно-рекурсивно замкнутый класс: $0^{(0)} \in \mathscr{O}$, $\lambda_1^{(1)} \in \mathscr{O}$, операции подстановки и примитивной рекурсии сохраняют всюду-определенность (замечание 2 из п. 3 § 2 и замечание 2 из п. 7 § 2).

Докажем, что класс **О** обще-рекурсивных множеств соответствует классу $\mathscr{O}$ обще-рекурсивных функций в смысле определения на стр. 99.

Теорема 1. *Множество L (в N^s) тогда и только тогда* ***обще-рекурсивно****, когда его характеристическая функция обще-рекурсивна* **).

Доказательство. 1) Необходимость («только тогда»). Пусть L — обще-рекурсивное множество в N^s. Тогда (по определению) множества L и $N^s \setminus L$ рекур-

---

*) См. также теорему 8 из § 6 и текст после нее (стр. 172, 173).

**) Сформулированное в этой теореме необходимое и достаточное условие обще-рекурсивности множества часто используется в качестве определения понятия «обще-рекурсивное множество» (см., например, С. К. Клини [1952], стр. 272—273 русского издания).

сивно-перечислимы. Характеристическая функция χ_L множества L естественным образом определяется «кусочно» при помощи частично-рекурсивных (даже примитивно-рекурсивных) функций $1^{(s)}$ и $0^{(s)}$ и рекурсивно-перечислимых множеств L и $N^s \setminus L$

$$\chi_L(x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} 1 & x \in L \\ 0 & x \in N^s \setminus L. \end{cases}$$

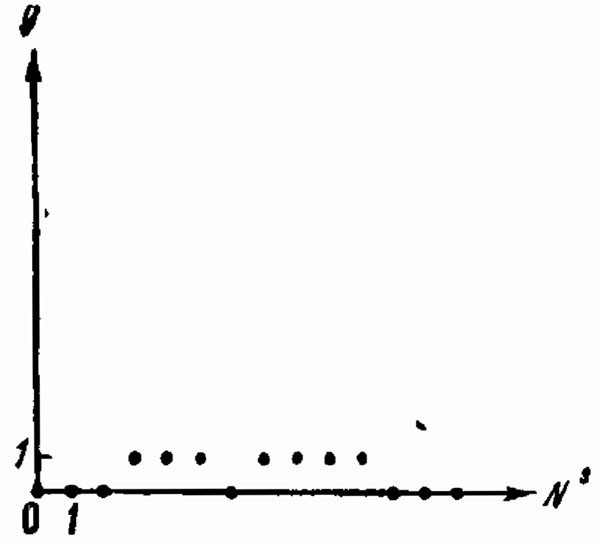


Рис. 13.

По теореме 7 из § 6 χ_L частично-рекурсивна. Но характеристическая функция χ_L, как и всякая характеристическая функция, всюду определена. Следовательно, χ_L обще-рекурсивна.

2) Д о с т а т о ч н о с т ь («тогда»). Пусть характеристическая функция χ_L множества $L \, (\subseteq N^s)$ будет обще-рекурсивной. Ее график G_{χ_L} (по определению характеристической функции) равен:

$$G_{\chi_L} = [L \times \{1\}] \cup [(N^s \setminus L) \times \{0\}]. \tag{3}$$

Отсюда

$$L = \text{пр}_{1, 2, \ldots, s} [G_{\chi_L} \cap (N^s \times \{1\})], \tag{4}$$

$$N^s \setminus L = \text{пр}_{1, 2, \ldots, s} [G_{\chi_L} \cap (N^s \times \{0\})] \tag{5}$$

(см. рис. 13). Функция χ_L обще-рекурсивна. По Теореме о графике (теорема 3 из § 6) G_{χ_L} рекурсивно-перечислимо. По (4), (5) и теоремам 2 из § 5, 5 из § 5, 4 из § 5 и 3 из § 5 множества L и $N^s \setminus L$ также рекурсивно-перечислимы. Следовательно, L — обще-рекурсивное множество.

Т е о р е м а 2. *Множество L (в N^s) тогда и только тогда* ***обще-рекурсивно****, когда его характеристическая функция частично-рекурсивна.*

Теорема 2 является тривиальной перефразировкой теоремы 1, так как характеристическая функция любого множества всюду определена.

В силу Основной гипотезы мы можем теперь отождествить обще-рекурсивные множества с разрешимыми подмножествами пространств N^s.

Из теоремы 1 и определения на стр. 99 вытекает, что множествами, принадлежащими к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathcal{O}$, являются обще-рекурсивные множества и только они*). Применим многочисленные теоремы из § 4 к примитивно-рекурсивно замкнутому классу $\mathcal{O}$. В § 4 мы теоремы 3—17 доказали для произвольного примитивно-рекурсивно замкнутого класса $\mathfrak{M}$, а потом после каждой из этих теорем сформулировали — в виде следствия — ее частный случай для конкретного примитивно-рекурсивно замкнутого класса, класса $\mathcal{P}$. Теперь совершенно аналогично сформулируем — в виде теорем — частные случаи теорем 3—17 из § 4 для другого конкретного примитивно-рекурсивно замкнутого класса, класса $\mathcal{O}$.

Теорема 3. *Класс всех обще-рекурсивных подмножеств множества N^s есть тело множеств.* (Из теоремы 3 из § 4.)

Теорема 4. *Цилиндр, восставленный из обще-рекурсивного множества, также обще-рекурсивен.* (Из теоремы 4 § 4.)

Теорема 5. *Геометрическое произведение обще-рекурсивных множеств обще-рекурсивно.* (Из теоремы 5 § 4.)

Теорема 6. *График обще-рекурсивной функции обще-рекурсивен.* (Из теоремы 6 § 4).

Замечание. Обратное не верно. Примером не обще-рекурсивной (но, конечно, частично-рекурсивной!) функции с обще-рекурсивным графиком может служить хотя бы «нигде не определенная» функция. Если же функция с обще-рекурсивным графиком всюду определена, то она, конечно, обще-рекурсивна.

Отображение пространства N^r в N^s $(s > 0)$, осуществляемое обще-рекурсивными функциями, мы будем называть *обще-рекурсивным отображением* (аналогично

---

*) В силу того же определения и теоремы 2 множествами, принадлежащими к классу $\mathcal{C}$, также являются обще-рекурсивные множества и только они.

можно определить обще-рекурсивное отображение множества N в N^∞ и множества N^∞ в N *)).

Теорема 7. *График обще-рекурсивного отображения* (пространства N^r в N^s) *обще-рекурсивен.* (Из следствия 2 теоремы 6 § 4.)

Теорема 8. *Множество уровня обще-рекурсивной функции* (по любому числу) *обще-рекурсивно.* (Из теоремы 7 § 4.)

Теорема 9. *Множество* L (в N^s) *тогда и только тогда* **обще-рекурсивно**, *когда оно является множеством уровня некоторой обще-рекурсивной функции.* (Из следствия 2 теоремы 7 § 4.) **).

Теорема 10. *Если функция* f (типа $N^s \to N$) *кусочно задана при помощи обще-рекурсивных множеств* $A_1, \ldots, A_n$ *и обще-рекурсивных функций* $f_1, \ldots, f_n$, *причем* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = N^s$, *то функция* f *обще-рекурсивна.* (Из теоремы 8 § 4.)

Теорема 11. *Полный прообраз обще-рекурсивного множества* (в N^s) *при обще-рекурсивном отображении* (пространства N^r в N^s) *обще-рекурсивен.* (Из теоремы 9 из § 4.)

Замечание. При обще-рекурсивном отображении даже область значений, а следовательно, и образ произвольного обще-рекурсивного множества не обязаны быть обще-рекурсивными. В § 9 (п. 2, пример 7) будет построен пример обще-рекурсивного отображения N в N, при котором само N перейдет в не обще-рекурсивное множество.

Можно указать некоторые достаточные условия, при которых образ обще-рекурсивного множества при обще-рекурсивном отображении остается обще-рекурсивным.

Теорема 12. *Пусть* φ — *обще-рекурсивное отображение пространства* N^r **на** N^s. *И пусть* M — *такое обще-рекурсивное множество в* N^r, *что* $\varphi(M) \cap \varphi(N^r \setminus M) = \Lambda$. *Тогда* $\varphi(M)$ *обще-рекурсивно.*

Доказательство. Из условий, наложенных на отображение φ и множество M, вытекает (см. замеча-

---

*) См. стр. 126, 127.

**) Ср. с теоремой 8 из § 6. См. текст после нее (стр. 172, 173).

ние 2 в п. 4 § 1), что

$$N^s \setminus \varphi(M) = \varphi(N^r \setminus M). \tag{6}$$

По условию φ — обще-рекурсивное отображение и, тем более, частично-рекурсивное. Поскольку M — обще-рекурсивное множество, M и $N^r \setminus M$ рекурсивно-перечислимы. По следствию 1 теоремы 5 из § 6 $\varphi(M)$ и $\varphi(N^r \setminus M)$ рекурсивно-перечислимы. По (6) $N^s \setminus \varphi(M)$ рекурсивно-перечислимо. Следовательно, $\varphi(M)$ — обще-рекурсивное множество.

Замечание. Из доказательства видно, что теорема 12 верна и для частично-рекурсивного отображения пространства N^r на N^s.

Теорема 13. *Множество нижних точек обще-рекурсивного множества* (в N^2) *обще-рекурсивно.* (Из теоремы 17 § 4.)

Теорема 14. *Операторы* $\Sigma^{(i)}$ и $\Pi^{(i)}$ *сохраняют обще-рекурсивность функций.* (Из лемм 1 из п. 3 § 4 и 2 из п. 3 § 4.)

2. ОБЩЕ-РЕКУРСИВНЫЕ ПРЕДИКАТЫ

Определение. Предикат P (на N^s) называется *обще-рекурсивным*, если он принадлежит к классу $\mathfrak{O}$, т. е. если его характеристическая функция (или, что то же самое, если его множество истинности) обще-рекурсивна.

Замечание. Из (1) и (2) вытекает, что *всякий примитивно-рекурсивный предикат обще-рекурсивен, всякий обще-рекурсивный предикат рекурсивно-перечислим.*

Из этого замечания и из теорем 11 из § 5 и 13 из § 5 вытекает

Теорема 15. *Предикат* на N^k *тогда и только тогда является* **рекурсивно-перечислимым**, *когда он может быть получен навешиванием* (неограниченного) *квантора существования на некоторый обще-рекурсивный предикат* *).

Теорема 16. *Предикат, являющийся результатом подстановки обще-рекурсивных функций в обще-рекурсивный предикат, обще-рекурсивен.* (Из теоремы 10 из § 4.)

*) Ср. с теоремой 11 из § 5.

Теорема 17. *Операции исчисления высказываний* (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация) *сохраняют обще-рекурсивность предикатов.* (Из теоремы 11 из § 4.)

Теорема 18. *Навешивание ограниченного квантора существования сохраняет обще-рекурсивность предикатов.* (Из теоремы 12 из § 4 и замечания после нее.)

Теорема 19. *Навешивание ограниченного квантора общности сохраняет обще-рекурсивность предикатов.* (Из теоремы 13 из § 4 и замечания после нее.)

Замечание. Навешивание неограниченных кванторов может не сохранить обще-рекурсивность предиката (см. примеры 13 из п. 2 § 9 и 14 из п. 2 § 9).

Теорема 20. *При применении нестрого ограниченных операторов «наименьшее число», «наибольшее число» и «число тех, которые» к обще-рекурсивным предикатам получаются обще-рекурсивные функции.* (Из теоремы 14 § 4.)

Замечание. Теорема 20 верна и для строго ограниченных операторов «наименьшее число», «наибольшее число» и «число тех, которые» (см. замечание после теоремы 14 из § 4).

Навешивание неограниченного оператора μ на обще-рекурсивный предикат не обязано давать обще-рекурсивную функцию *). Навешивание неограниченного оператора μ на рекурсивно-перечислимый предикат не обязано давать частично-рекурсивную функцию **). Но все же имеет место

Теорема 21. *Функция, получающаяся навешиванием неограниченного оператора «наименьшее число» на обще-рекурсивный предикат, частично-рекурсивна.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots \ldots, x_s) = (\mu x_i) P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_s)$, где P — обще-рекурсивный предикат на N^s. По определению обще-рекурсивного предиката характеристическая функция χ_P предиката P обще-рекурсивна. Тогда обще-рекурсивна

*) Хотя бы потому, что может получиться не всюду определенная функция.

**) Потому что множество нижних точек рекурсивно-перечислимого множества может и не быть рекурсивно-перечислимым (см. сноску на стр. 279).

и функция $y = \overline{\mathrm{sg}}\, \chi_P(x_1, \ldots, x_s)$. Легко видеть, что $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s) = (\mu x_i)[\overline{\mathrm{sg}}\, \chi_P(x_1, \ldots, x_s) = 0]$. Следовательно, функция f получается применением оператора μ к обще-рекурсивной функции. Значит, f частично-рекурсивна.

Теорема 22. *Если функция f (типа $N^s \to N$) кусочно задана при помощи обще-рекурсивных предикатов $P_1, \ldots, P_n$ и обще-рекурсивных функций $f_1, \ldots, f_n$, причем $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{P_i} = N^s$, то функция f обще-рекурсивна.* (Из теоремы 15 § 4.)

3. ОБЩЕ-РЕКУРСИВНЫЕ ПЕРЕСЧЕТЫ

Теорема 23. *Множество L в N тогда и только тогда* ***рекурсивно-перечислимо****, когда оно либо пусто, либо является множеством значений некоторой обще-рекурсивной функции.*

Доказательство очевидно в силу теоремы 9 из § 5, следствия 6 теоремы 5 из § 6 и соотношения (1) из п. 1 § 6.

Теорема 24. *Множество L в $N^s (s > 0)$ тогда и только тогда* ***рекурсивно перечислимо****, когда оно либо пусто, либо является множеством значений некоторого обще-рекурсивного отображения N в N^s.* (Теорема 10 из § 5, следствие 5 теоремы 5 из § 6 и соотношение (1) из п. 1 § 6.)

Теоремы 23 и 24 дают еще один вариант определения рекурсивно-перечислимого множества*). Этот вариант как раз и показывает, что понятие рекурсивно-перечислимого множества является уточнением понятия перечислимого множества.

Теорема 25. *Если прямой пересчет некоторого множества обще-рекурсивен, то это множество обще-рекурсивно.* (Из теоремы 16 из § 4.)

Следствие. *Каждое бесконечное рекурсивно-перечислимое множество L (в N) содержит бесконечное же обще-рекурсивное подмножество.*

---

*) Ср. с определением на стр. 148.

Доказательство. В силу теоремы 23, L есть множество значений некоторой обще-рекурсивной функции f типа $N \longrightarrow N$. Рассмотрим функцию φ:

$$\begin{cases} \varphi(0) = f(0), \\ \varphi(x+1) = f((\mu t)[f(t) > \varphi(x)]). \end{cases}$$

В силу бесконечности множества L, функция φ всюду определена и является прямым пересчетом некоторого бесконечного множества $S \subseteq L$. В силу теорем 16, 21 и бесконечности множества L функция $g^{(1)}$:

$$g(y) = f((\mu t)[f(t) > y])$$

обще-рекурсивна. Поэтому всюду определенная функция $\varphi^{(1)}$, полученная примитивной рекурсией из $g^{(1)}$ (и константы $f(0)$), тоже обще-рекурсивна. Итак, обще-рекурсивная функция φ является пересчетом множества $S \subseteq L$. По теореме 25 S обще-рекурсивно.

Может быть доказана несколько более сильная, чем теорема 25,

Теорема 26. *Если бесконечное множество* L (в N) *является множеством значений неубывающей обще-рекурсивной функции* f (типа $N \longrightarrow N$), *то множество* L *обще-рекурсивно.*

Доказательство. Введем функцию φ:

$$\varphi(n) = (\mu t)[f(t) > n].$$

Функция φ частично-рекурсивна (в силу теорем 16 и 21) и всюду определена (в силу бесконечности множества L), а значит, обще-рекурсивна. Для предиката „$n \in L$“ выполняется соотношение

$$[n \in L] = (\exists t)[f(t) = n]. \tag{1}$$

Поскольку функция f неубывающая, соответствующее t не превосходит числа $\varphi(n)$. Поэтому, наряду с (1), имеет место также

$$[n \in L] = \underset{t \leqslant \varphi(n)}{(\exists t)} [f(t) = n]. \tag{1'}$$

В силу (1′) и теорем 16, 18 предикат „$n \in L$“, а значит, и множество L, является обще-рекурсивным. Теорема доказана.

Все конечные множества (в любом N^s) примитивно-рекурсивны (стр. 101), а следовательно, обще-рекурсивны (по (2) из п. 1).

Теорема 27. *Бесконечное множество* L (в N) *является* ***обще-рекурсивным*** *тогда и только тогда, когда его прямой пересчет обще-рекурсивен.*

Доказательство. 1) Достаточность («тогда») доказана в теореме 25.

2) Необходимость («только тогда»). Пусть L—бесконечное обще-рекурсивное множество в N. Обозначим наименьшее число в L через a. Определим примитивной рекурсией функцию $f^{(1)}$:

$$\begin{cases} f(0)=a, \\ f(t+1)=(\mu n)\{[n>f(t)]\,\&\,[\chi_L(n)=1]\}. \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, что функция f, определенная равенствами (2), является прямым пересчетом множества L. Из замечания после определения обще-рекурсивного предиката и теорем 1, 16, 17, 21 следует, что функция h:

$$h(u)=(\mu n)\{[n>u]\,\&\,[\chi_L(n)=1]\}$$

частично-рекурсивна. Так как L—бесконечное множество, функция h всюду определена: для любого u найдется такое n, что $n\in L$ и $n>u$. Значит, функция h обще-рекурсивна. Но схема (2) задает примитивно-рекурсивно функцию f через функции $a^{(0)}$ и h. Следовательно, функция f обще-рекурсивна (замечание 2 в п. 7 § 2).

Следствие. *Каждое бесконечное обще-рекурсивное множество* (в N) *есть множество значений некоторой* ***возрастающей*** *обще-рекурсивной функции* (типа $N\to N$).

Обобщив понятие прямого пересчета на случай бесконечных множеств в N^s, можно было бы получить результат, аналогичный теореме 27 и следствию из нее, и для бесконечных обще-рекурсивных множеств в N^s.

Используя теорему 27, мы сейчас получим аналогичный (но, естественно, более слабый) результат для рекурсивно-перечислимых множеств.

Теорема 28. *Каждое бесконечное рекурсивно-перечислимое множество* L *в* N *есть множество значений* *некоторой* ***однолистной****) *обще-рекурсивной функции* (типа $N \to N$).

Доказательство. В силу теоремы 23, рекурсивно-перечислимое множество L (в N) является множеством значений некоторой обще-рекурсивной функции f (типа $N \to N$). Но функция f не обязана, конечно, быть однолистной. Сделаем из нее однолистную функцию. Введем предикат P (на N): $P(t) = (\forall x)_{x<t} [f(x) \neq f(t)]$. Посмотрим повнимательнее, из каких чисел состоит $\overline{P}$. Когда $P(t) = \boldsymbol{u}$? $P(0) = \boldsymbol{u}$ (по (7) из п. 4 § 3). $P(1) = \boldsymbol{u}$, если $f(1) \neq f(0)$. $P(2) = \boldsymbol{u}$, если $f(2) \neq f(0)$ и $f(2) \neq f(1)$ и т. д. Короче говоря, $\overline{P}$ получается из N так: мы идем по N слева направо и вычеркиваем те числа, на которых значения функции f совпадают со значениями на уже пройденных числах. То, что останется, это и есть $\overline{P}$. На $\overline{P}$ функция f уже однолистна, но по-прежнему порождает все L. Множество L бесконечно. Следовательно, и $\overline{P}$ — бесконечное множество. Предикат P — обще-рекурсивный (теоремы 16 и 19). Значит, $\overline{P}$ — бесконечное обще-рекурсивное множество. По следствию из теоремы 27 оно есть множество значений некоторой возрастающей и, значит, однолистной обще-рекурсивной функции g. Тогда функция $h: h(n) = f(g(n))$ будет однолистной обще-рекурсивной функцией, порождающей множество L.

Замечание. Обратная теорема очевидна (следствие 6 теоремы 5 из § 6).

Теорема 29. *Если L — бесконечное рекурсивно-перечислимое множество в N^s, то существуют такие обще-рекурсивные функции $h_1, \ldots, h_s$* (типа $N \to N$), *что отображение пространства N в N^s, задаваемое функциями $h_1, \ldots, h_s$, отображает взаимно-однозначно N на L* (при $s = 1$ это утверждение превращается в утверждение предыдущей теоремы).

Доказательство. Фиксируем какое-нибудь примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие

---

*) Функция f типа $N^s \to N$ называется *равнозначной*, или *однолистной*, если на разных кортежах (из N^s) она принимает разные значения.

$\varkappa^{[s]}$ между N и N^s (такое соответствие существует по теореме 19 из § 4). Функции $\varkappa_1^{[s]}, \varkappa_2^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}, \varkappa_0^{[s]}$, осуществляющие это соответствие, нам сейчас понадобятся. Образ множества L в N, задаваемый соответствием $\varkappa^{[s]}$, т. е. множество

$$\varkappa^{[s]}(L) = \mathscr{E}\,\{t \in N \mid \langle \varkappa_1^{[s]}(t), \varkappa_2^{[s]}(t), \ldots, \varkappa_s^{[s]}(t)\rangle \in L\},$$

является бесконечным рекурсивно-перечислимым множеством (см. замечание 2 после теоремы 8 из § 5 или следствие 1 теоремы 5 из § 6). По теореме 28 у множества $\varkappa^{[s]}(L)$ существует однолистный обще-рекурсивный пересчет g. Тогда функции h_i: $h_i(t) = \varkappa_i^{[s]}(g(t))$ $(i = 1, \ldots, s)$ — будут взаимно-однозначно отображать N на L. Эти функции будут обще-рекурсивными и, следовательно, искомыми.

Замечание. Обратная теорема очевидна (следствие 5 теоремы 5 из § 6).

Любопытным «антиподом» к теореме 28 является

Теорема 30. *Каждое непустое рекурсивно-перечислимое множество L в N есть множество значений некоторой обще-рекурсивной функции* (типа $N \to N$), *принимающей каждое свое значение бесконечное число раз.*

Доказательство. Если f — произвольный обще-рекурсивный пересчет множества L (теорема 23), а g — произвольная обще-рекурсивная функция большого размаха (замечание 1 из п. 5 § 2, теорема 19 из § 4 и (1) из п. 1), то функция h, определяемая равенством

$$h(x) = f(g(x)),$$

— искомая.

Взаимно-однозначное *соответствие* между N^r и N^s называется *обще-рекурсивным*, если оба задаваемых им отображения (N^r на N^s и N^s на N^r) обще-рекурсивны.

Из следствия 2 теоремы 5 из § 6 и из теоремы 11 вытекает

Теорема 31. *При обще-рекурсивном взаимно-однозначном соответствии сохраняются рекурсивно-перечислимость и обще-рекурсивность множеств* (т. е. рекурсивно-перечислимому множеству соответствует рекурсивно-перечислимое, а обще-рекурсивному — обще-рекурсивное).

Полезно фиксировать также следующую теорему, являющуюся тривиальным следствием теоремы 19 из § 4:

Теорема 32. *Для любого положительного s существует обще-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между N и N^s.*

Замечание. *Для любых двух обще-рекурсивных взаимно-однозначных соответствий между N и N^s существует обще-рекурсивная функция, дающая по числу, соответствующему какому-либо кортежу при первом соответствии, число, соответствующее этому же кортежу при втором соответствии.* (Доказательство такое же, как в замечании на стр. 125.) Можно доказать даже, что *для любых двух обще-рекурсивных* ***отображений*** *α и β натурального ряда N* ***на*** *пространство N^s существует обще-рекурсивная функция φ, дающая по всякому числу n такое число m, что $\alpha(n) = \beta(m)$.* Действительно, если α осуществляется обще-рекурсивными функциями $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, а β — обще-рекурсивными функциями $\beta_1, \ldots, \beta_s$, то можно положить, например,

$$\varphi(n) = (\mu m)\,[(\alpha_1(n) = \beta_1(m)) \,\&\, (\alpha_2(n) = \beta_2(m)) \,\&\, \ldots \,\&\, \ldots \,\&\, (\alpha_s(n) = \beta_s(m))].$$

Поскольку предикат, стоящий в квадратных скобках, обще-рекурсивен (на основании теорем 16 и 17 он есть конъюнкция результатов подстановки обще-рекурсивных функций α_i, β_i в обще-рекурсивный предикат равенства), то и функция φ обще-рекурсивна (она частично-рекурсивна по теореме 21 и, очевидно, всюду определена).

§ 8. ФУНКЦИЯ, УНИВЕРСАЛЬНАЯ ДЛЯ ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе, в п. 2 (теорема 4) для каждого s строится обще-рекурсивная функция, содержащая в некотором точно разъясняемом смысле все примитивно-рекурсивные функции от s аргументов. Построение указанной функции и в особенности доказательство ее обще-рекурсивности является довольно громоздким: построение функции вместе с доказательством, что построенная функция — такая, какая нужно, занимает в общей сложности 31 страницу. К тому же доказательство обще-рекурсивности требует специального аппарата, разрабатываемого в п. 1. Зато в п. 3 из одного только факта существования построенной в п. 2 функции извлекается целый ряд примеров объектов (множеств, функций и отображений), отдельные «характеристики» которых не примитивно-рекурсивны: пример обще-рекурсивной, но не примитивно-рекурсивной функции; пример обще-рекурсивного, но не примитивно-рекурсивного множества; пример всюду определенной функции с примитивно-рекурсивным графиком, но не примитивно-рекурсивной; пример примитивно-рекурсивного отображения, обратное отображение к которому не примитивно-рекурсивно и т. п.

Читатель, не располагающий достаточным временем, не слишком интересующийся или не желающий вникать в техническую сторону дела, может при желании, без ущерба для понимания дальнейшего, опустить весь п. 1 и доказательство теоремы 4 в п. 2 (стр. 204 — 235), поверив на слово в справедливость этой теоремы и пожиная ее плоды в п. 3.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ АППАРАТ

Этот пункт носит вспомогательный характер для построения функции, указанной в заглавии параграфа. Сама универсальная функция будет определена и построена в п. 2.

До сих пор для нас основными объектами, на которых мы строили свою теорию, задавали функции, определяли предикаты и т. п., были элементы множества N^∞, т. е. кортежи натуральных чисел всевозможной длины. Нам понадобятся при построении универсальной функции не только кортежи натуральных чисел, но и кортежи кортежей.

Определим индуктивно понятие *объекта k-го ранга.*

Объектами нулевого ранга назовем натуральные числа, т. е. объекты множества $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_s$ $(s > 0)$ — объекты нулевого ранга, то выражение $\alpha = \langle x_1, x_2, \ldots, x_s \rangle$ мы будем называть *объектом первого ранга*. Число s называется *длиной* объекта. Объекты нулевого ранга $x_1, \ldots, x_s$ называются *компонентами* (*координатами*) объекта первого ранга α. Присоединим также к объектам первого ранга «несобственный» *пустой объект*: $\langle\ \rangle$. Будем обозначать пустой объект первого ранга через Λ. Пустому объекту Λ естественно приписать длину 0. Итак, объектами первого ранга являются один объект длины 0, а именно — пустой объект $\Lambda = \langle\ \rangle$, объекты длины 1: $\langle 0 \rangle$, $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle, \ldots$, т. е. элементы множества N^1 *), объекты длины 2: $\langle 0, 0 \rangle$, $\langle 0,1 \rangle$, $\langle 1,0 \rangle$, $\langle 0,2 \rangle, \ldots$, т. е. элементы множества N^2 и т. д. Короче говоря, объектами 1 ранга являются просто элементы множества N^∞.

Хотя уже можно делать индуктивный переход, мы все-таки определим отдельно понятие объекта второго ранга. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ $(s > 0)$ — объекты первого ранга, то выражение $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle$ называется *объектом второго ранга длины s*. Таким образом, объектами второго ранга (положительной длины) являются кортежи кортежей натуральных чисел.

---

*) Таким образом, мы различаем элементы множества N — натуральные числа — 0, 1, 2, 3 ... и элементы множества N^1 — $\langle 0 \rangle$, $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 3 \rangle, \ldots$ (ср. замечание 1 после определения на стр. 136).

Пример. $\mathfrak{a} = \langle\langle 23\rangle, \ \langle 0, 1, 0\rangle, \ \langle 3, 3, 3, 3, 3\rangle\rangle$ — объект второго ранга длины 3.

К объектам второго ранга отнесем также пустой объект — $\langle \ \rangle$. Обозначать пустой объект второго ранга мы будем опять через Λ и будем приписывать ему снова длину 0.

Пусть уже определено понятие объекта k-го ранга, причем среди объектов k-го ранга имеется ровно один объект длины 0, пустой объект $\Lambda = \langle \ \rangle$.

Если $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$ $(s > 0)$ — объекты k-го ранга, то выражение $\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s\rangle$ называется *объектом* $(k+1)$*-го ранга длины* s. К объектам $(k+1)$-го ранга присоединим также, по определению, один объект длины 0, пустой объект $\Lambda = \langle \ \rangle$ *).

Множество всех объектов k-го ранга обозначим через N^{∞^k} **).

Используя обозначения, введенные в п. 1 § 2, можно написать:

$$N^{\infty^1} = N^{\infty} = \bigcup_{s \in N} N^s = N^0 \cup N^1 \cup N^2 \cup \ldots,$$

где

$$N^0 = \{\Lambda\}.$$

$$N^{\infty^2} = \bigcup_{s \in N} (N^{\infty})^s = (N^{\infty})^0 \cup (N^{\infty})^1 \cup (N^{\infty})^2 \cup \ldots = (N^{\infty})^{\infty},$$

где

$$(N^{\infty})^0 = \{\Lambda\}.$$

---

*) Таким образом, у нас имеются объекты неопределенного ранга, или, лучше сказать, объекты, принадлежащие сразу ко многим рангам. Так, например, объект $\Lambda = \langle \ \rangle$ является объектом длины 0 любого ранга k: $k \geqslant 1$. Объект $\langle \Lambda \rangle = \langle\langle \ \rangle\rangle$ является объектом длины 1 любого ранга $k : k \geqslant 2$. Объект $\langle \Lambda, \Lambda\rangle = \langle \Lambda, \langle \ \rangle\rangle = \langle\langle \ \rangle, \langle \ \rangle\rangle$ является объектом длины 2 любого ранга $k : k \geqslant 2$. Объект $\langle\langle 3\rangle, \Lambda\rangle = \langle\langle 3\rangle, \langle \ \rangle\rangle$ является, конечно, объектом вполне определенного ранга, а именно ранга 2.

**) Фактически в п. 2 нам понадобятся только объекты первого и второго ранга. Поэтому мы и определили отдельно понятие объекта второго ранга. Читатель при дальнейшем чтении пункта 1 может иметь это в виду.

Вообще,

$$N^{\infty^{k+1}} = \bigcup_{s \in N} (N^{\infty^k})^s = (N^{\infty^k})^\infty.$$

В терминах п. 1 § 2 $N^{\infty^{k+1}}$ есть просто совокупность всех кортежей над N^{∞^k}, поскольку объект $(k+1)$-го ранга — это кортеж над множеством объектов k-го ранга. Очевидно, что множество N^{∞^k} объектов k-го ранга — счетное.

Обозначим через $\varepsilon^{[k]}$ произвольное взаимно-однозначное отображение множества N на множество объектов k-го ранга N^{∞^k} $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Докажем существование отображений $\varepsilon^{[1]}, \varepsilon^{[2]}, \varepsilon^{[3]}, \ldots$ $\ldots, \varepsilon^{[k]}, \ldots$, обладающих некоторыми специальными свойствами. Условимся раз навсегда, что при всех отображениях $\varepsilon^{[k]}$, которые мы будем рассматривать, числу 0 мы будем ставить в соответствие пустой объект Λ.

В п. 6 § 4, когда мы строили некоторые специальные отображения $\varepsilon^{[1]}$ множества N на множество N^∞, мы естественным образом ввели в рассмотрение две функции: функцию $\iota_1^{(1)}$, дающую по положительному номеру *) t длину s соответствующего объекта первого ранга α, и функцию $\iota_2^{(2)}$, дающую по номеру t $(t > 0)$ и числу i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ i-ю компоненту объекта α. Построение некоторого отображения $\varepsilon^{[1]}$, по существу, сводилось к заданию функций ι_1, ι_2. Функциями ι_1, ι_2 отображение $\varepsilon^{[1]}$ вполне определялось.

Оказывается, исходя из любого отображения $\varepsilon^{[1]}$ или, что то же самое, функций ι_1, ι_2, его осуществляющих, можно построить такую цепочку отображений $\varepsilon^{[2]}, \varepsilon^{[3]}, \varepsilon^{[4]}, \ldots$, которая будет осуществляться в смысле, точно поясняемом ниже, теми же функциями ι_1, ι_2. А именно: для любого $k : k \geqslant 2$ функция ι_1 по (положительному)

---

*) Если задано некоторое частичное отображение натурального ряда N на множество M и числу $n \in N$ при этом частичном отображении соответствует элемент $a \in M$, условимся число n называть *номером* элемента a (относительно рассматриваемого частичного отображения). Само частичное отображение натурального ряда N на множество M называется *нумерацией* множества M. Ниже (§ 11) мы специально будем изучать понятие нумерации.

t будет давать длину s объекта k-го ранга $\varepsilon^{[k]}(t)$, а функция ι_2 по $t\,(t>0)$ и $i\,(1\leqslant i\leqslant s)$ будет давать номер — относительно отображения $\varepsilon^{[k-1]}$ — i-й компоненты объекта $\varepsilon^{[k]}(t)$.

Если, для простоты изложения, обозначить через $\varepsilon^{[0]}$ тождественное отображение N на себя, то и при $k=1$ можно будет говорить, что $\iota_2(t, i)$ равно номеру — относительно $\varepsilon^{[0]}$ — i-й компоненты объекта $\varepsilon^{[1]}(t)$ (ведь для такого $\varepsilon^{[0]}:\varepsilon^{[0]}(t)=t$).

Теперь может быть сформулирована

Теорема 1. *Для любого отображения* $\varepsilon^{[1]}$, *осуществляемого функциями* ι_1, ι_2, *существуют такие отображения* $\varepsilon^{[2]}, \varepsilon^{[3]}, \ldots, \varepsilon^{[k-1]}, \varepsilon^{[k]}, \ldots$, *что для любого* $k: k\geqslant 1$ *функция* ι_1 *по* $t\,(t>0)$ *будет давать длину* s *объекта* $\varepsilon^{[k]}(t)$, *а функция* ι_2 *по* $t\,(t>0)$ *и* $i\,(1\leqslant i\leqslant s)$ *будет давать номер — относительно отображения* $\varepsilon^{[k-1]}$ — *i-й компоненты объекта* $\varepsilon^{[k]}(t)$.

1) Хотя мы сразу могли бы сделать индуктивный переход (базис индукции — отображение $\varepsilon^{[1]}$ — у нас есть), мы все-таки построим отдельно отображение $\varepsilon^{[2]}$ *).

Возьмем произвольное положительное $t\in N$. Найдем сначала объект первого ранга $\varepsilon^{[1]}(t)$, соответствующий числу t по отображению $\varepsilon^{[1]}$. Такой объект первого ранга найдется однозначно. А именно: если $\iota_1(t)=s$ и $\iota_2(t, i)=n_i$ $(1\leqslant i\leqslant s)$, то $\varepsilon^{[1]}(t)=\langle n_1, n_2, \ldots, n_s\rangle$. Для каждого n_i $(1\leqslant i\leqslant s)$ найдем — опять вполне однозначно — объект первого ранга $\varepsilon^{[1]}(n_i)$, соответствующий числу n_i по $\varepsilon^{[1]}$. Из этих объектов первого ранга составим объект второго ранга. Этот-то объект второго ранга мы и поставим в соответствие числу t. Таким образом,

$$\varepsilon^{[2]}(t)=\langle\varepsilon^{[1]}(n_1), \ldots, \varepsilon^{[1]}(n_s)\rangle$$

где $n_i=\iota_2(t, i)$, а $s=\iota_1(t)$. Очевидно, что каждому положительному t будет поставлен в соответствие таким способом один вполне определенный объект второго ранга и разным $t\in N$ будут поставлены в соответствие разные объекты. Каждый непустой объект второго ранга будет при этом поставлен в соответствие некоторому положительному t. А именно: пусть $\alpha=\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_s\rangle$ $(s>0)$ — объект

---

*) См. сноску **) на стр. 192.

второго ранга. Найдем числа $n_1, \ldots, n_s$, соответствующие объектам первого ранга $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ по отображению $\varepsilon^{[1]}$. Затем найдем число t, соответствующее — по $\varepsilon^{[1]}$ — объекту первого ранга $\langle n_1, \ldots, n_s\rangle$. Очевидно, что взятый нами произвольный непустой объект второго ранга α как раз и соответствует этому t (см. рис. 14).

$$\begin{array}{c}
t \\
\Big\updownarrow \varepsilon^{[1]} \\
\varepsilon^{[1]}(t) = \langle n_1, n_2, \ldots, n_s\rangle = \langle \iota_2(t, 1), \iota_2(t, 2), \ldots, \iota_2(t, \iota_1(t))\rangle \\
\Big\updownarrow \varepsilon^{[1]} \\
\varepsilon^{[2]}(t) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\rangle = \langle \varepsilon^{[1]}(n_1), \varepsilon^{[1]}(n_2), \ldots, \varepsilon^{[1]}(n_s)\rangle = \\
= \langle \varepsilon^{[1]}(\iota_2(t, 1)), \ldots, \varepsilon^{[1]}(\iota_2(t, \iota_1(t)))\rangle
\end{array}$$

Рис. 14.

Из построения видно, что $\iota_1(t)$ равно длине объекта $\varepsilon^{[2]}(t)$, а $\iota_2(t, i)$ равно номеру — относительно $\varepsilon^{[1]}$ — i-й компоненты объекта $\varepsilon^{[2]}(t)$.

2) Пусть уже построены требуемые отображения $\varepsilon^{[2]}, \varepsilon^{[3]}, \ldots, \varepsilon^{[k-1]}, \varepsilon^{[k]}$ $(k \geqslant 2)$. Построим отображение $\varepsilon^{[k+1]}$. Возьмем произвольное положительное $t \in N$. Найдем сначала объект первого ранга $\varepsilon^{[1]}(t)$, соответствующий числу t по отображению $\varepsilon^{[1]}$. Такой объект первого ранга найдется однозначно. А именно: если $\iota_1(t) = s$ и $\iota_2(t, i) = n_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, то $\varepsilon^{[1]}(t) = \langle n_1, n_2, \ldots, n_s\rangle$. Для каждого n_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ найдем — опять-таки однозначно, ввиду взаимно-однозначности $\varepsilon^{[k]}$ — объект k-го ранга $\varepsilon^{[k]}(n_i)$, соответствующий числу n_i по $\varepsilon^{[k]}$. Из этих объектов k-го ранга составим объект $(k+1)$-го ранга. Этот-то объект $(k+1)$-го ранга мы и поставим в соответствие числу t. Таким образом,

$$\varepsilon^{[k+1]}(t) = \langle \varepsilon^{[k]}(n_1), \ldots, \varepsilon^{[k]}(n_s)\rangle,$$

где $n_i = \iota_2(t, i)$, а $s = \iota_1(t)$. Очевидно, что каждому положительному t будет поставлен в соответствие таким способом один вполне определенный объект $(k+1)$-го ранга и разным $t \in N$ будут поставлены в соответствие разные объекты. Каждый непустой объект $(k+1)$-го ранга будет при этом поставлен в соответствие некоторому положительному t. А именно: пусть $\mathfrak{a}=\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_s\rangle$ $(s>0)$ — объект $(k+1)$-го ранга. Найдем числа $n_1, n_2, \ldots, n_s$, соответствующие объектам k-го ранга $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ по отображению $\varepsilon^{[k]}$. Затем найдем число t, соответствующее — по $\varepsilon^{[1]}$ — объекту первого ранга $\langle n_1, n_2, \ldots, n_s\rangle$. Очевидно, что взятый нами произвольный непустой объект $(k+1)$-го ранга $\mathfrak{a}$ как раз и соответствует этому t (см. рис. 15).

$$
\begin{gathered}
t \\
\updownarrow \varepsilon^{[1]} \\
\varepsilon^{[1]}(t)=\langle n_1, n_2, \ldots, n_s\rangle=\langle\iota_2(t, 1), \iota_2(t, 2), \ldots, \iota_2(t, \iota_1(t))\rangle \\
\updownarrow \varepsilon^{[k]} \\
\varepsilon^{[k+1]}(t)=\langle\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\rangle=\langle\varepsilon^{[k]}(n_1), \varepsilon^{[k]}(n_2), \ldots, \varepsilon^{[k]}(n_s)\rangle= \\
=\langle\varepsilon^{[k]}(\iota_2(t, 1)), \ldots, \varepsilon^{[k]}(\iota_2(t, \iota_1(t)))\rangle
\end{gathered}
$$

Рис. 15.

Из построения видно также, что $\iota_1(t)$ равно длине объекта $\varepsilon^{[k+1]}(t)$, а $\iota_2(t, i)$ равно номеру — относительно $\varepsilon^{[k]}$ — i-й компоненты объекта $\varepsilon^{[k]}(t)$.

Итак, исходя из отображения $\varepsilon^{[1]}$, мы построили такие отображения $\varepsilon^{[2]}, \ldots, \varepsilon^{[k-1]}, \varepsilon^{[k]}, \ldots$, что вся цепочка $\varepsilon^{[1]}, \varepsilon^{[2]}, \ldots, \varepsilon^{[k]}, \ldots$ удовлетворяет требованиям теоремы. Теорема 1 доказана.

Про функции ι_1, ι_2 и отображения $\varepsilon^{[1]}, \varepsilon^{[2]}, \ldots$, связанные между собой так, как сказано в формулировке теоремы 1, мы условимся говорить, что цепочка отображений $\varepsilon^{[1]}, \varepsilon^{[2]}, \ldots$ *определяется* функциями ι_1, ι_2.

Следствие 1. *Существует цепочка отображений* $\varepsilon^{[1]}, \varepsilon^{[2]}, \ldots$, *определяемая* ***частично-рекурсивными*** *функциями* ι_1, ι_2. (См. теорему 21 из § 4 и следствие 2 теоремы 7 из § 6.)

Следствие 2. *Существует цепочка отображений* $\varepsilon^{[1]}, \varepsilon^{[2]}, \ldots$, *определяемая* ***такими*** *частично-рекурсивными функциями* ι_1, ι_2, ***что***

$$\iota_2(t, i)<t \quad (t>0,\ 1\leqslant i\leqslant\iota_1(t)).$$

(См. теорему 22 из § 4 и следствие 2 теоремы 7 из § 6.)

Фиксируем до конца пункта произвольную цепочку отображений $\varepsilon^{[1]}$, $\varepsilon^{[2]}$, ..., определяющуюся частично-рекурсивными функциями ι_1, ι_2.

Назовем множество L объектов k-го ранга *рекурсивно-перечислимым*, если рекурсивно-перечислимо множество $|L|$ номеров (относительно $\varepsilon^{[k]}$) объектов из L в смысле определения рекурсивно-перечислимого множества на стр. 136 и замечания 1 после него.

Требует проверки одна деталь. Мы уже в § 5 имели определение рекурсивно-перечислимого множества в N^s. Встает вопрос: если множество L в N^s рекурсивно-перечислимо в смысле определения на стр. 136, будет ли оно рекурсивно-перечислимо, если его рассматривать как множество объектов первого ранга, т. е. будет ли рекурсивно-перечислимым множество $|L|$ номеров объектов из L? И обратный вопрос: если множество L объектов первого ранга длины s (другими словами, $L \subseteq N^s$) рекурсивно-перечислимо, т. е. рекурсивно-перечислимо множество $|L|$ номеров объектов из L, будет ли множество L рекурсивно-перечислимым в смысле старого определения?

Теорема 2. *Множество* L *в* N^s *рекурсивно-перечислимо* (в смысле определения на стр. 136) *тогда и только тогда, когда рекурсивно-перечислимо множество* $|L|$ *номеров объектов из* L.

Доказательство. 1) Необходимость («только тогда»). Пусть L — рекурсивно-перечислимое множество в N^s. Исследуем множество $|L|$ номеров объектов из L. Легко видеть, что

$$[t \in |L|] \sim \{[\iota_1(t) = s] \,\&\, [\langle \iota_2(t, 1), \iota_2(t, 2), \ldots, \iota_2(t, s)\rangle \in L]\}.$$

Предикат „$\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in L$“ рекурсивно-перечислим. Функции ι_1, ι_2 частично-рекурсивны. Из теоремы 12 из § 5, теоремы 6 из § 6 и теоремы 14 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость предиката „$t \in |L|$“, а значит, и множества L.

2) Достаточность («тогда»). Пусть L — множество в N^s и $|L|$ — множество номеров объектов из L. И пусть $|L|$ — рекурсивно-перечислимое множество в N.

Тогда существует частично-рекурсивная функция f типа $N \to N$, порождающая $|L|$ (теорема 10 из § 6). Частично-рекурсивные функции

$$y = \iota_2(f(t), 1),\ y = \iota_2(f(t), 2),\ \ldots,\ y = \iota_2(f(t), s)$$

задают частично-рекурсивное отображение N в N^s. Очевидно, L является множеством значений этого частично-рекурсивного отображения. По следствию 5 теоремы 5 из § 6 L рекурсивно-перечислимо.

У читателя может возникнуть еще один вопрос. А если взять цепочку отображений $\varepsilon^{[1]}$, $\varepsilon^{[2]}$, определяющуюся некоторыми другими частично-рекурсивными функциями ι_1, ι_2, будет ли рекурсивно-перечислимость относительно одной цепочки отображений соответствовать рекурсивно-перечислимости относительно другой цепочки отображений? Нетрудно показать, что так и будет. Мы не будем этого строго доказывать, так как нам это не понадобится. Фактически, в п. 2, при построении универсальной функции нам понадобится одна фиксированная цепочка отображений.

Используя интуитивный аналог понятия «рекурсивно-перечислимое множество» — понятие перечислимого множества, покажем «на пальцах» идею доказательства. Пусть мы имеем две цепочки отображений, определяющихся каждая своей парой частично-рекурсивных функций. Пусть L — множество объектов k-го ранга, рекурсивно-перечислимое относительно одной цепочки отображений. Это означает, что множество $|L|_1$ номеров относительно $\varepsilon^{[k]}$ из этой цепочки рекурсивно-перечислимо. «Докажем», что множество $|L|_2$ номеров относительно $\varepsilon^{[k]}$ из второй цепочки тоже рекурсивно-перечислимо. На интуитивном уровне, на котором мы сейчас ведем рассуждение, это означает, что из способа перечисления множества $|L|_1$ нужно получить способ перечисления множества $|L|_2$. Алгоритм перечисления элементов из $|L|_2$ следующий. Запустим алгоритм перечисления элементов из $|L|_1$. Получив какое-нибудь $n_1 \in |L|_1$, найдем (функции, определяющие обе цепочки, предполагались частично-рекурсивными и, значит, интуитивно-вычислимыми) соответствующий объект k-го ранга α, $\alpha \in L$. Как найти в $|L|_2$ такое n_2, которому бы соответствовал тот же α? Будем подряд (для чисел 0, 1, 2, 3 ..) находить соответствующие (относительно $\varepsilon^{[k]}$ из второй цепочки) объекты k-го ранга, пока не дойдем до α. То n, на котором мы дойдем до α, и будет искомым n_2. Таким образом, по $n_1 \in |L|_1$ мы найдем соответствующее $n_2 \in |L|_2$. Перечисляя один за другим номера из $|L|_1$, мы последовательно перечислим и $|L|_2$.

Теорема 3. *Если L — рекурсивно-перечислимое множество объектов k-го ранга, то и множество L^∞ объектов $(k+1)$-го ранга рекурсивно-перечислимо* *).

Доказательство

$$[t \in |L^\infty|] \sim \underset{i \leqslant \iota_1(t)-1}{(\forall i)} [\iota_2(t, i+1) \in |L|].$$

Из теоремы 6 из § 6 и теоремы 16 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость предиката „$t \in |L^\infty|$", а, значит, и множества $|L^\infty|$, а, следовательно, и множества L^∞.

Кроме объектов k-го ранга, нам понадобится еще рассматривать пары вида $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$, где $\mathfrak{a}$ — объект p-го ранга, а $\mathfrak{b}$ — объект q-го ранга. Множество всевозможных таких пар (при фиксированных p и q) является внешним произведением $[N^{\infty^p}, N^{\infty^q}]$ **). Возьмем какой-нибудь элемент $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ из $[N^{\infty^p}, N^{\infty^q}]$. Объекту p-го ранга $\mathfrak{a}$ по $\varepsilon^{[p]}$ соответствует взаимно-однозначно некоторый номер $n_\mathfrak{a}$. Объекту q-го ранга $\mathfrak{b}$ по $\varepsilon^{[q]}$ соответствует также взаимно-однозначно некоторый номер $n_\mathfrak{b}$. Таким образом, элементам $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ из $[N^{\infty^p}, N^{\infty^q}]$ взаимно-однозначно соответствуют пары $\langle n_\mathfrak{a}, n_\mathfrak{b} \rangle$ из N^2. Назовем подмножество L множества $[N^{\infty^p}, N^{\infty^q}]$ *рекурсивно-перечислимым*, если соответствующее множество $|L|$ «пар номеров» рекурсивно-перечислимо (в смысле ли старого определения, в смысле ли нового — из теоремы 2 следует, что это все равно).

Предикат P на $[N^{\infty^p}, N^{\infty^q}]$ назовем *рекурсивно-перечислимым*, если рекурсивно-перечислимо его множество истинности $\overline{P} \subseteq [N^{\infty^p}, N^{\infty^q}]$.

Пусть P — предикат на $[N^{\infty^{k+1}}, N^{\infty^k}]$, а L — множество в N^{∞^k}. Множество L называется *замкнутым относительно*

*) В соответствии с общим определением (§ 2, п. 1), под L^∞ понимается множество всевозможных объектов $(k+1)$-го ранга, построенных из объектов k-го ранга, входящих в L.

**) Фактически нам понадобится в п. 2 только $[N^{\infty^2}, N^{\infty^1}]$. (См. сноску **) на стр 192.)

предиката P, если, каковы бы ни были объект $(k+1)$-го ранга α и объект k-го ранга β, из $\alpha \in L^\infty$ и $P(\alpha, \beta) = \text{и}$ следует, что $\beta \in L$.

Очевидно, например, что само множество N^{∞^k} замкнуто относительно любого предиката на $[N^{\infty^{k+1}}, N^{\infty^k}]$.

Возьмем, наконец, некоторое множество M в N^{∞^k} и предикат P на $[N^{\infty^{k+1}}, N^{\infty^k}]$. Рассмотрим всевозможные множества L в N^{∞^k}, удовлетворяющие двум условиям:

1) $L \supseteq M$ и 2) L замкнуто относительно предиката P. (1)

Класс таких множеств не пуст, так как, например, множество N^{∞^k} удовлетворяет обоим условиям. Пересечение всех множеств, удовлетворяющих условиям (1), обозначим через $A_{M,P}$. Очевидно, что $A_{M,P}$ также удовлетворяет условиям (1) и что $A_{M,P}$ — «наименьшее» из множеств, удовлетворяющих условиям (1) (если множество L удовлетворяет условиям (1), то $A_{M,P} \subseteq L$). Множество $A_{M,P}$ естественно назвать *замыканием* множества M относительно предиката P.

Теперь, наконец, может быть сформулирована основная лемма, ради которой мы вводили все определения.

Основная лемма. *Если M — рекурсивно-перечислимое множество в N^{∞^k} и P — рекурсивно-перечислимый предикат на $[N^{\infty^{k+1}}, N^{\infty^k}]$, то $A_{M,P}$ — рекурсивно-перечислимое множество в N^{∞^k}.* (Короче: замыкание рекурсивно-перечислимого множества относительно рекурсивно-перечислимого предиката рекурсивно-перечислимо.)

Доказательство. 1) Объект $(k+1)$-го ранга $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \rangle$ назовем *правильным* (относительно M и P), если для любой его компоненты α_i либо 1) $\alpha_i \in M$, либо 2) можно найти такие $j_1, j_2, \ldots, j_q$, меньшие, чем i, что $P(\langle \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_q} \rangle, \alpha_i) = \text{и}$. Обозначим через B множество объектов k-го ранга, каждый из которых является компонентой в каком-нибудь правильном объекте $(k+1)$-го ранга. Докажем, что $A_{M,P} = B$.

Напомним, что $A_{M,P}$ — это пересечение всех множеств в N^{∞^k}, содержащих множество M и замкнутых относительно предиката P. Докажем, что B также обладает этими двумя свойствами. Отсюда будет следовать, что $A_{M,P} \subseteq B$. Очевидно, что $B \supseteq M$, так как любой элемент α из M является компонентой, например, в правильном объекте $(k+1)$-го ранга $\langle\alpha\rangle$. Докажем, что множество B замкнуто относительно предиката P. Пусть $\mathfrak{a} = \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_s\rangle \in B^\infty$, т. е. $\alpha_i \in B$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, и $P(\mathfrak{a}, \beta) = \boldsymbol{u}$. Докажем, что $\beta \in B$. Каждое $\alpha_i \in B$. Значит, каждое α_i является компонентой некоторого правильного объекта $(k+1)$-го ранга $\langle\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \alpha_i\rangle$ (без ограничения общности можно, конечно, считать, что правильный объект $(k+1)$-го ранга, содержащий в качестве компоненты α_i, оканчивается именно объектом α_i). Тогда $\langle\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \alpha_1, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \alpha_2, \ldots, \gamma_{s1}, \gamma_{s2}, \ldots, \alpha_s, \beta\rangle$ — правильный объект $(k+1)$-го ранга, содержащий в качестве компоненты β. Следовательно, $\beta \in B$. Значит, B замкнуто относительно предиката P. Итак, $B \supseteq A_{M,P}$.

Докажем обратное «включение». Возьмем произвольный объект k-го ранга α из B и произвольное множество L, удовлетворяющее условиям (1). Докажем, что $\alpha \in L$. Отсюда будет следовать, что $\alpha \in A_{M,P}$, т. е. что $B \subseteq A_{M,P}$. Так как $\alpha \in B$, α является компонентой некоторого правильного объекта $(k+1)$-го ранга $\mathfrak{a} = \langle\beta_1, \beta_2, \ldots, \alpha\rangle$. Докажем по индукции, что все компоненты объекта $\mathfrak{a}$ принадлежат к L. Из определения правильного объекта ясно, что начинаться он может только с элементов из M. Следовательно, $\beta_1 \in M$. $M \subseteq L$. Значит, $\beta_1 \in L$. Пусть теперь $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l \in L$. Докажем, что $\beta_{l+1} \in L$. По определению правильного объекта либо $\beta_{l+1} \in M$, либо из предыдущих компонент, т. е. из $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ можно составить такой объект $(k+1)$-го ранга $\mathfrak{b}$, что $P(\mathfrak{b}, \beta_{l+1}) = \boldsymbol{u}$. Если $\beta_{l+1} \in M$, то $\beta_{l+1} \in L$. Если же имеет место второй случай, то из предположения индукции следует, что $\mathfrak{b} \in L^\infty$. А тогда из замкнутости множества L относительно предиката P следует, что $\beta_{l+1} \in L$. Итак, $A_{M,P} = B$.

2) До сих пор мы не пользовались рекурсивно-перечислимостью M и P. Докажем теперь, что множество B рекурсивно-перечислимо.

Введем предикат Q на $N: Q(v) = \boldsymbol{u}$, если v — номер (относительно $\varepsilon^{[k+1]}$) какого-нибудь правильного объекта

$(k+1)$-го ранга. Докажем рекурсивно-перечислимость предиката Q. Пусть $Q(v)=\mathfrak{u}$. Тогда v служит номером некоторого правильного объекта $(k+1)$-го ранга $\mathfrak{a}=\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_s\rangle$. Для любой компоненты α_i либо 1) $\alpha_i \in M$, а тогда $\iota_2(v, i) \in |M|$, либо 2) существует такой объект $(k+1)$-го ранга $\mathfrak{b}=\langle\beta_1, \ldots, \beta_t\rangle$, что каждое β_p есть некоторое α_q с $q<i$ и $P(\mathfrak{b}, \alpha_i)=\mathfrak{u}$. На «язык номеров» этот второй случай переводится так: существует такое u (номер объекта $\mathfrak{b}$), что для каждого j, не превосходящего $\iota_1(u)$, число $\iota_2(u, j)$ равно некоторому $\iota_2(v, h)$ при $h<i$ и $\langle u, \iota_2(v, i)\rangle \in |\overline{P}|$. Следовательно,

$$Q(v) \sim \underset{i \leqslant \iota_1(v)-1}{(\forall i)} \{[\iota_2(v, i+1) \in |M|] \vee$$

$$\vee (\exists u) \underset{j \leqslant \iota_1(u)-1}{(\forall j)} (\exists h) ([\iota_2(u, j+1) =$$

$$= \iota_2(v, h)] \& [h < i+1] \& [\langle u, \iota_2(v, i+1)\rangle \in |\overline{P}|])\}.$$

Из рекурсивно-перечислимости M и P, т. е. множества номеров $|M|$ и множества пар номеров $|\overline{P}|$, и теорем 12 из § 5, 6 из § 6, 14 из § 5, 13 из § 5, 16 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость предиката Q.

А теперь легко уже доказать рекурсивно-перечислимость множества B, т. е. рекурсивно-перечислимость множества $|B|$. Ведь объект k-го ранга α тогда и только тогда принадлежит к B, когда существует правильный объект $(k+1)$-го ранга $\mathfrak{a}$, компонентой которого α является. Другими словами, $n \in |B|$ тогда и только тогда, когда существует такое v, что $Q(v)=\mathfrak{u}$ и для некоторого i $\iota_2(v, i)=n$:

$$[n \in |B|] \sim (\exists v)[Q(v) \& (\exists i)(\iota_2(v, i)=n)].$$

Из рекурсивно-перечислимости предиката Q и теорем 12 из § 5, 6 из § 6, 13 из § 5, 14 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость предиката „$n \in |B|$", а, значит, и множества $|B|$, а следовательно, и множества B.

3) Множество B рекурсивно-перечислимо. $A_{M,P}=B$. Значит, и множество $A_{M,P}$ рекурсивно-перечислимо. Основная лемма доказана.

2. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Определение. Функция $F^{(s+1)}$ типа $N^{s+1} \to N$ называется *универсальной для данного класса функций* типа $N^s \to N$, если для любой функции $f^{(s)}$ из этого класса существует такое число n, что для всех $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$ справедливо равенство

$$f(x_1, \ldots, x_s) = F(n, x_1, \ldots, x_s). \tag{1}$$

Число n, для которого выполняется равенство (1), называется при этом *номером функции f относительно нумерации, задаваемой функцией F*, или, короче, относительно функции F *).

Через $\mathscr{P}$ мы обозначили класс всех примитивно-рекурсивных функций. Обозначим через $\mathscr{P}^{(s)}$ класс всех примитивно-рекурсивных функций от s аргументов ($s = 0, 1, 2, \ldots$). Таким образом,

$$\mathscr{P} = \bigcup_{s=0}^{\infty} \mathscr{P}^{(s)}. \tag{2}$$

В этом пункте мы для каждого s построим функцию $\Phi^{(s+1)}$, универсальную для класса $\mathscr{P}^{(s)}$.

---

*) Часто встречается другое понятие универсальной функции. Именно, функция $F^{(s+1)}$ называется универсальной (в новом смысле) для данного класса функций типа $N^s \to N$, если, во-первых, она универсальна в смысле только что сделанного определения и, во-вторых, для любого n функция $f^{(s)}$, определяемая равенством

$$f(x_1, \ldots, x_s) = F(n, x_1, \ldots, x_s),$$

принадлежит к рассматриваемому классу.

(Подчеркнем, что термин «универсальная функция» употребляется в нашей книге в совершенно другом смысле, чем в работах А. А. Маркова [1947, 1949] и на стр. 191 русского издания книги Р. Петер [1951] и стр. 258 русского издания книги С. К. Клини [1952], где говорится об этих работах. Именно, А. А. Марков называет функцию φ типа $N \to N$ универсальной для числа s, если она примитивно-рекурсивна и для всякой обще-рекурсивной функции f типа $N^s \to N$ найдется такая примитивно-рекурсивная функция τ типа $N^{s+1} \to N$, что $f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi((\mu t)[\tau(x_1, \ldots, x_s, t) = 0])$. Наше употребление термина «универсальная функция» совпадает с употреблением, встречающимся, например, у А. Н. Колмогорова [1954].)

Сам факт существования функции, универсальной для класса $\mathscr{R}^{(s)}$, очевиден. Действительно, функций в $\mathscr{R}^{(s)}$ счетное множество (следствие 1 теоремы 2 из § 4). Значит, существует отображение N на $\mathscr{R}^{(s)}$, нумерующее (может быть, с повторениями: одна функция из $\mathscr{R}^{(s)}$ может оказаться образом нескольких чисел из N, может иметь несколько номеров) функции из $\mathscr{R}^{(s)}$. Возьмем какое-нибудь отображение-нумерацию. Определим теперь, используя эту нумерацию, функцию $\Phi^{(s+1)}$ следующим образом: $\Phi(n_0, x_1, \ldots, x_s)$ равно значению функции с номером n_0 (относительно фиксированной нами нумерации функций из $\mathscr{R}^{(s)}$) на кортеже $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$. Так определенная функция $\Phi^{(s+1)}$ тривиальным образом является универсальной для функций из $\mathscr{R}^{(s)}$. Но так неэффективно (существует (!) отображение, возьмем какое-нибудь отображение) построенная функция нас не устроит ввиду того, что такое построение не позволяет получить содержательных следствий.

Теорема 4. *Для любого $s \geqslant 0$ существует* ***обще-рекурсивная*** *функция $\Phi^{(s+1)}$, универсальная для класса $\mathscr{R}^{(s)}$ примитивно-рекурсивных функций от s аргументов* *).

Замечание 1. Для класса $\mathscr{R}^{(0)}$ универсальной обще-рекурсивной функцией является функция $I_1^{(1)}$.

Замечание 2. Мы построим сразу, одновременно универсальные обще-рекурсивные функции для всех классов $\mathscr{R}^{(s)}$ $(s = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Доказательство. Доказательство будет длинным. Мы расчленим его на отдельные этапы **). Основных этапов будет три: 0. Предварительные замечания (стр. 205); 1. Построение универсальных функций (стр. 205—213); 2. Доказательство обще-рекурсивности построенных функций (стр. 213—235).

---

*) Эта теорема впервые была доказана Р. Петер ([1935], § 2 и [1957], § 11, пп. 3—7). Проводимое ниже построение универсальной функции следует в основных чертах построению Р. Петер.

**) Подробный план доказательства приведен после его завершения на стр. 235.

0. Предварительные замечания

Фиксируем какие-нибудь отображения $\varepsilon^{[1]}$, $\varepsilon^{[2]}$, определяемые (в смысле п. 1) такими частично-рекурсивными ι_1, ι_2, что

$$\iota_2(t, i) < t \quad \text{для} \quad t > 0 \quad \text{и} \quad i: 1 \leqslant i \leqslant \iota_1(t). \tag{3}$$

Такие отображения существуют по следствию 2 из теоремы 1. Эти отображения $\varepsilon^{[1]}$, $\varepsilon^{[2]}$ и функции ι_1, ι_2 нам будут нужны на всех этапах доказательства.

1. Построение универсальных функций

Этот этап расчленяется в свою очередь на четыре следующих этапа: 1. 0. Описание таблицы (стр. 205—206); 1.1. Заполнение таблицы (стр. 206—211); 1.2. Доказательство «универсальности» заполненой таблицы (стр. 211—212); 1.3. Построение функций $\Phi^{(s+1)}$ (стр. 212—213).

1.0. Описание таблицы

Прежде всего построим некоторые конкретные отображения натурального ряда N на каждый из классов $\mathscr{R}^{(s)}$.

Составим таблицу с двумя входами, в которой на пересечении s-го столбца и n-й строки поместим символ $f_n^{(s)}$ ($s, n = 0, 1, 2, \ldots$; см. табл. 1). Каждому символу $f_n^{(s)}$ мы поставим в соответствие некоторую примитивно-рекурсивную функцию из $\mathscr{R}^{(s)}$ так, что в s-м столбце окажутся все функции из $\mathscr{R}^{(s)}$. Тем самым в s-м столбце мы получим отображение N на $\mathscr{R}^{(s)}$. Взаимно-однозначности соответствия между функциями из $\mathscr{R}^{(s)}$ и символами $f_n^{(s)}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) мы добиваться при этом не собираемся: каждому символу $f_n^{(s)}$ мы поставим в соответствие одну, вполне определенную функцию из $\mathscr{R}^{(s)}$, и каждой функции из $\mathscr{R}^{(s)}$ будет соответствовать хотя бы один символ в s-м столбце, но разным символам s-го столбца будет очень часто соответствовать одна и та же функция из $\mathscr{R}^{(s)}$. Пересчет функций из $\mathscr{R}$ будет «с повторениями».

Таблица 1

$n \backslash s$	0	1	2	...	s	...
0	$f_0^{(0)}$	$f_0^{(1)}$	$f_0^{(2)}$		$f_0^{(s)}$	
1	$f_1^{(0)}$	$f_1^{(1)}$	$f_1^{(2)}$		$f_1^{(s)}$	
2	$f_2^{(0)}$	$f_2^{(1)}$	$f_2^{(2)}$		$f_2^{(s)}$	
⋮						
n	$f_n^{(0)}$	$f_n^{(1)}$	$f_n^{(2)}$		$f_n^{(s)}$	
⋮						

1.1. Заполнение таблицы

Представим себе, что у нас таблица еще пустая (см. табл. 2), а рядом сложены символы $f_n^{(s)}$ $(s,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$. Мы должны «заполнить» таблицу, вписать в каждую клетку таблицы соответствующий символ $f_n^{(s)}$, но только после того, как мы поставим ему (символу $f_n^{(s)}$) в соответствие некоторую функцию из $\mathscr{P}^{(s)}$. Итак, начнем ставить в соответствие символам $f_n^{(s)}$ функции из $\mathscr{P}^{(s)}$ и заполнять таблицу.

1.1.0. Введение предикатов W

Определим на N^2 четыре предиката: W_1, W_2, W_3, W_4.

$$W_1(n,\ s) \sim [n \leqslant s+1], \tag{4}$$

$$W_2(n,\ s) \sim [n > s+1] \,\&\, [\iota_2(n,\ 1) = 0] \,\&\, [\iota_1(n) \geqslant 4], \tag{5}$$

$$W_3(n,\ s) \sim [n > s+1] \,\&\, [\iota_2(n,\ 1) = 1] \,\&\, [\iota_1(n) \geqslant 3] \,\&\, [s \geqslant 1], \tag{6}$$

$$W_4(n,\ s) \sim \overline{W}_1(n,\ s) \,\&\, \overline{W}_2(n, s) \,\&\, \overline{W}_3(n,\ s). \tag{7}$$

Таблица 2

$n \backslash s$	0	1	2	...	s	...
0						
1						
2						
⋮						
n						
⋮						

Легко видеть, что для любых n и s истинен один и только один из этих четырех предикатов.

Например, если $W_2(n, s) = \textit{и}$, то $\iota_2(n, 1) = 0$ и, значит, $W_3(n, s) = \textit{л}$ (именно для этого и введены соответствующие конъюнктивные члены в определения предикатов W_2, W_3).

1.1.1. Случай W_1

Заполним на первом шаге клетки таблицы, соответствующие $\overline{W_1}$, т. е. те клетки, для которых $n \leqslant s+1$.

Если $n=0$ (а тогда при любом s $W_1(0, s) = \textit{и}$), положим

$$f_0^{(s)} = 0^{(s)}. \tag{8}$$

Если $1 \leqslant n \leqslant s$ (а тогда $W_1(n, s) = \textit{и}$), положим

$$f_n^{(s)} = I_n^{(s)}. \tag{9}$$

Если $n = s + 1$ (а тогда $W_1(n, s) = u$) и $s \geqslant 1$, положим

$$f_n^{(s)} = f_{s+1}^{(s)} = \lambda_1^{(s)}. \tag{10}$$

И, наконец, при $s = 0$ и $n = 1$ ($W_1(1, 0) = u$), положим

$$f_n^{(s)} = f_1^{(0)} = 1^{(0)}. \tag{11}$$

Условиями (8) – (11) часть таблицы, соответствующая $\overline{W_1}$, заполнилась. Таблица приняла вид, изображенный на табл. 3 или табл. 4.

Таблица 3

$n \backslash s$	0	1	2	3	4	...
0	$f_0^{(0)}$	$f_0^{(1)}$	$f_0^{(2)}$	$f_0^{(3)}$	$f_0^{(4)}$	
1	$f_1^{(0)}$	$f_1^{(1)}$	$f_1^{(2)}$	$f_1^{(3)}$	$f_1^{(4)}$	
2		$f_2^{(1)}$	$f_2^{(2)}$	$f_2^{(3)}$	$f_2^{(4)}$	
3			$f_3^{(2)}$	$f_3^{(3)}$	$f_3^{(4)}$	
4				$f_4^{(3)}$	$f_4^{(4)}$	
⋮						

Из функций, уже попавших в таблицу, при помощи операций регулярной подстановки и примитивной рекурсии можно получить любую примитивно-рекурсивную функцию (см. определение примитивно-рекурсивной функции на стр. 89).

Продолжим заполнение таблицы. Заполнять таблицу мы дальше будем индуктивно, образуя каждый раз функцию из выше лежащих функций, т. е. из уже имеющихся в таблице.

Таблица 4

s / n	0	1	2	3	4	...
0	$0^{(0)}$	$0^{(1)}$	$0^{(2)}$	$0^{(3)}$	$0^{(4)}$	
1	$1^{(0)}$	$I_1^{(1)}$	$I_1^{(2)}$	$I_1^{(3)}$	$I_1^{(4)}$	
2		$\lambda_1^{(1)}$	$I_2^{(2)}$	$I_2^{(3)}$	$I_2^{(4)}$	
3			$\lambda_1^{(2)}$	$I_3^{(3)}$	$I_3^{(4)}$	
4				$\lambda_1^{(3)}$	$I_4^{(4)}$	
⋮						

1.1.2. Случай W_2

Если $W_2(n, s) = \mathfrak{u}$, то функцию, соответствующую такому $f_n^{(s)}$, мы построим с помощью операции регулярной подстановки из функций выше лежащих рядов.

Возьмем объект первого ранга, соответствующий — по фиксированному нами отображению $\varepsilon^{[1]}$ — рассматриваемому нами числу n. Этот объект по определению предиката W_2 имеет вид:

$$\varepsilon^{[1]}(n) = \langle 0, b_0, b_1, \ldots, b_k, d \rangle, \quad \text{где} \quad k \geqslant 1. \tag{12}$$

Так как $W_2(n, s) = \mathfrak{u}$, $n > 0$. По (3)

$$b_i = \iota_2(n, i+2) < n \quad (i = 0, 1, \ldots, k). \tag{13}$$

Положим

$$f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = f_{b_0}^{(k)}(f_{b_1}^{(s)}(x_1, \ldots, x_s), \ldots, f_{b_k}^{(s)}(x_1, \ldots, x_s)). \tag{14}$$

Так как $b_i < n$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$, все функции f_{b_i} находятся в таблице выше функции f_n и, значит, по индуктивному предположению, уже попали в таблицу. Поскольку $k \geqslant 1$, регулярная подстановка в функцию $f_{b_0}^{(k)}$ возможна. Роль последней компоненты d, т. е. условия $\iota_1(n) \geqslant 4$, в определении предиката W_2 будет выяснена позднее.

Заметим, что в рассматриваемом случае ($W_2(n, s) = u$) и в наших обозначениях (см. (12))

$$\iota_1(n) = k + 3 \text{ или } k = \iota_1(n) - 3. \tag{15}$$

1.1.3. Случай W_3

Если $W_3(n, s) = u$, то функцию, соответствующую такому $f_n^{(s)}$, мы получим при помощи операций примитивной рекурсии из функций вышележащих рядов.

Объект первого ранга, соответствующий — по $\varepsilon^{[1]}$ — рассматриваемому n, на этот раз, согласно определению предиката W_3, можно записать в виде

$$\varepsilon^{[1]}(n) = \langle 1, c_1, c_2, d_1, \ldots, d_k \rangle, \text{ где } k \geqslant 0. \tag{16}$$

В частности, объект $\varepsilon^{[1]}(n)$ может иметь вид $\langle 1, c_1 c_2 \rangle$ ($k = 0$). Так как $W_3(n, s) = u$, $n > 0$. Следовательно, по (3) $c_i = \iota_2(n, i+1) < n$ ($i = 1, 2$). Так как $W_3(n, s) = u$, $s \geqslant 1$. Значит, $s - 1 \geqslant 0$. Функцию, соответствующую $f_n^{(s)}$, мы построим по схеме примитивной рекурсии из функций $f_{c_1}^{(s-1)}$ и $f_{c_2}^{(s+1)}$. Положим

$$\left\{ \begin{aligned} & f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, 0) = f_{c_1}^{(s-1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}), && (17) \\ & f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s + 1) = \\ & \qquad = f_{c_2}^{(s+1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_s)). && (18) \end{aligned} \right.$$

Так как $c_i < n$ ($i = 1, 2$), функции f_{c_i} ($i = 1, 2$) находятся в таблице выше функции $f_n^{(s)}$. Так как $s - 1 \geqslant 0$, определение (17) вполне корректно — в таблице есть $(s-1)$-й столбец и функция $f_{c_1}^{(s-1)}$.

1.1.4. Случай W_4

Если $W_4(n, s) = u$, положим

$$f_n^{(s)} = 0^{(s)}. \tag{19}$$

Заполнение таблицы закончено.

1.2. Доказательство «универсальности» заполненной таблицы.

Очевидно, что в таблицу попали только примитивно-рекурсивные функции (мы заполняли таблицу, исходя из функций $0^{(s)}$, $I_n^{(s)}$, $\lambda_1^{(s)}$ и $1^{(0)}$, при помощи операций регулярной подстановки и примитивной рекурсии). Очевидно также, что в s-й столбец попали только функции из $\mathscr{P}^{(s)}$ (см. (8)—(11), (14), (17)—(18), (19)).

Докажем, что все примитивно-рекурсивные функции попали в таблицу. Для того, чтобы это доказать, достаточно показать, что функции, попавшие в таблицу, составляют примитивно-рекурсивно замкнутый класс.

Прежде всего, в таблице имеются функции $0^{(0)}$, $\lambda_1^{(1)}$ и все функции $I_n^{(s)}$ ((8)—(10)). Докажем замкнутость таблицы относительно операций регулярной подстановки и примитивной рекурсии.

Пусть функции $f_{b_0}^{(k)}, f_{b_1}^{(s)}, \ldots, f_{b_k}^{(s)}$ $(k \geqslant 1)$ уже попали в таблицу. Докажем, что функция $g^{(s)}$:

$$g(x_1, \ldots, x_s) = f_{b_0}^{(k)}(f_{b_1}^{(s)}(x_1, \ldots, x_s), \ldots, f_{b_k}^{(s)}(x_1, \ldots, x_s))$$

также попала в таблицу. Из объектов первого ранга вида $\langle 0, b_0, b_1, \ldots, b_k, d\rangle$ $(k \geqslant 1)$ выберем, меняя d, такой объект, номер n которого будет удовлетворять условию $n > s+1$. Такой объект первого ранга найдется, так как таких n, что $n \leqslant s+1$ — только конечное число (ведь s у нас фиксировано до этого перебора объектов первого ранга). Возьмем любой из таких объектов (их будет бесконечно много!). Для его номера n и данного нам s будет выполняться условие $W_2(n, s) = u$. А тогда по (14) $f_n^{(s)} = g$ и, следовательно, функция g попала в таблицу в клетку с этими n и s.

Пусть теперь функции $f_{c_1}^{(s-1)}$ и $f_{c_2}^{(s+1)}$ уже попали в таблицу (следовательно, $s \geqslant 1$). Определим примитивной рекурсией через функции $f_{c_1}^{(s-1)}$ и $f_{c_2}^{(s+1)}$ функцию $g^{(s)}$:

$$\begin{cases} g(x_1, \ldots, x_{s-1}, 0) = f_{c_1}^{(s-1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}), \\ g(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s + 1) = f_{c_2}^{(s+1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, g(x_1, \ldots, x_s)) \end{cases} \tag{20}$$

Покажем, что функция g попадет в какую-нибудь клетку. Из объектов первого ранга вида $\langle 1, c_1, c_2, d_1, \ldots, d_k\rangle$ $(k \geqslant 0)$ выберем, меняя $d_1, \ldots, d_k$, любой такой объект (их будет бесконечно много!), номер n которого удовлетворяет условию: $n > s+1$ (в частности, может случиться, что уже объект $\langle 1, c_1, c_2\rangle$ будет удовлетворять этому условию). Для этого n и данного нам s будет выполняться условие $W_3(n, s) = \boldsymbol{u}$. А тогда, сравнивая (17) — (18) с (20), получаем: $g = f_n^{(s)}$. Следовательно, функция g попадет в таблицу в клетку с этими n и s.

Итак, в таблице находятся все функции из $\mathscr{R}$ и только они. В частности, в s-м столбце таблицы занумерованы $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ все функции из $\mathscr{R}^{(s)}$ и только они (из доказательства замкнутости таблицы видно, что очень многие функции имеют по бесконечному числу номеров). Мы получили в s-м столбце таблицы отображение N на $\mathscr{R}^{(s)}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$.

1.3. Построение функций $\Phi^{(s+1)}$

Фиксируем некоторое натуральное t. Получить функцию $\Phi^{(t+1)}$, универсальную для класса $\mathscr{R}^{(t)}$, мы теперь можем очень просто:

$$\Phi(n, x_1, \ldots, x_t) = f_n^{(t)}(x_1, \ldots, x_t). \tag{21}$$

Для любой функции $g^{(t)} \in \mathscr{R}^{(t)}$ найдется такое n, что $g_n^{(t)} = f_n^{(t)}$. Для этого n и любого $\langle x_1, \ldots, x_t\rangle$

$$\Phi(n, x_1, \ldots, x_t) = f_n^{(t)}(x_1, \ldots, x_t) = g(x_1, \ldots, x_t)\ ^{*)}.$$

*) Ср. с рассуждениями на стр. 204.

Так построенная функция $\Phi^{(l+1)}$ интуитивно-вычислима и всюду определена. Действительно. Возьмем любое n и $\langle x_1, \ldots, x_l \rangle$ (l у нас фиксировано заранее). Применяя правила (8) — (11), (14), (17) - (18), (19), по l и n найдем примитивно-рекурсивную (и значит, интуитивно-вычислимую и всюду определенную) функцию $f_n^{(l)}$. А затем вычислим

$$\Phi(n, x_1, \ldots, x_l) = f_n^{(l)}(x_1, \ldots, x_l).$$

Интуитивная вычислимость функции $\Phi^{(l+1)}$ очевидна. Доказать же ее обще-рекурсивность — технически — гораздо труднее.

2. Доказательство обще-рекурсивности построенных функций

Докажем, что определенная равенством (21) функция $\Phi^{(l+1)}$ обще-рекурсивна. Этим доказательство теоремы будет закончено.

2.0. Переход к графику

Поскольку таблица у нас заполнена целиком и заполнена всюду определенными (примитивно-рекурсивными) функциями, ясно, что функция $\Phi^{(l+1)}$ всюду определена. Докажем, что график G_Φ функции $\Phi^{(l+1)}$ рекурсивно-перечислим. Из теоремы о графике (теорема 3 из § 6) и всюду-определенности функции $\Phi^{(l+1)}$ будет следовать ее обще-рекурсивность. Все остальное изложение будет посвящено доказательству рекурсивно-перечислимости графика G_Φ функции $\Phi^{(l+1)}$.

2.1. Доказательство рекурсивно-перечислимости графика

Это доказательство мы проведем в два этапа: 2.1.0. Сведение к множеству F (стр. 214) и 2.1.1. Доказательство рекурсивно-перечислимости множества F (стр. 214 — 235),

2.1.0. Сведение к множеству F

График G_Φ есть множество в N^{t+2} таких кортежей $\langle n, x_1, \ldots, x_t, y\rangle$, что

$$\Phi(n, x_1, \ldots, x_t) = f_n^{(t)}(x_1, \ldots, x_t) = y.$$

Рассмотрим множество объектов первого ранга вида $\langle n, s, x_1, \ldots, x_s, y\rangle$ таких, что $f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = y$. Обозначим множество всех таких объектов через F. Множество F не лежит ни в каком N^s, так как s не фиксировано и объекты из F имеют разную длину. Например, в F содержатся объекты вида $\langle n, 0, y\rangle$ такие, что $f_n^{(0)} = y\ (s = 0)$, объекты вида $\langle n, 1, x, y\rangle$ такие, что $f_n^{(1)}(x) = y\ (s = 1)$ и т. д. Объектов первого ранга длины 0,1 и 2 в F, очевидно, нет. Справедливо равенство

$$G_\Phi = \text{пр}_{1, 3, 4, \ldots, t+3}(F \cap N^{t+3}). \tag{22}$$

Если мы докажем рекурсивно-перечислимость множества F, то из (22) и теорем 2 из § 5, 4 из § 5 и 3 из § 5 будет следовать требуемая рекурсивно-перечислимость графика G_Φ.

Более подробно. Допустим, что множество F рекурсивно-перечислимо, т. е. множество его номеров (относительно $\varepsilon^{[1]}$) рекурсивно-перечислимо. Множество N^{t+3} рекурсивно-перечислимо в смысле определения на стр. 136; следовательно, в силу теоремы 2, множество его номеров (относительно $\varepsilon^{[1]}$) рекурсивно-перечислимо. Тогда, по теореме 4 из § 5, рекурсивно-перечислимо и пересечение двух указанных множеств номеров, которое есть не что иное, как множество номеров множества $F \cap N^{t+3}$. Снова применяя теорему 2, получаем, что рекурсивно-перечислимо (в смысле определения на стр. 136) и само множество $F \cap N^{t+3}$. А тогда по теореме 3 из § 5 рекурсивно-перечислимо и множество G_Φ.

2.1.1. Доказательство рекурсивно-перечислимости множества F

Все свелось к доказательству рекурсивно-перечислимости множества объектов первого ранга F. Вот для этого-то нам и понадобятся объекты второго ранга и та теория, которую мы строили в п. 1. Рекурсивно-перечислимость множества F мы докажем при помощи Основной леммы из п. 1. Мы построим в N^∞ такое рекурсивно-перечислимое множество M и зададим на $[N^{\infty^2}, N^\infty]$ такой рекурсивно-перечислимый предикат P, что окажется $F = A_{M,\,P}$. Тогда по Основной лемме F будет рекурсивно-перечислимым.

2.1.1.0. План доказательства

Итак, дальнейший план доказательства будет такой: 1) мы построим в N^∞ множество M и докажем, что оно рекурсивно-перечислимо (стр. 215 — 216), 2) мы определим на $[N^{\infty^2}, N^\infty]$ предикат P и докажем, что он рекурсивно-перечислим (стр. 216 — 230), 3) мы докажем, что $F = A_{M,\,P}$ (стр. 230 — 235). Этим — по Основной лемме — все будет доказано. Приступим к выполнению этого плана.

2.1.1.1. Построение множества M

Построим в N^∞ множество M. В множество M мы включим те (и только те) элементы множества F, которые соответствуют первому этапу в заполнении таблицы (см. (8) — (11)). Точнее: через M мы обозначим множество тех объектов, которые имеют один из четырех видов:

1) Объекты первого ранга вида $\langle 0, s, x_1, \ldots, x_s, 0\rangle$, где s и x_i $(i = 1, \ldots, s)$ — любые (ср. с (8)). В частности, при $s = 0$ получается только один объект: $\langle 0, 0, 0\rangle$.

2) Объекты первого ранга $\langle n, s, x_1, \ldots, x_s, x_n\rangle$, где n и s связаны условием: $1 \leqslant n \leqslant s$, а x_i $(i = 1, \ldots, s)$ — любые (ср. с (9)).

3) Объекты первого ранга вида $\langle s+1, s, x_1, \ldots \ldots, x_s, x_1 + 1\rangle$, где $s \geqslant 1$, а x_i $(i = 1, \ldots, s)$ — любые (ср. с (10)).

4) Один объект первого ранга: $\langle 1, 0, 1\rangle$ (ср. с (11)).

Заметим сразу же, что

$$M \subseteq F. \tag{23}$$

Докажем, что M — рекурсивно-перечислимое множество в N^∞, т. е. что рекурсивно-перечислимо множество $|M|$

номеров объектов из M.

$$(n \in |M|) \sim Q_1(n) \vee Q_2(n) \vee Q_3(n) \vee Q_4(n), \qquad (24)$$

где $Q_1 - Q_4$ — предикаты, определяемые равенствами:

$$Q_1(n) \sim [\iota_1(n) = \iota_2(n, 2) + 3] \mathbin{\&} [\iota_2(n, 1) = 0] \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} [\iota_2(n, \iota_1(n)) = 0],$$

$$Q_2(n) \sim [\iota_1(n) = \iota_2(n, 2) + 3] \mathbin{\&} [\iota_2(n, \iota_1(n)) = \\ = \iota_2(n, \iota_2(n, 1) + 2)] \mathbin{\&} [\iota_2(n, 1) \geqslant 1] \mathbin{\&} [\iota_2(n, 1) \leqslant \iota_2(n, 2)],$$

$$Q_3(n) \sim [\iota_1(n) = \iota_2(n, 2) + 3] \mathbin{\&} [\iota_2(n, 1) = \iota_2(n, 2) + 1] \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} [\iota_2(n, \iota_1(n)) = \iota_2(n, 3) + 1] \mathbin{\&} [\iota_2(n, 2) \geqslant 1],$$

$$Q_4(n) \sim [\iota_1(n) = 3] \mathbin{\&} [\iota_2(n, 1) = 1] \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} [\iota_2(n, 2) = 0] \mathbin{\&} [\iota_2(n, 3) = 1].$$

По теоремам 12 из § 5, 6 из § 6 и 14 из § 5 предикаты $Q_1 - Q_4$ рекурсивно-перечислимы. По (24) и теореме 14 из § 5 тогда рекурсивно-перечислим и предикат „$n \in M$“, а значит, и множество $|M|$, а следовательно, и множество M.

Итак, мы построили в N^∞ рекурсивно-перечислимое множество M, для которого вдобавок выполняется (23).

2.1.1.2. Определение предиката P.

Определим теперь на $[N^{\infty^2}, N^\infty]$ предикат P. Предикат P мы определим как дизъюнкцию трех предикатов: P_2, P_3, P_4, следуя второму, третьему и четвертому шагу в заполнении таблицы

$$P(\alpha, \beta) = P_2(\alpha, \beta) \vee P_3(\alpha, \beta) \vee P_4(\alpha, \beta).$$

Учитывая два равенства в схеме примитивной рекурсии ((17) и (18)), мы предикат P_3 тоже определим как дизъюнкцию двух предикатов: P_3' и P_3''.

$$P_3(\alpha, \beta) = P_3'(\alpha, \beta) \vee P_3''(\alpha, \beta).$$

Так что окончательно будет:

$$P(\alpha, \beta) = P_2(\alpha, \beta) \vee P_3'(\alpha, \beta) \vee P_3''(\alpha, \beta) \vee P_4(\alpha, \beta). \qquad (25)$$

Определим, наконец, четыре дизъюнктивных члена, задающих предикат P по (25).

2.1.1.2А. Определение предиката P_2

Предикат P_2 на $[N^{\infty^2},\ N^{\infty}]$ определяется так:

$$P_2(\alpha, \beta) \sim [\alpha \text{ имеет вид } \langle\langle b_0, k, u_1, \ldots, u_k, y\rangle,$$
$$\langle b_1, s, x_1, \ldots, x_s, u_1\rangle, \ldots, \langle b_k, s, x_1, \ldots, x_s, u_k\rangle\rangle] \,\&$$
$$\& \, [\beta \text{ имеет вид } \langle n, s, x_1, \ldots, x_s, y\rangle] \,\&$$
$$\& \, (\underset{i \leqslant k}{\forall i})\, [b_i = \iota_2(n, i+2)] \,\&\, [\iota_1(n) = k+3] \,\&\, W_2(n, s). \qquad (26)$$

Поясним, что означают слова «имеет вид», и одновременно убедимся, что определение предиката P_2 корректно, т. е. что для любого объекта второго ранга α и для любого объекта первого ранга β из определения (26) однозначно вытекает:

$$P_2(\alpha, \beta) = \boldsymbol{u} \text{ или } P_2(\alpha, \beta) = \boldsymbol{л}.$$

Покажем это, дав определение предиката P_2 в другой форме.

Пусть мы имеем некоторый объект второго ранга α и некоторый объект первого ранга β. Мы будем считать, что $P_2(\alpha, \beta) = \boldsymbol{u}$ тогда и только тогда, когда между длиной объекта α, длиной объекта β, длинами компонент объекта α (как объектов первого ранга), координатами*) компонент объекта α и координатами объекта β выполняются следующие тринадцать соотношений:

1) Длина объекта β не меньше трех.

Обозначим длину объекта β через $s+3$. Из первого условия следует, что $s \geqslant 0$.

2) Вторая координата объекта β равна s.

Обозначим первую координату объекта β через n, последнюю, $(s+3)$-ю координату — через y. Обозначим коор-

---

*) В дальнейшем доказательстве мы будем все время одновременно иметь дело с объектами первого и второго ранга. Для облегчения чтения мы условимся объекты первого ранга, из которых построен объект второго ранга $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\rangle$, называть *компонентами* объекта α, а объекты нулевого ранга, из которых строится объект первого ранга $\alpha = \langle x_1, x_2, \ldots, x_s\rangle$, называть *координатами* объекта α. Чтобы задать объект второго ранга α, очевидно, достаточно задать координаты его компонент.

динаты объекта β — с третьей по предпоследнюю, если такие существуют — через $x_1, x_2, \ldots, x_s$ $(s \geqslant 0)$. Итак, при наших обозначениях и условиях $\beta = \langle n, s, x_1, \ldots, x_s, y\rangle$. В частности, если $s = 0$, $\beta = \langle n, 0, y\rangle$.

3) Длина объекта α не меньше двух.

Обозначим длину объекта α через $k+1$. Из третьего условия следует, что $k \geqslant 1$.

4) Длина первой компоненты объекта α равна $k+3$.

Поскольку $k \geqslant 1$, $k+3 \geqslant 4$.

5) Вторая координата первой компоненты объекта α равна k.

6) Последняя, $(k+3)$-я координата первой компоненты объекта α равна y.

7) Длины всех компонент объекта α, начиная со второй, равны $s+3$.

Поскольку $s \geqslant 0$, $s+3 \geqslant 3$.

Обозначим первую координату $(i+1)$-й компоненты объекта α через b_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$. Обозначим координаты первой компоненты объекта α — с третьей по предпоследнюю — через $u_1, \ldots, u_k$. Итак, при наших обозначениях и условиях первая компонента объекта α равна $\langle b_0, k, u_1, \ldots, u_k, y\rangle$. В частности, если $k = 1$, она равна $\langle b_0, k, u_1, y\rangle$.

8) Вторые координаты всех компонент объекта α, начиная со второй, равны s.

9) Последняя, $(s+3)$-я координата $(i+1)$-й компоненты объекта α равна u_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Мы обозначили уже первую координату и наложили условия на вторую и последнюю, $(s+3)$-ю координату всех компонент объекта α, начиная со второй. Остались еще не определенными s координат (с третьей по предпоследнюю) каждой из этих компонент $(s \geqslant 0)$.

10) Для каждой из компонент объекта α, начиная со второй, $(j+2)$-я координата равна x_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$.

Окончательно, при наших обозначениях и условиях

$$\alpha = \langle\langle b_0, k, u_1, \ldots, u_k, y\rangle, \langle b_1, s, x_1, \ldots, x_s, u_1\rangle, \ldots$$
$$\ldots, \langle b_k, s, x_1, \ldots, x_s, u_k\rangle\rangle.$$

Если $k=1$, $\alpha = \langle\langle b_0, 1, u_1, y\rangle, \langle b_1, s, x_1, \ldots, x_s, u_1\rangle\rangle$.

Если $k=1$ и $s=0$, $\mathfrak{a}=\langle\langle b_0, 1, u_1, y\rangle, \langle b_1, 0, u_1\rangle\rangle$.

$$11)\qquad W_2(n, s)=\boldsymbol{u},$$

$$12)\qquad \iota_1(n)=k+3,$$

$$13)\qquad (\forall i)_{i\leqslant k}\ [\iota_2(n, i+2)=b_i].$$

Докажем сразу же, что предикат P_2 рекурсивно-перечислим, т. е. что рекурсивно-перечислимо его множество истинности $\overline{P_2}\subseteq[N^{\infty^2}, N^{\infty}]$, т. е. рекурсивно-перечислимо множество $|\overline{P_2}|\subseteq N^2$ «пар номеров» $\langle a, b\rangle$ таких, что для объекта второго ранга $\mathfrak{a}$, соответствующего — по $\varepsilon^{[2]}$ — числу a, и для объекта первого ранга β, соответствующего — по $\varepsilon^{[1]}$ — числу b, выполняется $P_2(\mathfrak{a}, \beta)=\boldsymbol{u}$. Для того чтобы доказать рекурсивно-перечислимость множества $|\overline{P_2}|$, нам просто нужно будет выразить на «языке номеров», на «языке функций ι_1, ι_2» тринадцать условий, определяющих предикат P_2.

Напомним, что для $t>0$ значение $\iota_1(t)$ равно длине объекта $\varepsilon^{[k]}(t)$ $(k=1, 2, \ldots)$, а для $t>0$ и $i: 1\leqslant i\leqslant \iota_1(t)$ — значение $\iota_2(t, i)$ равно номеру — относительно $\varepsilon^{[k-1]}$ — i-й компоненты объекта $\varepsilon^{[k]}(t)$ $(k=1, 2, \ldots$ $\ldots, \varepsilon^{[0]}(l)=l)$.

Запишем сначала на «языке функций ι_1, ι_2» то, что мы обозначили.

Если a — номер объекта $\mathfrak{a}$ при $\varepsilon^{[2]}$, а b — номер объекта β при $\varepsilon^{[1]}$, то

$$s=\iota_1(b)-3,$$

$$n=\iota_2(b, 1),$$

$$y=\iota_2(b, \iota_1(b)),$$

$$x_i=\iota_2(b, i+2)\ (i=1, 2, \ldots, s),$$

$$k=\iota_1(a)-1,$$

$$b_i=\iota_2(\iota_2(a, i+1), 1)\ (i=0, 1, \ldots, k),$$

$$u_i=\iota_2(\iota_2(a, 1), i+2)\ (i=1, 2, \ldots, k).$$

А теперь, записывая подряд на «языке функций ι_1, ι_2»

тринадцать условий, определяющих предикат P_2, получим:

$$
\begin{gathered}
(\langle a, b\rangle \in |\overline{P_2}|) \sim [\iota_1(b) \geqslant 3] \,\& \\
\& \,[\iota_2(b, 2) = \iota_1(b) - 3] \,\&\, [\iota_1(a) \geqslant 2] \,\& \\
\& \,[\iota_1(\iota_2(a, 1)) = \iota_1(a) + 2] \,\&\, [\iota_2(\iota_2(a, 1), 2) = \iota_1(a) - 1] \,\& \\
\& \,[\iota_2(\iota_2(a, 1), \iota_1(\iota_2(a, 1))) = \iota_2(b, \iota_1(b))] \,\& \\
\& \underset{i \leqslant \iota_1(a)-2}{(\forall i)} [\iota_1(\iota_2(a, i+2)) = \iota_1(b)] \,\& \\
\& \underset{i \leqslant \iota_1(a)-2}{(\forall i)} [\iota_2(\iota_2(a, i+2), 2) = \iota_1(b) - 3] \,\& \\
\& \underset{i \leqslant \iota_1(a)-2}{(\forall i)} [\iota_2(\iota_2(a, i+2), \iota_1(\iota_2(a, i+2))) = \iota_2(\iota_2(a, 1), \\
i+3)] \,\& \\
\& \underset{i \leqslant \iota_1(a)-2}{(\forall i)} \underset{j < \iota_1(b)-3}{(\forall j)} [\iota_2(\iota_2(a, i+2), j+3) = \iota_2(b, j+3)] \,\& \\
\& \, W_2(\iota_2(b, 1), \iota_1(b) - 3) \,\&\, [\iota_1(\iota_2(b, 1)) = \iota_1(a) + 2] \,\& \\
\& \underset{i \leqslant \iota_1(a)-1}{(\forall i)} [\iota_2(\iota_2(b, 1), i+2) = \iota_2(\iota_2(a, i+1), 1)]. \quad (27)
\end{gathered}
$$

Из рекурсивно-перечислимости предиката W_2 (теоремы 12 из § 5, 6 из § 6 и 14 из § 5), теорем 12 из § 5, 6 из § 6, 16 из § 5, 14 из § 5 и (27) вытекает рекурсивно-перечислимость предиката „$\langle a, b\rangle \in |\overline{P_2}|$“, а значит, и множества $|\overline{P_2}|$, а следовательно, и предиката P_2.

Чтобы не возвращаться потом к предикату P_2, покажем тут же, в качестве заготовки к третьему пункту нашего плана (см. план доказательства на стр. 215), что множество F замкнуто относительно предиката P_2.

Пусть 1) для некоторого объекта второго ранга $\mathfrak{a}$ и некоторого объекта первого ранга β значение $P_2(\mathfrak{a}, \beta)$ равно $\boldsymbol{u}$, т. е.

a) $\mathfrak{a}$ имеет вид

$$
\begin{gathered}
\langle\langle b_0, k, u_1, \ldots, u_k, y\rangle, \langle b_1, s, x_1, \ldots, x_s, u_1\rangle, \ldots \\
\ldots, \langle b_k, s, x_1, \ldots, x_s, u_k\rangle\rangle,
\end{gathered}
$$

b) β имеет вид $\langle n, s, x_1, \ldots, x_s, y\rangle$,

c) $\iota_2(n, i+2) = b_i \ (i = 0, 1, \ldots, k)$,

d) $\iota_1(n) = k + 3$,

e) $W_2(n, s) = \boldsymbol{u}$,

и 2) $\mathfrak{a} \in F^\infty$, т. е.

a) $$\langle b_0, k, u_1, \ldots, u_k, y\rangle \in F,$$

b) $$\langle b_i, s, x_1, \ldots, x_s, u_i\rangle \in F \; (i = 1, \ldots, k).$$

Докажем, что $\beta = \langle n, s, x_1, \ldots, x_s, y\rangle \in F$.

Из второго условия следуют равенства

$$\left\{\begin{array}{l} f_{b_0}^{(k)}(u_1, \ldots, u_k) = y, \\ f_{b_1}^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = u_1 \\ \quad\vdots \\ f_{b_k}^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = u_k. \end{array}\right. \tag{28}$$

Из первого условия [c, d, e] следует, что объект первого ранга, соответствующий — по $\varepsilon^{[1]}$ — числу n, равен (с точностью до не определенной условием 1 последней его координаты, которую мы обозначим сейчас через d):

$$\varepsilon^{[1]}(n) = \langle 0, b_0, b_1, \ldots, b_k, d\rangle \text{ (ср. с (12)).}$$

$W_2(n, s) = \boldsymbol{u}$ [e]. Значит, $\iota_1(n) \geqslant 4$. Из [d] следует $k \geqslant 1$. $W_2(n, s) = \boldsymbol{u}$. Следовательно, при заполнении таблицы функция $f_n^{(s)}$ определялась равенством (14).

Ввиду равенств (14) и (28), $f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = y$. Значит, $\langle n, s, x_1, \ldots, x_s, y\rangle \in F$.

Подытожим: мы доказали, что P_2 — рекурсивно-перечислимый предикат на $[N^{\infty^2}, N^\infty]$ и что множество F замкнуто относительно предиката P_2.

Проделаем то же самое для остальных трех дизъюнктивных членов равенства (25).

2.1.1.2В. Определение предиката P_3'

Предикат P_3' на $[N^{\infty^2}, N^\infty]$ определяется так:

$$\begin{aligned} P_3'(\mathfrak{a}, \beta) \sim [\mathfrak{a} \text{ имеет вид } \langle\langle c_1, s-1, x_1, \ldots, x_{s-1}, y\rangle\rangle] \,\& \\ \&\, [\beta \text{ имеет вид } \langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, 0, y\rangle] \,\& \\ \&\, [\iota_2(n, 2) = c_1] \,\& W_3(n, s). \end{aligned} \tag{29}$$

Опять «распишем» определение предиката P_3' в более подробной форме. Это поможет нам перейти к равенству, аналогичному (27), и доказать рекурсивно-перечислимость предиката P'_3.

Для некоторого объекта второго ранга α и некоторого объекта первого ранга β значение $P'_3(\alpha, \beta)$ равно u тогда и только тогда, когда выполняются следующие десять условий:

1) Длина объекта β не меньше четырех.

Обозначим длину объекта β через $s+3$. Из первого условия следует, что $s \geqslant 1$.

2) Вторая координата объекта β равна s.

3) Предпоследняя, $(s+2)$-я координата объекта β равна 0.

Обозначим первую координату объекта β через n, последнюю, $(s+3)$-ю координату — через y. Поскольку $s \geqslant 1$, $s-1 \geqslant 0$. Обозначим координаты объекта β — с третьей по предпредпоследнюю, если такие существуют — через $x_1, \ldots, x_{s-1}$. Итак, при наших обозначениях и условиях: $\beta = \langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, 0, y\rangle$. В частности, если $s=1$, $\beta = \langle n, 1, 0, y\rangle$.

4) Длина объекта α равна 1.

5) Длина единственной компоненты объекта α равна $s+2$.

Поскольку $s \geqslant 1$, $s+2 \geqslant 3$. Обозначим первую координату единственной компоненты объекта α через c_1.

6) Вторая координата единственной компоненты объекта α равна $s-1$.

7) Последняя, $(s+2)$-я координата единственной компоненты объекта α равна y.

У нас уже обозначена первая и наложены условия на вторую и последнюю координаты единственной компоненты объекта α. Остались еще не определенными $(s-1)$ координат $(s-1 \geqslant 0)$.

8) Координаты единственной компоненты объекта α — с третьей по предпоследнюю, если такие существуют — равны, соответственно, $x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}$.

Окончательно, при наших обозначениях и условиях $\alpha = \langle\langle c_1, s-1, x_1, \ldots, x_{s-1}, y\rangle\rangle$. В частности, если $s=1$, $\alpha = \langle\langle c_1, 0, y\rangle\rangle$.

9) $$W_3(n, s) = u,$$

10) $$\iota_2(n, 2) = c_1.$$

Теперь легко доказать рекурсивно-перечислимость предиката P_3', т. е. рекурсивно-перечислимость множества $|\overline{P_3'}|\subseteq N^2$. Выразим сначала на «языке функций ι_1, ι_2» то, что мы обозначили. Если a — номер объекта α при $\varepsilon^{[2]}$, а b — номер объекта β при $\varepsilon^{[1]}$, то

$$\begin{aligned}
&s=\iota_1(b)-3,\\
&n=\iota_2(b,1),\\
&y=\iota_2(b,\iota_1,(b)),\\
&x_i=\iota_2(b,i+2)\ (i=1,2,\ldots,s-1),\\
&c_1=\iota_2(\iota_2(a,1),1).
\end{aligned}$$

Переводя теперь на «язык функций ι_1, ι_2» последовательно десять условий, определяющих предикат P_3', получим:

$$\begin{aligned}
(\langle a,b\rangle\in|\overline{P_3'}|)\sim[\iota_1(b)\geqslant 4]\,\&\,[\iota_2(b,2)=\iota_1(b)-3]\,\&,\\
\&\,[\iota_2(b,\iota_1(b)-1)=0]\,\&\,[\iota_1(a)=1]\,\&\\
\&\,[\iota_1(\iota_2(a,1))=\iota_1(b)-1]\,\&\\
\&\,[\iota_2(\iota_2(a,1),2)=\iota_1(b)-4]\,\&\\
\&\,[\iota_2(\iota_2(a,1),\iota_1(\iota_2(a,1)))=\iota_2(b,\iota_1(b))]\,\&\\
\&\,\underset{i<\iota_1(b)-4}{(\forall i)}\,[\iota_2(\iota_2(a,1),i+3)=\iota_2(b,i+3)]\,\&\\
\&\,W_3(\iota_2(b,1),\iota_1(b)-3)\,\&\\
\&\,[\iota_2(\iota_2(b,1),2)=\iota_2(\iota_2(a,1),1)].
\end{aligned}\tag{30}$$

Из рекурсивно-перечислимости предиката W_3 (теоремы 12 из § 5, 6 из § 6 и 14 из § 5), теорем 12 из § 5, 6 из § 6, 16 из § 5, 14 из § 5 и (30) вытекает рекурсивно-перечислимость предиката „$\langle a,b\rangle\in|\overline{P_3'}|$“, а значит, и множества $|\overline{P_3'}|$, а следовательно, и предиката P_3'.

Докажем, что множество F замкнуто относительно предиката P_3'.

Пусть 1) для некоторого объекта второго ранга α и некоторого объекта первого ранга β значение $P_3'(\alpha,\beta)$

равно $\boldsymbol{u}$, т. е.

a) $\quad \alpha$ имеет вид $\langle\langle c_1, s-1, x_1, \ldots, x_{s-1}, y\rangle\rangle$

b) $\quad \beta$ имеет вид $\langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, 0, y\rangle$,

c) $\quad \iota_2(n, 2) = c_1$,

d) $\quad W_3(n, s) = \boldsymbol{u}$

и 2) $\alpha \in F^\infty$, т. е. $\langle c_1, s-1, x_1, \ldots, x_{s-1}, y\rangle \in F$.

Докажем, что $\beta = \langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, 0, y\rangle \in F$.

Из второго условия следует, что

$$f_{c_1}^{(s-1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}) = y. \tag{31}$$

Из первого условия [c, d] следует, что объект первого ранга, соответствующий — по $\varepsilon^{[1]}$ — числу n, имеет вид $\varepsilon^{[1]}(n) = \langle 1, c_1, d_1, d_2, \ldots, d_k\rangle$ $(k \geqslant 1)$. $W_3(n, s) = \boldsymbol{u}$ [d]. Значит, $s \geqslant 1$ или $s-1 \geqslant 0$. $W_3(n, s) = \boldsymbol{u}$. Следовательно, при заполнении таблицы функция $f_n^{(s)}$ определялась примитивной рекурсией через функции $f_{c_1}^{(s-1)}$ и $f_{d_1}^{(s+1)}$. В частности, согласно равенству (17), $f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, 0) = f_{c_1}^{(s-1)}(x_1, \ldots, x_{s-1})$. Ввиду (31), $f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, 0) = y$. Следовательно, $\langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, 0, y\rangle \in F$.

Итак, P_3' — рекурсивно-перечислимый предикат на $[N^{\infty^2}, N^\infty]$, и множество F замкнуто относительно предиката P_3'.

2.1.1.2С. Определение предиката P_3''

Предикат P_3'' на $[N^{\infty^2}, N^\infty]$ определяется так:

$$P_3''(\alpha, \beta) \sim [\alpha \text{ имеет вид } \langle\langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, u\rangle, \langle c_2, s+1, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, u, y\rangle\rangle] \,\&$$

$$\& [\beta \text{ имеет вид } \langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s+1, y\rangle] \,\&$$

$$\& [\iota_2(n, 3) = c_2] \,\&\, W_3(n, s). \tag{32}$$

Более подробно: для некоторого объекта второго ранга α и некоторого объекта первого ранга β значение $P_3''(\alpha, \beta)$ равно $\boldsymbol{u}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие пятнадцать условий:

1) Длина объекта β не меньше четырех.

Обозначим длину объекта β через $s+3$. Из первого условия следует, что $s \geqslant 1$.

2) Вторая координата объекта β равна s.

3) Предпоследняя координата объекта β не меньше 1.

Обозначим предпоследнюю координату объекта β через x_s+1. Из третьего условия следует, что $x_s \geqslant 0$.

Обозначим первую координату объекта β через n, последнюю, $(s+3)$-ю координату — через y. У нас остались еще не определенными $(s-1)$ координат объекта β. Поскольку $s \geqslant 1$, $s-1 \geqslant 0$. Обозначим координаты объекта β - с третьей по $(s+1)$-ю, если такие существуют — через $x_1, \ldots, x_{s-1}$. При наших обозначениях и условиях $\beta = \langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s+1, y\rangle$. В частности, если $s=1$, $\beta = \langle n, 1, x_1+1, y\rangle$.

4) Длина объекта α равна 2.

5) Длина первой компоненты объекта α равна $s+3$. Поскольку $s \geqslant 1$, $s+3 \geqslant 4$.

6) Длина второй компоненты объекта α равна $s+4$. Поскольку $s \geqslant 1$, $s+4 \geqslant 5$. Обозначим первую координату второй компоненты объекта α через c_2, последнюю координату первой компоненты объекта α — через u.

7) Первая координата первой компоненты объекта α равна n.

8) Вторая координата первой компоненты объекта α равна s.

9) Вторая координата второй компоненты объекта α равна $s+1$.

10) Предпоследняя, $(s+3)=$я координата второй компоненты объекта α равна u.

11) Последняя, $(s+4)$-я координата второй компоненты объекта α равна y.

12) У обеих компонент объекта α $(s+2)$-я координата равна x_s.

У нас уже обозначены и определены условиями все координаты обеих компонент объекта α, кроме координат с третьей по $(s+1)$-ю.

13) У обеих компонент объекта α координаты — с третьей по $(s+1)$-ю, если такие существуют — равны соответственно $x_1, \ldots, x_{s-1}$ $(s-1 \geqslant 0)$.

При наших обозначениях и условиях

$$\mathfrak{a} = \langle\langle n,\ s,\ x_1,\ \ldots,\ x_{s-1},\ x_s,\ u\rangle,$$
$$\langle c_2,\ s+1,\ x_1,\ \ldots,\ x_{s-1},\ x_s,\ u,\ y\rangle\rangle.$$

14) $\iota_2(n,\ 3) = c_2,$

15) $W_3(n,\ s) = u.$

Выразим на «языке функций ι_1, ι_2» то, что мы обозначили. Если a — номер объекта $\mathfrak{a}$ при $\varepsilon^{[2]}$, а b — номер объекта β при $\varepsilon^{[1]}$, то

$$\begin{aligned} s &= \iota_1(b) - 3, \\ x_s &= \iota_2(b,\ \iota_1(b) - 1) - 1, \\ n &= \iota_2(b,\ \iota), \\ y &= \iota_2(b,\ \iota_1(b)), \\ x_i &= \iota_2(b,\ i+2)\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1), \\ c_2 &= \iota_2(\iota_2(a,\ 2),\ 1), \\ u &= \iota_2(\iota_2(a,\ 1),\ \iota_1(\iota_2(a,\ 1))). \end{aligned}$$

Теперь легко «расписать» предикат „$\langle a,\ b\rangle \in \overline{|P''_3|}$“ на «языке функций ι_1, ι_2».

$$\begin{aligned} &(\langle a,\ b\rangle \in \overline{|P''_3|}) \sim [\iota_1(b) \geqslant 4] \mathbin{\&} [\iota_2(b,\ 2) = \iota_1(b) - 3] \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} [\iota_2(b,\ \iota_1(b) - 1) \geqslant 1] \mathbin{\&} [\iota_1(a) = 2] \mathbin{\&} [\iota_1(\iota_2(a,\ 1)) = \iota_1(b)] \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} [\iota_1(\iota_2(a,\ 2)) = \iota_1(b) + 1] \mathbin{\&} [\iota_2(\iota_2(a,\ 1),\ 1) = \iota_2(b,\ 1)] \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} [\iota_2(\iota_2(a,\ 1),\ 2) = \iota_1(b) - 3] \mathbin{\&} [\iota_2(\iota_2(a,\ 2),\ 2) = \iota_1(b) - 2] \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} [\iota_2(\iota_2(a,\ 2),\ \iota_1(b)) = \iota_2(\iota_2(a,\ 1),\ \iota_1(\iota_2(a,\ 1)))] \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} [\iota_2(\iota_2(a,\ 2),\ \iota_1(\iota_2(a,\ 2))) = \iota_2(b,\ \iota_1(b))] \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} \underset{i \leqslant 1}{(\forall i)} [\iota_2(\iota_2(a,\ i+1),\ \iota_1(b) - 1) = \iota_2(b,\ \iota_1(b) - 1) - 1] \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} \underset{i < 1}{(\forall i)}\ \underset{j < \iota_1(b) - 4}{(\forall j)}\ [\iota_2(\iota_2(a,\ i+1),\ j+3) = \iota_2(b,\ j+3)] \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} [\iota_2(\iota_2(b,\ 1),\ 3) = \iota_2(\iota_2(a,\ 2),\ 1)] \mathbin{\&} \\ &\qquad\qquad \mathbin{\&} W_3(\iota_2(b,\ 1),\ \iota_1(b) - 3). \quad (33) \end{aligned}$$

Из рекурсивно-перечислимости предиката W_3, теорем 12 из § 5, 6 из § 6, 16 из § 5, 14 из § 5 и (33) вытекает рекурсивно-перечислимость предиката „$\langle a,\ b\rangle \in \overline{|P''_3|}$“, а значит, и множества $\overline{|P''_3|}$, а следовательно, и предиката P''_3.

Докажем, что множество F замкнуто относительно предиката P_3''.

Пусть 1) для некоторого объекта второго ранга α и некоторого объекта первого ранга β значение $P_3''(\alpha, \beta)$ равно $\boldsymbol{u}$ т. е.

a) α имеет вид

$$\langle\langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, u\rangle, \langle c_2, s+1, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, u, y\rangle\rangle,$$

b) β имеет вид $\langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s+1, y\rangle$,

c) $\iota_2(n, 3) = c_2$,

d) $W_3(n, s) = \boldsymbol{u}$

и 2) $\alpha \in F^\infty$, т. е.

a) $\langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, u\rangle \in F$.

b) $\langle c_2, s+1, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, u, y\rangle \in F$.

Докажем, что $\beta = \langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s+1, y\rangle \in F$. Из второго условия следует, что

$$\left\{\begin{array}{l} f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s) = u, \\ f_{c_2}^{(s+1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, u) = y. \end{array}\right. \tag{34}$$

Из первого условия [c, d] следует, что объект первого ранга, соответствующий — по $\varepsilon^{[1]}$ — числу n, имеет вид: $\varepsilon^{[1]}(n) = \langle 1, d_1, c_2, d_2, \ldots, d_k\rangle$ $(k \geqslant 1)$. $W_3(n, s) = \boldsymbol{u}$ [d]. Следовательно, при заполнении таблицы функция $f_n^{(s)}$ определялась примитивной рекурсией через функции $f_{d_1}^{(s-1)}$, $f_{c_2}^{(s+1)}$. В частности, по равенству (18)

$$f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s+1) = f_{c_2}^{(s+1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s, f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_s)).$$

Ввиду (34), $f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s+1) = y$. Значит, $\langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s+1, y\rangle \in F$.

Итак, P_3'' — рекурсивно-перечислимый предикат и множество F замкнуто относительно предиката P_3''.

Расправимся, наконец, с последним дизъюнктивным членом в равенстве (25).

2.1.1.2D. Определение предиката P_4

Предикат P_4 на $[N^{\infty^2}, N^{\infty}]$ определяется так:

$$P_4(\alpha, \beta) \sim [\beta \text{ имеет вид } \langle n, s, x_1, \ldots, x_s, 0\rangle] \,\&\, W_4(n, s). \quad (35)$$

Как видно из (35), предикат P_4 существенно зависит только от β, α является фиктивным переменным.

«Распишем» определение предиката P_4 более подробно. Для некоторого объекта второго ранга α и некоторого объекта первого ранга β значение $P_4(\alpha, \beta)$ равно $\boldsymbol{u}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие четыре условия:

1) Длина объекта β не меньше трех.

Обозначим длину объекта β через $s+3$. Из первого условия следует, что $s \geqslant 0$.

2) Вторая координата объекта β равна s.

3) Последняя координата объекта β равна 0.

Обозначим первую координату объекта β через n.

4) $W_4(n, s) = \boldsymbol{u}$.

У нас остались не определенными s координат объекта β $(s \geqslant 0)$. Обозначим координаты объекта β — с третьей по предпоследнюю, если такие существуют — через $x_1, x_2, \ldots, x_s$ соответственно. При наших обозначениях и условиях: $\beta = \langle n, s, x_1, \ldots, x_s, 0\rangle$. В частности, если $s = 0$, $\beta = \langle n, 0, 0\rangle$.

Если обозначить номер объекта первого ранга β через b, то $s = \iota_1(b) - 3$, $n = \iota_2(b, 1)$.

Тогда

$$(\langle a, b\rangle \in |\overline{P_4}|) \sim [\iota_1(b) \geqslant 3] \,\&\, [\iota_2(b, 2) = \iota_1(b) - 3] \,\&$$
$$\& \, [\iota_2(b, \iota_1(b)) = 0] \,\&\, W_4(\iota_2(b, 1), \iota_1(b) - 3). \quad (36)$$

С первого взгляда не видно, что предикат W_4 рекурсивно-перечислим, так как он определен через отрицание (см. (7)), а отрицание не обязано сохранять рекурсивно-перечислимость предикатов *). Однако, применив (7) из п. 2 § 3 и приняв во внимание (4) — (6), можно определение

---

*) См. замечание после теоремы 14 из § 5.

предиката W_4 написать в другой форме:

$$W_4(n, s) \sim \overline{W}_1(n, s) \,\&\, \overline{W}_2(n, s) \,\&\, \overline{W}_3(n, s) \sim$$
$$\sim [n > s+1] \,\&\, \{[n \leqslant s+1] \vee [\iota_2(n, 1) > 0] \vee [\iota_1(n) < 4]\} \,\&$$
$$\& \{[n \leqslant s+1] \vee [\iota_2(n, 1) = 0] \vee$$
$$\vee [\iota_2(n, 1) \geqslant 2] \vee [\iota_1(n) < 3] \vee [s = 0]\}. \qquad (37)$$

Легко видеть, что можно также написать чуть короче

$$W_4(n, s) \sim \{n > s+1\} \,\&\, \{[\iota_2(n, 1) > 0] \vee [\iota_1(n) < 4]\} \,\&$$
$$\& \{[\iota_2(n, 1) = 0] \vee [\iota_2(n, 1) \geqslant 2] \vee [\iota_1(n) < 3] \vee [s = 0]\}. (37')$$

Из (37) или (37′) и теорем 12 из § 5, 6 из § 6 и 14 из § 5 вытекает рекурсивно-перечислимость предиката W_4. А тогда из (36) и теорем 12 из § 5, 6 из § 6 и 14 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость предиката „$\langle a, b\rangle \in |\overline{P_4}|$“, а значит, и множества $|\overline{P_4}|$ и предиката P_4.

Докажем, что множество F замкнуто относительно предиката P_4. Пусть 1) для некоторого объекта второго ранга α и некоторого объекта первого ранга β значение $P_4(\alpha, \beta)$ равно $\boldsymbol{u}$, т. е.

a) β имеет вид $\langle n, s, x_1, \ldots, x_s, 0\rangle$,

b) $W_4(n, s) = \boldsymbol{u}$

и 2) $\alpha \in F^{\infty}$.

Докажем, что $\beta = \langle n, s, x_1, \ldots, x_s, 0\rangle \in F$. Нам здесь даже не понадобится использовать второе условие. Так как $W_4(n, s) = \boldsymbol{u}$, функция $f_n^{(s)}$ определялась при заполнении таблицы равенством (19), т. е. $f_n^{(s)} = 0^{(s)}$. В частности, $f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = 0^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = 0$. Следовательно, $\langle n, s, x_1, \ldots, x_s, 0\rangle \in F$.

Итак, мы и про последний дизъюнктивный член равенства (25) доказали те же утверждения: предикат P_4 рекурсивно-перечислим и множество F замкнуто относительно предиката P_4.

2.1.1.2Е. Подведение итогов

Мы последовательно определили все 4 предиката: P_2, P_3', P_3'', P_4 — входящих в равенство (25). Тем самым мы определили на $[N^{\infty^2}, N^{\infty}]$ предикат P. Мы доказали рекурсивно-перечислимость предикатов P_2, P_3', P_3'', P_4. Из (25) и теоремы 14 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость предиката P. Итак, мы выполнили второй пункт нашего плана: мы определили на $[N^{\infty^2}, N^{\infty}]$ предикат P и доказали, что он рекурсивно-перечислим. Кроме того, в качестве заготовки к третьему пункту, к которому мы сейчас перейдем, мы доказали, что множество F замкнуто относительно предикатов P_2, P_3', P_3'', P_4. Отсюда и из (25) тривиально следует, что множество F замкнуто относительно предиката P.

2.1.1.3. Доказательство равенства $F = A_{M,P}$.

Перейдем к третьему, последнему пункту нашего плана. Мы построили в N^{∞} множество M и доказали, что оно рекурсивно-перечислимо. Мы определили на $[N^{\infty^2}, N^{\infty}]$ предикат P и доказали, что он рекурсивно-перечислим. Докажем, что $F = A_{M,P}$.

2.1.1.3А. Доказательство включения $F \supseteq A_{M,P}$

$F \supseteq M$ (см. (23)). Множество F замкнуто относительно предиката P. Следовательно,

$$F \supseteq A_{M,P}. \tag{38}$$

2.1.1.3В. Доказательство включения $F \subseteq A_{M,P}$

Докажем обратное включение: $F \subseteq A_{M,P}$.

Допустим противное. Допустим, что существует такой объект первого ранга, который лежит в F, но не лежит в $A_{M,P}$. Из всех таких объектов первого ранга отберем объекты, удовлетворяющие дополнительному условию: первая координата их должна быть не больше первой координаты любого другого объекта, лежащего в F, но не лежащего в $A_{M,P}$. Теперь среди всех отобранных объектов (если их несколько, то первые координаты у них, очевидно, совпадают) снова отберем объекты, удовлетворяющие дополнительному условию: предпоследняя координата их должна быть не больше предпоследней координаты любого отобранного при первом отборе объекта. Если таких объектов снова найдется несколько (а тогда у них, очевидно, первые и предпоследние координаты будут совпадать), возьмем любой из них и фиксируем его. Обозначим этот «дважды отобранный» объект через β_0. Так как длина объектов из F не меньше трех, можно считать, что объект β_0 имеет вид:

$$\beta_0 = \langle n, s, x_1, \ldots, x_s, y\rangle \ (s \geqslant 0).$$

В частности, если $s = 0$, $\beta_0 = \langle n, 0, y\rangle$.

Перечислим еще раз свойства объекта β_0.

1) $\beta_0 \in F$,

2) $\beta_0 \overline{\in} A_{M.\,P}$.

3) Если $\beta' = \langle n', s', x'_1, \ldots, x'_{s'}, y'\rangle$, $\beta' \in F$ и $\beta' \overline{\in} A_{M,\,P}$, то $n' \geqslant n$.

4) Если $\beta' = \langle n', s', x'_1, \ldots, x'_{s'}, y'\rangle$, $\beta' \in F$, $\beta' \overline{\in} A_{M,\,P}$ и $n' = n$, то $x'_s \geqslant x_s$ *).

Так как $\beta_0 \overline{\in} A_{M,\,P}$, а $M \subseteq A_{M,\,P}$, $\beta_0 \overline{\in} M$. Но $\beta_0 \in F$. Следовательно, $n > s+1$, так как все элементы из F, для которых $W_1(n, s) \sim [n \leqslant s+1] = \boldsymbol{u}$, мы включили в M. Из $n > s+1$ и $s \geqslant 0$ следует: $n > 1$. Поскольку $n > s+1$, для координат n и s объекта β_0 истинен один (и только один) из трех предикатов: W_2, W_3, W_4.

Разберем три возможных случая.

2.1.1.3Ва. Случай W_2. $W_2(n, s) = \boldsymbol{u}$.

Тогда, если обозначить объект первого ранга, соответствующий — по $\varepsilon^{[1]}$ — числу n, через $\langle 0, b_0, b_1, \ldots, b_k, d\rangle$ $(k \geqslant 1)$, будет иметь место равенство (см. (14)):

$$f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = f_{b_0}^{(k)}(f_{b_1}^{(s)}(x_1, \ldots, x_s), \ldots, f_{b_k}^{(s)}(x_1, \ldots, x_s)). \tag{39}$$

Обозначим значение функции $f_{b_i}^{(s)}$ на кортеже $\langle x_1, \ldots, x_s\rangle$ через u_i:

$$f_{b_i}^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{40}$$

---

*) Точнее: если $s > 0$ и $s' > 0$, то $x'_s \geqslant x_s$; если $s > 0$, а $s' = 0$, то $x_s = 0$; если же $s = 0$, то условие выполняется тривиальным образом.

Так как $\beta_0 \in F$,
$$f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = y. \tag{41}$$
Из (39)—(41) следует:
$$f_{b_0}^{(k)}(u_1, \ldots, u_k) = y. \tag{42}$$
Рассмотрим следующий объект второго ранга:
$$\mathfrak{a} = \langle\langle b_0, k, u_1, \ldots, u_k, y\rangle, \langle b_1, s, x_1, \ldots, x_s, u_1\rangle, \ldots \\ \ldots, \langle b_k, s, x_1, \ldots, x_s, u_k\rangle\rangle.$$
Легко видеть, что
$$P_2(\mathfrak{a}, \beta_0) = \boldsymbol{u}. \tag{43}$$
По (25) $P(\mathfrak{a}, \beta_0) = \boldsymbol{u}$. Ввиду (40) и (42), $\langle b_0, k, u_1, \ldots$ $\ldots, u_k, y\rangle \in F$ и $\langle b_i, s, x_1, \ldots, x_s, u_i\rangle \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. $n > 1$. По (3) $b_i = \iota_2(n, i+2) < n$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$. По третьему свойству объекта β_0 $\langle b_0, k, u_1, \ldots, u_k, y\rangle \in A_{M, P}$ и $\langle b_i, s, x_1, \ldots, x_s, u_i\rangle \in A_{M, P}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Следовательно,
$$\mathfrak{a} \in [A_{M, P}]^\infty. \tag{44}$$
Множество $A_{M, P}$ замкнуто относительно предиката P. Из (43) и (44) следует: $\beta_0 \in A_{M, P}$. Противоречие.

2.1.1.3Bb. Случай W_3. $W_3(n, s) = \boldsymbol{u}$.

Тогда, если обозначить объект первого ранга, соответствующий — по $\varepsilon^{[1]}$ — числу n, через $\langle 1, c_1, c_2, d_1, \ldots, d_k\rangle$ $(k \geqslant 0)$, будут иметь место равенства (см. (17), (18)):
$$\begin{cases} f_n(x_1, \ldots, x_{s-1}, 0) = f_{c_1}^{(s-1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}), & (45) \\ f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, t+1) = \\ \qquad = f_{c_2}^{(s+1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, t, f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, t)). & (46) \end{cases}$$
Разберем два подслучая: равна или не равна нулю предпоследняя координата x_s объекта β_0.

i) $x_s = 0$.

Так как $\beta_0 \in F$,
$$f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s) = f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, 0) = y. \tag{47}$$

Ввиду (45),

$$f_{c_1}^{(s-1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}) = y. \tag{48}$$

Рассмотрим следующий объект второго ранга (длины 1): $\alpha = \langle\langle c_1, s-1, x_1, \ldots, x_{s-1}, y\rangle\rangle$. Легко видеть, что $P_3'(\alpha, \beta_0) = \boldsymbol{u}$. По (25)

$$P(\alpha, \beta_0) = \boldsymbol{u}. \tag{49}$$

Ввиду (48), $\langle c_1, s-1, x_1, \ldots, x_{s-1}, y\rangle \in F$. $n > 1$. По (3) $c_1 = \iota_2(n, 2) < n$. По третьему свойству объекта β_0 $\langle c_1, s-1. x_1, \ldots, x_{s-1}, y\rangle \in A_{M, P}$. Следовательно,

$$\alpha \in [A_{M, P}]^{\infty}. \tag{50}$$

Множество $A_{M, P}$ замкнуто относительно предиката P. Из (49) и (50) следует: $\beta_0 \in A_{M, P}$. Противоречие.

ii) $x_s > 0$.

Следовательно, значение функции $f_n^{(s)}$ на кортеже $\langle x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s\rangle$ будет вычисляться согласно равенству (46), в котором надо положить: $t = x_s - 1$

$$f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s) = \\ = f_{c_2}^{(s+1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s - 1, f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s - 1)) \tag{51}$$

(так как $x_s > 0$, $x_s - 1 \geqslant 0$). Поскольку $\beta_0 \in F$,

$$f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = y. \tag{52}$$

Обозначим значение функции $f_n^{(s)}$ на кортеже $\langle x_1, \ldots \ldots, x_{s-1}, x_s - 1\rangle$ через u.

$$f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s - 1) = u. \tag{53}$$

Ввиду (51) – (53),

$$f_{c_2}^{(s+1)}(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s - 1, u) = y. \tag{54}$$

Рассмотрим следующий объект второго ранга (длины 2):

$$\alpha = \langle\langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s - 1, u\rangle, \\ \langle c_2, s+1, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s - 1, u, y\rangle\rangle.$$

Легко видеть, что $P_3''(\alpha, \beta_0) = \boldsymbol{u}$. По (25)

$$P(\alpha, \beta_0) = \boldsymbol{u}. \tag{55}$$

Вследствие (53) и (54), $\beta_1 = \langle n, s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s - 1, u\rangle \in F$ и $\beta_2 = \langle c_2, s+1, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s - 1, u, y\rangle \in F$. Предпоследняя координата объекта β_1 меньше x_s. По четвертому свойству объекта β_0 $\beta_1 \in A_{M,P}$. $n > 1$. По (3) $c_2 = \iota_2(n, s) < n$. По третьему свойству объекта β_0 $\beta_2 \in A_{M,P}$. Следовательно,

$$\alpha = \langle \beta_1, \beta_2\rangle \in [A_{M,P}]^{\infty}. \tag{56}$$

Множество $A_{M,P}$ замкнуто относительно предиката P. Из (55) и (56) следует $\beta_0 \in A_{M,P}$. Противоречие.

2.1.1.3Вс. Случай W_4. $W_4(n, s) = \boldsymbol{u}$.

Тогда по (19) $f_n^{(s)} = 0^{(s)}$. В частности, на кортеже $\langle x_1, \ldots, x_s\rangle$ $f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = 0^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = 0$. Так как $\beta_0 \in F$, $f_n^{(s)}(x_1, \ldots, x_s) = y$. Следовательно, $y = 0$ и объект β_0 имеет вид $\beta_0 = \langle n, s, x_1, \ldots, x_s, 0\rangle$. Поскольку M — не пустое множество, множество $A_{M,P}$ тоже не пусто. Возьмем произвольный объект второго ранга α из $[A_{M,P}]^{\infty}$. Для этого α и для β_0 будет очевидно $P_4(\alpha, \beta_0) = \boldsymbol{u}$. По (25) $P(\alpha, \beta_0) = \boldsymbol{u}$. Из замкнутости множества $A_{M,P}$ относительно предиката P следует, что $\beta_0 \in A_{M,P}$. Противоречие.

2.1.1.3Bd. Завершение доказательства включения $F \subseteq A_{M,P}$

Итак, во всех возможных случаях предположение о существовании объекта, принадлежащего к F, но не принадлежащего к $A_{M,P}$, привело к противоречию. Следовательно,

$$F \subseteq A_{M,P}. \tag{57}$$

2.1.1.4. Завершение доказательства рекурсивноперечислимости множества F

Из (38) и (57) следует

$$F = A_{M,P}. \tag{58}$$

Множество M — рекурсивно-перечислимое множество в N^{∞}. Предикат P — рекурсивно-перечислимый предикат на $[N^{\infty^2}, N^{\infty}]$. По Основной лемме (п. 1) $A_{M,P}$ — рекурсивно-перечислимое множество в N^{∞}. Из (58) вытекает, наконец, требуемая рекурсивно-перечислимость множества F. Доказательство теоремы закончено.

ПЛАН ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 4

Итак, мы для любого натурального s доказали существование обще-рекурсивной функции $\Phi^{(s+1)}$, универсальной для примитивно-рекурсивных функций от s аргументов.

В следующем пункте настоящего параграфа, используя факт существования такой функции, мы сможем построить примеры не примитивно-рекурсивных функций, множеств, отображений и выполнить тем самым обещания, данные в предыдущих параграфах.

Замечание 3. Пересчитав «на плоскости» сразу все функции из $\mathscr{M}$ ((8) – (11), (14), (17) – (18), (19)), мы построили – при помощи равенства (21) – одновременно все искомые функции: $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, $\Phi^{(3)}$, $\Phi^{(4)}$, ...

Можно было сделать и по-другому. Можно было, пересчитав все функции только из $\mathscr{M}^{(1)}$, построить искомую функцию $\Phi^{(2)}$:$\Phi^{(2)}(n, x) = f_n^{(1)}(x)$, а потом из функции $\Phi^{(2)}$ сразу получить функцию $\Phi^{(s+1)}$ для любого $s > 1$ *). Покажем, как это сделать.

Пусть у нас построена обще-рекурсивная функция $\Phi^{(2)}$, универсальная для функций из $\mathscr{M}^{(1)}$. Для любого s, $s > 1$, обще-рекурсивная функция $\Phi^{(s+1)}$, универсальная для $\mathscr{M}^{(s)}$, строится так.

Возьмем какое-нибудь примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие $\varkappa^{[s]}$ между N и N^s и функции $\varkappa_1^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}, \varkappa_0^{[s]}$, его осуществляющие (теорема 19 из § 4). Тогда искомая функция $\Phi^{(s+1)}$ определяется равенством:

$$\Phi^{(s+1)}(n, x_1, \ldots, x_s) = \Phi^{(2)}(n, x_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s)). \quad (59)$$

Докажем это. Прежде всего, функция $\Phi^{(s+1)}$, определяемая равенством (59), обще-рекурсивна. Возьмем теперь произвольную функцию $f^{(s)} \in \mathscr{M}^{(s)}$. Определим через нее функцию $\bar{f}^{(1)}$:

$$\bar{f}(t) = f(\varkappa_1^{[s]}(t), \ldots, \varkappa_s^{[s]}(t)). \quad (60)$$

$\bar{f} \in \mathscr{M}^{(1)}$. Существует такое n_0, что для всех t

$$\Phi^{(2)}(n_0, t) = \bar{f}(t). \quad (61)$$

Покажем, что это n_0 как раз и обладает нужным

*) Относительно $s = 0$ см. замечание 1 на стр. 204.

свойством, т. е. что для любого $\langle x_1, \ldots, x_s\rangle$

$$\Phi^{(s+1)}(n_0, x_1, \ldots, x_s) = f(x_1, \ldots, x_s) \tag{62}$$

$$\Phi^{(s+1)}(n_0, x_1, \ldots, x_s) = \Phi^{(2)}(n_0, \varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s)) =$$
$$= \bar{f}(\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s)) =$$
$$= f(\varkappa_1^{[s]}(\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s)), \ldots, \varkappa_s^{[s]}(\varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s)) =$$
$$= f(x_1, \ldots, x_s).$$

(см. (1) из п. 5 § 4). Равенство (62) доказано. Следовательно, функция $\Phi^{(s+1)}$, определяемая равенством (59), действительно является обще-рекурсивной функцией, универсальной для $\mathscr{P}^{(s)}$ *).

3. ВАЖНЫЕ ПРИМЕРЫ

Всюду дальше через $\Phi^{(s+1)}$ мы будем обозначать произвольную обще-рекурсивную функцию, универсальную для класса $\mathscr{P}^{(s)}$ примитивно-рекурсивных функций от s аргументов. Такая функция существует на основании теоремы 4.

Пример 1. *Пример обще-рекурсивной, но не примитивно-рекурсивной функции* **).

Обще-рекурсивная функция f: $f(x) = \Phi^{(2)}(x, x)$ — не является примитивно-рекурсивной. Допустим противное. Тогда функция g: $g(x) = f(x) + 1 = \Phi(x, x) + 1$ также будет примитивно-рекурсивной. Следовательно, при

---

*) Читателю предлагается сравнить только что сделанное замечание с замечанием на стр. 123. Эти замечания показывают, что во многих случаях по существу достаточно ограничиться изучением функций от одного аргумента.

**) Первый пример такой функции построил В. Аккерман [1928] (хотя и без упоминания терминов «примитивно-рекурсивная функция» и «обще-рекурсивная функция»; понятия обще-рекурсивной функции в то время еще не существовало); построение В. Аккермана воспроизведено на стр. 242—243 русского издания книги С. К. Клини [1952]. Приводимый ниже пример принадлежит Р. Петер ([1935], § 2; [1951], § 11, п. 3).

некотором n должно выполняться равенство

$$\Phi(n, x) = g(x), \tag{1}$$

$$\Phi(n, x) = \Phi(x, x) + 1. \tag{1'}$$

Это равенство должно выполняться при всех x, причем функции Φ и g всюду определены. При $x = n$ из (1′) получаем противоречие

$$\Phi(n, n) = \Phi(n, n) + 1.$$

Итак, доказано «строгое включение»: $\mathcal{П} \subset \mathcal{O}$. В сочетании с (1′) из п. 1 § 6 это дает «тройное строгое включение»:

$$\mathcal{П} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{Ч}. \tag{2}$$

Из теоретико-множественных соображений (следствие 1 теоремы 1 из § 6) мы знаем, что существуют не частично-рекурсивные функции. В § 9 (п. 2, примеры 2, 10, 11) будут приведены индивидуальные примеры таких функций.

Пример 2. *Еще пример обще-рекурсивной, но не примитивно-рекурсивной функции.*

Обще-рекурсивная функция $\Phi^{(2)}$ не является примитивно-рекурсивной. В противном случае и функция f: $f(x) = \Phi(x, x)$ — также была бы примитивно-рекурсивной (см. текст примера 1).

Теорема 5. *Ни для какого $s \geqslant 1$ не существует* ***примитивно-рекурсивной*** *функции, универсальной для примитивно-рекурсивных функций от s аргументов* *).

Для $s = 1$ это показано в примере 2. Для $s > 1$ показывается совершенно аналогично.

Пример 3. *Еще пример обще-рекурсивной, но не примитивно-рекурсивной функции.*

Функция h: $h(x) = \overline{\mathrm{sg}}\Phi(x, x)$ — также является обще-рекурсивной, но не примитивно-рекурсивной. Если бы функция h была примитивно-рекурсивной, при некотором n и при всех x имело бы место равенство

$$\Phi(n, x) = h(x), \tag{3}$$

$$\Phi(n, x) = \overline{\mathrm{sg}}\,\Phi(x, x). \tag{3'}$$

---

*) Ср. с замечанием 1 на стр. 204.

При $x=n$ из (3) получается противоречие:

$$\Phi(n, n)=\overline{\mathrm{sg}}\,\Phi(n, n).$$

Пример 4. *Пример обще-рекурсивного, но не примитивно-рекурсивного множества.*

Множество $L_1=\mathscr{E}\{x\in N\mid\Phi(x, x)=0\}$ — обще-рекурсивное, но не примитивно-рекурсивное, так как его характеристической функцией является обще-рекурсивная, но не примитивно-рекурсивная функция h из примера 3 (определение на стр. 99 и теорема 1 из § 7).

Из этого примера и соотношения (3) из п. 1 § 5 следует строгое включение:

$$\mathbf{П}\subset\mathbf{O}. \tag{4}$$

В § 9 (п. 2, пример 4) будет доказано, что $\mathbf{O}\subset\mathbf{P}$.

Пример 5. *Еще пример обще-рекурсивного, но не примитивно-рекурсивного множества.*

Множество $L_2=\mathscr{E}\{x\in N\mid\Phi(x, x)>0\}$ также обще-рекурсивно, но не примитивно-рекурсивно, как дополнение к обще-рекурсивному, но не примитивно-рекурсивному множеству L_1 из примера 4 (следствие 1 теоремы 3 из § 4 и теорема 3 из § 7).

Пример 6. *Еще пример обще-рекурсивной, но не примитивно-рекурсивной функции.*

Функция $y=\mathrm{sg}\,\Phi(x, x)$ также является обще-рекурсивной, но не примитивно-рекурсивной, так как она является характеристической функцией обще-рекурсивного, но не примитивно-рекурсивного множества L_2 из примера 5 (определение на стр. 99 и теорема 1 из § 7).

Пример 7. *Пример рекурсивно-перечислимого, но не примитивно-рекурсивного множества* (ср. с теоремой 2 из § 5).

Поскольку обще-рекурсивное множество рекурсивно-перечислимо, то требуемыми свойствами будет обладать любое обще-рекурсивное, но не примитивно-рекурсивное множество (примеры 4, 5).

Пример 8. *Пример примитивно-рекурсивного отображения множества N в N, при котором само N переходит в не примитивно-рекурсивное множество* (ср. со следствием теоремы 9 из § 4).

Пусть L — рекурсивно-перечислимое, но не примитивно-рекурсивное множество в N. Как показано в примене 7, такое множество существует. По теореме 9 из § 5 множество L является множеством значений некоторой примитивно-рекурсивной функции $f^{(1)}$. Отображение множества N в N, осуществляемое функцией f, — искомое.

Пример 9. *Пример примитивно-рекурсивного множества с не примитивно-рекурсивной проекцией.*

Пусть L — рекурсивно-перечислимое, но не примитивно-рекурсивное множество. Как показано в примере 7, такое множество существует. По определению рекурсивно-перечислимого множества существует такое примитивно-рекурсивное множество L', проекцией которого является множество L. Множество L' — искомое.

Пример 10. *Пример всюду определенной не примитивно-рекурсивной функции с примитивно-рекурсивным графиком* *) (ср. со следствием 1 теоремы 6 из § 4).

Существуют обще-рекурсивные (и значит, всюду определенные!), но не примитивно-рекурсивные функции типа $N \to N$ (примеры 1, 3, 6). Возьмем произвольную обще-рекурсивную, но не примитивно-рекурсивную функцию $f^{(1)}$. Возьмем также произвольную примитивно-рекурсивную функцию большого размаха φ. По Слабой теореме о нормальной форме (теорема 4 из § 6) существует такая примитивно-рекурсивная функция $\tau^{(2)}$, что

$$f(x) = \varphi((\mu t)[\tau(x, t) = 0]). \tag{5}$$

Функция $y = (\mu t)[\tau(x, t) = 0]$ — искомая. Она всюду определена, так как функция f всюду определена. Она не примитивно-рекурсивна, так как иначе бы — из (5) — функция f была примитивно-рекурсивной. График G функции $y = (\mu t)[\tau(x, t) = 0]$ — примитивно-рекурсивное множество в N^2, так как G — это просто множество нижних точек примитивно-рекурсивного множества $\mathscr{E}\{\langle x, t\rangle \in N^2 \mid \tau(x, t) = 0\}$ (следствие 1 теоремы 7 из § 4 и следствие теоремы 17 из § 4).

*) Первый пример такой функции построил Т. Сколем (см. теорему 3 его заметки [1945]).

Для примера 12 нам понадобится

Пример 11. *Пример строго возрастающей всюду определенной не примитивно-рекурсивной функции с примитивно-рекурсивным графиком.*

Пусть $g^{(1)}$ — всюду определенная не примитивно-рекурсивная функция, график которой G_g примитивно-рекурсивен. Как показано в примере 10, такая функция существует. Определим через функцию $g^{(1)}$ функцию $h^{(1)}$ равенством

$$h(x) = \sum_{i=0}^{i=x} g(i) + x \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} h(0) &= g(0), \\ h(1) &= g(0) + g(1) + 1, \\ h(2) &= g(0) + g(1) + g(2) + 2, \\ &\vdots \\ h(x) &= g(0) + g(1) + g(2) + \ldots \\ &\quad \ldots + g(x-1) + g(x) + x, \\ h(x+1) &= g(0) + g(1) + g(2) + \ldots \\ &\quad \ldots + g(x-1) + g(x) + \\ &\quad + g(x+1) + x + 1. \\ &\vdots \end{aligned}\right. \tag{6'}$$

Из (6) или (6′) и свойств функции g следует, что функция h — строго возрастающая и всюду определенная. Функция h — не примитивно-рекурсивная, так как иначе из равенств

$$g(x) = \begin{cases} h(0), & x = 0, \\ h(x) \dot{-} (h(x \dot{-} 1) + 1), & x > 0 \end{cases} \tag{7}$$

и следствия теоремы 15 из § 4 вытекала бы примитивно-рекурсивность функции g. Сложнее доказать, что переходом от g к h при помощи (6) мы не испортили примитивно-рекурсивность графика. Докажем, что у функции h график G_h остался примитивно-рекурсивным. Возьмем какое-нибудь взаимно-однозначное примитивно-рекурсивное отображение множества N на множество N^∞, для которого существует примитивно-рекурсивная функция $\tau^{(2)}$ такая, что для любого $\alpha = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle \in N^\infty$

из $x_i \leqslant y$ $(i = 1, \ldots, s)$ для числа $t \in N$, соответствующего кортежу α, следует $t \leqslant \tau(y, s)$. По теореме 22 из § 4 такое взаимно-однозначное примитивно-рекурсивное отображение существует. Возьмем это отображение, функции ι_1, ι_2, его осуществляющие, и функцию τ.

$$[\langle x, y\rangle \in G_h] = (\exists y_0)(\exists y_1) \ \ldots \ (\exists y_x)\Big[(\underset{i \leqslant x}{\forall i})(y_i = g(i))\ \& \\ \& \Big(y = \sum_{i=0}^{i=x} y_i + x\Big)\Big] = (\exists t)\ \big[(\iota_1(t) = x+1)\ \& \\ \& (\underset{i \leqslant x}{\forall i})(\iota_2(t, i+1) = g(i))\ \& \Big(y = \sum_{i=0}^{i=x} \iota_2(t, i+1) + x\Big)\Big]. \qquad (8)$$

На основании специального свойства взятого нами отображения множества N на множество N^∞ число t, соответствующее кортежу $\langle y_0, y_1, \ldots, y_x\rangle$, удовлетворяет неравенству: $t \leqslant \tau(y, x+1)$, так как, очевидно: $y_i \leqslant \leqslant y$ $(i = 0, 1, \ldots, x)$. Следовательно, (8) можно переписать так:

$$[\langle x, y\rangle \in G_h] = \underset{t \leqslant \tau(y,\, x+1)}{(\exists t)} \big[(\iota_1(t) = x+1)\ \& (\underset{i \leqslant x}{\forall i})(\iota_2(t, i+1) = \\ = g(i))\ \& \Big(y = \sum_{i=0}^{i=x} \iota_2(t, i+1) + x\Big)\Big]. \qquad (9)$$

По определению примитивно-рекурсивного отображения множества N на множество N^∞ существуют такие примитивно-рекурсивные функции ι_1^*, ι_2^*, что $\iota_1(t) = \iota_1^*(t)$ для $t > 0$, а $\iota_2(t, i) = \iota_2^*(t, i)$ для $t > 0$ и i: $1 \leqslant i \leqslant \iota_1(t)$. Заменим в (9) ι_1 на ι_1^*, ι_2 на ι_2^*, переписав предварительно равенство $\iota_2(t, i+1) = g(i)$ в виде: $\langle i, \iota_2(t, i+1)\rangle \in G_g$.

$$[\langle x, y\rangle \in G_h] = \\ = \underset{t \leqslant \tau(y,\, x+1)}{(\exists t)} \big[(\iota_1^*(t) = x+1)\ \& (\underset{i \leqslant x}{\forall i})(\langle i, \iota_2^*(t, i+1)\rangle \in G_g)\ \& \\ \& \Big(y = \sum_{i=0}^{i=x} \iota_2^*(t, i+1) + x\Big)\Big]. \qquad (10)$$

Из примитивно-рекурсивности функций ι_1^*, ι_2^* и τ, из примитивно-рекурсивности графика G_g функции g, в силу следствия леммы 1 из п. 3 § 4 и в силу теорем 10 из § 4, 11 из § 4, 12 из § 4 и 13 из § 4, предикат „$\langle x, y\rangle \in G_h$“, а значит, и график G_h примитивно-рекурсивен.

Пример 12. *Пример бесконечного примитивно-рекурсивного множества, прямой пересчет которого не примитивно-рекурсивен* *) (ср. со следствием теоремы 16 из § 4).

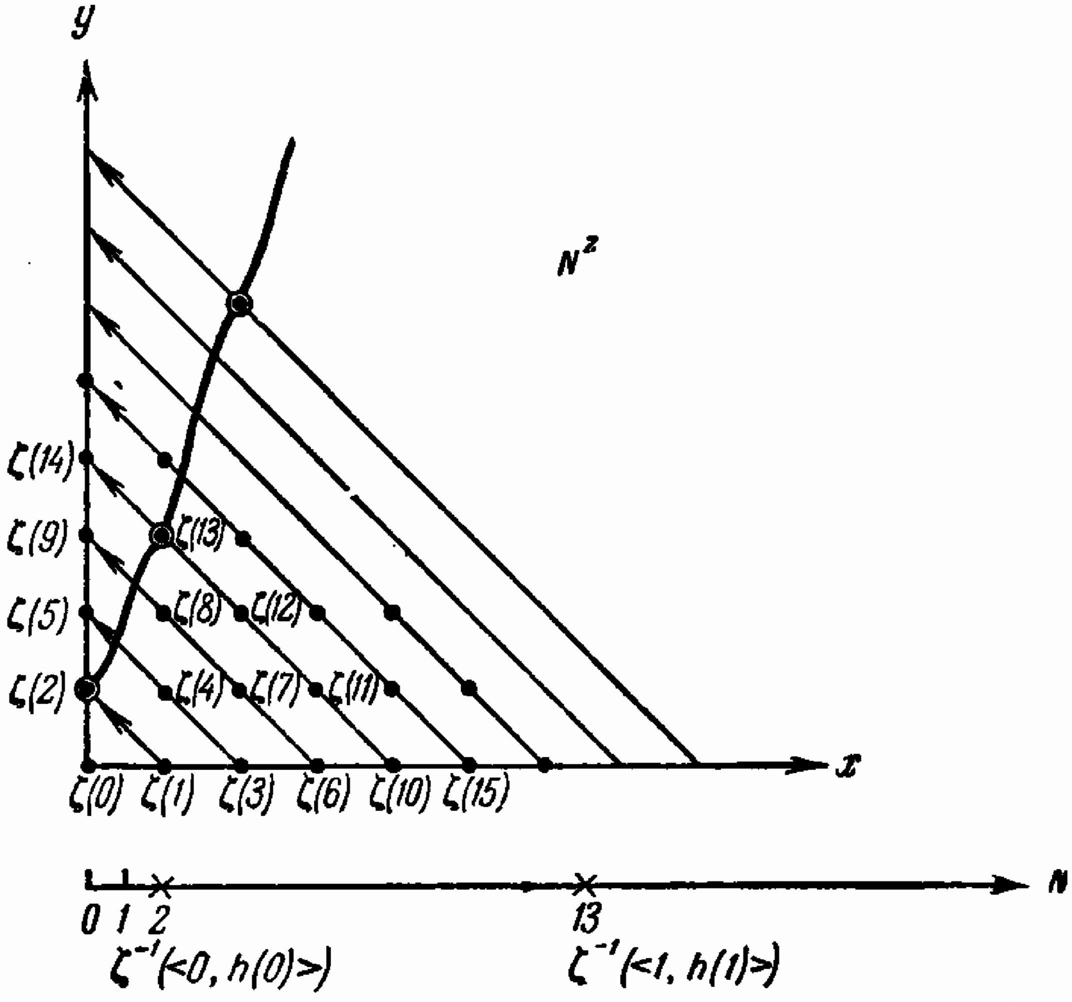


Рис. 16.

Пусть $h^{(1)}$ — неубывающая всюду определенная не примитивно-рекурсивная функция с примитивно-рекурсивным графиком. Как показано в примере 11, такая функция существует. Обозначим через ζ некоторое специальное взаимно-однозначное отображение множества N на N^2, заданное согласно рисунку 16. Функции $\varkappa_1^{[2]}$, $\varkappa_2^{[2]}$, осуществляющие это отображение, примитивно-рекурсивны,

*) Первый пример такого множества построил А. В. Кузнецов [1950].

поскольку, как легко проверить,

$$\begin{cases} \varkappa_1^{[2]}(0)=0, \\ \varkappa_1^{[2]}(t+1)=[\operatorname{sg}\varkappa_1^{[2]}(t)]\cdot[\varkappa_1^{[2]}(t)\dot{-}1]+ \\ \qquad\qquad + [\overline{\operatorname{sg}}\,\varkappa_1^{[2]}(t)]\cdot[(\nu z)_{z<t}(\varkappa_1^{[2]}(z)=0)+1]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varkappa_2^{[2]}(0)=0, \\ \varkappa_2^{[2]}(t+1)=[\operatorname{sg}\varkappa_1^{[2]}(t)]\cdot[\varkappa_2^{[2]}(t)+1]. \end{cases}$$

Следовательно, отображение ζ примитивно-рекурсивно. Рассмотрим в N^2 множество G_h — график функции h. Его полный прообраз при отображении ζ: $L=\zeta^{-1}(G_h)$ — и будет искомым множеством. Множество L — бесконечное, так как G_h — бесконечное множество (функция h всюду определена). Оно примитивно-рекурсивно, как полный прообраз примитивно-рекурсивного множества G_h (следствие теоремы 9 из § 4). Остается доказать, что прямой пересчет ϱ множества L не будет примитивно-рекурсивным. Поскольку функция h неубывающая и в силу специального выбора отображения ζ, прообразы точек графика G_h: $\langle 0,\ h(0)\rangle$, $\langle 1,\ h(1)\rangle$, $\langle 2,\ h(2)\rangle$, ... тоже расположатся в N в порядке возрастания (см. рис.16). Поэтому будет иметь место равенство

$$h(x)=\varkappa_2^{[2]}(\varrho(x)). \tag{11}$$

Если бы прямой пересчет ϱ был примитивно-рекурсивным, из (11) следовала бы примитивно-рекурсивность функции h.

Пример 13. *Пример взаимно-однозначного примитивно-рекурсивного отображения множества N на N, для которого обратное отображение не примитивно-рекурсивно* *).

Пусть L_1 — бесконечное примитивно-рекурсивное множество в N, прямой пересчет ϱ_1 которого не примитивно-рекурсивен. Как показано в примере 12, такое множество существует. Возьмем множество $L_2=N\setminus L_1$. Оно будет бесконечным. Докажем это. Допустим, что L_2 — конечное множество. Тогда у него есть наибольший элемент. Обо-

*) Первый пример такого отображения построил А. В. Кузнецов [1950].

значим этот наибольший элемент через a. Обозначим числа, меньшие, чем a, и принадлежащие к L_1, через $b_1, b_2, \ldots, b_s$ ($b_1 < b_2 < \ldots < b_s$, $0 \leqslant s \leqslant a$). Прямой пересчет ϱ_1 множества L_1 равен тогда:

$$\varrho_1(x) = \\ = \begin{cases} b_1 & x = 0 \\ b_2 & x = 1 \\ \vdots & \\ b_s & x = s-1 \\ a+1 & x = s \\ a+2 & x = s+1 \\ a+3 & x = s+2 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad \text{или}\ \varrho_1(x) = \begin{cases} b_1 & x = 0 \\ b_2 & x = 1 \\ \vdots & \\ b_s & x = s-1 \\ a + (x \dot{-} s) + 1 & x \geqslant s \end{cases} \tag{12}$$

По следствию теоремы 15 из § 4 прямой пересчет ϱ_1 будет тогда примитивно-рекурсивным. Итак, L_2 — бесконечное и, в силу следствия 1 теоремы 3 из § 4, примитивно-рекурсивное множество. Обозначим прямой пересчет множества L_2 через ϱ_2. Определим функцию φ равенствами:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2t, \text{ где } t \text{ — то (единственное) число, для} \\ \qquad \text{которого } \varrho_1(t) = x, \text{ если } x \in L_1, \\ 2t+1, \text{ где } t \text{ — то (единственное) число,} \\ \qquad \text{для которого } \varrho_2(t) = x, \text{ если } x \in L_2. \end{cases} \tag{13}$$

Легко видеть, что функция φ задает взаимно-однозначное отображение N на N (так как L_1 и L_2 — бесконечные множества, а ϱ_1, ϱ_2 — их прямые пересчеты). Если равенства (13) переписать в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2g_1(x), & x \in L_1, \\ 2g_2(x) + 1, & x \in L_2, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$g_1(x) = (\nu i)_{i<x} [i \in L_1], \quad g_2(x) = (\nu i)_{i<x} [i \in L_2],$$

то из примитивно-рекурсивности L_1, L_2 и из следствий теорем 14 из § 4 и 8 из § 4 следует примитивно-рекурсивность функции φ, а значит, и примитивно-рекурсивность задаваемого ею отображения. Поскольку отображение, задаваемое функцией φ, — взаимно-однозначное, можно говорить об обратном отображении. Обозначим функцию, задающую обратное отображение, через ψ. Легко видеть, что прямой пересчет ϱ_1 множества L_1 и функция ψ связаны равенством: $\varrho_1(t) = \psi(2t)$. Следовательно, функция ψ, а значит, и задаваемое ею обратное отображение не примитивно-рекурсивны. Итак, две взаимно-обратные функции: φ и ψ, построенные только что, обладают тем свойством, что функция φ примитивно-рекурсивна, а функция ψ — нет.

Пример 14. *Пример взаимно-однозначного примитивно-рекурсивного отображения множества N^r на N^s, для которого обратное отображение не примитивно-рекурсивно.*

Устроим сначала примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между N^r и N (теорема 19 из § 4). Затем отобразим N на N примитивно-рекурсивно и взаимно-однозначно, но так, чтобы обратное отображение не было примитивно-рекурсивным. В примере 13 показано, что такое отображение существует. Потом возьмем примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между N и N^s (теорема 19 из § 4). Тем самым мы получим искомое отображение (см. схему).

$$\begin{tikzcd}
N^r \arrow[r, leftrightarrow, "\varkappa^{[r]}", "\text{прим.-рек.}"'] \arrow[rrr, bend right, "\text{искомое}"'] & N \arrow[r, "\text{прим.-рек.}"'] & N \arrow[l, dashed, bend right, "\text{не прим.-рек.}"'] \arrow[r, leftrightarrow, "\varkappa^{[s]}", "\text{прим.-рек.}"'] & N^s
\end{tikzcd}$$

Пример 15. *Пример взаимно-однозначного примитивно-рекурсивного отображения N на N^∞, для которого обратное отображение не примитивно-рекурсивно.*

Устроим сначала примитивно-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между N и N^∞ (теорема 21 из

§ 4). Затем отобразим N на N примитивно-рекурсивно и взаимно-однозначно, но так, чтобы обратное отображение не было примитивно-рекурсивным (пример 13). Тем самым мы получим искомое отображение (см. схему).

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\text{прим.-рек.}"'] \arrow[rr, bend right, "\text{искомое}"'] & N \arrow[l, dashed, bend right, "\text{не прим.-рек.}"'] \arrow[r, leftrightarrow, "\text{прим.-рек.}"'] & N^{\infty}
\end{tikzcd}$$

Пример 16. *Пример взаимно-однозначного примитивно-рекурсивного отображения* N^{∞} *на* N, *для которого обратное отображение не примитивно-рекурсивно* (см. схему).

$$\begin{tikzcd}
N^{\infty} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{прим.-рек.}"'] \arrow[rr, bend right, "\text{искомое}"'] & N \arrow[r, "\text{прим.-рек.}"'] & N \arrow[l, dashed, bend right, "\text{не прим.-рек.}"']
\end{tikzcd}$$

Пример 17. *Пример обще-рекурсивной функции с не примитивно-рекурсивным графиком* *).

Такова, в силу замечания после следствия 1 теоремы 6 из § 4, характеристическая функция любого обще-рекурсивного, но не примитивно-рекурсивного множества (примеры 4, 5).

*) Первый пример такой функции построил Э. Л. Пост [1946].

§ 9. ФУНКЦИЯ, УНИВЕРСАЛЬНАЯ ДЛЯ ЧАСТИЧНО-РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ, И МНОЖЕСТВО, УНИВЕРСАЛЬНОЕ ДЛЯ РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

В п. 1 настоящего параграфа для каждого s строится частично-рекурсивная функция, «содержащая в себе» все частично-рекурсивные функции от s аргументов в том же смысле, в каком функция, построенная в предыдущем параграфе, «содержит в себе» все примитивно-рекурсивные функции от s аргументов. Как и в предыдущем параграфе, из факта существования такой функции извлекается (в п. 2) ряд важных примеров — на этот раз объектов (функций, множеств, предикатов, отображений), отдельные «характеристики» которых не частично-рекурсивны, или не обще-рекурсивны, или не рекурсивно-перечислимы. Среди этих примеров — пример конкретной не частично-рекурсивной функции и важнейший пример рекурсивно-перечислимого, но не обще-рекурсивного множества. На основе построенной в п. 1 универсальной функции, в п. 3 строятся, во-первых, рекурсивно-перечислимое множество, «содержащее в себе» все рекурсивно-перечислимые множества (такое множество также могло бы служить основой для построения большинства примеров п. 2 да и самой универсальной функции), и, во-вторых, пара рекурсивно-перечислимых множеств, «содержащая в себе» все пары рекурсивно-перечислимых множеств. Кроме того, в п. 1 усиливается доказанная в § 6 теорема о нормальной форме; именно, оказывается, что каждая частично-рекурсивная функция f может быть получена двумя подстановками и одним применением оператора μ из трех объектов: двух примитивно-рекурсивных функций и одного натурального числа, причем среди этих трех объектов только натуральное число зависит от функции f.

1. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Через $\mathcal{U}$ мы обозначили класс всех частично-рекурсивных функций. Обозначим через $\mathcal{U}^{(s)}$ класс всех частично-рекурсивных функций от s аргументов ($s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$). Таким образом,

$$\mathcal{U}=\bigcup_{s=0}^{\infty}\mathcal{U}^{(s)}. \tag{1}$$

Аналогично через $\mathcal{O}^{(s)}$ обозначим класс всех обще-рекурсивных функций от s аргументов.

В этом пункте нас будут интересовать функции, универсальные для классов $\mathcal{U}^{(s)}$ и $\mathcal{O}^{(s)}$.

Существование функции, универсальной для класса $\mathcal{U}^{(s)}$, так же тривиально, как существование функции, универсальной для класса $\mathcal{T}^{(s)}$, поскольку частично-рекурсивных функций счетное множество (следствие 1 теоремы 1 из § 6) — см. рассуждение на стр. 204. Существование функции $\Psi^{(s+1)}$, универсальной для класса $\mathcal{U}^{(s)}$, с какими-нибудь дополнительными свойствами, например — частично-рекурсивной функции $\Psi^{(s+1)}$, требует, конечно, специальных построений.

Теорема 1. *Для любого $s\geqslant 0$ существует* ***частично-рекурсивная*** *функция $\Psi^{(s+1)}$, универсальная для класса $\mathcal{U}^{(s)}$ частично-рекурсивных функций от s аргументов.*

Доказательство. Возьмем какую-нибудь обще-рекурсивную функцию $\Phi^{(s+2)}$, универсальную для класса $\mathcal{T}^{(s+1)}$. Такая функция существует по теореме 4 из § 8. Возьмем также какую-нибудь примитивно-рекурсивную функцию большого размаха $\varphi^{(1)}$. Докажем, что искомой частично-рекурсивной функцией, универсальной для класса $\mathcal{U}^{(s)}$ частично-рекурсивных функций от s аргументов, будет функция $\Psi^{(s+1)}$, определяемая равенством

$$\Psi(n,\ x_1,\ \ldots,\ x_s)=\varphi\left((\mu t)\left[\Phi(n,\ x_1,\ \ldots,\ x_s,\ t)=0\right]\right). \tag{2}$$

Прежде всего, ясно, что функция Ψ, определяемая равенством (2), частично-рекурсивна. Возьмем теперь произвольную функцию $f^{(s)} \in \mathcal{Ч}^{(s)}$. По Слабой теореме о нормальной форме (теорема 4 из § 6) для частично-рекурсивной функции $f^{(s)}$ и примитивно-рекурсивной функции большого размаха $\varphi^{(1)}$ найдется такая примитивно-рекурсивная функция $\tau^{(s+1)}$, что

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi((\mu t)[\tau(x_1, \ldots, x_s, t) = 0]). \tag{3}$$

Возьмем такое n_τ, что для всех $\langle x_1, \ldots, x_s, t\rangle$

$$\tau(x_1, \ldots, x_s, t) = \Phi(n_\tau, x_1, \ldots, x_s, t). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что при $n = n_\tau$

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi((\mu t)[\Phi(n_\tau, x_1, \ldots, x_s, t) = 0]). \tag{5}$$

Следовательно, если в качестве n_f взять n_τ, из (5) и (2) будет следовать

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \Psi(n_f, x_1, \ldots, x_s).$$

Замечание 1. *Частично-рекурсивная функция $\Psi^{(s+1)}$, универсальная для класса $\mathcal{Ч}^{(s)}$ частично-рекурсивных функций от s аргументов, не является обще-рекурсивной,* поскольку она не является всюду определенной. А всюду определенной она не является потому, что из нее при фиксировании первого аргумента получаются все частично-рекурсивные функции, в том числе и не всюду определенные (например, при некотором n из нее получается нигде не определенная функция).

Замечание 2. *Частично-рекурсивная функция $\Psi^{(s+1)}$, универсальная для класса $\mathcal{Ч}^{(s)}$ частично-рекурсивных функций от s аргументов, является одновременно универсальной и для класса $\mathcal{O}^{(s)}$ обще-рекурсивных функций от s аргументов и для класса $\mathcal{П}^{(s)}$ примитивно-рекурсивных функций от s аргументов ($\mathcal{П}^{(s)} \subset \mathcal{O}^{(s)} \subset \mathcal{Ч}^{(s)}$).*

Замечание 3. Частично-рекурсивную функцию $\Psi^{(s+1)}$, универсальную для $\mathcal{Ч}^{(s)}$, можно получить сразу из частично-рекурсивной функции $\Psi^{(2)}$, универсальной для $\mathcal{Ч}^{(1)}$, при помощи равенства

$$\Psi^{(s+1)}(n, x_1, \ldots, x_s) = \Psi^{(2)}(n, \varkappa_0^{[s]}(x_1, \ldots, x_s)). \tag{6}$$

Здесь $\varkappa_0^{[s]}$ – функция, осуществляющая (вместе с функциями $\varkappa_1^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}$) произвольное обще-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между N и N^s (теорема 32 из § 7). Доказательство проводится дословно так же, как в замечании 3 на стр. 236, 237.

Легкой модификацией доказательства теоремы 1 может быть получена Сильная теорема о нормальной форме (теорема 2), являющаяся усилением Слабой теоремы о нормальной форме (теорема 4 из § 6).

Теорема 2 *). (Сильная теорема о нормальной форме.) *Для любого положительного s и для любой примитивно-рекурсивной функции большого размаха φ существует примитивно-рекурсивная функция $\tau^{(s+2)}$ такая, что для любой частично-рекурсивной функции $f^{(s)}$ найдется такое n, что имеет место равенство* **)

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi((\mu t)[\tau(n, x_1, \ldots, x_s, t) = 0]). \tag{7}$$

Усиление в только что сформулированной Сильной теореме о нормальной форме по сравнению со Слабой теоремой о нормальной форме состоит в следующем. Слабая теорема о нормальной форме утверждала, что при фиксированном s для всякой функции $f^{(s)} \in \mathscr{Ч}^{(s)}$ найдется функция $\tau^{(s+1)} \in \mathscr{П}^{(s+1)}$ такая, что ..., т. е. для каждой функции $f^{(s)} \in \mathscr{Ч}^{(s)}$ подыскивалась своя функция из $\mathscr{П}$. Сильная же теорема о нормальной форме утверждает, что при фиксированном s найдется функция $\tau^{(s+2)} \in \mathscr{П}^{(s+2)}$ такая, что для всякой функции $f^{(s)} \in \mathscr{Ч}^{(s)} \ldots$, т. е. ищется одна функция из $\mathscr{П}$, годная сразу для всех функций из $\mathscr{Ч}^{(s)}$.

---

*) Для некоторой фиксированной примитивно-рекурсивной функции большого размаха φ эту теорему доказал С. К. Клини ([1943], теорема 4; см. также [1952], § 63, теорема XIX). Произвольность выбора функции φ вытекает, как показывает приводимое ниже доказательство, из произвольности выбора функции φ в Слабой теореме о нормальной форме (теорема 4 из § 6).

**) Напомним, что в силу соглашения на стр. 30 равенство $f(x_1, \ldots, x_s) = g(x_1, \ldots, x_s)$ между двумя не всюду определенными функциями f и g мы всегда понимаем «в обе стороны»: если f определена на $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$, то и g определена на $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$ и $f(x_1, \ldots, x_s) = g(x_1, \ldots, x_s)$ и обратно: если g определена на $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$, то и f определена на $\langle x_1, \ldots, x_s \rangle$ и $f(x_1, \ldots, x_s) = g(x_1, \ldots, x_s)$.

На языке математической логики разница между Слабой теоремой о нормальной форме и Сильной теоремой о нормальной форме выражается так: в Сильной теореме некоторый квантор существования ставится перед квантором общности, а в Слабой теореме тот же квантор существования ставится за квантором общности *). А именно: Слабую теорему можно записать так:

$$(\forall s \in N\setminus\{0\})\,(\forall \varphi \in Б)\,\underline{(\forall f \in \mathcal{U}^{(s)})}\,\underline{(\exists \tau \in \mathcal{P}^{(s+1)})}\,[f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi((\mu t)\,[\tau(x_1, \ldots, x_s, t) = 0])].$$

(Через $Б$ мы обозначили здесь множество примитивно-рекурсивных функций большого размаха; $Б \subseteq \mathcal{P}^{(1)}$.) Сильная теорема в тех же обозначениях записывается так:

$$(\forall s \in N\setminus\{0\})\,(\forall \varphi \in Б)\,\underline{(\exists \tau \in \mathcal{P}^{(s+2)})}\,\underline{(\forall f \in \mathcal{U}^{(s)})}\,(\exists n)\,[f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi((\mu t)\,[\tau(n, x_1, \ldots, x_s, t) = 0])].$$

Доказательство. Фиксируем произвольное положительное s и произвольную примитивно-рекурсивную функцию большого размаха φ. Возьмем какую-нибудь частично-рекурсивную функцию $\Psi^{(s+1)}$, универсальную для частично-рекурсивных функций из $\mathcal{U}^{(s)}$ (такая функция существует по теореме 1). Для фиксированных нами частично-рекурсивной функции $\Psi^{(s+1)}$ и примитивно-рекурсивной функции большого размаха φ существует — по Слабой теореме о нормальной форме (теорема 4 из § 6) — такая примитивно-рекурсивная функция $\tau^{(s+2)}$, что

$$\Psi(n, x_1, \ldots, x_s) = \varphi((\mu t)\,[\tau(n, x_1, \ldots, x_s, t) = 0]). \tag{8}$$

Эта функция $\tau^{(s+2)}$ — искомая. Действительно. Возьмем произвольную частично-рекурсивную функцию $f^{(s)}$. По определению универсальной функции найдется такое n, что

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \Psi(n, x_1, \ldots, x_s). \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует (7). Теорема доказана.

Всюду дальше через $\Psi^{(s+1)}$ мы будем обозначать произвольную частично-рекурсивную функцию, универсальную для класса $\mathcal{U}^{(s)}$ частично-рекурсивных функций от s аргументов. Такая функция существует по теореме 1.

---

*) Ср. с утверждением II на стр. 75.

Теорема 3. *Ни для какого $s \geqslant 1$ не существует обще-рекурсивной функции, универсальной для класса $\mathfrak{O}^{(s)}$ обще-рекурсивных функций от s аргументов.*

Доказательство. Доказательство, ради простоты записи, проведем для $s=1$. Допустим, что существует обще-рекурсивная функция $\Theta^{(2)}$, универсальная для класса $\mathfrak{O}^{(1)}$ обще-рекурсивных функций от одного аргумента. Тогда и функция f: $f(x)=\Theta(x, x)$ также будет обще-рекурсивной. А тогда и функция g: $g(x)=f(x)+1= =\Theta(x, x)+1$ также будет обще-рекурсивной. Следовательно, при некотором n должно выполняться равенство

$$\Theta(n, x)=g(x), \tag{10}$$

$$\Theta(n, x)=\Theta(x, x)+1. \tag{10'}$$

Левая и правая части равенств (10) и (10′) определены при всех x, так как функции Θ и g обще-рекурсивны. При $x=n$ из (10′) получаем противоречие

$$\Theta(n, n)=\Theta(n, n)+1.$$

Для $s>1$ доказательство проводится совершенно аналогично.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что *если $\Theta^{(2)}$ — функция, универсальная для обще-рекурсивных функций из $\mathfrak{O}^{(1)}$, то функция f: $f(x)=\Theta(x, x)$ — не обще-рекурсивна*. В частности, *функция f: $f(x)=\Psi(x, x)$ — не обще-рекурсивна* (см. замечание 2 после теоремы 1).

Мы уже дважды — в теореме 3 и в теореме 5 из § 8 — применением «диагонального метода» (переход от $\Phi(n, x)$ к $\Phi(x, x)$ и от $\Theta(n, x)$ к $\Theta(x, x)$) доказывали, что функция, универсальная для некоторого класса, не может принадлежать к тому же классу. Но у нас построена частично-рекурсивная функция $\Psi^{(s+1)}$, универсальная для класса частично-рекурсивных функций $\mathfrak{Y}^{(s)}$. В чем же дело? А что будет, если и в этом случае применить тот же диагональный метод? Попробуем.

Возьмем частично-рекурсивную функцию $\Psi^{(2)}$, универсальную для класса частично-рекурсивных функций от одного аргумента. Введем функции f: $f(x)=\Psi(x, x)$ и g: $g(x)=f(x)+1=\Psi(x, x)+1$. Функция g частично-рекурсивна. Следовательно, при некотором n будет иметь место равенство:

$$\Psi(n, x) = g(x), \tag{11}$$

$$\Psi(n, x) = \Psi(x, x) + 1. \tag{11'}$$

Но левая и правая части равенства (11) или (11′) определены уже не для любого x, но только для x из области определения функции g. И подставляя в (11′) $x = n$, мы не получаем противоречия: мы только вынуждены сделать вывод, что функция Ψ не определена на паре $\langle n, n\rangle$, где n — число, соответствующее частично-рекурсивной функции g.

Докажем теорему, являющуюся усилением замечания после теоремы 3.

Теорема 4. *Если $\Theta^{(2)}$ — функция, универсальная для обще-рекурсивных функций из $\Theta^{(1)}$, то функции f_1: $f_1(x) = \Theta(x, x)$ и f_2: $f_2(x) = \overline{\mathrm{sg}}\,\Theta(x, x)$ не могут быть продолжены до обще-рекурсивной* *).

Доказательство. Заметим, что непродолжаемость функции f_1 тривиально следует из непродолжаемости функции f_2, и докажем, что функция f_2 непродолжаема. Предположим, что функцию f_2: $f_2(x) = \overline{\mathrm{sg}}\,\Theta(x, x)$ можно продолжить до обще-рекурсивной функции $h^{(1)}$. Функция h обще-рекурсивна. Следовательно, при некотором n будет иметь место равенство

$$\Theta(n, x) = h(x). \tag{12}$$

Левая и правая части равенства (12) определены при всех x, так как функция h обще-рекурсивна. При $x = n$ из (12) получаем:

$$\Theta(n, n) = h(n). \tag{13}$$

Значит, функция Θ определена на паре $\langle n, n\rangle$. А тогда и функция f_2 определена при $x = n$. Следовательно, n входит в область определения функции f_2. Значит,

$$f_2(n) = h(n). \tag{14}$$

---

*) Говорят, что функция h является *продолжением* функции f, если $h(a) = f(a)$ для любого a из области определения функции f.

Но

$$f_2(n) = \overline{\mathrm{sg}}\,\Theta(n, n). \tag{15}$$

Из (14), (15) и (13) получаем противоречие:

$$\Theta(n, n) = \overline{\mathrm{sg}}\,\Theta(n, n).$$

2. ВАЖНЫЕ ПРИМЕРЫ

Пример 1. *Примеры частично-рекурсивных функций, не продолжаемых до обще-рекурсивной* *).

a) Возьмем какую-нибудь частично-рекурсивную функцию $\Theta^{(2)}$, универсальную для класса $\mathcal{O}^{(1)}$. Функция $f_1^{(1)}$, заданная равенством $f_1(x) = \Theta(x, x)$, будет частично-рекурсивной и, в силу теоремы 4, не продолжаемой до обще-рекурсивной функции. В частности, в силу замечания 2 после теоремы 1, такой функцией будет функция f, заданная равенством $f(x) = \Psi^{(2)}(x, x)$.

b) Положим $f_2(x) = \overline{\mathrm{sg}}\,\Theta(x, x)$, где $\Theta^{(2)}$ — частично-рекурсивная функция, универсальная для класса $\mathcal{O}^{(1)}$. В силу теоремы 4, функция f_2 не может быть продолжена до обще-рекурсивной. Заметим, что функция f_2 принимает только значения 0 и 1. Таким образом, мы построили пример такой частично-рекурсивной функции, не продолжаемой до обще-рекурсивной, которая принимает лишь д в а значения.

Теперь мы в состоянии построить индивидуальный пример не частично-рекурсивной функции. Пока мы только из теоретико-множественных соображений знаем, что такие функции существуют (см. следствие 1 теоремы 1 из § 6).

Пример 2. *Примеры не частично-рекурсивных функций.*

a) *Пример всюду определенной не частично-рекурсивной функции* (см. еще примеры 10, 11).

Возьмем какую-нибудь частично-рекурсивную функцию $f^{(1)}$, не продолжаемую до обще-рекурсивной функции

---

*) Первый пример такой функции построен С. К. Клини (см. [1938], третье подстрочное примечание). Построение, проводимое в примере 1a (а также в примере 2a), принадлежит А. Н. Колмогорову [1954].

(как показано в примере 1, такая функция существует). Обозначим через D_f область определения функции f. Определим функцию Ω «кусочно»:

$$\Omega(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f, \\ 0 & x \in N \setminus D_f. \end{cases} \tag{1}$$

Функция Ω является продолжением функции f и, следовательно, не обще-рекурсивна. Но функция Ω всюду определена. Значит, она не частично-рекурсивна. Итак, функция Ω — искомая. В частности, функция Ω, заданная схемой

$$\Omega(x) = \begin{cases} \Psi(x, x), \text{ если } \Psi \text{ определена на кортеже } \langle x, x\rangle, \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{в противном случае}, \end{cases} \tag{1'}$$

всюду определена и не частично-рекурсивна.

b) *Пример всюду определенной строго возрастающей не частично-рекурсивной функции.*

Пусть $f^{(1)}$— всюду определенная не частично-рекурсивная функция (пример 2а). Тогда функция $g^{(1)}: g(x) = \sum\limits_{i=0}^{i=x} f(i) + x$— искомая.

c) *Пример всюду определенной однолистной не частично-рекурсивной функции.*

Такой является, например, любая функция, существование которой утверждается примером 2b.

d) *Пример всюду определенной не частично-рекурсивной функции, все множества уровня которой обще-рекурсивны.*

Такой является, например, любая функция, существование которой утверждается примером 2с (любое ее множество уровня либо пусто, либо состоит из одной точки).

e) *Пример функции, не продолжаемой до частично-рекурсивной* (и, тем более, не частично-рекурсивной).

Во-первых, любая всюду определенная не частично-рекурсивная функция (см. пример 2а) тривиальным образом не продолжаема до частично-рекурсивной (ее «некуда продолжать»). Во-вторых, если f — произвольная не частично-рекурсивная функция, то функция $g^{(1)}: g(x) = f(x-1)$ —не продолжаема до частично-рекурсивной (хотя ее «есть куда продолжать» — она не определена в 0).

Вследствие Основной гипотезы (стр. 157), класс частично-рекурсивных функций совпадает с классом интуитивно-вычислимых функций. Функция f из примера 1 частично-рекурсивна и, следовательно, интуитивно-вычислима. Функция Ω из примера 2а (см. (1)) не частично-рекурсивна и, значит, не интуитивно-вычислима. Постараемся понять, почему результат продолжения интуитивно-вычислимой функции f — функция Ω — не интуитивно-вычислим. Что означает — «функция f интуитивно-вычислима»? Это значит, что существует алгоритм, который, будучи примененным к x, для которого $f(x)$ определено, вычислит нам после какого-то, заранее не известного и ничем не ограниченного числа шагов значение $f(x)$. Если же этот алгоритм будет применен к такому x, на котором $f(x)$ не определено, то мы не знаем, что будет. Быть может, например, алгоритм будет работать бесконечно, и мы не будем знать, то ли мы не проделали еще достаточного числа шагов для вычисления $f(x)$, то ли $f(x)$ не определено. Легко понять тогда, что из алгоритма вычисления $f(x)$ нельзя построить алгоритм вычисления $\Omega(x)$. В самом деле. Берем x. Мы не знаем: определено ли $f(x)$, или нет. Пробуем применить алгоритм вычисления $f(x)$. Допустим, что мы проделали 1000 шагов работы алгоритма и не получили результата. Мы по-прежнему не знаем: то ли $f(x)$ не определено, мы считаем зря и $\Omega(x)=0$, то ли мы уже близки к цели и на каком-нибудь 1001-м, 1010-м, 1050-м шагу мы вычислим $\Omega(x)=f(x)$. Проделаем 1 000 000 шагов работы алгоритма. Если мы еще не получим результата, то мы окажемся абсолютно в том же положении. «Всех» шагов работы алгоритма мы принципиально проделать не можем: число шагов работы алгоритма ничем сверху не ограничено. И поскольку алгоритм вычисления $f(x)$ вовсе не предполагает способности распознавать, определено ли $f(x)$ или нет, постольку он нам не дает никакой возможности построить алгоритм, всегда вычисляющий (функция Ω всюду определена) $\Omega(x)$.

П р и м е р 3. *Пример частично-рекурсивной функции, область определения которой не обще-рекурсивна* (см. еще пример 15).

Пусть $f^{(1)}$ — частично-рекурсивная функция, не продолжаемая до обще-рекурсивной (см. пример 1). Тогда область определения D_f функции f не обще-рекурсивна, ибо в противном случае функция $\Omega^{(1)}$:

$$\Omega(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \\ 0 & x \in N \setminus D_f \end{cases}$$

была бы обще-рекурсивным (теорема 7 из § 6) продолжением функции f, что противоречило бы выбору f. Итак, функция f — искомая. Вспоминая интуитивный смысл понятий «частично-рекурсивная функция» и «обще-рекурсивное множество», мы можем сказать, что хотя функция f и вычислима, не существует алгоритма, распознающего по произвольному числу, определена она на нем или нет.

Пример 4. *Пример рекурсивно-перечислимого, но не обще-рекурсивного множества* *).

Возьмем какую-либо частично-рекурсивную функцию f, область определения D_f которой не обще-рекурсивна. Существование такой функции доказано в примере 3. В силу следствия 4 теоремы 5 из § 6, множество D_f рекурсивно-перечислимо.

Замечание. В частности, полагая $f(x) = \Psi^{(2)}(x, x)$ (см. примеры 1 и 3), получим, что множество тех x, для которых функция $\Psi^{(2)}$ определена на кортеже $\langle x, x\rangle$, рекурсивно-перечислимо, но не обще-рекурсивно. Но, как показывает равенство (2) из п. 1, $\Psi^{(2)}$ тогда и только тогда определена на кортеже $\langle x, x\rangle$, когда существует такое t, что $\Phi^{(3)}(x, x, t) = 0$. Поэтому множество

$$\mathscr{E}\{x \in N \mid \text{Существует } t, \text{ для которого } \Phi^{(3)}(x, x, t) = 0\}$$

рекурсивно-перечислимо, но не обще-рекурсивно.

Итак, существуют рекурсивно-перечислимые, но не обще-рекурсивные множества. Это обстоятельство, в сочетании с соотношениями (2) из п. 1 § 7 и (4) из п. 3

*) Факт существования рекурсивно-перечислимого, но не обще-рекурсивного множества (пример 4) или, что то же самое, рекурсивно-перечислимого множества с не рекурсивно-перечислимым дополнением (пример 5) является одним из центральных фактов теории алгоритмов и вычислимых функций. Первый пример такого множества был построен А. Чёрчем [1936]. Из существования такого множества могут быть, по-видимому, извлечены все известные в математике примеры несуществования алгоритмов.

§ 8, дает следующее окончательное соотношение:

$$\Pi \subset O \subset P. \tag{2}$$

Пример 5. *Пример рекурсивно-перечислимого множества, дополнение к которому не рекурсивно-перечислимо*).*

Таковым является любое рекурсивно-перечислимое, но не обще-рекурсивное множество R (существующее в силу примера 4).

Пример 6. *Примеры не рекурсивно-перечислимых множеств.*

a) *Пример не рекурсивно-перечислимого множества с рекурсивно-перечислимым дополнением.*

Таково дополнение к множеству, существование которого утверждается примером 5.

b) *Пример не рекурсивно-перечислимого множества, дополнение к которому не рекурсивно-перечислимо.*

Пусть L_1 — рекурсивно-перечислимое, но не обще-рекурсивное множество в N. Такие множества существуют, как показано в примере 4. Множество $L_2 = N \setminus L_1$ не рекурсивно-перечислимо.

Возьмем обще-рекурсивную функцию f_1: $f_1(x) = 2x$ и рассмотрим отображение f_1 множества N в N, осуществляемое функцией f_1. Для образа произвольного подмножества $M \subseteq N$ при отображении f_1 введем обозначение: $f_1(M) = 2M$. Например, $2N = f_1(N)$ — это множество четных чисел. Множества $2N$ и $2L_1$ рекурсивно-перечислимы (теорема 2 из § 5 и следствие 1 теоремы 5 из § 6). Множество $2L_2 = 2N \setminus 2L_1$ не рекурсивно-перечислимо, так как его прообраз — множество $L_2 = N \setminus L_1$ — не рекурсивно-перечислим (следствие 2 теоремы 5 из § 6).

Теперь проделаем аналогичную операцию с натуральным рядом при помощи обще-рекурсивной функции f_2: $f_2(x) = 2x + 1$. Для образа произвольного множества $M \subseteq N$ при отображении f_2 множества N в N, осуществляемом функцией f_2, введем обозначение: $f_2(M) = 2M + 1$. В частности, $2N + 1$ — множество нечетных чисел. Опять по тем же теоремам множества $2N + 1$ и $2L_1 + 1$ рекурсивно-перечислимы, а множество $2L_2 + 1 =$

*) См. сноску на предыдущей странице.

$= (2N+1) \setminus (2L_1+1)$ не рекурсивно-перечислимо

$$N = 2N \bigcup (2N+1),$$
$$2N = 2L_1 \bigcup (2N \setminus 2L_1),$$
$$2N+1 = (2L_1+1) \bigcup [(2N+1) \setminus (2L_1+1)].$$

Множества $2N$, $2N+1$, $2L_1$, $2L_1+1$ рекурсивно-перечислимы. Множества $(2N \setminus 2L_1)$ и $(2N+1) \setminus (2L_1+1)$ не рекурсивно-перечислимы.

$$N = 2N \bigcup (2N+1) =$$
$$= 2L_1 \bigcup (2N \setminus 2L_1) \bigcup (2L_1+1) \bigcup [(2N+1) \setminus (2L_1+1)],$$

причем все слагаемые попарно не пересекаются. Теперь объединим слагаемые «крест-накрест»:

$$N = \{2L_1 \bigcup [(2N+1) \setminus (2L_1+1)]\} \bigcup \{(2L_1+1) \bigcup (2N \setminus 2L_1)\}.$$

Множество $L_3 = \{2L_1 \bigcup [(2N+1) \setminus (2L_1+1)]\}$ не рекурсивно-перечислимо, так как иначе было бы рекурсивно-перечислимо его пересечение с рекурсивно-перечислимым множеством $2N+1$ (теорема 4 из § 5), но $L_3 \bigcap (2N+1) = (2N+1) \setminus (2L_1+1)$. Множество $L_4 = \{(2L_1+1) \bigcup \bigcup (2N \setminus 2L_1)\}$ тоже не рекурсивно-перечислимо, так как иначе было бы рекурсивно-перечислимо его пересечение с рекурсивно-перечислимым множеством $2N$ (теорема 4 из § 5), но $L_4 \bigcap 2N = 2N \setminus 2L_1$.

Итак, $N = L_3 \bigcup L_4$, $L_3 \bigcap L_4 = \Lambda$ и множества L_3, L_4 — не рекурсивно-перечислимы. Множество L_3 (или L_4) — искомое.

с) *Еще пример не рекурсивно-перечислимого множества.*

Возьмем частично-рекурсивную функцию $\Psi^{(2)}$, универсальную для частично-рекурсивных функций из $\mathcal{U}^{(1)}$. Обозначим через L множество тех n, при которых получающаяся из функции $\Psi^{(2)}$ фиксированием первого аргумента функция h: $h(x) = \Psi(n, x)$ — всюду определена и, значит, обще-рекурсивна; короче: L — это множество номеров обще-рекурсивных функций относительно нумерации частично-рекурсивных функций, задаваемой функцией Ψ. Докажем, что множество L не рекурсивно-перечислимо. Допустим противное. Тогда существовала бы «перечисляющая» обще-рекурсивная функция $g^{(1)}$, множеством значений которой является L (теорема 23 из § 7). А тогда функция $f^{(2)}$:

$$f(m, x) = \Psi(g(m), x)$$

была бы всюду определенной и, следовательно, обще-рекурсивной функцией, универсальной для обще-рекурсивных функций из $\mathcal{O}^{(1)}$, что противоречит теореме 3.

Замечание. Множество, рассмотренное в примере 6с, не будучи рекурсивно-перечислимым, не будет и обще-рекурсивным. На интуитивном языке оно не является разрешимым, т. е. не существует алгоритма, который по номеру частично-рекурсивной функции распознавал бы, будет ли эта функция обще-рекурсивной. Для так называемых «главных» нумераций нами будет доказана в § 11 гораздо более общая теорема (теорема 9) о несуществовании алгоритма, распознающего по номеру какое бы то ни было нетривиальное свойство частично-рекурсивных функций.

Пример 7. *Пример обще-рекурсивного отображения множества N в N, при котором само N переходит в не обще-рекурсивное множество* (ср. с теоремой 11 из § 7).

Пусть L рекурсивно-перечислимое, но не обще-рекурсивное множество (см. пример 4). По теореме 23 из § 7 множество L является множеством значений некоторой обще-рекурсивной функции $f^{(1)}$. Отображение N в N, осуществляемое функцией f, — искомое.

Пример 8. *Пример обще-рекурсивного множества с не обще-рекурсивной проекцией.*

Достаточно взять любое рекурсивно-перечислимое, но не обще-рекурсивное множество (см. пример 4) и проектирующееся в него обще-рекурсивное множество (см. на стр. 143 замечание 2).

Пример 9. *Пример рекурсивно-перечислимого множества, характеристическая функция которого не частично-рекурсивна.*

Пусть L — рекурсивно-перечислимое, но не обще-рекурсивное множество (см. пример 4). Характеристическая функция множества L не частично-рекурсивна, иначе было бы противоречие с теоремой 2 из § 7. Множество L — искомое.

Пример 10. *Еще пример не частично-рекурсивной функции.*

Характеристическая функция любого рекурсивно-перечислимого, но не обще-рекурсивного множества (см. пример 4) не частично-рекурсивна и всюду определена (теорема 2 из § 7).

Пример 11. *Еще пример не частично-рекурсивной функции.*

Характеристическая функция любого не рекурсивно-перечислимого множества (см. пример 6) не частично рекурсивна и всюду определена (теорема 2 из § 7).

Пример 12. *Пример такой обще-рекурсивной функции $\varphi^{(2)}$, что множество*

$\mathscr{E}\{x \in N \mid$ Существует y, для которого $\varphi(x, y) = 0\}$
не обще-рекурсивно.

В силу замечания после примера 4, достаточно положить

$$\varphi(x, y) = \Phi^{(3)}(x, x, y).$$

Пример 13. *Пример обще-рекурсивного предиката $P_1^{(2)}$ на N^2, для которого предикат $Q_1^{(1)}$:*

$$Q_1(x) = (\exists y) P_1(x, y),$$

не является обще-рекурсивным.

В силу соотношения (23) из п. 3 § 3, достаточно положить

$$P_1(x, y) = [\langle x, y\rangle \in M],$$

где M — обще-рекурсивное множество, существование которого утверждается примером 8.

Пример 14. *Пример обще-рекурсивного предиката $P_2^{(2)}$ на N^2, для которого предикат $Q_2^{(1)}$:*

$$Q_2(x) = (\forall y) P_2(x, y),$$

не является обще-рекурсивным.

Если положить $P_2(x, y) = \overline{P_1(x, y)}$, где P_1 – предикат, существование которого утверждается в примере 13, то, в силу соотношений (11) из п. 2 § 3 и (1) из п. 2 § 3, $\overline{Q_2(x)} = Q_1(x)$, где $Q_1(x) = (\exists y) P_1(x, y)$. Ввиду теоремы 16 из § 7 и примера 13, предикат Q_2 не является обще-рекурсивным, а предикат P_2 обще-рекурсивен.

Пример 15. *Пример частично-рекурсивной функции, продолжаемой до обще-рекурсивной, но имеющей не обще-рекурсивную область определения.*

Пусть L — рекурсивно-перечислимое, но не обще-рекурсивное множество (пример 4). Тогда функция f:

$$f(x) = 1, \text{ если } x \in L,$$

искомая (ср. с функцией из примера 10).

Пример 16. *Пример не частично-рекурсивной функции, продолжаемой до обще-рекурсивной.*

Пусть L — не рекурсивно-перечислимое множество (пример 6). Тогда, ввиду следствия 4 теоремы 5 из § 6, функция f:

$$f(x) = 1, \text{ если } x \in L,$$

—искомая (ср. с функцией из примера 11).

В связи с примерами 1 и 16 некоторый интерес представляет

Пример 17. *Пример не частично-рекурсивной функции, не продолжаемой до обще-рекурсивной, но продолжаемой до частично-рекурсивной функции.*

Пусть $f^{(1)}$ — частично-рекурсивная функция, не продолжаемая до обще-рекурсивной (пример 1). Обозначим через D_f ее область определения. В силу следствия 4 теоремы 5 из § 6, D_f рекурсивно-перечислимо. Пусть L — произвольное линейное не рекурсивно-перечислимое множество (пример 6). Используем теперь обозначения, введенные в примере 6b. Множество $2D_f$ рекурсивно-перечислимо (следствие 1 теоремы 5 из § 6). Множество $2L+1$ не рекурсивно-перечислимо (следствие 1 теоремы 5 из § 6). Введем функцию $\varphi^{(1)}$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{2}\right), & x \in 2D_f; \\ 1, & x \in 2L+1. \end{cases}$$

Докажем, что функция φ — искомая. Областью определения функции φ является множество $2D_f \bigcup (2L+1)$. С помощью теоремы 4 из § 5 легко доказать, что это множество не рекурсивно-перечислимо. Следовательно, функция φ не частично-рекурсивна (следствие 4 теоремы 5 из § 6). Функция $\psi^{(1)}$:

$$\psi(x)=\begin{cases} f\left(\frac{x}{2}\right), & x\in 2D_f,\\ 1, & x\in 2N+1\ (x - \text{нечетное}),\end{cases}$$

является частично-рекурсивным (теорема 7 из § 6) продолжением функции φ. Если бы функцин φ имела обще-рекурсивное продолжение g, то функция h: $h(x)=g(2x)$ — была бы обще-рекурсивным продолжением функции f, что противоречило бы выбору f.

Пример 18. *Пример плоского не рекурсивно-перечислимого множества, пересечение которого с каждой прямой, параллельной оси x, и с каждой прямой, параллельной оси y, обще-рекурсивно.*

Пусть $f^{(1)}$ — не частично-рекурсивная функция, все множества уровня которой обще-рекурсивны. Существование такой функции доказано в примере 2d. Тогда график G_f функции f — искомое множество (теорема 3 из § 6).

Пример 19. *Пример такой всюду определенной не частично-рекурсивной функции типа $N^2\to N$, что все функции, получающиеся из нее фиксированием первого аргумента, и все функции, получающиеся из нее фиксированием второго аргумента, обще-рекурсивны.*

Пусть M — плоское множество, существование которого утверждаетсн примером 18. Тогда характеристическан функция χ_M множества M — искоман (теорема 1 из § 7).

Пример 20. *Пример не частично-рекурсивной функции $\Omega^{(2)}$, универсальной для класса $\mathcal{U}^{(1)}$, для которой всякая функция $f^{(1)}$, полученная из $\Omega^{(2)}$ фиксированием первого аргумента, частично-рекурсивна.*

Пусть $\Psi^{(2)}$ — частично-рекурсивная функция, универсальнан для класса $\mathcal{U}^{(1)}$ (теорема 1 из § 9). Пусть $\varphi^{(2)}$ — не частично-рекурсивнан функция, для которой всякая функция $f^{(1)}$, полученнан из $\varphi^{(2)}$ фиксированием первого аргумента, частично-рекурсивна (существование такой функции доказано в примере 19). Тогда функцин $\Omega^{(2)}$, определенная «кусочно»:

$$\Omega(n, x) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{n}{2}, x\right), & n \text{ — четное}, \\ \Psi\left(\frac{n-1}{2}, x\right), & n \text{ — нечетное}, \end{cases}$$

— искомая. Функция Ω не частично-рекурсивна, так как $\varphi(n, x) = \Omega(2n, x)$. Функция Ω — универсальная для класса $\mathcal{U}^{(1)}$, так как $\Psi(n, x) = \Omega(2n+1, x)$.

Пример 21. *Пример функции $\Omega^{(s+1)}$, универсальной для класса $\mathcal{U}^{(s)}$, для которой не всякая функция $f^{(s)}$, полученная из $\Omega^{(s+1)}$ фиксированием первого аргумента, частично-рекурсивна.*

Пусть $\Psi^{(s+1)}$ — универсальная функция для класса $\mathcal{U}^{(s)}$ (не обязательно даже частично-рекурсивная), а $f^{(s)}$ — не частично-рекурсивная функция (примеры 2, 10, 11). Тогда функция $\Omega^{(s+1)}$, определенная «кусочно»:

$$\Omega(n, x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_s), & n = 0, \\ \Psi(n-1, x_1, \ldots, x_s), & n > 0, \end{cases}$$

— искомая.

3. УНИВЕРСАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПАРА

Дадим геометрический аналог того, что было сделано в пп. 1—2. Для простоты большую часть изложения будем вести для $s = 2$ и $s = 3$. Напомним, что множества в N^2 мы условились называть плоскими, а множества в N — линейными. Обозначим класс рекурсивно-перечислимых множеств из N^s через $\mathbf{P}^{(s)}$.

Определение. Множество $A^{(s+1)} \subseteq N^{s+1}$ называется *универсальным для данного класса подмножеств* пространства N^s, если для любого множества $D \subseteq N^s$ из этого класса существует такое число n, что

$$\text{пр}_{2, 3, \ldots, s+1} [(\{\langle n \rangle\} \times N^s) \cap A^{(s+1)}] = D. \tag{1}$$

Число n, для которого выполняется равенство (1), называется при этом *номером множества D относительно* *нумерации, задаваемой множеством* $A^{(s+1)}$, или, короче, относительно множества $A^{(s+1)}$ *).

В частности, плоское множество $A^{(2)}$ называется *универсальным для класса* $\mathrm{P}^{(1)}$ линейных рекурсивно-пере-

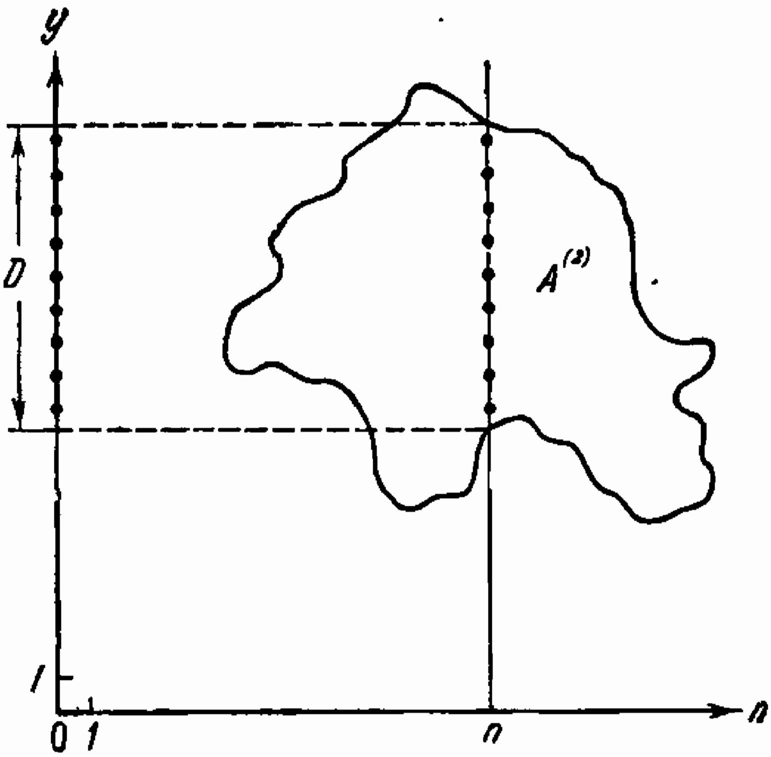


Рис. 17.

числимых множеств, если для любого линейного рекурсивно-перечислимого множества D найдется такое n, что

$$\mathrm{пр}_2\left[(\{\langle n\rangle\}\times N)\cap A^{(2)}\right]=D \text{ (см. рис. 17).} \qquad (2)$$

Множество $A^{(3)}\subseteq N^3$ называется *универсальным для класса* $\mathrm{P}^{(2)}$ плоских рекурсивно-перечислимых множеств, если для любого плоского рекурсивно-перечислимого множества D найдется такое n, что

$$\mathrm{пр}_{2,3}\left[(\{\langle n\rangle\}\times N^2)\cap A^{(3)}\right]=D \text{ (см. рис. 18).} \qquad (3)$$

*) Часто встречается другое понятие универсального множества; именно, множество $A\subseteq N^{s+1}$ называется универсальным (в новом смысле) для данного класса подмножеств пространства N^s, если, во-первых, A универсально в смысле только что сделанного определения и, во-вторых, для любого n множество

$$\mathrm{пр}_{2,3,\ldots,s+1}\left[(\{\langle n\rangle\}\times N^s)\cap A\right]$$

принадлежит к рассматриваемому классу подмножеств. Ср. подстрочное примечание на стр. 203.

Теорема 5. *Существует плоское* ***рекурсивно-перечислимое*** *множество* $A^{(2)}$, *универсальное для класса линейных рекурсивно-перечислимых множеств.*

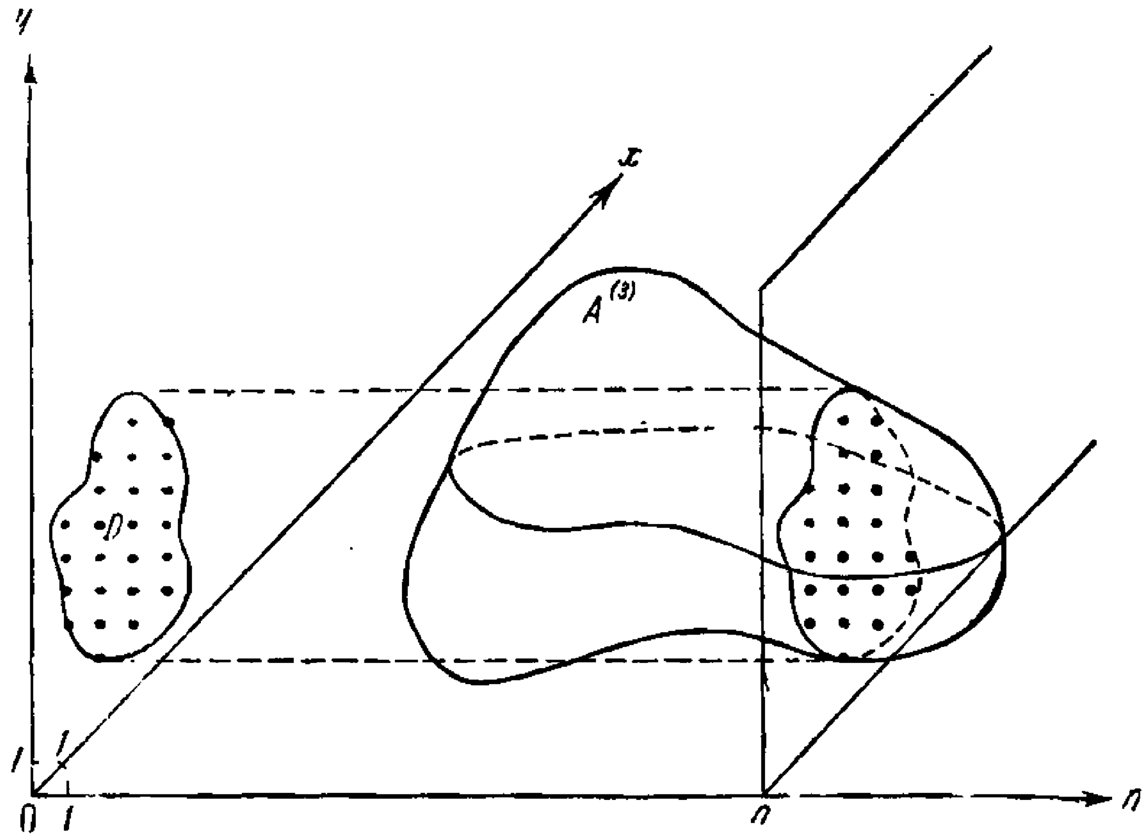


Рис. 18.

Доказательство. Возьмем какую-нибудь частично-рекурсивную функцию $\Psi^{(2)}$, универсальную для класса $\mathfrak{Y}^{(1)}$ частично-рекурсивных функций (такая функция существует по теореме 1), и рассмотрим в N^3 график $G_{\Psi^{(2)}}$ функции $\Psi^{(2)}$, т. е. множество троек $\langle n, x, y\rangle$ таких, что $y = \Psi(n, x)$. Докажем, что искомое множество $A^{(2)}$ равно

$$A^{(2)} = \text{пр}_{1,\,3} G_{\Psi^{(2)}}. \tag{4}$$

Во-первых, определенное равенством (4) множество $A^{(2)}$ рекурсивно-перечислимо (теорема 3 из § 6 и теорема 3 из § 5). Во-вторых, оно универсально. Действительно, возьмем произвольное линейное рекурсивно-перечислимое множество D. По теореме 10 из § 6 найдется такая частично-рекурсивная функция f, что множество D будет множеством ее значений. При некотором n и при всех x

$$f(x) = \Psi(n, x).$$

Легко видеть, что при этом n

$$\text{пр}_3[(\{\langle n\rangle\}\times N)\bigcap \text{пр}_{1,3}G_{\Psi^{(2)}}]=D \quad (\text{см. рис. } 19).$$

Замечание 1. Мы получили плоское рекурсивно-перечислимое множество $A^{(2)}$, универсальное для класса линейных рекурсивно-перечислимых множеств, из частично-рекурсивной функции $\Psi^{(2)}$, универсальной для частично-рекурсивных функций из $\mathcal{U}^{(1)}$. Можно было все проделать в обратном порядке: сначала — независимо от

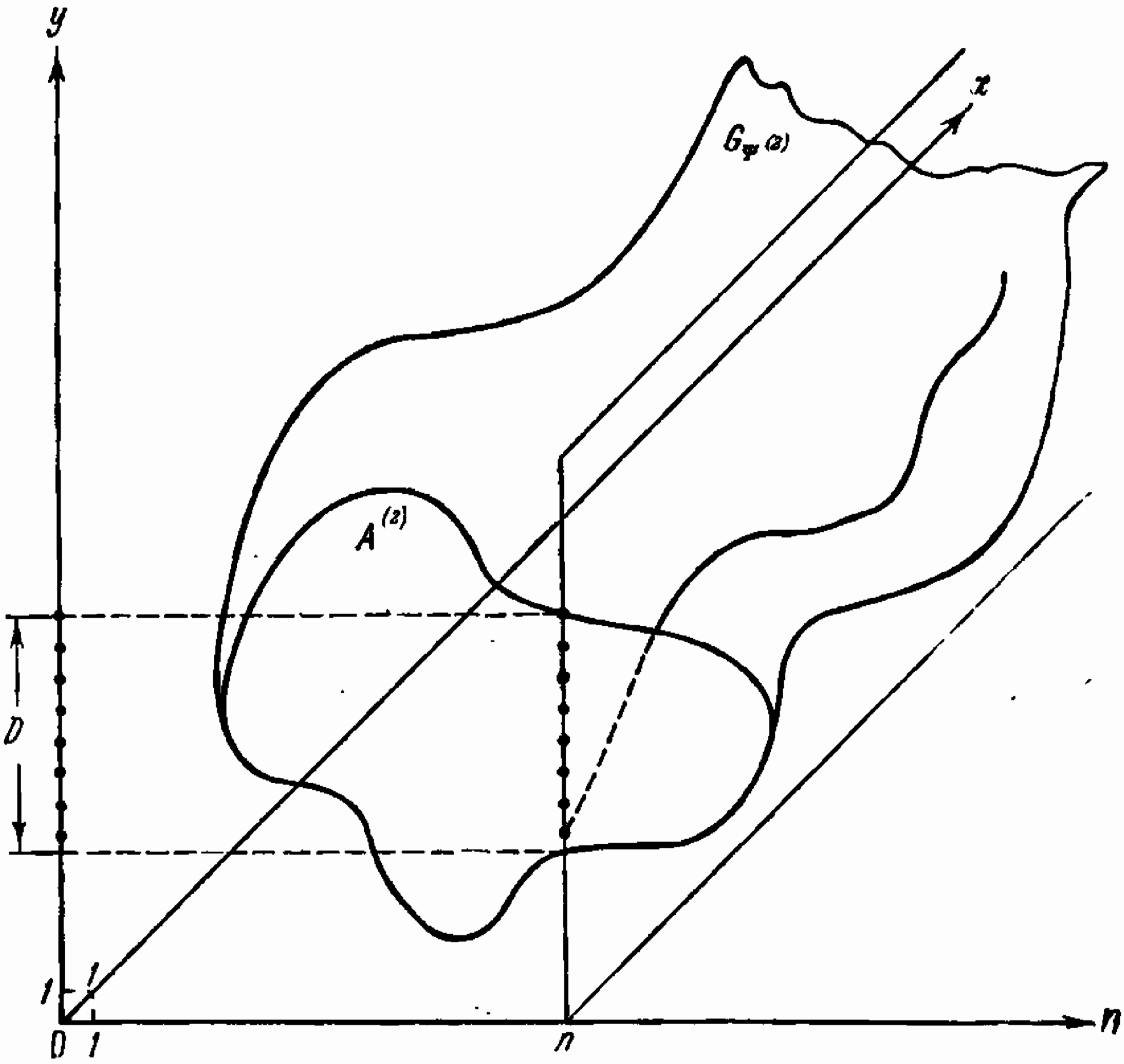


Рис. 19.

универсальной функции — построить универсальное множество, а потом из универсального множества получить универсальную функцию. Допустим, что мы в пространстве (n, x, y) *) построили рекурсивно-перечислимое

*) Употребляя такое обозначение для пространства N^3, мы тем самым автоматически обозначаем первую ось через ось n, вторую ось через ось x и третью ось через ось y.

множество $A^{(3)}$, универсальное для класса плоских рекурсивно-перечислимых множеств. Множество $A^{(3)}$ униформизуется вдоль оси y некоторым рекурсивно-перечислимым множеством G (см. в п. 1 § 10 определение и замечание 1 после теоремы 3). Множество G — униформное (вдоль оси y), и, следовательно (замечание 1 в п. 4 § 2), является графиком некоторой функции $y = \Psi(n, x)$. Легко видеть, что функция $\Psi^{(2)}$ — частично-рекурсивная функция, универсальная для класса $\mathcal{U}^{(1)}$ (теорема 3 из § 6).

Замечание 2. *Плоское множество $A^{(2)}$, универсальное для класса линейных рекурсивно-перечислимых множеств, является, очевидно, универсальным и для класса линейных обще-рекурсивных множеств* (см. (2) в п. 2; ср. с замечанием 2 после теоремы 1).

Теорема 6. *Если B — плоское множество, универсальное для класса линейных обще-рекурсивных множеств, то множество $C = B \cap \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \mid x = y\}$ не обще-рекурсивно* (ср. с замечанием после теоремы 3).

Доказательство. Допустим противное. Множество C обще-рекурсивно, тем более — рекурсивно-перечислимо. Значит, рекурсивно-перечислимо множество $D = \text{пр}_2 C$ (теорема 3 из § 5). Обозначим «диагональ» через E: $E = \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \mid x = y\}$.

$$C = E \cap B, \tag{5}$$

$$D = \text{пр}_2 C = \text{пр}_2 (E \cap B) \tag{6}$$

E — примитивно-рекурсивное множество (§ 4, п. 2), тем более — обще-рекурсивное ((2) из п. 2). Множество $E \setminus C$ — обще-рекурсивное (теорема 3 из § 7), тем более — рекурсивно-перечислимое ((2) из п. 2). Геометрически очевидно, что в данном конкретном случае дополнение множества D до N (до «оси y»), т. е. дополнение к проекции, равно проекции дополнения (см. рис. 20):

$$N \setminus D = \text{пр}_2 (E \setminus C). \tag{7}$$

Значит, $N \setminus D$ рекурсивно-перечислимо (теорема 3 из § 5).

Множества D и $N \setminus D$ рекурсивно-перечислимы. Значит, множество $N \setminus D$ обще-рекурсивно. Обще-рекурсивность множества $N \setminus D$ и приведет нас к противоречию. Так как множество $N \setminus D$ обще-рекурсивно, а множество B — универсальное для класса линейных обще-рекурсивных множеств, существует такое n_0, что

$$\text{пр}_2[(\{\langle n_0\rangle\}\times N)\cap B]=N\setminus D. \qquad (8)$$

Рассмотрим два возможных a priori предположения: $n_0\in D$ и $n_0\in N\setminus D$. Оба они приведут нас к противоречию.

Допустим, что $n_0\in D$. По (6) существует такое m_0, что $\langle m_0, n_0\rangle\in E\cap B$, т. е. $\langle m_0, n_0\rangle\in E$ и $\langle m_0, n_0\rangle\in B$. Но

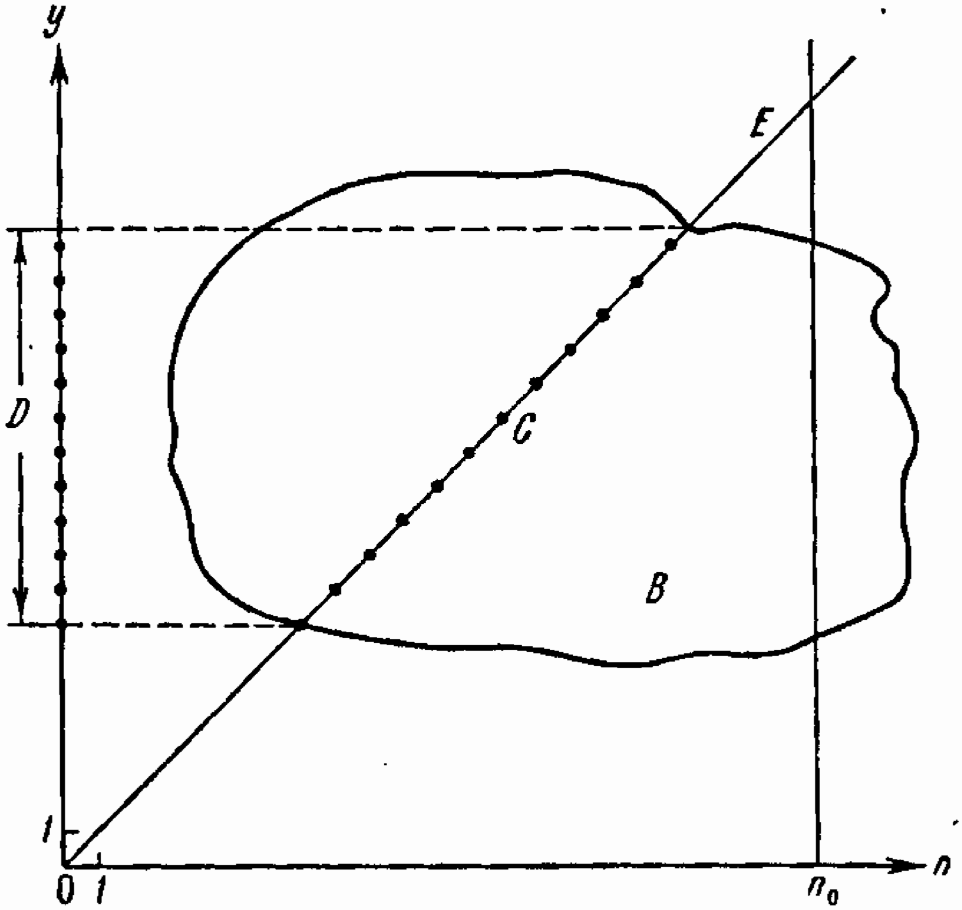


Рис. 20.

$E=\mathscr{E}\{x=y\}$. Значит, $m_0=n_0$. Итак, $\langle n_0, n_0\rangle\in B$. Но $\langle n_0, n_0\rangle\in\{\langle n_0\rangle\}\times N$. По (8) $n_0\in N\setminus D$. Противоречие.

Допустим, что $n_0\in N\setminus D$. По (8) $\langle n_0, n_0\rangle\in B$. Но $\langle n_0, n_0\rangle\in E$. По (6) $n_0\in D$. Противоречие. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Не существует плоского обще-рекурсивного множества, универсального для класса линейных обще-рекурсивных множеств* (ср. с теоремой 3).

Т е о р е м а 7. *Если $A^{(2)}$ — плоское рекурсивно-перечислимое множество, универсальное для класса линейных рекурсивно-перечислимых множеств, то*

1) *множество $A^{(2)}$ рекурсивно-перечислимо, но не обще-рекурсивно* *).

*) Ср. с замечанием 1 после теоремы 1.

2) *множество* $A^{(2)} \bigcap \mathscr{E} \{\langle x, y\rangle \mid x = y\}$ *рекурсивно-перечислимо, но не обще-рекурсивно* *).

3) *множество* $\text{пр}_2 [A^{(2)} \bigcap \mathscr{E} \{\langle x, y\rangle \mid x = y\}]$ *рекурсивно-перечислимо, но не обще-рекурсивно.*

4) *множество* $N \setminus \text{пр}_2 [A^{(2)} \bigcap \mathscr{E} \{\langle x, y\rangle \mid x = y\}]$ *не рекурсивно-перечислимо.*

Доказательство. Первое утверждение следует из замечания 2 после теоремы 5 и следствия теоремы 6. Второе утверждение следует из теоремы 4 из § 5, замечания 2 после теоремы 5 и теоремы 6. Третье утверждение следует из теоремы 3 из § 5 и доказательства теоремы 6. И, наконец, четвертое утверждение следует из третьего и определения обще-рекурсивного множества.

Предположим, что каким-либо способом нам удалось получить плоское рекурсивно-перечислимое множество $A^{(2)}$, универсальное для класса линейных рекурсивно-перечислимых множеств. Тогда, как указано в замечании 1 после теоремы 5, можно построить универсальную функцию, а вместе с нею и всю цепь примеров 1—21 из п. 2. Однако многие из этих примеров, полученных нами при помощи универсальной функции, можно получить и непосредственно из существования универсального множества, не прибегая к универсальной функции. Именно, теорема 7 позволяет, исходя из одного лишь универсального множества, построить пример рекурсивно-перечислимого, но не обще-рекурсивного множества (ср. пример 4 из п. 2). А тогда можно получить и примеры 5—11, 13—16 из п. 2, так как все они опираются лишь на факт существования рекурсивно-перечислимого, но не обще-рекурсивного множества. Можно получить и обще-рекурсивную функцию $\varphi^{(2)}$, для которой множество

$$R = \mathscr{E} \{x \in N \mid \text{Существует } y, \text{ для которого } \varphi(x, y) = 0\}$$

не обще-рекурсивно (см. пример 12 из п. 2). С этой целью возьмем линейное рекурсивно-перечислимое не обще-рекурсивное множество L и проектирующееся в него плоское обще-рекурсивное множество Q (замечание 2 на стр. 143). Положим $\varphi(x, y) = \overline{\text{sg}}\, \chi_Q(x, y)$. Тогда

*) Ср. с замечанием после теоремы 3.

$L=R$ и, следовательно, φ — искомая функция. Если выбрать в качестве Q примитивно-рекурсивное множество, то φ будет даже примитивно-рекурсивной функцией.

Теорема 8. *Существует рекурсивно-перечислимое множество* $A^{(s+1)} \subseteq N^{s+1}$, *универсальное для класса* $\mathbf{P}^{(s)}$ *рекурсивно-перечислимых множеств в* N^s $(s>1)$.

Доказательство. Возьмем произвольное обще-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие $\varkappa^{[s]}$ между N и N^s (теорема 32 из § 7) и функции $\varkappa_1^{[s]}, \ldots, \varkappa_s^{[s]}, \varkappa_0^{[s]}$, его осуществляющие. Устроим обще-рекурсивное взаимно-однозначное отображение пространства N^2 на пространство N^{s+1}:

$$
\begin{aligned}
f_1(n, t) &= I_1^{(1)}(n) = n, \\
f_2(n, t) &= \varkappa_1^{[s]}(t) = x_1, \\
f_3(n, t) &= \varkappa_2^{[s]}(t) = x_2, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
f_{s+1}(n, t) &= \varkappa_s^{[s]}(t) = x_s.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

При отображении (9) каждая прямая $\mathscr{E}\{\langle n, t\rangle \in N^2 \mid n=n_0\}$ перейдет взаимно-однозначно в «гиперплоскость»

$$\mathscr{E}\{\langle n, x_1, \ldots, x_s\rangle \in N^{s+1} \mid n=n_0\}.$$

Рекурсивно-перечислимое плоское множество $A^{(2)}$, универсальное для класса линейных рекурсивно-перечислимых множеств (такое множество существует по теореме 5), перейдет при отображении (9) в искомое множество: рекурсивно-перечислимое (следствие 1 теоремы 5 из § 6) и универсальное для рекурсивно-перечислимых множеств из N^s *).

Определение. Пара плоских множеств: E_1, E_2 — называется *дважды универсальной для класса* $\mathbf{P}^{(1)}$ *линейных рекурсивно-перечислимых множеств*, если для любых двух линейных рекурсивно-перечислимых множеств M_1,

*) Это доказательство на геометрическом языке осуществляет ту идею, о которой мы говорили в замечании 3 к теореме 4 из § 8 (стр. 236) и в замечании 3 к теореме 1.

M_2 найдется такое n, что одновременно

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{пр}_2\,[(\{\langle n\rangle\}\times N)\cap E_1]=M_1 \quad (10)\\ \mathrm{пр}_2\,[(\{\langle n\rangle\}\times N)\cap E_2]=M_2 \quad (11)\end{array}\right\}\ \text{(см. рис. 21).}$$

Аналогично можно определить пару множеств в N^{s+1}, дважды универсальную для класса $\mathbf{P}^{(s)}$.

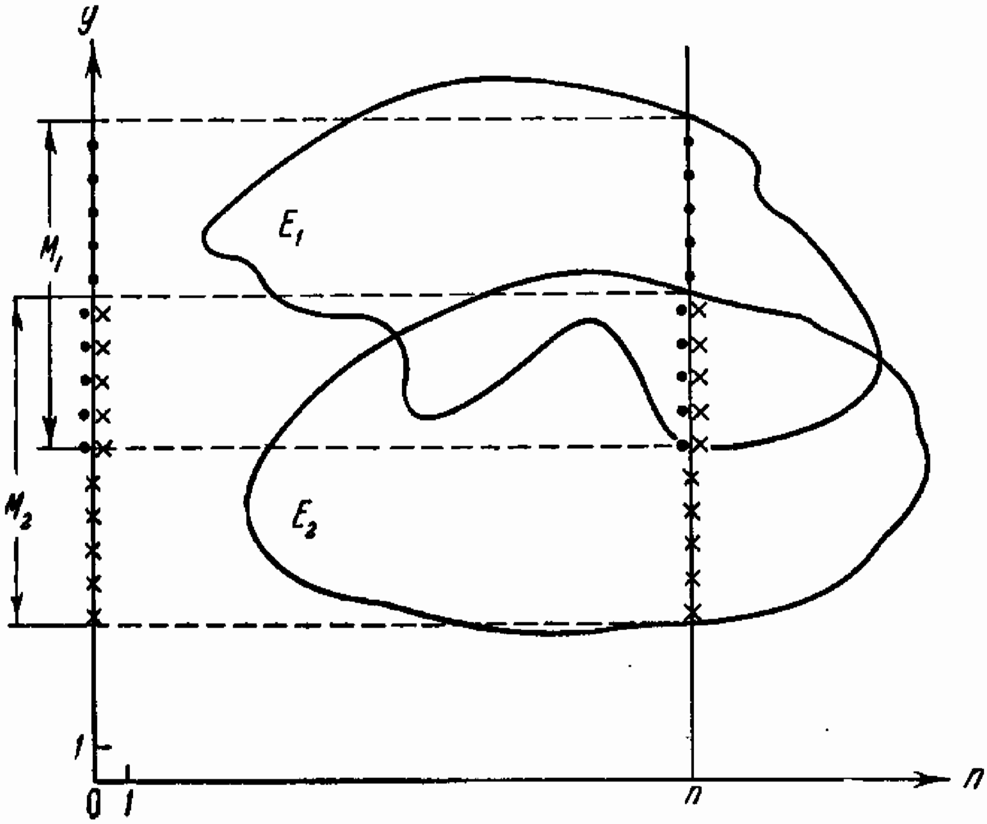


Рис. 21.

Теорема 9. *Существует пара плоских* ***рекурсивно-перечислимых*** *множеств, дважды универсальная для класса* $\mathbf{P}^{(1)}$ *линейных рекурсивно-перечислимых множеств**).

Доказательство. Дадим два доказательства этой теоремы.

1) В пространстве N^3 с осями n, x, y возьмем рекурсивно-перечислимое множество $A^{(3)}$, универсальное для класса плоских рекурсивно-перечислимых множеств. Такое множество существует по теореме 8. Возьмем на оси x две произвольные точки, например, для определенности: $x=1$ и $x=2$. Проведем через $x=1$ и $x=2$ плоскости, параллельные плоскости (n, y). Эти пло-

*) Понятие дважды универсальной (для класса $\mathbf{P}^{(1)}$) пары и теорема 9 были изложены П. С. Новиковым в его лекциях, читанных в 1951/52 учебном году в Московском университете.

скости пересекутся с $A^{(3)}$ по некоторым рекурсивно-перечислимым множествам E_1^*, E_2^* (теоремы 7 из § 5 и 4 из § 5). Спроектируем множества E_1^*, E_2^* на плоскость (n, y). Полученные на плоскости (n, y) при проектировании рекурсивно-перечислимые (теорема 3 из § 5) множества E_1, E_2 образуют искомую пару, дважды универсальную

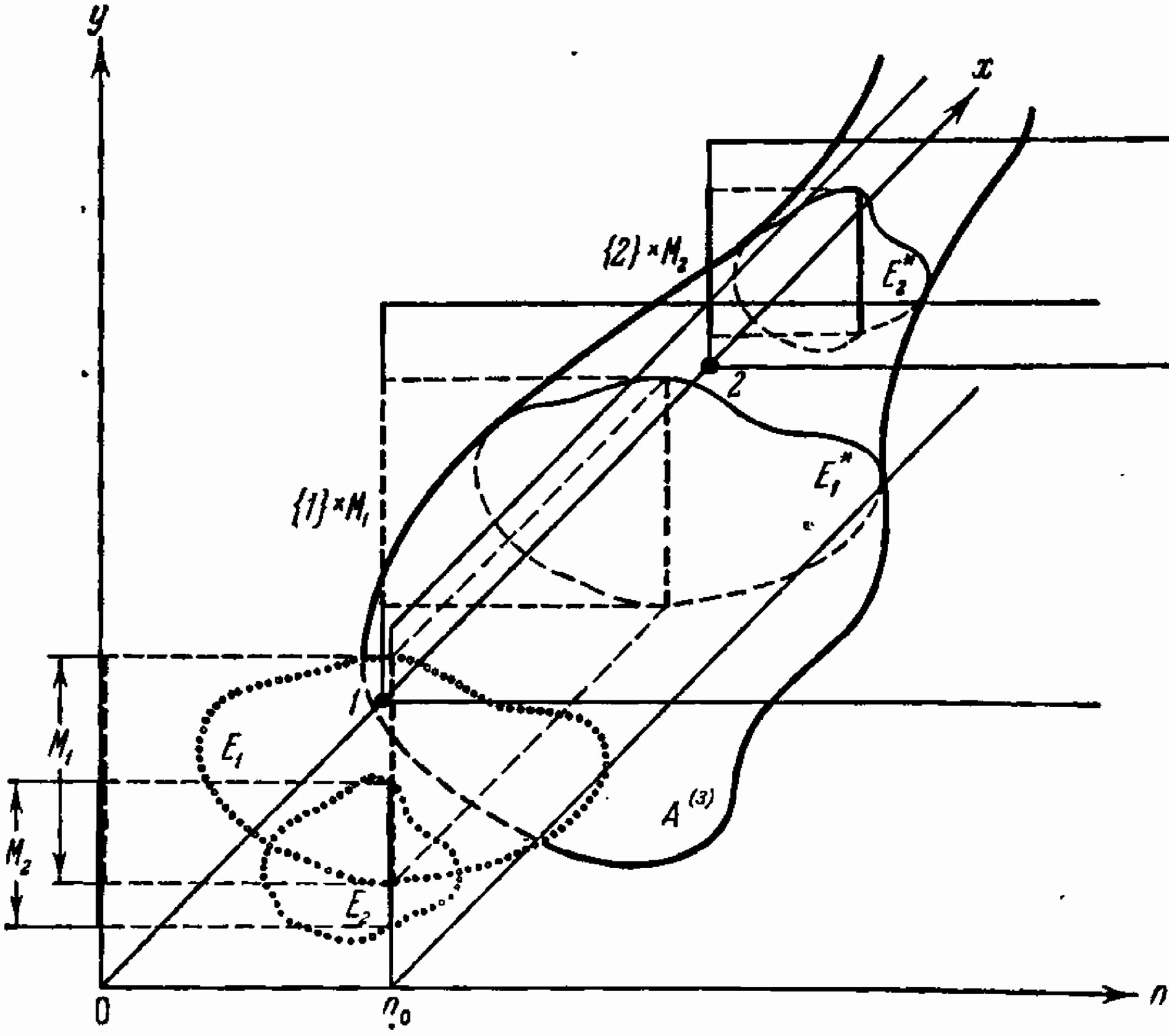


Рис. 22.

для класса $\mathbf{P}^{(1)}$ (см. рис. 22). Докажем это. Возьмем два произвольных линейных рекурсивно-перечислимых множества: M_1 и M_2. Построим из них плоское рекурсивно-перечислимое множество L: $L = [\{\langle 1\rangle\} \times M_1] \bigcup [\{\langle 2\rangle\} \times M_2]$ (см. рис. 23 и 22).

Согласно определению универсального множества, найдется такое n_0, что $L = \text{пр}_{2,3}[(\{\langle n_0\rangle\} \times N \times N) \bigcap A^{(3)}]$. По построению

$$E_1 = \text{пр}_{1,3} E_1^* = \text{пр}_{1,3}[(N \times \{\langle 1\rangle\} \times N) \bigcap A^{(3)}],$$
$$E_2 = \text{пр}_{1,3} E_2^* = \text{пр}_{1,3}[(N \times \{\langle 2\rangle\} \times N) \bigcap A^{(3)}].$$

Легко видеть, что плоскость $n = n_0$ пересечется с E_1^* по

$L_1 = \{\langle n_0\rangle\} \times \{\langle 1\rangle\} \times M_1$, с E_2^* — по $L_2 = \{\langle n_0\rangle\} \times \{\langle 2\rangle\} \times M_2$. А тогда в плоскости (n, y) прямая $n = n_0$ пересечется с E_1 по $\{\langle n_0\rangle\} \times M_1$, с E_2 — по $\{\langle n_0\rangle\} \times M_2$. Следовательно,

$$\text{пр}_3\,[(\{\langle n_0\rangle\} \times N) \cap E_1] = M_1, \qquad \text{пр}_3\,[(\{\langle n_0\rangle\} \times N) \cap E_2] = M_2.$$

Таким образом, для произвольных линейных рекурсивно-перечислимых множеств M_1 и M_2 мы нашли такое число (а именно, n_0), для которого выполняются равенства (10) и (11). Теорема доказана.

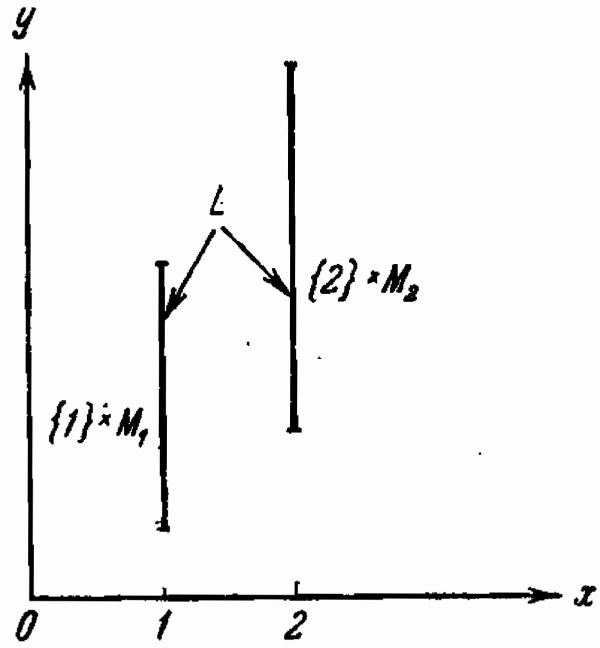


Рис. 23.

2) Пусть E — плоское рекурсивно-перечислимое множество, универсальное для класса $\mathbf{P}^{(1)}$ (такое существует в силу теоремы 5), и пусть $\varkappa_1^{[2]}$, $\varkappa_2^{[2]}$, $\varkappa_0^{[2]}$ суть обще-рекурсивные функции, осуществляющие взаимно-однозначное соответствие между N и N^2 (теорема 32 из § 7). Рассмотрим при $i = 1$ и при $i = 2$ следующие обще-рекурсивные отображения θ_i пространства N^2 на себя:

$$\theta_i(\langle x, y\rangle) = \langle \varkappa_i^{[2]}(x), y\rangle.$$

Обозначим через E_i полный прообраз множества E при отображении θ_i. Множества E_i $(i = 1, 2)$ рекурсивно-перечислимы в силу следствия 2 теоремы 5 из § 6. Покажем, что пара E_1, E_2 является искомой дважды универсальной парой. Действительно. Если M_1 и M_2 — линейные рекурсивно-перечислимые множества с номерами n_1 и n_2 относительно множества E, то

$$M_1 = \text{пр}_2\,[(\{\langle n_1\rangle\} \times N) \cap E], \quad M_2 = \text{пр}_2\,[(\{\langle n_2\rangle\} \times N) \cap E].$$

А тогда, полагая $n = \varkappa_0^{[2]}(n_1, n_2)$, получим требуемые равенства (10) и (11), так как для любого $m \in N$ $\langle n_i, m\rangle \in E$ тогда и только тогда, когда $\langle \varkappa_0^{[2]}(n_1, n_2), m\rangle \in E_i$ $(i = 1, 2)$. Теорема доказана.

§ 10. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

В этом параграфе происходит дальнейшее изучение как свойств, присущих всем рекурсивно-перечислимым множествам, так и некоторых специальных видов рекурсивно-перечислимых множеств. В п. 1 доказывается теорема о возможности униформизовать всякое рекурсивно-перечислимое множество рекурсивно-перечислимым же множеством. В п. 2 на основе Теоремы об униформизации исследуются вопросы отделимости и доказывается важная для приложений теорема о существовании неотделимых рекурсивно-перечислимых множеств. В п. 3 рассматриваются некоторые важные примеры множеств.

Этим параграфом по существу завершается начатое в § 4 изложение основных фактов теории частично-рекурсивных функций и рекурсивно-перечислимых множеств, а именно таких фактов, которые прямо или косвенно касаются свойств, присущих всем частично-рекурсивным функциям или рекурсивно-перечислимым множествам (ведь утверждение о каком-нибудь свойстве всех, скажем, примитивно-рекурсивных функций, приводится к виду: «всякая частично-рекурсивная функция, если она примитивно-рекурсивна, то ...»; а утверждение о существовании, скажем, рекурсивно-перечислимого, но не обще-рекурсивного множества — к виду «неверно, что всякое рекурсивно-перечислимое множество обще-рекурсивно»). Предшествующая фраза не претендует, конечно, на совершенно точный смысл; она станет понятнее после знакомства со следующим, одиннадцатым, параграфом и осознания того, что в нем излагаются факты совсем другого, нового характера.

Постановка вопросов униформизации (см. стр. 278) и отделимости (см. стр. 281) принадлежит Н. Н. Лузину; эти вопросы первоначально возникли и решались в дескриптивной теории множеств — самим Н. Н. Лузиным и членами его школы, прежде всего П. С. Новиковым (см. обзор А. А. Ляпунова и П. С. Новикова [1948]). Впоследствии П. С. Новиков заметил *), что многие понятия, методы и результаты дескриптивной теории множеств естественно переносятся в теорию вычислимых функций и перечислимых множеств **). П. С. Новиков получил ряд результатов в этом направлении ***); некоторые из таких результатов были изложены им в курсе лекций, прочитанном в 1951/52 учебном году в Московском университете, откуда они и стали известны автору. В этом курсе, в частности, были сообщены теоремы 1—3, 5—7 настоящего параграфа; доказательства теорем 1—6 и первое доказательство теоремы 7 также заимствованы из этого курса (заметим, что первое доказательство теоремы 7 повторяет, по существу, доказательство известной теоремы П. С. Новикова о неотделимости СА-множеств — см. стр. 89 статьи В. Я. Арсенина и А. А. Ляпунова [1950]) ****). Вопросы, рассматриваемые в п. 3,

---

*) Это заметил также А. Мостовский [1947].

**) Так, например, если проводить параллель между рекурсивно-перечислимыми и обще-рекурсивными множествами с одной стороны и А- и В-множествами с другой, то тот факт, что взаимно-дополнительные рекурсивно-перечислимые множества обще-рекурсивны (см. определение на стр. 143), будет аналогом известной теоремы М. Я. Суслина [1917] о том, что взаимно-дополнительные А-множества суть В-множества.

***) Например, им было показано, что теоремы отделимости для рекурсивно-перечислимых множеств обращаются по сравнению с А-множествами. Именно, в то время как всякие непересекающиеся А-множества отделимы В-множествами (Н. Н. Лузин [1927], п. 42) и существуют не отделяющиеся В-множествами СА-множества (П. С. Новиков [1931]), существуют не отделяющиеся обще-рекурсивными множествами рекурсивно-перечислимые множества (см. ниже теорему 7), а всякие непересекающиеся множества, дополнения к которым рекурсивно-перечислимы, отделимы обще-рекурсивными множествами (см. ниже следствие теоремы 6).

Заметим, что принадлежащий П. С. Новикову метод доказательства теоремы 5 (см. ниже) при помощи Теоремы об униформизации полностью остается в силе и в дескриптивной теории множеств. На основе этого метода, например, теоремы отделимости для А-множеств могут быть немедленно получены из теоремы М. Кондо [1937] о том, что всякое плоское СА-множество униформизуется некоторым СА-множеством; этим же методом из теорем отделимости для А-множеств, далее, может быть выведено известное положение дескриптивной теории множеств (см. стр. 76 статьи В. Я. Арсенина и А. А. Ляпунова [1950]) о том, что существуют А-множества, не униформизуемые А-множествами (ср. замечание в конце п. 2).

****) Хотя П. С. Новиков еще в 1946/47 учебном году вел специальный семинар, посвященный аналогии между дескриптивной теорией множеств и теорией вычислимых функций и перечислимых множеств, он не публиковал своих результатов, и многие из них «переоткрывались» другими авторами; так, первая публикация, содержащая пример неотделимых рекурсивно-перечислимых множеств, принадлежит С. К. Клини [1950].

также имеют свои аналоги в дескриптивной теории множеств. Так, например, если следствие теоремы 23 из § 7 считать аналогом известной теоремы П. С. Александрова [1916] о наличии у любого несчетного А-множества совершенного (и, следовательно, несчетного В-) подмножества, то пример 3 из п. 3 этого параграфа будет аналогом примера несчетного СА-множества, не имеющего несчетных А- (а, значит, и совершенных) подмножеств (такой пример до сих пор не построен и неизвестно, можно ли его построить; известно лишь, что существование такого примера не противоречит некоторой системе аксиом теории множеств *)).

1. УНИФОРМИЗУЕМОСТЬ

Определение. Пусть L и L_1 — два множества в $N^{s+1} (s>0)$. Мы будем говорить, что *множество L униформизуется множеством L_1 вдоль $(s+1)$-й оси*, если

1) $L_1 \subseteq L$,
2) L_1 униформно вдоль $(s+1)$-й оси,
3) $\text{пр}_{1, 2, \ldots, s} L = \text{пр}_{1, 2, \ldots, s} L_1$.

В частности, мы будем говорить, что *плоское множество L униформизуется плоским множеством L_1 вдоль второй оси* (оси y), если

1) $L_1 \subseteq L$,
2) L_1 униформно вдоль оси y,
3) $\text{пр}_1 L = \text{пр}_1 L_1$.

На рис. 24 множество L униформизуется (вдоль оси y) множеством L_1. Ясно, что любое множество в N^s всегда униформизуется множеством своих нижних точек.

Пусть мы имеем некоторый фиксированный класс множеств $\mathfrak{M}$. Для любого ли множества из этого класса найдется униформизующее его множество из того же класса? **) Нас будет интересовать эта проблема для класса примитивно-рекурсивных множеств в N^{s+1}, класса обще-рекурсивных множеств в N^{s+1} и класса рекурсивно-перечислимых множеств в N^{s+1}.

Теорема 1. *Для всякого* ***примитивно-рекурсивного*** *множества в N^{s+1} найдется униформизующее его* (вдоль $(s+1)$-й оси) ***примитивно-рекурсивное*** *множество.*

---

*) Это установил К. Гёдель [1938], не опубликовав, однако, доказательства; доказательство опубликовано П. С. Новиковым [1951].

**) Рис. 25 дает пример замкнутого множества L на эвклидовой плоскости, не униформизуемого никаким плоским замкнутым множеством.

Доказательство. Искомым множеством будет множество нижних точек. Для $s=1$ см. следствие теоремы 17 из § 4. Для $s>1$ см. замечание после теоремы 17 из § 4.

Теорема 2. *Для всякого* ***обще-рекурсивного*** *множества в* N^{s+1} *найдется униформизующее его* (вдоль $(s+1)$-й оси) ***обще-рекурсивное*** *множество.*

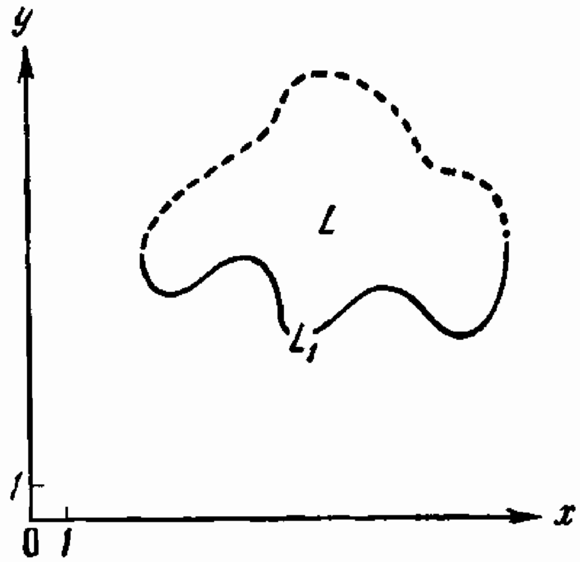


Рис. 24.

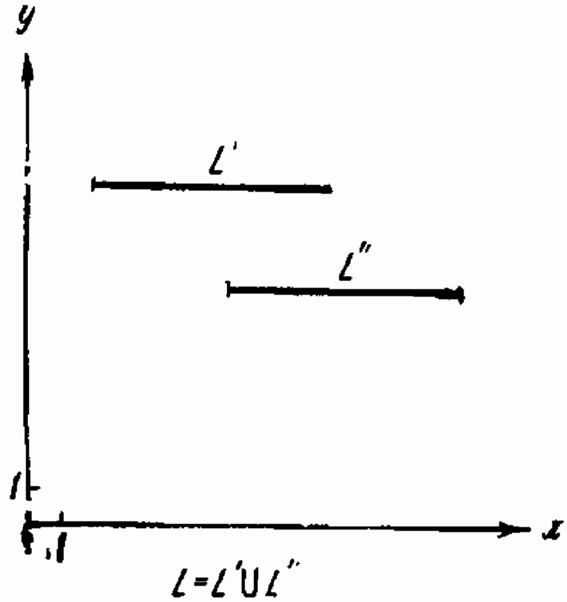


Рис. 25.

Доказательство. Искомым множеством будет множество нижних точек. Для $s=1$ см. теорему 13 из § 7. Для $s>1$ теорема следует из замечания после теоремы 17 из § 4.

Теорема 3. (Теорема об униформизации.) *Для всякого плоского* ***рекурсивно-перечислимого*** *множества* L *найдется униформизующее его* (вдоль оси y) ***рекурсивно-перечислимое*** *множество.*

Замечание 1. Теорема 3 переносится и на рекурсивно-перечислимые множества в произвольном N^{s+1}. Нам понадобится только плоский случай.

Замечание 2. Множество нижних точек любого рекурсивно-перечислимого множества L и на этот раз будет, конечно, униформизовать множество L, но оно может уже оказаться не рекурсивно-перечислимым*).

Перед доказательством теоремы 3 нам еще придется доказать предварительно теорему 4.

---

*) Пример плоского рекурсивно-перечислимого множества с не рекурсивно-перечислимым множеством нижних точек построен в статье В. А. Успенского [1957а] (теорема 2).

Теорема 4. *Пусть L — плоское рекурсивно-перечислимое множество. Тогда существует частично-рекурсивная функция $f^{(2)}$, обладающая следующими свойствами:*

1) *Если на прямой $x=x_0$ существует $q > 0$ точек из L, то их ординаты совпадают с множеством $\{f(x_0, 0), f(x_0, 1), \ldots, f(x_0, q-1)\}$, а для $k \geqslant q$ значение $f(x_0, k)$ не определено.*

2) *Если на прямой $x=x_0$ не существует точек из L, то функция f на этой прямой не определена.*

3) *Если на прямой $x=x_0$ существует бесконечное число точек из L, то функция $g^{(1)}$: $g(k)=f(x_0, k)$ – обще-рекурсивна, а последовательность $\{g(0), g(1), g(2), \ldots\}$ содержит без повторений ординаты точек из L, лежащие на прямой $x=x_0$, и только их.*

Доказательство. Для пустого или конечного множества L лемма очевидна. Если же L — бесконечное плоское рекурсивно-перечислимое множество, то по теореме 29 из § 7 существуют обще-рекурсивные функции $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}$, осуществляющие взаимно-однозначное отображение N на L. Определим функцию $f^{(2)}$ равенством:

$$f(x, k) = \alpha_2((\mu t)[(\alpha_1(t) = x) \mathbin{\&} ((\nu n)_{n<t}(\alpha_1(n) = x) = k)]). \quad (1)$$

Легко видеть, что функция f, определенная равенством (1), — искомая.

Следствие. *Всякое плоское рекурсивно-перечислимое множество L представимо в виде суммы непересекающихся униформных* (вдоль оси y) *рекурсивно-перечислимых множеств с вложенными проекциями: $L = \bigcup R_k$, $\text{пр}_1 R_k \supseteq \text{пр}_1 R_{k+1}$.*

Доказательство. Возьмем функцию f, существование которой утверждается теоремой 4. Положим $R_k = \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \in N^2 \mid y=f(x, k)\}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. R_k — график функции $h_k : h_k(x)=f(x, k)$. Следовательно, R_k — униформное (вдоль оси y) множество. Функция h_k частично-рекурсивна. Значит, R_k — рекурсивно-перечислимое множество (теорема 3 из § 6). $L = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} R_k$, причем возможно, что, начиная с некоторого n, $R_{n+1}=R_{n+2}=\ldots=\Lambda$, но $R_0 \neq \Lambda$, если $L \neq \Lambda$. Очевидно, что $\text{пр}_1 R_k \supseteq \text{пр}_1 R_{k+1}$ и что $R_i \cap R_j = \Lambda$ $(i \neq j)$.

Доказательство теоремы 3. Разложим множество L по следствию теоремы 4:

$$L = \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k, \quad \text{пр}_1 R_0 \supseteq \text{пр}_1 R_1 \supseteq \ldots$$

Искомым униформизующим рекурсивно-перечислимы множеством будет множество R_0. Теорема доказана.

2. ОТДЕЛИМОСТЬ И НЕОТДЕЛИМОСТЬ

Определение. Пусть A_1, A_2, H_1, H_2 — четыре множества. Мы будем говорить, что *множества* A_1, A_2 *отделяются множествами* H_1, H_2, если

1) $A_1 \subseteq H_1$,

2) $A_2 \subseteq H_2$

и

3) $H_1 \cap H_2 = \Lambda$.

Ставится задача, аналогичная задаче пункта 1. Пусть мы имеем два класса множеств: $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Можно ли для любых двух множеств A_1, A_2 из $\mathfrak{M}$ найти отделяющие их множества H_1, H_2 из $\mathfrak{N}$? Само собой разумеется, что разговор об отделении имеет смысл только для непересекающихся множеств. Поэтому обычно: либо сразу берут два непересекающихся множества A_1, A_2, либо берут два произвольных множества A_1, A_2 и ставят задачу об отделении непересекающихся уже множеств $A_1 \setminus A_2$ и $A_2 \setminus A_1$. В дальнейшем все рассматриваемые множества будут подмножествами некоторого исходного множества M. Нам встретится лишь случай $M = N^s$. Дополнение множества A до исходного множества M мы будем обозначать впредь через $\bar{A}$. Нам понадобятся вскоре равенства

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \setminus (A_1 \cap A_2) = A_2 \setminus \bar{A}_1. \tag{1}$$

Заметим еще, что равенства

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \Lambda \tag{2}$$

и

$$A_1 \cup A_2 = M \tag{3}$$

равносильны. Из (2) следует (3) и обратно, Теорема 5. *Если A_1, A_2 — линейные рекурсивно-перечислимые множества, то множества $A_1 \setminus A_2$ и $A_2 \setminus A_1$ отделяются некоторыми линейными рекурсивно-перечислимыми множествами, причем можно так выбрать отделяющие множества H_1, H_2, что будет иметь место равенство:*

$$H_1 \cup H_2 = A_1 \cup A_2.$$

Доказательство. «Поднимем» множество A_1 на 1, а множество A_2 — на 2, т. е. рассмотрим в N^2 множества $L_1 = A_1 \times \{1\}$, $L_2 = A_2 \times \{2\}$ (см. рис. 26. Мы изобразили на этом рисунке множества L_1, L_2 сплошными отрезками). Обозначим $L_1 \cup L_2$ через L. L — рекурсивно-перечислимое множество (теоремы 5 из § 5 и 4 из § 5). По Теореме об униформизации (теорема 3) существует униформизующее его (вдоль оси y) рекурсивно-перечислимое множество L'. Искомыми множествами H_1, H_2 будут множества

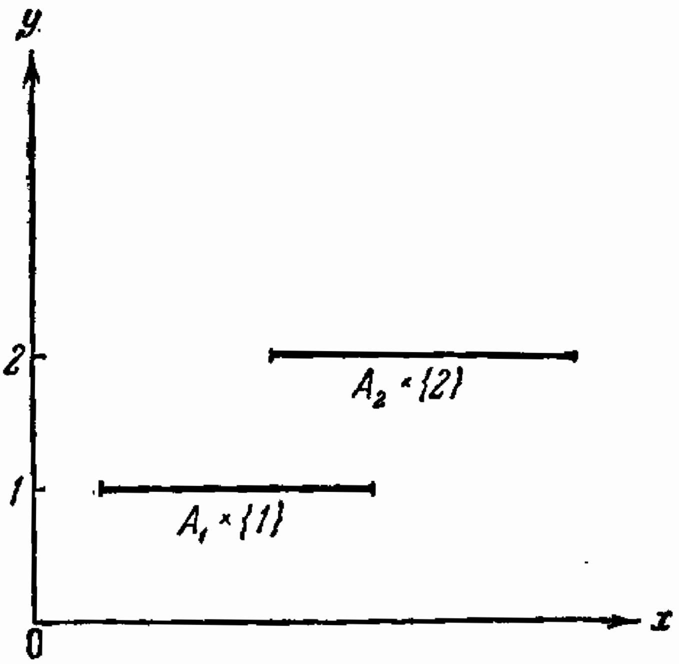


Рис. 26.

$$H_1 = \text{пр}_1 (L_1 \cap L'),$$
$$H_2 = \text{пр}_1 (L_2 \cap L').$$

Множества H_1, H_2 рекурсивно-перечислимы (теоремы 4 из § 5 и 3 из § 5). Очевидно, что $H_1 \supseteq A_1 \setminus A_2$ и $H_2 \supseteq A_2 \setminus A_1$. Так как множество L' униформно вдоль оси y, $H_1 \cap H_2 = \Lambda$. Так как $\text{пр}_1 L = \text{пр}_1 L'$, то $H_1 \cup H_2 = A_1 \cup A_2$.

Замечание. Теорема 5 переносится, разумеется, и на рекурсивно-перечислимые множества в любом N^s. Доказать это можно хотя бы сведением к N при помощи обще-рекурсивного соответствия между N и N^s (см. теоремы 32 из § 7 и 31 из § 7).

Теорема 6. *Если A_1, A_2 — линейные рекурсивно-перечислимые множества и*

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \Lambda, \tag{2}$$

то множества $A_1 \setminus A_2$ и $A_2 \setminus A_1$ отделяются некоторыми линейными обще-рекурсивными множествами.

Доказательство. По теореме 5 множества $A_1 \setminus A_2$ и $A_2 \setminus A_1$ отделяются некоторыми рекурсивно-перечислимыми множествами H_1, H_2, причем можно так выбрать отделяющие множества H_1, H_2, что будет иметь место равенство

$$H_1 \bigcup H_2 = A_1 \bigcup A_2.$$

Из (2) следует (3): $A_1 \bigcup A_2 = N$. Значит, $H_1 \bigcup H_2 = N$. По определению отделимости, $H_1 \bigcap H_2 = \Lambda$ и H_1 и H_2 рекурсивно-перечислимы. Следовательно, H_1 и H_2 обще-рекурсивны.

Следствие. *Если A_1, A_2 — линейные рекурсивно-перечислимые множества и*

$$\bar{A}_1 \bigcap \bar{A}_2 = \Lambda, \tag{2}$$

то множества $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ отделяются некоторыми линейными обще-рекурсивными множествами.

Доказательство. В силу соотношений (2) и (1), $\bar{A}_1 = \bar{A}_1 \setminus \bar{A}_2 = A_2 \setminus A_1$. Аналогично, $\bar{A}_2 = A_1 \setminus A_2$.

Замечание. Теорема 6 и следствие из нее верны и для рекурсивно-перечислимых множеств в произвольном N^s (для доказательства достаточно использовать теоремы 32 из § 7 и 31 из § 7).

Теорема 7. (Теорема о неотделимости.) *Существуют два непересекающихся рекурсивно-перечислимых множества, не отделимых обще-рекурсивными множествами.*

Доказательство. Очевидно, достаточно найти множества с требуемыми свойствами в каком-то из пространств N^s. Существование таких множеств в любом N^s будет следовать тогда из теорем 32 из § 7 и 31 из § 7. Дадим два доказательства теоремы 7.

1) Докажем существование плоских множеств с требуемыми свойствами. Возьмем пару плоских рекурсивно-перечислимых множеств: E_1, E_2, дважды универсальную для класса линейных рекурсивно-перечислимых множеств. Такая пара существует по теореме 9 из § 9.

Докажем, что множества $E_1 \setminus E_2$ и $E_2 \setminus E_1$ не отделимы обще-рекурсивными множествами. Множества $E_1 \setminus E_2$ и $E_2 \setminus E_1$ не обязаны, конечно, быть рекурсивно-перечислимыми множествами. Но зато мы их, согласно замечанию после теоремы 5, отделим рекурсивно-перечислимыми множествами H_1, H_2, которые и будут искомыми непересекающимися рекурсивно-перечислимыми множествами, не отделимыми обще-рекурсивными множествами: если бы множества H_1, H_2 можно было отделить обще-рекурсивными множествами, то и множества $E_1 \setminus E_2$, $E_2 \setminus E_1$ в противоречие с тем, что мы сейчас докажем, были бы отделимы обще-рекурсивными множествами.

Итак, достаточно доказать, что множества $E_1 \setminus E_2$, $E_2 \setminus E_1$ не отделимы обще-рекурсивными множествами. Допустим противное. Допустим, что существуют такие обще-рекурсивные множества B_1, B_2, что

1) $$E_1 \setminus E_2 \subseteq B_1,$$

2) $$E_2 \setminus E_1 \subseteq B_2$$

и

3) $$B_1 \cap B_2 = \Lambda.$$

Докажем, что тогда плоское обще-рекурсивное множество B_1 окажется универсальным для класса линейных обще-рекурсивных множеств, что будет противоречить следствию теоремы 6 из § 9. Возьмем произвольное линейное обще-рекурсивное множество D_1. Рассмотрим наряду с обще-рекурсивным множеством D_1, его дополнение: $D_2 = N \setminus D_1$. Множество D_2 тоже обще-рекурсивно (теорема 3 из § 7) и, значит, рекурсивно-перечислимо. D_1, D_2 — пара линейных рекурсивно-перечислимых множеств. Согласно определению дважды универсальной пары найдется такое n_0, что одновременно

$$\text{пр}_2 [(\{\langle n_0 \rangle\} \times N) \cap E_1] = D_1$$

и $$(4)$$

$$\text{пр}_2 [(\{\langle n_0 \rangle\} \times N) \cap E_2] = D_2.$$

Обозначим прямую $\{\langle n_0 \rangle\} \times N$ через T. Положим

$$E_i \cap T = E_i^*, \qquad B_i \cap T = B_i^* \qquad (i = 1, 2). \tag{5}$$

Тогда соотношения (4) перепишутся в виде

$$\text{пр}_2 E_i^* = D_i \qquad (i = 1, 2). \tag{6}$$

Так как $D_1 \cup D_2 = N$, то

$$E_1^* \cup E_2^* = T, \tag{7}$$

Так как $D_1 \cap D_2 = \Lambda$, то

$$E_1^* \cap E_2^* = \Lambda. \tag{8}$$

В силу (8)

$$E_1^* = E_1^* \setminus E_2^*, \qquad E_2^* = E_2^* \setminus E_1^*. \tag{9}$$

Так как $B_1 \cap B_2 = \Lambda$, то

$$B_1^* \cap B_2^* = \Lambda. \tag{10}$$

Поскольку $B_1 \supseteq E_1 \setminus E_2$ и $B_2 \supseteq E_2 \setminus E_1$, то $B_1^* \supseteq E_1^* \setminus E_2^*$ и $B_2^* \supseteq E_2^* \setminus E_1^*$; отсюда, в силу (9)

$$B_1^* \supseteq E_1^*, \qquad B_2^* \supseteq E_2^*. \tag{11}$$

Соотношения (7), (10), (11) в сочетании с включениями $B_1^* \subseteq T$, $B_2^* \subseteq T$ приводят к равенствам

$$B_1^* = E_1^*, \qquad B_2^* = E_2^*. \tag{12}$$

А тогда, в силу (12), (6) и (5)

$$D_1 = \text{пр}_2 B_1^* = \text{пр}_2 (T \cap B_1) = \text{пр}_2 [(\{\langle n_0 \rangle\} \times N) \cap B_1]. \tag{13}$$

Итак, для произвольного обще-рекурсивного множества D_1 мы нашли такое n_0, что имеет место (13). Значит, B_1 — плоское обще-рекурсивное множество, универсальное для класса линейных обще-рекурсивных множеств. Полученное противоречие (со следствием теоремы 6 из § 9) и показывает, что $E_1 \setminus E_2$ и $E_2 \setminus E_1$ не отделимы обще-рекурсивными множествами. Теорема доказана.

2) Возьмем частично-рекурсивную функцию f, принимающую лишь два значения и не продолжаемую до обще-рекурсивной (пример 1b из п. 2 § 9). Обозначим через a и b значения этой функции, а через P и Q — ее множества уровня по числам a и b. По теореме 8 из § 6 P и Q рекурсивно-перечислимы. Покажем, что P и Q не отделимы обще-рекурсивными множествами. Допустим противное. Пусть обще-рекурсивные множества A и B отделяют P и Q. Тогда функция Ω:

$$\Omega(x) = \begin{cases} a, & x \in A, \\ b, & x \in N \setminus A \end{cases}$$

будет обще-рекурсивным (теорема 22 из § 7) продолжением функции f, что противоречит выбору f. Теорема доказана.

Замечание. Существует плоское множество, являющееся дополнением к рекурсивно-перечислимому, которое не униформизуется никаким множеством, являющимся дополнением к рекурсивно-перечислимому. Действительно, если бы это было не так и для дополнений к рекурсивно-перечислимым множествам имела бы место теорема об униформизации, аналогичная теореме 3, то методом этого пункта мы получили бы, что (в противоречие с теоремой 7) всякие непересекающиеся рекурсивно-перечислимые множества отделяются обще-рекурсивными и что (в противоречие со следствием теоремы 6) существуют непересекающиеся множества, дополнительные к рекурсивно-перечислимым и не отделяющиеся обще-рекурсивными.

3. ПРОСТЫЕ МНОЖЕСТВА

В этом пункте мы рассмотрим некоторые специальные виды рекурсивно-перечислимых множеств, играющие важную роль как в самой теории рекурсивно-перечислимых множеств, так и в ее приложениях. Для простоты все изложение до конца пункта мы будем вести, специально не оговаривая этого, для линейных множеств, хотя все определения и результаты остаются справедливыми или без труда могут быть перенесены на множества в N^s.

Определение. Множество называется *иммунным*, если оно бесконечно и не имеет бесконечных рекурсивно-перечислимых подмножеств *).

В частности, само иммунное множество не рекурсивно-перечислимо.

В силу следствия теоремы 25 из § 7, бесконечное множество иммунно тогда и только тогда, когда оно не имеет бесконечных обще-рекурсивных подмножеств.

Тривиальным примером бесконечного не иммунного множества является натуральный ряд и вообще любое бесконечное рекурсивно-перечислимое множество. Менее тривиальные примеры не иммунных множеств будут даны в § 13 (п. 2, примеры 1, 3). Пример иммунного множества (отнюдь не тривиальный) мы вскоре построим.

---

*) Термин «иммунный» («immune») принадлежит Дж. Деккеру [1953]. По существу это понятие неявно введено Э. Л. Постом [1944].

Определение. Множество называется *простым*, если оно рекурсивно-перечислимо, а его дополнение (до всего N) иммунно*).

Очевидно, любое простое множество бесконечно. Произвольное обще-рекурсивное множество является тривиальным примером рекурсивно-перечислимого множества, не являющегося простым.

Пример 1. *Пример рекурсивно-перечислимого не обще-рекурсивного множества, не являющегося простым.*

Пусть R — рекурсивно-перечислимое не обще-рекурсивное множество натуральных чисел (§ 9, п. 2, пример 4) и ϱ — пересчитывающая его обще-рекурсивная функция (теорема 23 из § 7). Положим

$$\varrho''(n) = 2\cdot\varrho(n).$$

Обозначим через R'' рекурсивно-перечислимое (следствие 6 теоремы 5 из § 6) множество значений функции ϱ''. Множество R'' не обще-рекурсивно [в противном случае было бы обще-рекурсивно множество R, характеристическая функция которого связана с характеристической функцией множества R'' соотношением $\chi_R(n) = \chi_{R''}(2n)$]. Множество R'' не является, далее, простым, поскольку его дополнение содержит бесконечное рекурсивно-перечислимое подмножество N' — множество всех нечетных чисел.

Пример 2. *Пример простого множества.*

Пусть $A^{(2)}$ — плоское рекурсивно-перечислимое множество, универсальное для класса линейных рекурсивно-перечислимых множеств (теорема 5 из § 9),

$$Q = \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \mid y > 2x\},$$
$$K = A^{(2)} \cap Q$$

Множество $A^{(2)}$ рекурсивно-перечислимо, а множество Q примитивно-рекурсивно, поэтому (теоремы 2 из § 5 и 4 из § 5) множество K рекурсивно-перечислимо. По Теореме об униформизации (теорема 3) существует рекурсивно-перечислимое множество R, униформизующее множество K вдоль оси y. Возьмем это R и рассмотрим его

*) Простые (simple) множества ввел в рассмотрение Э. Л. Пост [1944]. Он же [1944] построил первый пример простого множества, приводимый ниже в модернизированном изложении.

проекцию на вторую ось

$$S = \text{пр}_2 R.$$

Это множество S и будет искомым простым множеством. Прежде всего, оно рекурсивно-перечислимо (теорема 3 из § 5). Докажем, что дополнительное к нему (до N) множество $\overline{S}$ иммунно. Пусть P — произвольное бесконечное рекурсивно-перечислимое множество. Докажем, что $P \cap S \neq \Lambda$. Отсюда будет следовать, что множество $\overline{S}$ не имеет бесконечных рекурсивно-перечислимых подмножеств. По определению универсального множества, существует такое n, что

$$P = \text{пр}_2 [(\{\langle n\rangle\} \times N) \cap A^{(2)}].$$

В силу бесконечности P пересечение

$$(\{\langle n\rangle\} \times N) \cap K$$

не пусто. Значит, $n \in \text{пр}_1 K$. А тогда, в силу третьего пункта определения униформизации, $n \in \text{пр}_1 R$. Поэтому найдется такое m, что $\langle n, m\rangle \in R$ и, следовательно, $m \in S$. Но так как

$$\langle n, m\rangle \in [(\{\langle n\rangle\} \times N) \cap A^{(2)}],$$

то $m \in P$.

Итак, $S \cap P \neq \Lambda$; $\overline{S}$ не имеет бесконечных рекурсивно-перечислимых подмножеств. Осталось доказать, что $\overline{S}$ бесконечно. С этой целью оценим число элементов множества S на сегменте $[0, 2k]$ $(k \geqslant 1)$ *). Обозначим элементы множества S на этом сегменте через $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_r$ $(r \geqslant 0,\ y_i \neq y_j$ при $i \neq j)$. Каждое y_i есть проекция некоторой пары $\langle x_i, y_i\rangle \in R$. Поскольку $R \subseteq Q$, то $x_i < \frac{y_i}{2}$. Поэтому все x_i лежат на сегменте $[0, k-1]$. Значит, число этих x_i не превосходит k. Ввиду униформности множества R $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Следовательно, число элементов y_i тоже не превосходит k. Итак, на каждом

---

*) Через $[a, b]$ мы обозначаем как (конечное) множество $\mathscr{E}\{x \in N \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, так и кортеж $\langle a, a+1, a+2, \ldots, b-1, b\rangle$.

сегменте $[0, 2k]$ $(k \geqslant 1)$ лежит не более k элементов множества S и, значит, более k элементов множества $\bar{S}$. Отсюда следует, что $\bar{S}$ бесконечно. Для использования в дальнейшем заметим, что для любого x_0 $\langle x_0, 0\rangle \bar{\in} Q$. Поэтому $0 \bar{\in} S$. Значит, и для $k=0$ верно, что на сегменте $[0, 2k]$ лежит более k элементов множества $\bar{S}$.

Пример 3. *Пример иммунного множества.*

Дополнение $\bar{S} = N \setminus S$ к простому множеству S, построенному в примере 2, иммунно (по определению простого множества). Заметим, что мы построили такое иммунное множество $(\bar{S})$, дополнение к которому (S) рекурсивно-перечислимо.

Обозначим множество компонент кортежа α через $[\alpha]$. Тогда, например, $[\langle 3, 2\rangle] = [\langle 3, 2, 3\rangle] = \{2, 3\}$. Будем говорить, что *кортежи* α и β *не пересекаются*, если множества $[\alpha]$ и $[\beta]$ не пересекаются, т. е. если ни одна из компонент кортежа α не совпадает ни с одной из компонент кортежа β.

Ниже — в этом пункте и в § 13 — нам понадобится понятие перечислимого множества кортежей. Одним из возможных уточнений этого понятия является введенное в § 8 (стр. 197) понятие рекурсивно-перечислимого множества объектов первого ранга (т. е. кортежей над N). Однако использование этого или какого-либо другого уточнения понятия перечислимого множества кортежей сделало бы изложение менее прозрачным. Поэтому мы для краткости и простоты предпочтем здесь пользоваться этим понятием на интуитивном уровне, основанном на идеях первого параграфа (стр. 21). Применительно к интересующему нас понятию можно сказать так: множество R кортежей перечислимо, если либо оно пусто, либо существует всюду определенная вычислимая (в интуитивном смысле) функция f типа $N \to N^{\infty}$, пересчитывающая множество R. Короче: непустое множество кортежей перечислимо, если его элементы можно эффективно перечислить. Кроме того, поскольку мы будем говорить ниже (особенно в теореме 8) сразу на двух языках — строгом и интуитивном, мы позволим себе пользоваться Основной гипотезой, хотя ее использование, уточнив употребляемые интуитивные понятия, можно было бы устранить (см., например, пример 6).

Определение. Множество M называется *гипериммунным*, если оно бесконечно и не существует перечислимого множества попарно непересекающихся кортежей (над N), каждый из которых имеет хотя бы одну компоненту, принадлежащую множеству M.

Легко видеть, что каждое гипериммунное множество иммунно.

Пример 4. *Пример иммунного, но не гипериммунного множества.*

Множество $\bar{S}$ из примера 3 иммунно, но не гипериммунно. Убедимся в этом. Разобьем натуральный ряд N на последовательность сегментов $\alpha_k = [a_k, b_k]$, согласно закону

$$\begin{cases} \alpha_0 = [0, 2], \\ \alpha_{k+1} = [b_k + 1, \ 2(b_k + 1)]. \end{cases} \tag{1}$$

Очевидно, что $\alpha_i \cap \alpha_j = \Lambda$ при $i \neq j$.

Множество $\{\alpha_k\}$ перечислимо: равенства (1) задают эффективный закон перечисления его элементов. Вспомним, что в примере 2 было доказано про множество $\overline{S}$. Там было доказано, в частности, что для любого k на сегменте $[0, 2k]$ имеется более k элементов множества $\overline{S}$. В частности, на сегменте $\alpha_0 = [0, 2]$ имеются элементы множества $\overline{S}$ (их даже либо два, либо три). Кроме того, при $k \geqslant 1$ на сегменте $[0, 2(b_{k-1}+1)]$ имеется более $(b_{k-1}+1)$ элементов множества $\overline{S}$. Все эти «более $(b_{k-1}+1)$ элементов» не могут поместиться на сегменте $[0, b_{k-1}]$, так как на этом сегменте всего $(b_{k-1}+1)$ чисел. Значит, по крайней мере один элемент множества $\overline{S}$ попадет на сегмент

$$[0, 2(b_{k-1}+1)] \setminus [0, b_{k-1}] = [b_{k-1}+1, \ 2(b_{k-1}+1)] = \alpha_k.$$

Итак, для любого k $\alpha_k \cap \overline{S} \neq \Lambda$. Следовательно, множество кортежей α_k удовлетворяет всем «запрещенным» свойствам из определения гипериммунного множества. Множество $\overline{S}$ не гипериммунно. Заметим, что мы построили такое иммунное, но не гипериммунное множество ($\overline{S}$), дополнение к которому (S) рекурсивно-перечислимо.

Пример гипериммунного множества мы вскоре построим.

Определение. Множество называется *гиперпростым*, если оно рекурсивно-перечислимо, а его дополнение (до всего N) гипериммунно *).

Поскольку всякое гипериммунное множество иммунно, всякое гиперпростое множество является простым.

Пример 5. *Пример простого, но не гиперпростого множества.*

Простое множество S, построенное в примере 2, не является гиперпростым, так как его дополнение $\overline{S}$ не гипериммунно (см. пример 4).

Для построения примера гиперпростого множества нам понадобится

Теорема 8 **). *Бесконечное множество M не является гипериммунным тогда и только тогда, когда его прямой пересчет φ мажорируется некоторой обще-рекурсивной функцией ψ.*

---

*) Гиперпростые (hypersimple) множества ввел в рассмотрение Э. Л. Пост [1944]. Он же [1944] построил первый пример гиперпростого множества (ниже будет приведен другой, менее сложный пример).

**) Теорема 8 дает ответ на следующий вопрос А. Н. Колмогорова: «каковы те множества, прямые пересчеты которых не мажорируются обще-рекурсивными функциями?». Этот вопрос был поставлен А. Н. Колмогоровым в 1954 г. перед Ю. Т. Медведевым

Доказательство. 1) **Необходимость** («только тогда»). Пусть бесконечное множество M не является гипериммунным. Это означает, что существует перечислимое множество R попарно непересекающихся кортежей такое, что для любого $\alpha \in R$ $[\alpha] \cap M \neq \Lambda$. Как мы говорили выше (стр. 289), это означает, что существует всюду определенная интуитивно-вычислимая функция f типа $N \to N^{\infty}$, его перечисляющая. Для любого i $f(i) \in R$, причем $[f(i)] \cap M \neq \Lambda$ и $[f(i)] \cap [f(j)] = \Lambda$ при $i \neq j$. Легко видеть, что функция $\psi^{(1)}$, определенная равенством

$$\psi(n) = \max_{x \in \bigcup_{i=0}^{i=n} [f(i)]} x, \qquad (2)$$

всюду определена и мажорирует прямой пересчет множества M. Поскольку функция f была интуитивно-вычислима, то, в силу равенства (2), функция ψ тоже будет интуитивно-вычислимой. Кроме того, ψ всюду определена. В силу Основной гипотезы, φ обще-рекурсивна.

2) **Достаточность** («тогда»). Пусть прямой пересчет φ бесконечного множества M мажорируется обще-рекурсивной функцией ψ. Тогда для любого m $\psi(m) \geqslant m$. Определим последовательность $\{\alpha_m\}$, обозначив через α_m сегмент

$$\alpha_m = [\psi(m)+1,\ \psi(\psi(m)+1)].$$

Легко видеть, что для любого m

$$\alpha_m \cap \alpha_{\psi(m)+1} = \Lambda$$

и

$$\alpha_m \cap M \neq \Lambda.$$

Ввиду обще-рекурсивности функции ψ множество сегментов α_m перечислимо. Поэтому подпоследовательность $\{\beta_m\}$, определенная индуктивно:

$$\begin{cases} \beta_0 = \alpha_0, \\ \beta_{m+1} = \alpha_{\psi(m)+1}, \end{cases}$$

образует перечислимое множество попарно непересекающихся кортежей, каждый из которых имеет хотя бы одну компоненту, принадлежащую множеству M. Таким образом, M не гипериммунно.

Замечание. Теорема 8 позволяет еще раз, и притом весьма легко, доказать негипериммунность иммунного множества $\overline{S}$ из примера 3 (ср. пример 4). Поскольку для любого k на сегменте $[0, 2k]$ имеется более k элементов множества $\overline{S}$ (см. пример 2),

---

и В. А. Успенским, нашедшими его решение независимо друг от друга (Ю. Т. Медведев 1955], теорема 1; В. А. Успенский [1957а], теорема 4). (Автору известно, что теорема 8 была найдена также А. В. Кузнецовым.)

функция ψ: $\psi(k)=2k$—мажорирует прямой пересчет (бесконечного) множества $\overline{S}$. А значит по—теореме 8—множество $\overline{S}$ не гипериммунно.

Пример 6. Пример гиперпростого множества *).

Введем сначала одно определение. Пусть f—всюду определенная функция типа $N \rightarrow N$. Число $t \in \mathrm{N}$ называется *точкой минимума* функции f, если для всех $n > t$ выполняется неравенство $f(n) > f(t)$. Пусть R—рекурсивно-перечислимое, но не обще-рекурсивное линейное множество (§ 9, п. 2, пример 4), а $f^{(1)}$—его однолистный обще-рекурсивный пересчет (§ 7, теорема 28). Обозначим через T множество точек миинимума функции f, а через $\overline{T}$, соответственно, его дополнение, т. е. множество всех натуральных чисел, не являющихси точками минимума функции f.

$$(t \in T) = (\forall n)\,[n > t \rightarrow f(n) > f(t)], \tag{3}$$

$$(t \in \overline{T}) = (\exists n)\,[n > t \,\&\, f(n) \leqslant f(t)], \tag{4}$$

Из (4) и теорем 16 из § 7, 17 из § 7 и 15 из § 7 следует, что множество $\overline{T}$ рекурсивно-перечислимо.

Докажем, что множество T гипериммунно. T не пусто. Действительно. Возьмем такое t_0, при котором $f(t_0) = (\mu y)\,[y \in R]$. Ввиду однолистности функции f, $t_0 \in T$. T бесконечно. В самом деле. Пусть уже доказано, что $t_0, t_1, \ldots, t_k \in T$, причем $t = \max\{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$. На $N \setminus [0, t]$ функция f в какой-то точке t_{k+1} принимает наименьшее значение. Ввиду однолистности функции f, $t_{k+1} \in T$, причем $t_{k+1} \neq t_i$ для $0 \leqslant i \leqslant k$, так как $t_{k+1} > t$.

Пусть $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots\}$, причем

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots \tag{5}$$

Допустим, что множество T не гипериммунно. Тогда по теореме 8 его прямой пересчет мажорируется некоторой обще-рекурсивной функцией ψ. Из (5) следует, что

$$\psi(n) \geqslant t_n. \tag{6}$$

Докажем, что для произвольных чисел y и z

$$\text{если } z > \psi(y), \text{ то } f(z) > y. \tag{7}$$

Пусть $z > \psi(y)$. Из (6) $z > t_y$. Так как $t_y \in \mathrm{T}$,

$$f(z) > f(t_y). \tag{8}$$

Из (5): $f(t_y) > f(t_{y-1}) > \ldots > f(t_1) > f(t_0)$.

Следовательно,

$$f(t_y) \geqslant y. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует нужное неравенство.

Но при помощи (7) легко строится алгоритм проверки принадлежности произвольного y к множеству R. Алгоритм следующий.

---

*) Приведенный ниже способ конструирования гиперпростых множеств принадлежит Дж. Деккеру [1954].

Вычислим $f(x)$ для всех $x \in [0, \psi(y)]$. Если на сегменте $[0, \psi(y)]$ найдется такой x, что $f(x)=y$, то $y \in R$. Если же для всех $x \in [0, \psi(y)]$ $f(x) \neq y$, то по (7) $y \overline{\in} R$. Следовательно, множество R разрешимо, а значит, по Основной гипотезе, обще-рекурсивно.

Впрочем, в этом месте использование Основной гипотезы чрезвычайно легко устранить. Из (7) и того, что функция f есть пересчет множества R, следует, что $y \in R$ тогда и только тогда, когда $\underset{z \leqslant \psi(y)}{(\exists z)} [f(z)=y]$. По теоремам 16 из § 7 и 18 из § 7 предикат „$\underset{z \leqslant \psi(y)}{(\exists z)} [f(z)=y]$“, а значит, и множество R обще-рекурсивны. Противоречие с выбором R. Значит множество T гипериммунно. Поскольку $\overline{T}$ рекурсивно-перечислимо, $\overline{T}$ гиперпросто.

Пример 7. *Пример гипериммунного множества.*

Множество T, являющееся дополнением к гиперпростому множеству $\overline{T}$, построенному в примере 6, гипериммунно (по определению гиперпростого множества). Заметим, что мы построили такое гипериммунное множество (T), дополнение к которому ($\overline{T}$) рекурсивно-перечислимо.

§ 11. НУМЕРАЦИИ И ОПЕРАЦИИ

В этом параграфе изучаются — для каждого s — некоторые свойства класса $\mathcal{Ч}^{(s)}$ в целом (и соответствующие свойства класса $\mathbf{P}^{(s)}$ в целом; вообще, все, что будет говориться в этом абзаце о классе $\mathcal{Ч}^{(s)}$ и о частично-рекурсивных функциях, полностью относится к классу $\mathbf{P}^{(s)}$ и к рекурсивно-перечислимым множествам). А именно изучаются свойства, связанные с нумерациями класса частично-рекурсивных функций и операциями над частично-рекурсивными функциями. В п. 2 — после рассмотрения в п. 1 общего понятия нумерации — рассматриваются нумерации класса $\mathcal{Ч}^{(s)}$. Среди этих нумераций выбираются для изучения так называемые главные нумерации (этот выбор не случаен, так как именно главные нумерации возникают в связи с заданием частично-рекурсивных функций их программами). Доказывается, что никакое свойство частично-рекурсивных функций (за исключением двух тривиальных: пустого и всеобщего) не может быть алгоритмически распознано по номерам функций. В п. 3 рассматриваются операции, переводящие частично-рекурсивные функции (или упорядоченные наборы таких функций) снова в частично-рекурсивные функции, и находятся условия, при которых такая операция может быть задана алгоритмом, переводящим номера функций-аргументов в номер функции-результата.

1. НУМЕРАЦИИ И ЗАНУМЕРОВАННЫЕ МНОЖЕСТВА

Основой многих приложений теории вычислимых функций является понятие нумерации*). *Нумерацией*

*) Предложение об абстрактном изучении нумераций и определение частично-рекурсивной эквивалентности нумераций (см. ниже)

множества M называется функция типа $N-M$, множеством значений которой является M, т. е. частичное отображение N на M. Множество, рассматриваемое вместе с какой-нибудь фиксированной нумерацией, называется *занумерованным множеством*.

Занумеровать, очевидно, можно только не более чем счетное множество. Если α — нумерация множества M, то область определения функции α называется *основанием нумерации*. Нумерация α множества M называется *натуральной*, если основанием нумерации α является весь натуральный ряд *). Если $\alpha(n)=x$ ($x \in M$), число n называется *номером элемента x в*, или *относительно, нумерации* α. Каждый элемент занумерованного множества имеет не меньше, но вполне возможно, что больше, чем один номер.

Пусть α и β — две нумерации множества M.

Про функцию $\varphi^{(1)}$, которая по любому номеру любого $x \in M$ в нумерации α дает какой-то номер того же x в нумерации β, мы будем говорить, что она *сводит* нумерацию α к нумерации β.

Если функция φ сводит нумерацию α к нумерации β, то для любого n, входящего в основание нумерации α, выполняется равенство

$$\alpha(n)=\beta(\varphi(n)). \tag{1}$$

Равенство (1) по существу является определением сводящей функции. Подчеркнем, что, вообще говоря, существует много функций, сводящих нумерацию α к нумерации β (такая функция единственна лишь при условии, что нумерация α — натуральная, а нумерация β — взаимно-однозначная). Одна из них всегда может быть получена по формуле

$$\varphi(n)=(\mu t)[\beta(t)=\alpha(n)]. \tag{2}$$

Будем говорить, что нумерация α ***частично-рекурсивно*** (обще-рекурсивно, примитивно-рекурсивно)

были высказаны А. Н. Колмогоровым в его докладе 9 февраля 1954 г. на семинаре по рекурсивной арифметике в Московском университете.

*) Заметим, что термин «натуральная нумерация» равносилен введенному ранее термину «пересчет».

сводится к нумерации β, если существует частично-рекурсивная (обще-рекурсивная, примитивно-рекурсивная) функция, сводящая α к β.

Очевидно, если нумерация α примитивно-рекурсивно (обще-рекурсивно) сводится к нумерации β, то она и обще-рекурсивно (частично-рекурсивно) сводится к β. Если нумерация α частично-рекурсивно сводится к нумерации β и нумерация α — натуральная, то α обще-рекурсивно сводится к β (сводящая частично-рекурсивная функция автоматически обще-рекурсивна).

Если нумерации α и β частично-рекурсивно (обще-рекурсивно, примитивно-рекурсивно) сводятся друг к другу, мы будем называть их *частично-рекурсивно* (обще-рекурсивно, примитивно-рекурсивно) *эквивалентными*.

Замечание 1. *Если M — конечное множество, то любые две его взаимно-однозначные нумерации α и β примитивно-рекурсивно эквивалентны.* Действительно. Пусть

$$M = \{x_1, \ldots, x_m\}, \ \alpha(a_i) = x_i, \ \beta(b_i) = x_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Введем функцию φ:

$$\varphi(n) = \begin{cases} b_1 & n = a_1 \\ b_2 & n = a_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_m & n = a_m \\ 0 & n \in N \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}. \end{cases}$$

Тогда φ будет примитивно-рекурсивной (следствие теоремы 8 из § 4) функцией, сводящей α к β.

Замечание 2. Каково бы ни было s, *любые два примитивно-рекурсивных взаимно-однозначных соответствия между N и N^s*, если их рассматривать как нумерации пространства N^s, *примитивно-рекурсивно эквивалентны* (замечание на стр. 125).

Замечание 3. *Любые два примитивно-рекурсивных взаимно-однозначных соответствия между N и N^∞*, если их рассматривать как нумерации множества N^∞, *примитивно-рекурсивно эквивалентны* (замечание на стр. 135).

Замечание 4. Каково бы ни было s, *любые два обще-рекурсивных взаимно-однозначных соответствия между* N *и* N^s, если их рассматривать как нумерации пространства N^s, *обще-рекурсивно эквивалентны* (замечание на стр. 189).

Замечание 5. *Любые две частично-рекурсивных нумерации множества* $R \subseteq N^s$ (т. е. нумерации, являющиеся частично-рекурсивными отображениями) *частично-рекурсивно эквивалентны* (см., например, (2)).

Определение. Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторый класс нумераций множества M. И пусть в $\mathfrak{N}$ существует такая нумерация τ, что любая нумерация $\alpha \in \mathfrak{N}$ частично-рекурсивно сводится к нумерации τ. Тогда нумерация τ называется *нумерацией, главной для класса* $\mathfrak{N}$.

Все главные для класса $\mathfrak{N}$ нумерации, очевидно, частично-рекурсивно эквивалентны между собой; если же $\mathfrak{N}$ состоит из натуральных нумераций, то все главные для класса $\mathfrak{N}$ нумерации обще-рекурсивно эквивалентны между собой.

Понятие нумерации позволяет перенести теорию частично-рекурсивных функций и рекурсивно-перечислимых множеств с натурального ряда на произвольное занумерованное множество.

Действительно, пусть α — натуральная (для простоты) нумерация множества M. Назовем множество $E \subseteq M$ *рекурсивно-перечислимым* (*обще-рекурсивным*), если множество всех номеров элементов из E является рекурсивно-перечислимым (обще-рекурсивным) *). Назовем функцию f типа $M \to M$ *частично-рекурсивной*, если существует такая частично-рекурсивная функция φ типа $N \to N$, которая определена только на номерах элементов

*) Г. Райс [1953] называет множество E *вполне рекурсивно-перечислимым*, если множество всех номеров элементов из E (т. е. полный прообраз множества E при отображении α) рекурсивно-перечислимо, и просто *рекурсивно-перечислимым*, если существует такое рекурсивно-перечислимое множество $K \subseteq N$, что $\alpha(K) = E$. Аналогично, если $\alpha^{-1}(E)$ обще-рекурсивно, множество E называется *вполне обще-рекурсивным*. Слово «вполне» опущено нами в тексте последнего абзаца данной страницы не потому, что мы собираемся предлагать новую терминологию: просто в настоящий момент, при беглом изложении этих понятий, для нас не очень существенно указанное расщепление.

множества M, принадлежащих к области определения функции f, и которая произвольный номер n произвольного элемента $a \in M$, принадлежащего к области определения функции f, переводит в номер $\varphi(n)$ элемента $f(a)$.

Эти определения меньше, чем это может показаться на первый взгляд, зависят от исходной нумерации α; например, все введенные понятия не изменяют свой объем при переходе от α к любой обще-рекурсивно эквивалентной натуральной нумерации.

Интуитивный смысл этих понятий очевиден. Так, обще-рекурсивное подмножество множества M — это такое подмножество, принадлежность к которому произвольного элемента из M можно — с помощью некоторого алгоритма — распознать по номеру этого элемента.

2. НУМЕРАЦИИ СИСТЕМ $\mathcal{U}^{(s)}$ и $\mathbf{P}^{(s)}$

В настоящем параграфе нас будут интересовать нумерации двух множеств: системы $\mathcal{U}^{(s)}$ частично-рекурсивных функций от s аргументов ($s \geqslant 0$) и системы $\mathbf{P}^{(s)}$ рекурсивно-перечислимых множеств в $N^{(s)}$ ($s \geqslant 1$) *).

Заметим, что любую нумерацию системы $\mathcal{U}^{(s)}$ можно, не меняя ее по существу, расширить при помощи «нигде не определенной функции от s аргументов» до натуральной нумерации. Именно, пусть E — основание какой-нибудь нумерации α системы $\mathcal{U}^{(s)}$. Рассмотрим новую нумерацию α^*, заданную «кусочно»:

$$\alpha^*(n) = \begin{cases} \alpha(n), & n \in E, \\ \text{нигде не определенная функция}, & n \,\overline{\in}\, E. \end{cases}$$

Нумерация α^* и будет искомым расширением. Аналогичное расширение основания нумерации можно проделать при помощи «пустого множества в N^s» для любой нумерации системы $\mathbf{P}^{(s)}$.

Поэтому в дальнейшем нас будут интересовать натуральные нумерации систем $\mathcal{U}^{(s)}$ и $\mathbf{P}^{(s)}$ (см. ниже определения вычислимых нумераций систем $\mathcal{U}^{(s)}$ и $\mathbf{P}^{(s)}$).

*) Некоторые из излагаемых в настоящем параграфе общих свойств таких нумераций были рассмотрены в заметках В. А. Успенского [1955a, 1956].

Возьмем произвольную нумерацию α системы $\mathcal{U}^{(s)}$ $(s \geqslant 0)$. Условимся образ числа n при нумерации α обозначать через $\alpha_{[n]}$. Введем функцию $\Psi^{(s+1)}: \Psi(n, x_1, \ldots, x_s) = \alpha_{[n]}(x_1, \ldots, x_s)$. Очевидно, $\Psi^{(s+1)}$ — универсальная для системы $\mathcal{U}^{(s)}$ функция. Тем самым каждой нумерации α системы $\mathcal{U}^{(s)}$ ставится в соответствие некоторая универсальная для системы $\mathcal{U}^{(s)}$ функция; назовем эту функцию *универсальной функцией нумерации* α. В силу примера 21 из п. 2 § 9, не всякая универсальная для системы $\mathcal{U}^{(s)}$ функция является универсальной функцией некоторой нумерации системы $\mathcal{U}^{(s)}$, так как универсальная функция $\Psi^{(s+1)}$ любой нумерации системы $\mathcal{U}^{(s)}$ обладает тем свойством, что для любого $n \in N$ функция $f^{(s)}: f(x_1, \ldots, x_s) = \Psi(n, x_1, \ldots, x_s)$, получающаяся из функции $\Psi^{(s+1)}$ фиксированием первого аргумента, частично-рекурсивна *). Очевидно, что любая универсальная для системы $\mathcal{U}^{(s)}$ функция $\Psi^{(s+1)}$, обладающая только что названным свойством, является универсальной функцией некоторой нумерации системы $\mathcal{U}^{(s)}$, например, нумерации α, при которой каждому $n \in N$ ставится в соответствие функция $\alpha_{[n]}: \alpha_{[n]}(x_1, \ldots, x_s) = \Psi(n, x_1, \ldots, x_s)$.

О п р е д е л е н и е. Нумерация системы $\mathcal{U}^{(s)}$ $(s \geqslant 0)$ называется *вычислимой*, если она натуральная и ее универсальная функция частично-рекурсивна.

Каждая универсальная для системы $\mathcal{U}^{(s)}$ частично-рекурсивная функция $\Psi^{(s+1)}$ однозначно определяет ту в ы ч и с л и м у ю нумерацию α системы $\mathcal{U}^{(s)}$, для которой Ψ служит универсальной функцией: $\alpha_{[n]}(x_1, \ldots, x_s) = \Psi(n, x_1, \ldots, x_s)$; назовем эту вычислимую нумерацию α *соответствующей* функции Ψ.

Нумерацию, являющуюся главной для класса всех вычислимых нумераций системы $\mathcal{U}^{(s)}$, мы будем короче называть *главной нумерацией системы* $\mathcal{U}^{(s)}$. Любая вычислимая нумерация системы $\mathcal{U}^{(s)}$ к любой главной нумерации системы $\mathcal{U}^{(s)}$ сводится о б щ е-р е к у р с и в н о.

---

*) Таким образом, универсальная функция любой нумерации системы $\mathcal{U}^{(s)}$ универсальна (для системы $\mathcal{U}^{(s)}$) в смысле подстрочного примечания на стр. 203, хотя и может не быть частично-рекурсивной (см. прим. 2 из п. 2 § 9).

Универсальная для системы $\mathfrak{A}^{(s)}$ функция называется *главной*, если она частично-рекурсивна и соответствующая ей вычислимая нумерация системы $\mathfrak{A}^{(s)}$ — главная. Следующие ниже теоремы 1 — 3 показывают, что понятие главной универсальной для системы $\mathfrak{A}^{(s)}$ функции можно определить и независимо от понятия нумерации.

Теорема 1. *Универсальная для системы $\mathfrak{A}^{(s)}$ функция $\Omega^{(s+1)}$ тогда и только тогда является* **главной**, *когда она частично-рекурсивна и для произвольной универсальной для системы $\mathfrak{A}^{(s)}$ частично-рекурсивной функции $\Psi^{(s+1)}$ существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$, что*

$$\Omega(\varphi(n), x_1, \ldots, x_s) = \Psi(n, x_1, \ldots, x_s). \qquad (1)$$

Доказательство очевидно.

Теорема 2. *Универсальная для системы $\mathfrak{A}^{(s)}$ функция $\Omega^{(s+1)}$ тогда и только тогда является* **главной**, *когда она частично-рекурсивна и для произвольной частично-рекурсивной функции $f^{(s+1)}$ существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$, что*

$$\Omega(\varphi(n), x_1, \ldots, x_s) = f(n, x_1, \ldots, x_s). \qquad (2)$$

Доказательство. 1) Достаточность («тогда») следует из теоремы 1.

2) Необходимость («только тогда»). Пусть $\Omega^{(s+1)}$ — главная универсальная для системы $\mathfrak{A}^{(s)}$ функция. По определению Ω частично-рекурсивна. Возьмем произвольную $f^{(s+1)} \in \mathfrak{A}^{(s+1)}$. Введем вспомогательную функцию $g^{(s+1)}$:

$$g(n, x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}, x_1, \ldots, x_s\right) & n \text{ — четное} \\ \Omega\left(\frac{n-1}{2}, x_1, \ldots, x_s\right) & n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Ввиду частично-рекурсивности функций $z = \frac{x}{y}$, $z = x - y$ (пример в п. 3 § 6) и теоремы 7 из § 6, функция g частично-рекурсивна. Очевидно, g — универсальная для $\mathfrak{A}^{(s)}$ функция. По теореме 1 существует такая обще-рекурсивная функция $\psi^{(1)}$, что

$$\Omega(\psi(n), x_1, \ldots, x_s) = g(n, x_1, \ldots, x_s).$$

Искомая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$ определяется равенством

$$\varphi(x) = \psi(2x).$$

Проверим.

$$\Omega(\varphi(n), x_1, \ldots, x_s) = \Omega(\psi(2n), x_1, \ldots, x_s) = \\ = g(2n, x_1, \ldots, x_s) = f(n, x_1, \ldots, x_s).$$

Теорема доказана.

Каждая частично-рекурсивная функция $f^{(s+1)}$ определяет «вычислимую» нумерацию некоторой подсистемы системы $\mathcal{U}^{(s)}$, а именно—нумерацию множества функций, получающихся из f фиксированием первого аргумента. Теорема 2 показывает, что к главной нумерации системы $\mathcal{U}^{(s)}$ обще-рекурсивно сводится не только любая вычислимая нумерация всей системы $\mathcal{U}^{(s)}$, соответствующая универсальной для системы $\mathcal{U}^{(s)}$ частично-рекурсивной функции (что следует просто из определения главной нумерации системы $\mathcal{U}^{(s)}$), но и любая «вычислимая» нумерация любой подсистемы системы $\mathcal{U}^{(s)}$, «соответствующая» произвольной частично-рекурсивной функции $f^{(s+1)}$.

Теорема 3*). *Универсальная для системы $\mathcal{U}^{(s)}$ функция $\Omega^{(s+1)}$ тогда и только тогда является* ***главной***, *когда она частично-рекурсивна и для произвольной частично-рекурсивной функции $f^{(s+p)}$ $(p \geqslant 1)$ существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(p)}$, что*

$$\Omega(\varphi(n_1, \ldots, n_p), x_1, \ldots, x_s) = f(n_1, \ldots, n_p, x_1, \ldots, x_s). \quad (3)$$

Доказательство. 1) Достаточность («тогда») следует из теоремы 2.

2) Необходимость («только тогда»). Фиксируем какое-нибудь обще-рекурсивное взаимно-однозначное

---

*) В силу этой теоремы и теоремы XXIII из § 65 книги С. К. Клини [1952], введенная в указанной книге для каждого n функция Φ_n (являющаяся универсальной функцией так называемой «гёделевской» нумерации системы $\mathcal{U}^{(n)}$) является главной универсальной для системы $\mathcal{U}^{(n)}$ функцией, а соответствующая этой функции «гёделевская» нумерация—главной нумерацией системы $\mathcal{U}^{(n)}$.

соответствие между N и N^p и возьмем функции $\varkappa_1^{[p]}, \varkappa_2^{[p]}, \ldots$ $\ldots, \varkappa_p^{[p]}, \varkappa_0^{[p]}$, его осуществляющие (теорема 32 из § 7). Введем вспомогательную функцию $g^{(s+1)}$:

$$g(n, x_1, \ldots, x_s) = f(\varkappa_1^{[p]}(n), \ldots, \varkappa_p^{[p]}(n), x_1, \ldots, x_s).$$

Функция g частично-рекурсивна. По теореме 2 существует такая обще-рекурсивная функция $\psi^{(1)}$, что

$$\Omega(\psi(n), x_1, \ldots, x_s) = g(n, x_1, \ldots, x_s).$$

Искомая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(p)}$ задается равенством

$$\varphi(x_1, \ldots, x_p) = \psi(\varkappa_0^{[p]}(x_1, \ldots, x_p)).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\Omega(\varphi(n_1, \ldots, n_p), x_1, \ldots, x_s) = \\
&\quad = \Omega(\psi(\varkappa_0^{[p]}(n_1, \ldots, n_p)), x_1, \ldots, x_s) = \\
&\quad = g(\varkappa_0^{[p]}(n_1, \ldots, n_p), x_1, \ldots, x_s) = \\
&\quad = f(\varkappa_1^{[p]}(\varkappa_0^{[p]}(n_1, \ldots, n_p)), \ldots, \varkappa_p^{[p]}(\varkappa_0^{[p]}(n_1, \ldots, n_p)), \\
&\qquad\qquad x_1, \ldots, x_s) = f(n_1, \ldots, n_p, x_1, \ldots, x_s).
\end{aligned}$$

Теорема 4. *Существует главная нумерация системы* $\mathcal{U}^{(s)}$ *). Другая формулировка: *Существует главная универсальная для системы* $\mathcal{U}^{(s)}$ *функция.*

Доказательство. Пусть $\Psi_1^{(2)}$ — произвольная частично-рекурсивная функция, универсальная для системы $\mathcal{U}^{(1)}$ (теорема 1 из § 9). Фиксируем, во-первых, какое-нибудь обще-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между N и N^2 (пусть оно осуществляется функциями $\varkappa_1^{[2]}, \varkappa_2^{[2]}, \varkappa_0^{[2]}$) и, во-вторых, какое-нибудь обще-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между N и N^{s+1} (пусть оно осуществляется функциями $\varkappa_1^{[s+1]}, \varkappa_2^{[s+1]}, \ldots$ $\ldots, \varkappa_{s+1}^{[s+1]}, \varkappa_0^{[s+1]}$). Такие соответствия существуют по теореме 32 из § 7. Введем функцию $\Omega^{(s+1)}$:

$$\Omega(n, x_1, \ldots, x_s) = \Psi_1(\varkappa_1^{[2]}(n), \varkappa_0^{[s+1]}(\varkappa_2^{[2]}(n), x_1, \ldots, x_s)). \tag{4}$$

*) Согласно подстрочному примечанию на стр. 301, такой нумерацией является, например, введенная в § 65 книги С. К. Клини [1952] «гёделевская» нумерация частично-рекурсивных функций.

При помощи теоремы 1 докажем, что Ω — главная универсальная для системы $\mathcal{U}^{(s)}$ функция. Прежде всего, Ω частично-рекурсивна. Возьмем произвольную универсальную для системы $\mathcal{U}^{(s)}$ частично-рекурсивную функцию $\Psi^{(s+1)}$. Построим такую обще-рекурсивную функцию $\varphi^{(1)}$, чтобы имело место равенство (1):

$$\Omega(\varphi(n), x_1, \ldots, x_s) = \Psi(n, x_1, \ldots, x_s). \qquad (1)$$

Введем вспомогательную функцию $g^{(1)}$:

$$g(x) = \Psi(\varkappa_1^{[s+1]}(x), \varkappa_2^{[s+1]}(x), \ldots, \varkappa_{s+1}^{[s+1]}(x)).$$

Поскольку $g \in \mathcal{U}^{(1)}$, существует такое число n_0, что

$$g(x) = \Psi_1(n_0, x).$$

Искомая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$ определяется равенством

$$\varphi(x) = \varkappa_0^{[2]}(n_0, x).$$

Докажем это.

$$\begin{aligned}
&\Omega(\varphi(n), x_1, \ldots, x_s) = \\
&= \Psi_1(\varkappa_1^{[2]}(\varphi(n)), \varkappa_0^{[s+1]}(\varkappa_2^{[2]}(\varphi(n)), x_1, \ldots, x_s)) = \\
&= \Psi_1(\varkappa_1^{[2]}(\varkappa_0^{[2]}(n_0, n)), \varkappa_0^{[s+1]}(\varkappa_2^{[2]}(\varkappa_0^{[2]}(n_0, n)), x_1, \ldots, x_s)) = \\
&= \Psi_1(n_0, \varkappa_0^{[s+1]}(n, x_1, \ldots, x_s)) = \\
&= g(\varkappa_0^{[s+1]}(n, x_1, \ldots, x_s)) = \\
&= \Psi(\varkappa_1^{[s+1]}(\varkappa_0^{[s+1]}(n, x_1, \ldots, x_s)), \varkappa_2^{[s+1]}(\varkappa_0^{[s+1]}(n, x_1, \ldots \\
&\quad \ldots, x_s)), \ldots, \varkappa_{s+1}^{[s+1]}(\varkappa_0^{[s+1]}(n, x_1, \ldots, x_s))) = \\
&\qquad\qquad = \Psi(n, x_1, \ldots, x_s).
\end{aligned}$$

Равенство (1) доказано. Из него следует, во-первых, что Ω — *универсальная* для системы $\mathcal{U}^{(s)}$ функция (если $f \in \mathcal{U}^{(s)}$, то f имеет некоторый номер m относительно Ψ и, следовательно, номер $\varphi(m)$ относительно Ω) и, во-вторых, что Ω — *главная* универсальная для системы $\mathcal{U}^{(s)}$ функция (теорема 1). Теорема доказана.

При $s = 0$ равенство (4) принимает вид:

$$\Omega(n) = \Psi_1(\varkappa_1^{[2]}(n), \varkappa_0^{[1]}(\varkappa_2^{[2]}(n))),$$

при $s=1$ (поскольку соответствия $\varkappa^{[2]}$ и $\varkappa^{[s+1]}$ могут быть в этом случае взяты совпадающими) — вид:

$$\Omega(n, x)=\Psi_1(\varkappa_1^{[2]}(n), \varkappa_0^{[2]}(\varkappa_2^{[2]}(n), x)).$$

Следствие. *Существует такая частично-рекурсивная функция* $\Omega^{(1)}$, *что для всякой частично-рекурсивной функции* $f^{(1)}$ *существует такая обще-рекурсивная функция* $\varphi^{(1)}$, *что для всякого* n

$$\Omega(\varphi(n))=f(n). \qquad (2')$$

Доказательство. Как следует из теоремы 2, искомой функцией является произвольная главная для системы $\mathcal{U}^{(0)}$ функция.

Займемся теперь нумерациями системы $\mathbf{P}^{(s)}$ $(s \geqslant 1)$. Возьмем произвольную нумерацию α системы $\mathbf{P}^{(s)}$. Образ числа n при нумерации α обозначим через $\alpha_{[n]}$. $\alpha_{[n]}$ — рекурсивно-перечислимое множество в N^s. Теперь определим множество $A^{(s+1)}$: $A^{(s+1)}=\bigcup_{n \in N}[\{\langle n\rangle\} \times \alpha_{[n]}]$. Очевидно, $A^{(s+1)}$ — универсальное для системы $\mathbf{P}^{(s)}$ множество. Тем самым каждой нумерации α системы $\mathbf{P}^{(s)}$ ставится в соответствие некоторое универсальное для системы $\mathbf{P}^{(s)}$ множество; назовем это множество *универсальным множеством нумерации* α. Опять-таки не всякое универсальное для системы $\mathbf{P}^{(s)}$ множество является универсальным множеством некоторой нумерации системы $\mathbf{P}^{(s)}$. Универсальное для системы $\mathbf{P}^{(s)}$ множество $A^{(s+1)}$ тогда и только тогда является универсальным множеством некоторой нумерации системы $\mathbf{P}^{(s)}$, когда для любого $n \in N$ множество $\mathrm{пр}_{2,3,\ldots,s+1}[(\{\langle n\rangle\} \times N^s) \cap A^{(s+1)}]$ рекурсивно-перечислимо *).

Определение. Нумерация системы $\mathbf{P}^{(s)}$ $(s \geqslant 1)$ называется *вычислимой*, если она натуральная и ее универсальное множество рекурсивно-перечислимо.

---

*) Таким образом, универсальное множество любой нумерации системы $\mathbf{P}^{[s]}$ универсально (для системы $\mathbf{P}^{[s]}$) в смысле подстрочного примечания на стр. 266, хотя и может не быть рекурсивно-перечислимым.

Каждое универсальное для системы $\mathbf{P}^{(s)}$ рекурсивно-перечислимое множество $A^{(s+1)}$ однозначно определяет ту *вычислимую* нумерацию α системы $\mathbf{P}^{(s)}$, для которой $A^{(s+1)}$ служит универсальным множеством, а именно: $\alpha_{[n]} = \text{пр}_{2,3,\ldots,s+1}[(\{\langle n\rangle\}\times N^s)\cap A^{(s+1)}]$; назовем эту вычислимую нумерацию α *соответствующей* множеству $A^{(s+1)}$.

Нумерацию, являющуюся главной для класса всех вычислимых нумераций системы $\mathbf{P}^{(s)}$, мы будем короче называть *главной нумерацией системы* $\mathbf{P}^{(s)}$. Любая вычислимая нумерация системы $\mathbf{P}^{(s)}$ к любой главной нумерации системы $\mathbf{P}^{(s)}$ сводится общерекурсивно.

Универсальное для системы $\mathbf{P}^{(s)}$ множество называется *главным*, если оно рекурсивно-перечислимо и соответствующая ему вычислимая нумерация системы $\mathbf{P}^{(s)}$ — главная. Имеют место аналоги теорем 1—4.

Теорема 5. *Универсальное для системы* $\mathbf{P}^{(s)}$ *множество* $A^{(s+1)}$ *тогда и только тогда является* ***главным****, когда оно рекурсивно-перечислимо и для произвольного универсального для системы* $\mathbf{P}^{(s)}$ *рекурсивно-перечислимого множества* $B^{(s+1)}$ *существует такая обще-рекурсивная функция* $\varphi^{(1)}$, *что для любого* $n\in N$ *выполняется равенство*

$$\text{пр}_{2,3,\ldots,s+1}[(\{\langle\varphi(n)\rangle\}\times N^s)\cap A^{(s+1)}] = \\ = \text{пр}_{2,3,\ldots,s+1}[(\{\langle n\rangle\}\times N^s)\cap B^{(s+1)}]. \qquad (5)$$

Доказательство очевидно.

Теорема 6. *Универсальное для системы* $\mathbf{P}^{(s)}$ *множество* $A^{(s+1)}$ *тогда и только тогда является* ***главным****, когда оно рекурсивно-перечислимо и для произвольного рекурсивно-перечислимого множества* M *в* N^{s+1} *существует такая обще-рекурсивная функция* $\varphi^{(1)}$, *что для любого* $n\in N$ *выполняется равенство*

$$\text{пр}_{2,3,\ldots,s+1}[(\{\langle\varphi(n)\rangle\}\times N^s)\cap A^{(s+1)}] = \\ = \text{пр}_{2,3,\ldots,s+1}[(\{\langle n\rangle\}\times N^s)\cap M]. \qquad (6)$$

Доказательство. 1) Достаточность («тогда») следует из теоремы 5.

2) Необходимость («только тогда»). Пусть $A^{(s+1)}$ — главное универсальное для системы $\mathbf{P}^{(s)}$ множество. По определению $A^{(s+1)}$ рекурсивно-перечислимо. Возьмем произвольное $M \in \mathbf{P}^{(s+1)}$. Введем вспомогательное множество L в N^{s+1}:

$$L = \mathscr{E}\left\{\langle n, x_1, \ldots, x_s\rangle \in N^{s+1} \,\middle|\, \left[(n - \text{четное})\,\&\right.\right.$$
$$\left.\&\left(\left\langle \frac{n}{2}, x_1, \ldots, x_s\right\rangle \in M\right)\right] \vee \left[(n - \text{нечетное})\,\&\right.$$
$$\left.\left.\&\left(\left\langle \frac{n-1}{2}, x_1, \ldots, x_s\right\rangle \in A^{(s+1)}\right)\right]\right\}.$$

В силу теоремы 6 из § 6 и теоремы 14 из § 5 предикат „$\langle n, x_1, \ldots, x_s\rangle \in L$“, а значит, и множество L — рекурсивно-перечислимы. Очевидно, L — универсальное для $\mathbf{P}^{(s)}$ множество. По теореме 5 существует такая обще-рекурсивная функция $\psi^{(1)}$, что для любого n имеет место равенство

$$\text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle\psi(n)\rangle\} \times N^s) \cap A^{(s+1)}] =$$
$$= \text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle n\rangle\} \times N^s) \cap L]. \quad (7)$$

Искомая обще-рекурсивная $\varphi^{(1)}$ определяется равенством

$$\varphi(x) = \psi(2x).$$

Проверим. В силу определения функции φ и (7) для любого n выполняются равенства:

$$\text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle\varphi(n)\rangle\} \times N^s) \cap A^{(s+1)}] =$$
$$= \text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle\psi(2n)\rangle\} \times N^s) \cap A^{(s+1)}] =$$
$$= \text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle 2n\rangle\} \times N^s) \cap L].$$

Остается показать, что для любого n выполняется равенство

$$\text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle 2n\rangle\} \times N^s) \cap L] =$$
$$= \text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle n\rangle\} \times N^s) \cap M].$$

Фиксируем произвольное $n \in N$. Если

$$\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in \text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle 2n\rangle\} \times N^s) \cap L],$$

то $\langle 2n, x_1, \ldots, x_s\rangle \in L$. Тогда, в силу определения множества L, $\langle n, x_1, \ldots, x_s\rangle \in M$ и, следовательно,

$$\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in \text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle n\rangle\}\times N^s)\cap M].$$

Обратно. Если

$$\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in \text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle n\rangle\}\times N^s)\cap M],$$

то $\langle n, x_1, \ldots, x_s\rangle \in M$, $\langle 2n, x_1, \ldots, x_s\rangle \in L$ и

$$\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in \text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle 2n\rangle\}\times N^s)\cap L].$$

Теорема доказана.

Теорема 7. *Универсальное для системы* $\mathbf{P}^{(s)}$ *множество* $A^{(s+1)}$ *тогда и только тогда является* ***главным***, *когда оно рекурсивно-перечислимо и для произвольного рекурсивно-перечислимого множества M в N^{s+p} $(p\geqslant 1)$ существует такая обще-рекурсивная функция* $\varphi^{(p)}$, *что для любого* $\langle n_1, \ldots, n_p\rangle \in N^p$ *выполняется равенство*

$$\text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle\varphi(n_1, \ldots, n_p)\rangle\}\times N^s)\cap A^{s+1}] =$$
$$= \text{пр}_{p+1,\,p+2,\,\ldots,\,p+s}\,[(\{\langle n_1, \ldots, n_p\rangle\}\times N^s)\cap M]. \quad (8)$$

Доказательство. 1) Достаточность («тогда») следует из теоремы 6.

2) Необходимость («только тогда»). Фиксируем какое-нибудь обще-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между N и N^p и возьмем функции $\varkappa_1^{[p]}, \varkappa_2^{[p]}, \ldots$ $\ldots, \varkappa_p^{[p]}, \varkappa_0^{[p]}$, его осуществляющие (теорема 32 из § 7). Введем вспомогательное множество L в N^{s+1}:

$$L = \mathscr{E}\,\{\langle n, x_1, \ldots, x_s\rangle \in N^{s+1} \mid$$
$$\langle \varkappa_1^{[p]}(n), \ldots, \varkappa_p^{[p]}(n), x_1, \ldots, x_s\rangle \in M\}.$$

В силу следствия 2 теоремы 5 из § 6, множество L рекурсивно-перечислимо. По теореме 6 существует такая обще-рекурсивная функция $\psi^{(1)}$, что для любого n выполняется равенство

$$\text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle\psi(n)\rangle\}\times N^s)\cap A^{(s+1)}] =$$
$$= \text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle n\rangle\}\times N^s)\cap L].$$

Искомая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(p)}$ задается равенством:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_p) = \psi(\varkappa_0^{[p]}(x_1, \ldots, x_p)).$$

Проверку равенства (8) предоставляем читателю. Теорема доказана.

Для использования в дальнейшем нам полезно фиксировать

Следствие 1. *Для всякой главной нумерации* τ *системы* $\mathbf{P}^{(s)}$ *и всякого рекурсивно-перечислимого множества* M *в* N^{s+p} *существует такая обще-рекурсивная функция* $\varphi^{(p)}$, *что для любого* $\langle n_1, \ldots, n_p\rangle \in N^p$ *число* $\varphi(n_1, \ldots, n_p)$ *есть один из номеров множества*

$$\text{пр}_{p+1,\, p+2,\, \ldots,\, p+s}[(\{\langle n_1, \ldots, n_p\rangle\} \times N^s) \cap M]$$

в нумерации τ.

Из следствия 1 мгновенно получается

Следствие 2. *Для всякой главной нумерации* τ *системы* $\mathbf{P}^{(1)}$ *существует такая обще-рекурсивная функция* $\varphi^{(1)}$, *что для любого* $x \in N$ *число* $\varphi(x)$ *есть один из номеров одноэлементного множества* $\{x\}$ *в нумерации* τ.

Доказательство. Требуемая функция $\varphi^{(1)}$ есть просто функция, существование которой утверждается следствием 1 при $s = p = 1$ и $M = \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \in N^2 \mid x = y\}$, так как тогда

$$\text{пр}_2[(\{\langle x\rangle\} \times N) \cap M] = \{x\}.$$

Теорема 8. *Существует главная нумерация системы* $\mathbf{P}^{(s)}$ *). Другая формулировка: *Существует главное универсальное для системы* $\mathbf{P}^{(s)}$ *множество.*

Доказательство. Дадим два доказательства этой теоремы. Первое будет полным аналогом доказательства теоремы 4 **). Поэтому мы проведение подробностей в нем предоставим читателю. Второе доказательство будет опираться на теорему 4 и понадобится нам в дальнейшем.

1) Пусть $B^{(2)}$ — произвольное рекурсивно-перечислимое множество в N^2, универсальное для системы $\mathbf{P}^{(1)}$

---

*) Из литературы автору известны две вычислимые нумерации систем $\mathbf{P}^{(s)}$, а именно — две нумерации системы $\mathbf{P}^{(1)}$: нумерация, рассмотренная Э. Л. Постом [1944], и «гёделевская нумерация» (см. подстрочное примечание редактора на стр. 272 русского издания книги С. К. Клини [1952]), рассмотренная Г. Райсом [1953]; обе они, как можно показать, главные.

**) Ср. доказательства теорем 6 и 2, 7 и 3.

(теорема 5 из § 9). Фиксируем два обще-рекурсивных взаимно-однозначных соответствия: между N и N^2 и между N и N^{s+1} (теорема 32 из § 7). Пусть эти соответствия осуществляются, соответственно, функциями $\varkappa_1^{[2]}$, $\varkappa_2^{[2]}$, $\varkappa_0^{[2]}$ и $\varkappa_1^{[s+1]}$, $\varkappa_2^{[s+1]}, \ldots, \varkappa_{s+1}^{[s+1]}$, $\varkappa_0^{[s+1]}$. Множество $A^{(s+1)}$, определенное равенством (ср. с (4)):

$$A^{(s+1)} = \mathscr{E}\{\langle n, x_1, \ldots, x_s\rangle \in N^{s+1} \mid \langle \varkappa_1^{[2]}(n),\ \varkappa_0^{[s+1]}(\varkappa_2^{[2]}(n), x_1, \ldots, x_s)\rangle \in B^{(2)}\},$$

есть искомое главное универсальное для системы $\mathbf{P}^{(s)}$ множество.

2) Доказательство проведем для $s = 1$. (Легко видеть, что если $A^{(2)}$ — главное универсальное для системы $\mathbf{P}^{(1)}$ множество, то, применяя к нему конструкцию, указанную в доказательстве теоремы 8 из § 9, мы получим множество $A^{(s+1)}$, являющееся главным универсальным для системы $\mathbf{P}^{(s)}$ множеством.) Возьмем главную универсальную для системы $\mathcal{U}^{(1)}$ функцию $\Omega^{(2)}$. Такая функция существует по теореме 4. При помощи этой функции мы построим искомую главную нумерацию системы $\mathbf{P}^{(1)}$. А именно: любому $n \in N$ поставим в соответствие множество значений функции $y = \Omega(n, x)$. Из теоремы 10 из § 6 следует, что этим соответствием действительно определяется некоторая нумерация ω системы $\mathbf{P}^{(1)}$. Очевидно, ω — натуральная нумерация. Универсальным множеством нумерации ω является, как легко видеть, множество $\text{пр}_{1,3}\, G_\Omega$ *), рекурсивно-перечислимое по теоремам 3 из § 6 и 3 из § 5. Значит, ω — вычислимая нумерация. Докажем, что ω — главная нумерация. Возьмем произвольную вычислимую нумерацию γ системы $\mathbf{P}^{(1)}$. Пусть P — универсальное множество нумерации γ. По определению P — рекурсивно-перечислимое множество (в N^2). По теореме 4 из § 10 существует такая частично-рекурсивная функция $f^{(2)}$, что при каждом фиксированном n множество значений функции $y = f(n, x)$ совпадает с множеством $\text{пр}_2\,[(\{\langle n\rangle\} \times N) \cap P]$. По теореме 2 существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$, что $\Omega(\varphi(n), x) = f(n, x)$. И, наконец, для любого n множе-

*) Ср. с (4) из п. 3 § 9.

ство значений функции $y=\Omega(n, x)$ совпадает с множеством $\text{пр}_3[(\{\langle n\rangle\}\times N)\cap \text{пр}_{1,3}G_\Omega]$. Следовательно, для любого n имеет место равенство

$$\text{пр}_2[(\{\langle n\rangle\}\times N)\cap P]=\text{пр}_3[(\{\langle\varphi(n)\rangle\}\times N)\cap \text{пр}_{1,3}G_\Omega].$$

Итак, обще-рекурсивная функция φ дает по номеру любого рекурсивно-перечислимого множества в нумерации γ номер того же множества в нумерации ω. Значит, нумерация ω — главная. Теорема доказана.

Замечание. Во втором доказательстве теоремы 8 мы получили главную нумерацию системы $\mathrm{P}^{(s)}$ из главной нумерации системы $\mathcal{U}^{(s)}$. Можно было, наоборот, получить главную нумерацию системы $\mathcal{U}^{(s)}$ из главной нумерации системы $\mathrm{P}^{(s)}$ *).

До сих пор мы в настоящем параграфе изучали само понятие нумерации. Сейчас мы применим это понятие. Мы сформулируем и докажем две теоремы (теоремы 9, 11), которые имеют очень любопытный интуитивный смысл и которые без понятия нумерации было бы трудно точно сформулировать.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество объектов произвольной природы. Свойство Q, определенное для элементов из $\mathfrak{M}$ (т. е. такое свойство, что каждый элемент из $\mathfrak{M}$ либо обладает, либо не обладает этим свойством), назовем *нетривиальным*, если существуют как элементы из $\mathfrak{M}$, обладающие этим свойством, так и элементы из $\mathfrak{M}$, не обладающие им.

Теорема 9. *Каково бы ни было нетривиальное свойство Q, определенное для функций из $\mathcal{U}^{(s)}$, и какова бы ни была главная нумерация* ω системы $\mathcal{U}^{(s)}$, *функция* $\tau^{(1)}$, *равная 1 на номерах* (в нумерации ω) *функций, обладающих свойством Q, и равная* 0 *на номерах* (в нумерации ω) *функций, не обладающих свойством Q, не частично-рекурсивна.*

Доказательство. Допустим противное. Допустим существование такого нетривиального свойства Q, определенного для функций из $\mathcal{U}^{(s)}$, и такой главной нумерации ω системы $\mathcal{U}^{(s)}$, что функция $\tau^{(1)}$, равная 1 на но-

*) См. замечание 1 в п. 3 § 9. Здесь сохраняется та же конструкция.

мерах (в нумерации ω) функций, обладающих свойством Q, и 0 на номерах (в нумерации ω) функций, не обладающих свойством Q, частично-рекурсивна. Так как функция τ всюду определена, она будет тогда обще-рекурсивной. Свойство Q — нетривиальное. Значит, существует некоторая частично-рекурсивная функция $f^{(s)}$, обладающая свойством Q, и некоторая частично-рекурсивная функция $g^{(s)}$, им не обладающая. Пусть $\Omega^{(s+1)}$ — универсальная функция нумерации ω. Дальше мы дадим два доказательства теоремы 9. Одно будет опираться на существование рекурсивно-перечислимого не обще-рекурсивного множества (§ 9, п. 2, пример 4), другое — на существование непересекающихся рекурсивно-перечислимых множеств, не отделимых обще-рекурсивными (теорема 7 из § 10).

1) Возьмем линейное рекурсивно-перечислимое, но не обще-рекурсивное множество R. Обозначим через ζ «нигде не определенную функцию от s аргументов». $\zeta \in \mathcal{U}^{(s)}$.

Предположим сначала, что функция ζ обладает свойством Q. Введем вспомогательную функцию $h_1^{(s+1)}$:

$$h_1(n, x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} g(x_1, \ldots, x_s), & n \in R, \\ \text{не определена}, & n \overline{\in} R. \end{cases}$$

График G_{h_1} функции h_1 равен $R \times G_g$, где G_g — график функции g. По теореме 3 из § 6 функция h_1 частично-рекурсивна. По теореме 2 существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi_1^{(1)}$, что $\Omega(\varphi_1(n), x_1, \ldots, x_s) = h_1(n, x_1, \ldots, x_s)$. Следовательно, для $n \in R$ имеет место равенство:

$$\Omega(\varphi_1(n), x_1, \ldots, x_s) = g(x_1, \ldots, x_s).$$

Для $n \overline{\in} R$ значение $\Omega(\varphi_1(n), x_1, \ldots, x_s)$ не определено. Значит, для $n \in R$ число $\varphi_1(n)$ является номером (в нумерации ω) функции g, а для $n \overline{\in} R$ — номером функции ζ. Функция g не обладает свойством Q. Следовательно,

$$\text{для } n \in R \quad \tau(\varphi_1(n)) = 0. \tag{9}$$

По предположению функция ζ обладает свойством Q. Следовательно,

$$\text{для } n \overline{\in} R \quad \tau(\varphi_1(n)) = 1. \tag{10}$$

Введем функцию $\psi_1^{(1)}$:

$$\psi_1(x) = \tau(\varphi_1(x)). \tag{11}$$

Функция ψ_1 обще-рекурсивна. Из (9), (10), (11) следует, что множество R является прообразом числа 0 при отображении N в N, осуществляемом функцией ψ_1. По теореме 11 из § 7 R — обще-рекурсивное множество. Противоречие с выбором R.

Пусть теперь функция ζ не обладает свойством Q. Вводя тогда функцию $h_1^{(s+1)}$, согласно равенствам

$$h_1(n, x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_s), & n \in R \\ \text{не определена}, & n \overline{\in} R, \end{cases}$$

мы совершенно аналогично опять придем к обще-рекурсивности множества R.

Функция ζ не может ни обладать, ни не обладать свойством Q. Противоречие. Теорема доказана.

2) Возьмем непересекающиеся рекурсивно-перечислимые линейные множества R_1, R_2, не отделимые обще-рекурсивными множествами. Введем функцию $h_2^{(s+1)}$:

$$h_2(n_1, x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_s), & n \in R_1, \\ g(x_1, \ldots, x_s), & n \in R_2. \end{cases}$$

По теореме 7 из § 6 функция h_2 частично-рекурсивна. По теореме 2 существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi_2^{(1)}$, что $\Omega(\varphi_2(n), x_1, \ldots, x_s) = h_2(n, x_1, \ldots, x_s)$. Следовательно, для $n \in R_1$ $\Omega(\varphi_2(n), x_1, \ldots, x_s) = f(x_1, \ldots, x_s)$, для $n \in R_2$ $\Omega(\varphi_2(n), x_1, \ldots, x_s) = g(x_1, \ldots, x_s)$. Значит,

$$\text{для } n \in R_1 \quad \tau(\varphi_2(n)) = 1, \tag{12}$$

$$\text{для } n \in R_2 \quad \tau(\varphi_2(n)) = 0. \tag{13}$$

Введем функцию $\psi_2^{(1)}$:

$$\psi_2(x) = \tau(\varphi_2(x)). \tag{14}$$

Функция ψ_2 обще-рекурсивна. Обозначим через S_1 прообраз числа 1 при отображении N в N, осуществляемом функцией ψ_2, а через S_2 — прообраз числа 0. По теореме 11 из § 7 S_1 и S_2 — обще-рекурсивные множества.

$S_1 \cap S_2 = \Lambda$. Из (12), (13), (14) $R_1 \subseteq S_1$, $R_2 \subseteq S_2$. Противоречие с неотделимостью рекурсивно-перечислимых множеств R_1, R_2 обще-рекурсивными множествами. Теорема опять доказана.

Поясним интуитивный смысл теоремы 9. Теорема 9 показывает, что для любой главной нумерации системы $\mathcal{U}^{(s)}$ множество вычислимых функций из $\mathcal{U}^{(s)}$, удовлетворяющих произвольному, но фиксированному нетривиальному свойству, не обще-рекурсивно в смысле п. 1, т. е. не существует алгоритма, позволяющего по номеру функции узнать, обладает ли она интересующим нас свойством. Значение этой теоремы обусловливается следующим. Возьмем какое-нибудь уточнение понятия «алгоритм». Тогда каждый алгоритм, понимаемый как предписание, запишется в виде слова в некотором алфавите; слегка модифицируя выбранное уточнение, можно добиться того, чтобы этот алфавит был один для всех алгоритмов (так, одним из возможных способов записи алгоритмов, вычисляющих числовые функции, является пробивание отверстий на вводимой в вычислительную машину перфоленте *); в этом случае алфавит состоит из всех возможных видов пробивок). После этого все алгоритмы можно эффективно перенумеровать. Поставим теперь каждому числу в соответствие алгоритм, имеющий данное число своим номером, и, далее, вычислимую функцию, задаваемую этим алгоритмом. Получится некоторая нумерация вычислимых функций. Для всех известных уточнений понятия «алгоритм» (и — при естественных допущениях — для всех мыслимых уточнений) эта нумерация оказывается главной **). Поэтому, из теоремы 9 вытекает, что каково бы ни было нетривиальное свойство функций,

*) Мы исходим здесь из того, что каждая вычислимая функция может быть вычислена на вычислительной машине. Это, однако, верно лишь при условии, что вычислительная машина обладает потенциально неограниченной (хотя и конечной в каждый момент) памятью. В применении к реальным машинам требование потенциально неограниченной памяти означает возможность увеличивать по мере надобности емкость так называемой внешней памяти (например, возможность подклеивать все новые и новые куски магнитной ленты).

**) См. по этому поводу заметку В. А. Успенского [1956].

не существует способа (алгоритма), позволяющего по виду произвольного алгоритма распознавать, обладает ли задаваемая им функция рассматриваемым свойством, или нет. В частности, нетривиальные свойства вычислимых функций нельзя распознавать и по их программам, пробитым на перфолентах.

Беря в теореме 9 в качестве Q различные конкретные свойства, можно получать различные следствия этой теоремы. Так, если в качестве Q взять свойство «совпадать с данной частично-рекурсивной функцией f», получим такое

Следствие 1. *Какова бы ни была частично-рекурсивная функция $f^{(s)}$ и какова бы ни была главная нумерация* ω *системы* $\mathfrak{U}^{(s)}$, *функция* $\tau^{(1)}$, *равная числу 1 на номерах* (в нумерации ω) *функции* f *и числу* 0 *на номерах* (в нумерации ω) *всех остальных функций из* $\mathfrak{U}^{(s)}$, *не частично-рекурсивна.*

Из следствия 1 немедленно получается

Следствие 2. *Какова бы ни была главная нумерация* ω *системы* $\mathfrak{U}^{(s)}$, *функция* $\tau^{(2)}$:

$$\tau(m_1, m_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } m_1 \text{ и } m_2 \text{ суть номера (в нумерации } \omega) \\ & \qquad\qquad \text{одной и той же функции,} \\ 0, & \text{если } m_1 \text{ и } m_2 \text{ суть номера (в нумерации } \omega) \\ & \qquad\qquad \text{различных функций,} \end{cases}$$

не частично-рекурсивна.

Замечание. Теорема 9 не переносится на общерекурсивные функции: по крайней мере, некоторые свойства, определенные для таких функций, можно распознавать по их номерам. А именно, *можно указать такое нетривиальное свойство Q, определенное для функций из* $\mathfrak{O}^{(s)}$, *что, какова бы ни была вычислимая нумерация* ω *системы* $\mathfrak{U}^{(s)}$, *существует частично-рекурсивная функция* $\tau^{(1)}$, *равная* 1 *на номерах* (в нумерации ω) *общерекурсивных функций, обладающих свойством Q, и равная* 0 *на номерах* (в нумерации ω) *обще-рекурсивных функций, не обладающих свойством Q.* Примером (для $s = 1$) такого свойства Q может служить, например, свойство «принимать в точке a значение b»; действительно, в этом случае в качестве требуемой функции τ можно взять функцию

$$\tau(m) = \overline{\mathrm{sg}}\,|\,\Omega(m, a) - b\,|,$$

где Ω — универсальная функция рассматриваемой нумерации ω.

Тем больший интерес представляет то обстоятельство, что сформулированное только что следствие 1 (а значит, и следствие 2) переносится на обще-рекурсивные функции от положительного числа аргументов. Более точно, для каждого $s \geqslant 1$ имеет место следующая

Теорема 10. *Какова бы ни была обще-рекурсивная функция $f^{(s)}$ и какова бы ни была главная нумерация ω системы $\mathcal{C}^{(s)}$, не существует частично-рекурсивной функции, которая принимала бы значение* 1 *на номерах* (в нумерации ω) *функции f и значение* 0 *на номерах* (в нумерации ω) *всех остальных функций из $\mathcal{O}^{(s)}$.*

Доказательство. Ограничимся для простоты записи случаем $s = 1$. Пусть $\Omega^{(2)}$ — универсальная функция рассматриваемой главной нумерации ω системы $\mathcal{C}^{(1)}$. Предположим, что существует частично-рекурсивная функция $\pi^{(1)}$, существование которой отрицается в формулировке теоремы. Рассмотрим произвольное рекурсивно-перечислимое не обще-рекурсивное множество $R \subseteq N$ (§ 9, п. 2, пример 4). Пусть ϱ — обще-рекурсивный пересчет множества R (теорема 23 из § 7). Введем функцию $g^{(2)}$:

$$g(n, x) = \begin{cases} f(x) + 1, & \text{если } (\exists t)_{t \leqslant x}\, [\varrho(t) = n], \\ f(x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По теоремам 16 из § 7, 18 из § 7, 17 из § 7 и 22 из § 7 функция g обще-рекурсивна. В силу теоремы 2 существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$, что

$$\Omega(\varphi(n), x) = g(n, x).$$

Значит, при любом n число $\varphi(n)$ есть номер (в нумерации ω) обще-рекурсивной функции $h_n^{(1)}$: $h_n(x) = g(n, x)$. Положим $\chi(n) = \overline{\mathrm{sg}}\,(\pi(\varphi(n)))$. Если $n \overline{\in} R$, то при любом x имеем $g(n, x) = f(x)$; следовательно, при $n \overline{\in} R$ число $\varphi(n)$ есть номер функции f; тогда $\pi(\varphi(n)) = 1$ и $\overline{\mathrm{sg}}\,(\pi(\varphi(n))) = 0$. Если же $n \in R$, то при $x \geqslant (\mu t)\,[\varrho(t) = n]$

будет $g(n, x) = f(x) + 1$; так как f всюду определена, $f(x) + 1 \neq f(x)$; следовательно, при $n \in R$ число $\varphi(n)$ есть номер обще-рекурсивной функции, отличной от f; тогда $\pi(\varphi(n)) = 0$ и $\overline{\mathrm{sg}}(\pi(\varphi(n))) = 1$. Таким образом, χ есть характеристическая функция множества R. Поскольку χ частично-рекурсивна (ввиду частично-рекурсивности функций φ, π, $\overline{\mathrm{sg}}$), то, по теореме 2 из § 7, множество R—обще-рекурсивное, что противоречит его выбору.

Отсюда для каждого $s \geqslant 1$ получаем

Следствие. *Какова бы ни была главная нумерация* ω *системы* $\mathfrak{A}^{(s)}$, *не существует частично-рекурсивной функции типа* $N^2 \to N$, *которая принимала бы на паре* $\langle m_1, m_2\rangle$ *значение* 1, *если* m_1 *и* m_2 *суть номера одной и той же обще-рекурсивной функции из* $\Theta^{(s)}$, *и значение* 0, *если* m_1 *и* m_2 *суть номера различных обще-рекурсивных функций из* $\Theta^{(s)}$.

Замечание. Для $s = 0$ следствие теоремы 10 (а следовательно, и сама теорема) не верно*). Именно, какова бы ни была вычислимая нумерация ω системы $\mathfrak{A}^{(0)}$, существует частично-рекурсивная функция $\tau^{(2)}$, которая принимает на паре $\langle m_1, m_2\rangle$ значение 1, если m_1 и m_2 суть номера одной и той же обще-рекурсивной функции из $\Theta^{(0)}$, и значение 0, если m_1 и m_2 суть номера различных обще-рекурсивных функций из $\Theta^{(0)}$. Действительно, такая функция $\tau^{(2)}$ может быть задана, например, «кусочно»:

$$\tau(m_1, m_2) = \begin{cases} 1 & \Omega(m_1) = \Omega(m_2) \\ 0 & \Omega(m_1) \neq \Omega(m_2), \end{cases}$$

где Ω — универсальная функция нумерации ω.

Перейдем к рекурсивно-перечислимым множествам.

Теорема 11. *Каково бы ни было нетривиальное свойство* Q, *определенное для множеств из* $\mathbf{P}^{(s)}$, *и какова бы ни была главная нумерация* ω *системы* $\mathbf{P}^{(s)}$, *функция* $\tau^{(1)}$, *равная* 1 *на номерах* (в нумерации ω) *множеств, обладающих свойством* Q, *и равная* 0 *на номерах*

---

*) На всякий случай поясним, что $\Theta^{(0)}$ состоит из функций $0^{(0)}$, $1^{(0)}$, $2^{(0)}$, ..., а $\mathfrak{A}^{(0)}$ состоит из перечисленных только что функций и нигде не определенной нульместной функции.

(в нумерации ω) *множеств, не обладающих свойством Q, не частично-рекурсивна* *).

Доказательство**). Пусть сначала $s=1$. Допустим, что существует такое нетривиальное свойство Q, определенное для множеств из $\mathbf{P}^{(1)}$, и такая главная нумерация ω системы $\mathbf{P}^{(1)}$, что функция $\tau^{(1)}$, равная 1 на номерах (в нумерации ω) множеств, обладающих свойством Q, и 0 на номерах (в нумерации ω) множеств, не обладающих свойством Q, частично-рекурсивна.

Обозначим через ω_0 главную нумерацию системы $\mathbf{P}^{(1)}$, построенную нами во втором доказательстве теоремы 8. Напомним, что нумерация ω_0 каждому $n \in N$ ставит в соответствие множество значений функции $y=\Omega(n, x)$, где $\Omega^{(2)}$ — некоторая главная универсальная для системы $\mathcal{C}^{(1)}$ функция.

Поскольку ω_0 — вычислимая нумерация (то, что она — главная, нам сейчас неважно), а ω — главная нумерация, нумерация ω_0 обще-рекурсивно сводится к нумерации ω. Отсюда и из предположенной частично-рекурсивности функции τ следует, что функция τ_0, равная 1 на номерах (в нумерации ω_0) множеств, обладающих свойством Q, и 0 на номерах (в нумерации ω_0) множеств, не обладающих свойством Q, тоже частично-рекурсивна.

Определим для функций из $\mathcal{C}^{(1)}$ свойство R. Мы будем считать, что функция $f \in \mathcal{C}^{(1)}$ тогда и только тогда обладает свойством R, когда множество ее значений обладает свойством Q. Очевидно, R — нетривиальное свойство, и частично-рекурсивная функция τ_0 равна единице на номерах (в главной нумерации системы $\mathcal{C}^{(1)}$, соответствующей функции Ω) функций, обладающих свойством R, и равна 0 на номерах (в той же нумерации) функций, им не обладающих. Противоречие с теоремой 9. Для $s=1$ доказательство закончено.

Для $s>1$ нужный результат легко получается при помощи теорем 32 из § 7 и 31 из § 7. Теорема доказана.

---

*) Эта теорема принадлежит Г. Райсу [1953], который доказал ее для рассмотренной им конкретной главной нумерации системы $\mathbf{P}^{(1)}$ (см. первое подстрочное примечание на стр. 308).

**) Можно было бы доказать теорему 11 совершенно аналогично теореме 9 (см. ниже доказательство теоремы 12). Наше доказательство использует уже доказанную теорему 9.

Беря в теореме 11 в качестве Q различные конкретные свойства, можно получать различные следствия этой теоремы. В частности, имеют место и аналоги следствий 1 и 2 теоремы 9.

Обозначим через $\mathbf{O}^{(s)}$ класс обще-рекурсивных множеств в N^s.

Теорема 12. *Каково бы ни было нетривиальное свойство Q, определенное для множеств из $\mathbf{O}^{(s)}$, и какова бы ни была главная нумерация* ω *системы $\mathbf{P}^{(s)}$, не существует частично-рекурсивной функции, равной* 1 *на номерах* (в нумерации ω) *множеств из $\mathbf{O}^{(s)}$, обладающих свойством Q, и равной* 0 *на номерах* (в нумерации ω) *множеств из $\mathbf{O}^{(s)}$, не обладающих свойством Q* *).

Доказательство. Допустим противное. Допустим существование такого нетривиального свойства Q, определенного для множеств из $\mathbf{O}^{(s)}$, такой главной нумерации ω системы $\mathbf{P}^{(s)}$ и такой частично-рекурсивной функции $\tau^{(1)}$, что для любого номера m (в нумерации ω) любого обще-рекурсивного множества из $\mathbf{O}^{(s)}$, обладающего свойством Q, $\tau(m)=1$, а для любого номера m (в нумерации ω) любого обще-рекурсивного множества из $\mathbf{O}^{(s)}$, не обладающего свойством Q, $\tau(m)=0$. Свойство Q — нетривиальное. Значит, существует некоторое обще-рекурсивное множество $L \in \mathbf{O}^{(s)}$, обладающее свойством Q, и некоторое обще-рекурсивное множество $H \in \mathbf{O}^{(s)}$, им не обладающее. Возьмем линейное рекурсивно-перечислимое, но не обще-рекурсивное множество R (§ 9, п. 2, пример 4).

Предположим сначала, что пустое множество $\Lambda \in \mathbf{O}^{(s)}$ обладает свойством Q. Рассмотрим тогда в N^{s+1} множество $M = R \times H$. По теореме 5 из § 5 множество M рекурсивно-перечислимо. Применим к главной нумерации ω системы $\mathbf{P}^{(s)}$ и рекурсивно-перечислимому множеству M в N^{s+1} следствие 1 теоремы 7. По этому следствию существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$, что для любого $n \in N$ число $\varphi(n)$ есть один из номеров множества $\mathrm{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}[(\{\langle n\rangle\} \times N^s) \cap M]$ в нумерации ω. Очевидно,

*) Ср. с замечанием на стр. 314. Доказательство аналога теоремы 9 для обще-рекурсивных функций не проходит, например, потому, что, в отличие от пустого множества в N^s, которое обще-рекурсивно, нигде не определенная функция типа $N^s \to N$ не обще-рекурсивна (ср. доказательства теорем 9 и 12).

что для любого $n \in R$

$$\text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle n\rangle\}\times N^s)\cap M]=H,$$

а для любого $n \bar{\in} R$

$$\text{пр}_{2,\,3,\,\ldots,\,s+1}\,[(\{\langle n\rangle\}\times N^s)\cap M]=\Lambda.$$

Введем функцию $\psi^{(1)}$: $\psi(x)=\tau(\varphi(x))$. Так как τ и φ — частично-рекурсивные функции, ψ тоже частично-рекурсивна. Если $n\in R$, то $\varphi(n)$ — один из номеров множества H в нумерации ω. Так как H — обще-рекурсивное множество из $O^{(s)}$, не обладающее свойством Q, для $n\in R$ $\tau(\varphi(n))=0$. Если же $n\bar{\in}R$, то $\varphi(n)$ — один из номеров множества $\Lambda\in O^{(s)}$ в нумерации ω. По предположению пустое множество Λ обладает свойством Q. Значит, для $n\bar{\in}R$ $\tau(\varphi(n))=1$. Итак, если $n\in R$, $\psi(n)=0$, если $n\bar{\in}R$, $\psi(n)=1$. Частично-рекурсивная функция ψ всюду определена. Значит она обще-рекурсивна. Множество R является прообразом числа 0 при обще-рекурсивном отображении N в N, осуществляемом функцией ψ. По теореме 11 из § 7 R обще-рекурсивно. Противоречие с выбором R.

Пусть теперь пустое множество $\Lambda\in O^{(s)}$ не обладает свойством Q. Вводя тогда множество $M=R\times L$, мы совершенно аналогично опять придем к обще-рекурсивности множества R.

Пустое множество $\Lambda\in O^{(s)}$ не может ни обладать, ни не обладать свойством Q. Противоречие. Теорема доказана.

При помощи теорем 9, 11 строятся примеры вычислимых, но не главных нумераций.

Теорема 13. *Существует вычислимая нумерация системы $\mathcal{U}^{(s)}$, не являющаяся главной* *).

Доказательство. Для простоты записи ограничимся случаем: $s=1$. Пусть $\Psi^{(2)}$ — частично-рекурсивная функция, универсальная для системы $\mathcal{U}^{(1)}$ (теорема 1 из § 9). Множество $\text{пр}_1 G_\Psi$ рекурсивно-перечислимо (теоремы 3 из § 6 и 3 из § 5) и, следовательно, является множеством значений некоторой обще-рекурсивной

*) Таким образом, в отличие от частично-рекурсивных нумераций множеств в N^s (см. замечание 5 на стр. 297), не все вычислимые нумерации системы $\mathcal{U}^{(s)}$ частично-рекурсивно эквивалентны.

функции $\varrho^{(1)}$ (теорема 23 из § 7). Множество $\text{пр}_1 G_\Psi$ — это множество тех номеров n, при которых функция $h(x) = \Psi(n, x)$ не является «нигде не определенной функцией». Введем функцию $F^{(2)}$:

$$F(t, x) = \Psi(\varrho(t \dot{-} 1), x), \text{ если } t \geqslant 1.$$

По следствию 1 теоремы 7 из § 6 функция F частично-рекурсивна. Она, очевидно, универсальна для $\mathcal{U}^{(1)}$.

Докажем, что вычислимая нумерация ω системы $\mathcal{U}^{(1)}$, соответствующая функции F, — не главная. При $t = 0$ функция $y = F(0, x)$ не определена. При любом положительном $t = t_0$ функция $y = F(t_0, x)$ не является «нигде не определенной функцией». Значит, в нумерации ω число 0 — номер «нигде не определенной функции», а любое положительное число не является номером «нигде не определенной функции». Свойство R «быть нигде не определенной функцией», очевидно, нетривиальное. Частично-рекурсивная функция $y = \overline{\text{sg}}\, t$ на номерах (в нумерации ω) функций, обладающих свойством R, т. е. на номерах «нигде не определенной функции» (такой номер один: $t = 0$), принимает значение 1, а на номерах (в нумерации ω) функций, не обладающих свойством R, т. е. на номерах функций, не являющихся «нигде не определенной функцией» (такими номерами являются все положительные t), принимает значение 0. Из теоремы 9 следует, что нумерация ω — не главная.

Теорема 14. *Существует вычислимая нумерация системы* $\mathbf{P}^{(s)}$, *не являющаяся главной* *).

Доказательство. Опять, для простоты записи, рассмотрим лишь случай $s = 1$. Пусть $P^{(2)}$ — плоское рекурсивное-перечислимое множество, универсальное для линейных рекурсивно-перечислимых множеств (теорема 5 из § 9). Множество $\text{пр}_1 P$ рекурсивно-перечислимо (теорема 3 из § 5) и, следовательно, является множеством значений некоторой обще-рекурсивной функции $\varrho^{(1)}$ (теорема 23 из § 7). Множество $\text{пр}_1 P$ — это множество тех номеров n, при которых множество $\text{пр}_2 [(\{\langle n\rangle\} \times N) \cap P]$ не пусто. На плоскости (t, y) построим множество Q: для каждого положительного t_0 на прямую $t = t_0$

*) Ср. сноску на стр. 319.

«положим» рекурсивно-перечислимое множество с номером $\varrho(t_0 \dot{-} 1)$ в нумерации, определяемой множеством P. Точнее:

$$(\langle t,\ y\rangle \in Q) = [(t > 0)\ \&\ (\langle \varrho(t \dot{-} 1),\ y\rangle \in P)]. \qquad (15)$$

Из (15) и теорем 6 из § 6 и 14 из § 5 следует рекурсивно-перечислимость множества Q. Очевидно, Q — универсальное для $\mathrm{P}^{(1)}$ множество.

Докажем, что вычислимая нумерация ω системы $\mathrm{P}^{(1)}$, соответствующая множеству Q, — не главная. В множестве Q пустое множество лежит только на прямой $t = 0$ (в множестве P оно, быть может, лежало на многих прямых $n = n_0$), т. е. номером пустого множества в нумерации ω является только число 0. На всякой прямой $t = t_0$ для $t_0 > 0$ лежит непустое рекурсивно-перечислимое множество, т. е. любое положительное число t_0 является номером — в нумерации ω — непустого рекурсивно-перечислимого множества. Свойство R «быть пустым множеством», очевидно, нетривиальное. Частично-рекурсивная функция $y = \overline{\mathrm{sg}}\, t$ на номерах (в нумерации ω) множеств, обладающих свойством R, т. е. на номерах пустого рекурсивно-перечислимого множества (такой номер один: $t = 0$), принимает значение 1, а на номерах (в нумерации ω) множеств, не обладающих свойством R, т. е. на номерах непустых рекурсивно-перечислимых множеств (такими номерами являются все положительные t), принимает значение 0. Из теоремы 11 следует, что нумерация ω — не главная. Теорема доказана.

В заключение настоящего пункта докажем еще одну лемму, которая нам понадобится в § 12 (для теоремы 9).

Лемма. *Для любой главной нумерации ω системы $\mathcal{Y}^{(1)}$ существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$, которая обладает следующим свойством: если n — номер* (в ω) *некоторой частично-рекурсивной функции $h^{(1)}$, имеющей бесконечную область определения, то $\varphi(n)$ — номер* (в ω) *некоторой обще-рекурсивной функции, пересчитывающей область определения функции h.*

Доказательство. Пусть $\Omega^{(2)}$ — универсальная функция нумерации ω. Рассмотрим на плоскости $(n,\ x)$ ее область определения L. Поскольку L — рекурсивно-перечислимое множество (следствие 4 теоремы 5 из § 6), мы можем применить к нему теорему 4 из § 10. По этой теореме существует такая частично-рекурсивная функция $f^{(2)}$, что для любого n, для которого функция $h(x) = \Omega(n, x)$ имеет бесконечную область определения, функция $x(t) = f(n, t)$ обще-рекурсивна и пересчитывает множество $\text{пр}_2[(\{\langle n\rangle\} \times N) \cap L]$, т. е. область определения функции $h(x) = \Omega(n, x)$. Применим к функциям $f^{(2)}$ и $\Omega^{(2)}$ теорему 2. Существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$, что для всех n и t.

$$\Omega(\varphi(n), t) = f(n, t).$$

Функция φ, очевидно, — искомая.

3. КОНСТРУКТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Фиксируем на весь п. 3 какую-нибудь главную нумерацию $\omega^{[s]}$ каждой системы $\mathcal{U}^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3, \ldots$). Универсальную функцию нумерации $\omega^{[s]}$ обозначим через $\Omega^{(s+1)}$. На протяжении всего п. 3, говоря о нумерациях систем $\mathcal{U}^{(s)}$, или о номерах, или об универсальных функциях $\Omega^{(s+1)}$, мы будем иметь в виду именно эти нумерации $\omega^{[s]}$, или номера в них, или их универсальные функции.

Пример 1. *Оператор «регулярная подстановка».*

Фиксируем положительное число s и натуральное число r. Оператор «регулярная подстановка» Γ_{sr} каждому набору $\langle f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, \ldots, f_s^{(r)}, f^{(s)}\rangle$ функций ставит в соответствие некоторую вполне определенную функцию $g^{(r)}$ по закону:

$$g(x_1, \ldots, x_r) = f(f_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_r)). \quad (1)$$

Поскольку для каждой системы $\mathcal{U}^{(s)}$ у нас фиксировано по нумерации, действие оператора «регулярная подстановка» Γ_{sr} можно описать и по-другому. Берем произвольный кортеж натуральных чисел длины $s+1$:

$$\langle n_1, n_2, \ldots, n_s, n\rangle.$$

В классе $\mathcal{U}^{(r)}$ берем функцию с номером n_1 (обозначим ее f_1), функцию с номером n_2 (обозначим ее f_2), ..., функцию с номером n_s (обозначим ее f_s). В классе $\mathcal{U}^{(s)}$ берем функцию с номером n (обозначим ее f). Затем, согласно равенству (1), через функции $f_1, f_2, \ldots, f_s, f$ определяем функцию $g^{(r)}$.

Возникает вопрос: нельзя ли по номерам «аргументов» оператора «регулярная подстановка» Γ_{sr}, т. е. по числам $n_1, n_2, \ldots, n_s, n$, вычислить номер «результата», т. е. номер функции $g^{(r)}$? Функция $g^{(r)}$ в нумерации $\omega^{[r]}$ может иметь, конечно, несколько номеров. Поэтому вопрос лучше поставить чуть-чуть по-другому. Нельзя ли по номерам «аргументов» оператора «регулярная подстановка» Γ_{sr} вычислить какой-нибудь из номеров «результата»? Утвердительный ответ на этот вопрос дает

Теорема 15. *Существует обще-рекурсивная функция типа $N^{s+1} \to N$, дающая по произвольным числам $n_1, n_2, \ldots, n_s, n$ один из номеров результата применения оператора* ***«регулярная подстановка»*** Γ_{sr} *к функциям класса $\mathcal{U}^{(r)}$ с номерами $n_1, n_2, \ldots, n_s$ и функции класса $\mathcal{U}^{(s)}$ с номером n.*

Доказательство. Введем функцию $\Xi^{(r+s+1)}$:

$$\Xi(n_1, n_2, \ldots, n_s, n, x_1, \ldots, x_r) = \\ = \Omega^{(s+1)}(n, \Omega^{(r+1)}(n_1, x_1, \ldots, x_r), \Omega^{(r+1)}(n_2, x_1, \ldots, x_r), \ldots \\ \ldots, \Omega^{(r+1)}(n_s, x_1, \ldots, x_r)). \quad (2)$$

Из (1) и (2) и определения универсальной функции следует, что при любых фиксированных $n_1, n_2, \ldots, n_s, n$

$$\Xi(n_1, n_2, \ldots, n_s, n, x_1, \ldots, x_r) = \\ = f(f_1(x_1, \ldots, x_r), f_2(x_1, \ldots, x_r), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_r)), \quad (3)$$

где функция $f_i^{(r)}$ имеет номер n_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, а функция $f^{(s)}$ — номер n. Функция Ξ — частично-рекурсивная. Значит, по теореме 3 существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(s+1)}$, что

$$\Omega^{(r+1)}(\varphi(n_1, n_2, \ldots, n_s, n), x_1, x_2, \ldots, x_r) = \\ = \Xi(n_1, n_2, \ldots, n_s, n, x_1, x_2, \ldots, x_r). \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что функция $\varphi^{(s+1)}$ — искомая функция, дающая по номерам функций-аргументов один из номеров функции-результата.

Пример 2. *Оператор «примитивная рекурсия»* *).

*) Для определенности и простоты записи — по первому аргументу.

Фиксируем положительное число s. Оператор «примитивная рекурсия» Γ_s каждому набору $\langle f_1^{(s-1)}, f_2^{(s+1)}\rangle$ функций ставит в соответствие некоторую вполне определенную функцию $g^{(s)}$ по закону

$$\begin{cases} g(0, x_2, \ldots, x_s) = f_1(x_2, \ldots, x_s), \\ g(x_1+1, x_2, \ldots, x_s) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_s, g(x_1, x_2, \ldots, x_s)). \end{cases} \tag{5}$$

Опишем действие оператора «примитивная рекурсия» Γ_s на «языке номеров». Берем произвольный кортеж натуральных чисел длины 2: $\langle n_1, n_2\rangle$. В классе $\mathcal{K}^{(s-1)}$ берем функцию с номером n_1 (пусть это будет f_1) и в классе $\mathcal{K}^{(s+1)}$ — функцию с номером n_2 (пусть — f_2). Затем, согласно равенству (5), через функции f_1, f_2 определяем функцию $g^{(s)}$.

Поставим тот же вопрос: нельзя ли по номерам «аргументов» оператора «примитивная рекурсия» Γ_s вычислить какой-нибудь из номеров «результата»?

Теорема 16. *Существует обще-рекурсивная функция типа $N^2 \to N$, дающая по произвольным числам n_1, n_2 один из номеров результата применения оператора «**примитивная рекурсия**» Γ_s к функции класса $\mathcal{K}^{(s-1)}$ с номером n_1 и функции класса $\mathcal{K}^{(s+1)}$ с номером n_2.*

Доказательство. Введем функцию $\Xi^{(s+2)}$:

$$\begin{cases} \Xi(n_1, n_2, 0, x_2, \ldots, x_s) = \Omega^{(s)}(n_1, x_2, \ldots, x_s), \\ \Xi(n_1, n_2, x_1+1, x_2, \ldots, x_s) = \\ = \Omega^{(s+2)}(n_2, x_1, x_2, \ldots, x_s, \Xi(n_1, n_2, x_1, x_2, \ldots, x_s)). \end{cases} \tag{6}$$

Из (5), (6) и определения универсальной функции следует, что при любых фиксированных n_1, n_2

$$\Xi(n_1, n_2, x_1, x_2, \ldots, x_s) = g(x_1, x_2, \ldots, x_s), \tag{7}$$

где $g^{(s)}$ — функция, полученная примитивной рекурсией (5) из функции $f_1^{(s-1)}$ с номером n_1 и функции $f_2^{(s+1)}$ с номером n_2. Функция Ξ — частично-рекурсивная. Значит, по теореме 3 существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(2)}$, что

$$\Omega^{(s+1)}(\varphi(n_1, n_2), x_1, x_2, \ldots, x_s) = \Xi(n_1, n_2, x_1, x_2, \ldots, x_s). \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что функция $\varphi^{(2)}$ — искомая.

Попробуем обобщить теоремы 15, 16 *) и поставить более общий вопрос: при каких условиях, наложенных на оператор, для каких операторов по номерам «аргументов» можно вычислить какой-нибудь из номеров «результата»? Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно сначала уточнить само понятие «оператора» и некоторые относящиеся к нему понятия.

Вспомним, что множество всех функций от s аргументов мы обозначили через $\mathfrak{F}^{(s)}$, а через $[M_1, M_2]$ мы обозначили внешнее произведение множеств M_1, M_2.

Определение. *Оператором типа* $\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \to r$ называется всюду определенная функция типа

$$[\mathfrak{F}^{(s_1)}, \mathfrak{F}^{(s_2)}, \ldots, \mathfrak{F}^{(s_k)}] \to \mathfrak{F}^{(r)} \quad (\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \in N^\infty, \ r \in N).$$

Результат применения оператора Γ типа $\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \to r$ к функциям $f_1^{(s_1)}, f_2^{(s_2)}, \ldots, f_k^{(s_k)}$ будет обозначаться в соответствии с обычными функциональными обозначениями через $\Gamma(f_1, \ldots, f_k)$.

Пример 3. 1) Для любого положительного s оператор «примитивная рекурсия» Γ_s есть оператор типа $\langle s-1, s+1\rangle \to s$

2) Для любых положительного s и натурального r оператор «регулярная подстановка» Γ_{sr} есть оператор типа

$$\langle \underbrace{r, r, \ldots, r}_{s \text{ раз}}, s\rangle \to r.$$

3) Для любого положительного s оператор «наименьшее число» есть оператор типа $\langle s\rangle \to s-1$.

Замечание. В отличие от «регулярной подстановки» произвольная «подстановка» не является оператором в смысле нашего определения, так как даже из фиксированных функций-аргументов подстановкой можно получить неограниченное (за счет фиктивных аргументов) число функций-результатов (см. п. 3 § 2, особенно примеры 1, 2). Поэтому существует много различных «операторов подстановки», различающихся между собой «спо-

*) Обе эти теоремы содержатся в теореме XXIV (b) из § 65 книги С. К. Клини [1952].

собом осуществления подстановки». Оператор регулярной подстановки — один из таких операторов.

Определение. Мы будем говорить, что оператор Γ типа $\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \to r$ *сохраняет вычислимость*, если для любых $f_1^{(s_1)}, f_2^{(s_2)}, \ldots, f_k^{(s_k)}$ из $f_1 \in \mathcal{U}^{(s_1)}, f_2 \in \mathcal{U}^{(s_2)}, \ldots$ $\ldots, f_k \in \mathcal{U}^{(s_k)}$ следует $\Gamma(f_1, f_2, \ldots, f_k) \in \mathcal{U}^{(r)}$.

Пример 4. Операторы «примитивная рекурсия» Γ_s, «регулярная подстановка» Γ_{sr} и «наименьшее число» сохраняют вычислимость — см. § 2, пп. 3, 7 и § 3, п. 9.

Определение. Оператор типа $\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \to r$ называется ***конструктивным***, если он сохраняет вычислимость и существует обще-рекурсивная функция, которая по номерам функций-аргументов дает какой-нибудь из номеров функции-результата.

Замечание. Поскольку все главные нумерации системы $\mathcal{U}^{(s)}$ обще-рекурсивно эквивалентны между собой, *конструктивность оператора не зависит от выбора главных нумераций* $\omega^{[s]}$.

Пример 5. Из теорем 15 и 16 вытекает, что оператор «регулярная подстановка» Γ_{sr} и оператор «примитивная рекурсия» Γ_s — конструктивные.

Определение. Пусть дан оператор Γ_1 типа $\langle s_1, s_2, \ldots$ $\ldots, s_k\rangle \to r$. Каковы бы ни были числа $i_1, i_2, \ldots, i_k$, *распространением оператора* Γ_1 называется оператор Γ_2 типа $\langle s_1+i_1, s_2+i_2, \ldots, s_k+i_k\rangle \to r+i_1+i_2+\ldots+i_k$, действующий следующим образом: для произвольных функций $f_1^{(s_1+i_1)}, f_2^{(s_2+i_2)}, \ldots, f_k^{(s_k+i_k)}$ результатом $\Gamma_2(f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_k)$ объявляется функция $g^{(r+i_1+i_2+\ldots+i_k)}$, значение которой на кортеже

$$\langle n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \ldots, n_{i_1}^{(1)}, n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \ldots, n_{i_2}^{(2)}, \ldots \\ \ldots, n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \ldots, n_{i_k}^{(k)}, x_1, x_2, \ldots, x_r\rangle \qquad (9)$$

равно значению на кортеже $\langle x_1, x_2, \ldots, x_r\rangle$ результата применения оператора Γ_1 к следующему набору функций: функции, получающейся из $f_1^{(s_1+i_1)}$, если у нее первые i_1 аргументов фиксировать и сделать равными $n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \ldots$ $\ldots, n_{i_1}^{(1)}$, функции, получающейся из $f_2^{(s_2+i_2)}$, если у нее первые i_2 аргументов фиксировать и сделать равными $n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \ldots, n_{i_2}^{(2)}, \ldots$, функции, получающейся из $f_k^{(s_k+i_k)}$, если у нее первые i_k аргументов фиксировать и сделать равными $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \ldots, n_{i_k}^{(k)}$. Иными словами, значение функции $g = \Gamma_2(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ на кортеже (9) равно значению функции $\Gamma_1(g_1^{(s_1)}, g_2^{(s_2)}, \ldots, g_k^{(s_k)})$ на кортеже $\langle x_1, x_2, \ldots, x_r\rangle$, где каждая функция $g_j^{(s_j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ задается равенством

$$g_j(x_1, \ldots, x_{s_j}) = f_j(n_1^{(j)}, \ldots, n_{i_j}^{(j)}, x_1, \ldots, x_{s_j}).$$

Оператор Γ_3 типа $\langle s_1+1, s_2+1, \ldots, s_k+1\rangle \to r+k$, являющийся распространением оператора Γ_1 типа $\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \to r$, называется *простейшим распространением* оператора Γ_1. Вот теперь мы в состоянии, наконец, сформулировать ответ на поставленный выше вопрос.

Теорема 17. *Оператор* Γ_1 *типа* $\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \to r$ *тогда и только тогда является конструктивным, когда его простейшее распространение сохраняет вычислимость.*

Доказательство. 1) Достаточность («тогда»). Пусть оператор Γ_2 типа $\langle s_1+1, s_2+1, \ldots, s_k+1\rangle \to r+k$, являющийся простейшим распространением оператора Γ_1, сохраняет вычислимость. Докажем, что тогда оператор Γ_1 будет конструктивным. Идея доказательства будет та же, как и в теоремах 15, 16.

Введем функцию $\Xi^{(r+k)}$, определяемую следующим образом: значение функции Ξ на кортеже

$$\langle n_1, n_2, \ldots, n_k, x_1, x_2, \ldots, x_r\rangle \tag{10}$$

равно значению на кортеже $\langle x_1, x_2, \ldots, x_r\rangle$ результата применения оператора Γ_1 к следующему набору функций: функции из класса $\mathcal{U}^{(s_1)}$ с номером n_1, функции из класса $\mathcal{U}^{(s_2)}$ с номером $n_2, \ldots,$ функции из класса $\mathcal{U}^{(s_k)}$ с номером n_k. Привлекая понятие универсальной функции, определение функции Ξ можно высказать в другой форме: значение функции Ξ на кортеже (10) равно значению на кортеже $\langle x_1, x_2, \ldots, x_r\rangle$ результата применения оператора Γ_1 к следующему набору функций: функции $\Omega^{(s_1+1)}$, у которой первый аргумент фиксирован и равен n_1, функции $\Omega^{(s_2+1)}$, у которой первый аргумент фиксирован и равен $n_2, \ldots,$ функции $\Omega^{(s_k+1)}$, у которой первый аргумент фиксирован и равен n_k. Если высказать определение функции Ξ в такой форме, становится ясным, что функция Ξ есть результат применения оператора Γ_2 к функциям $\Omega^{(s_1+1)}, \Omega^{(s_2+1)}, \ldots, \Omega^{(s_k+1)}$. По условию оператор Γ_2 сохраняет вычислимость. Для любого s $\Omega^{(s)} \in \mathfrak{U}^{(s)}$. Значит, $\Xi^{(r+k)} \in \mathfrak{U}^{(r+k)}$. Тогда по теореме 3 существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(k)}$, что

$$\Omega^{(r+1)}(\varphi(n_1, n_2, \ldots, n_k), x_1, x_2, \ldots, x_r) = \\ = \Xi(n_1, n_2, \ldots, n_k, x_1, x_2, \ldots, x_r).$$

С другой стороны, из самого определения функции Ξ следует, что при фиксировании первых k аргументов: $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ она, функция Ξ, превращается в результат применения оператора Γ_1 к функции из класса $\mathfrak{U}^{(s_1)}$ с номером n_1, функции из класса $\mathfrak{U}^{(s_2)}$ с номером $n_2, \ldots,$ функции из класса $\mathfrak{U}^{(s_k)}$ с номером n_k. Следовательно, функция $\varphi^{(k)}$ — искомая обще-рекурсивная функция, дающая по номерам функций-аргументов оператора Γ_1 номер функции-результата. Сохранение вычислимости оператором Γ_1 тривиально следует из сохранения вычислимости оператором Γ_2.

2) Необходимость («только тогда»). Пусть оператор Γ_1 — конструктивный. Тогда по определению существует обще-рекурсивная функция $\varphi^{(k)}$, дающая по номерам функций-аргументов оператора Γ_1 один из номеров функции-результата.

Определим функцию $\Xi^{(r+k)}$ как в доказательстве достаточности. Из ее определения следует, что при каждых фиксированных $n_1, n_2, \ldots, n_k$ функция $\pi^{(r)}$, заданная равенством

$$\pi(x_1, \ldots, x_r) = \Xi(n_1, \ldots, n_k, x_1, \ldots, x_r), \tag{11}$$

есть результат применения оператора Γ_1 к функциям с номерами $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Поэтому $\varphi(n_1, \ldots, n_k)$ есть номер функции π. Следовательно,

$$\Omega^{(r+1)}(\varphi(n_1, \ldots, n_k), x_1, \ldots, x_r) = \pi(x_1, \ldots, x_r). \tag{12}$$

Из равенств (11) и (12) вытекает, что функция Ξ удовлетворяет равенству

$$\Xi(n_1, \ldots, n_k, x_1, \ldots, x_r) = \Omega^{(r+1)}(\varphi(n_1, \ldots, n_k), x_1, \ldots, x_r)$$

и, значит, частично-рекурсивна. Теперь уже просто доказать, что Γ_2 (простейшее распространение оператора Γ_1) сохраняет вычислимость. Действительно, пусть

$f = \Gamma_2(f_1, \ldots, f_k)$, где $f_i \in \mathcal{U}^{(s_i+1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, а $f \in \mathfrak{F}^{(r+k)}$. Надо доказать, что $f \in \mathcal{U}^{(r+k)}$. По теореме 2 для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ существует такая обще-рекурсивная функция φ_i, что для любого m число $\varphi_i(m)$ есть номер функции $g_i^{(s_i)}$, заданной равенством:

$$g_i(x_1, \ldots, x_{s_i}) = f_i(m, x_1, \ldots, x_{s_i}).$$

А тогда, в силу определения функции $\Xi^{(r+k)}$ и оператора Γ_2,

$$f(m_1, m_2, \ldots, m_k, x_1, \ldots, x_r) = \\ = \Xi(\varphi_1(m_1), \varphi_2(m_2), \ldots, \varphi_k(m_k), x_1, \ldots, x_r).$$

Так как $\varphi_i \in \mathcal{U}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ и $\Xi \in \mathcal{U}$, то и $f \in \mathcal{U}$, что и требовалось доказать.

Дадим аналог того, что делалось в п. 3 до сих пор, для рекурсивно-перечислимых множеств. Фиксируем на весь остаток п. 3 какую-нибудь главную нумерацию $\tau^{[s]}$ каждой системы $\mathbf{P}^{(s)}$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$. Универсальное множество нумерации $\tau^{[s]}$ обозначим через $A^{(s+1)}$. Разберем сначала две конкретных операции над множествами.

Теорема 18. *Существует обще-рекурсивная функция типа $N^2 \to N$, дающая по произвольным числам n_1, n_2 один из номеров результата применения операции «соединение» к множествам класса $\mathbf{P}^{(s)}$ с номерами n_1, n_2.*

Доказательство. В $(s+2)$-мерном пространстве (n_1, n_2, N^s) на «гиперплоскости» (n_1, N^s) поместим экземпляр универсального множества $A^{(s+1)}$ и восставим из него (в пространстве N^{s+2}) цилиндр вдоль оси n_2. Обозначим этот цилиндр через H_1. Затем в том же пространстве (n_1, n_2, N^s) на «гиперплоскости» (n_2, N^s) поместим второй экземпляр того же универсального множества $A^{(s+1)}$ и восставим из него (в пространстве N^{s+2}) цилиндр вдоль оси n_1. Обозначим этот цилиндр через H_2 (см. рис. 27). Пусть теперь $H' = H_1 U H_2$. H' — рекурсивно-перечислимое множество в N^{s+2} (теоремы 7 из § 5 и 4 из § 5). По следствию 1 теоремы 7 существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(2)}$, которая по любой паре $\langle n_1^0, n_2^0 \rangle$ дает один из номеров множества

$$\text{пр}_{3, 4, \ldots, s+2}[H' \cap (\{\langle n_1^0, n_2^0 \rangle\} \times N^s)].$$

С другой стороны, из определения универсального множества легко следует, что пр$_{3,4,\ldots,s+2}[H_1 \cap (\{\langle n_1^0\rangle\} \times N \times N^s)]$ — множество (класса $\mathbf{P}^{(s)}$) с номером n_1^0, пр$_{3,4,\ldots,s+2}[H_2 \cap (N \times \{\langle n_2^0\rangle\} \times N^s)]$ — множество (класса $\mathbf{P}^{(s)}$) с номером n_2^0. Значит, пр$_{3,4\ldots,s+2}[H' \cap (\{\langle n_1^0, n_2^0\rangle\} \times$

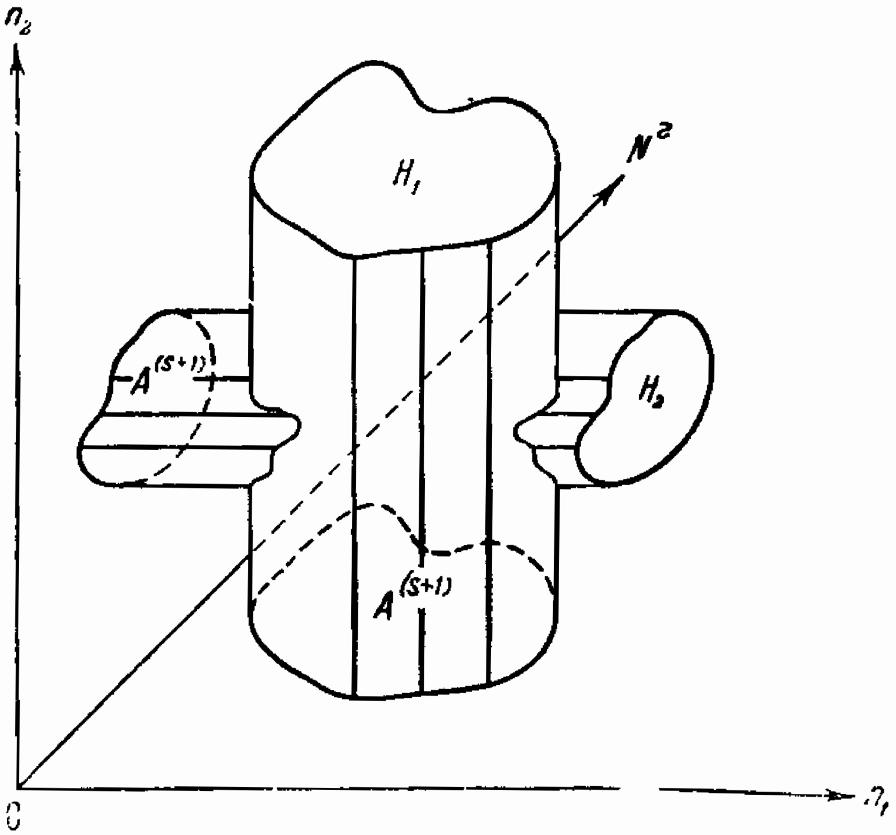


Рис. 27.

$\times N^s)]$ — соединение множеств класса $\mathbf{P}^{(s)}$ с номерами n_1^0 и n_2^0. Следовательно, функция $\varphi^{(2)}$ — искомая.

Теорема 19. *Существует обще-рекурсивная функция типа $N^2 \to N$, дающая по произвольным числам n_1, n_2 один из номеров применения операции* **«пересечение»** *к множествам класса $\mathbf{P}^{(s)}$ с номерами n_1, n_2.*

Доказательство. Сначала строим те же два цилиндра: H_1, H_2, которые строились в доказательстве теоремы 18. Затем, вместо их соединения, берем пересечение: $H'' = H_1 \cap H_2$ и к множеству H'' применяем следствие 1 теоремы 7.

Снова ставится тот же общий вопрос: при каких условиях, наложенных на операции, для каких операций по номерам «аргументов» можно вычислить какой-нибудь из номеров «результата»?

Уточним сначала понятия, дадим нужные определения. Обозначим множество всех подмножеств пространства N^s через $\mathbf{M}^{(s)}$.

Определение. *Операцией типа* $\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \to r$ называется всюду определенная функция типа

$$[\mathbf{M}^{(s_1)}, \mathbf{M}^{(s_2)}, \ldots, \mathbf{M}^{(s_k)}] \to \mathbf{M}^{(r)} \quad (\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \in N^\infty, r \in N).$$

Результат применения операции Δ типа $\langle s_1, s_2, \ldots$ $\ldots, s_k\rangle \to r$ к множествам $M_1^{(s_1)}, M_2^{(s_2)}, \ldots, M_k^{(s_k)}$ *) обозначается через $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_k)$.

Определение. Мы будем говорить, что операция Δ типа $\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \to r$ *сохраняет перечислимость*, если для любых $M_1^{(s_1)}, M_2^{(s_2)}, \ldots, M_k^{(s_k)}$ из $M_i^{(s_i)} \in \mathbf{P}^{(s_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ следует $\Delta(M_1, \ldots, M_k) \in \mathbf{P}^{(r)}$.

Определение. Операция типа $\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \to r$ называется *конструктивной*, если она сохраняет перечислимость и существует обще-рекурсивная функция, дающая по номерам множеств-аргументов какой-нибудь из номеров множества-результата.

Замечание. Поскольку все главные нумерации системы $\mathbf{P}^{(s)}$ обще-рекурсивно эквивалентны между собой, *конструктивность операции не зависит от выбора главных нумераций* $\tau^{[s]}$.

Пример 6. Как следует из теорем 18, 19 и теоремы 4 из § 5, операции «соединение» и «пересечение» — конструктивные.

Аналог определения распространения мы сформулируем только для того простейшего случая, который нам ниже (в теореме 20) понадобится.

Определение. Пусть дана операция Δ_1 типа $\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \to r$. *Простейшим распространением операции* Δ_1 называется операция Δ_2 типа $\langle s_1+1, s_2+1, \ldots$ $\ldots, s_k+1\rangle \to r+k$, действующая следующим образом: для произвольных $M_1^{(s_1+1)}, M_2^{(s_2+1)}, \ldots, M_k^{(s_k+1)}$ результатом $\Delta_2(M_1, M_2, \ldots, M_k)$ объявляется соединение множеств

$$\{\langle n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0\rangle\} \times \Delta_1(\text{пр}_{2, 3, \ldots, s_1+1}[M_1 \cap (\{\langle n_1^0\rangle\} \times N^{s_1})], \ldots$$
$$\ldots, \text{пр}_{2, 3, \ldots, s_k+1}[M_k \cap (\{\langle n_k^0\rangle\} \times N^{s_k})]),$$

получающихся при всевозможных $\langle n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0\rangle \in N^k$. Другими словами, $\Delta_2(M_1, M_2, \ldots, M_k)$ получается так.

---

*) Индексом в круглых скобках, стоящим справа сверху от обозначения множества, мы будем до конца пункта обозначать размерность множества (ср. с обозначением $f^{(s)}$).

Берем произвольный кортеж $\langle n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0\rangle$ длины k. Затем в N^{s_1+1} пересекаем множество M_1 «гиперплоскостью» $n_1 = n_1^0$ и полученное s_1-мерное сечение: $M_1 \bigcap (\{\langle n_1^0\rangle\} \times N^{s_1})$ проектируем на оставшиеся s_1 осей. Затем в N^{s_2+1} пересекаем множество M_2 «гиперплоскостью» $n_2 = n_2^0$ и полученное s_2-мерное сечение проектируем на оставшиеся s_2 осей. И т. д. К полученным k множествам применяем операцию Δ_1. Получившееся в результате r-мерное множество мы помещаем на «прямую» $\langle n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0\rangle$ в N^{r+k} (т. е. рассматриваем геометрическое произведение кортежа $\langle n_1^0, \ldots, n_k^0\rangle$ и этого множества). Затем проделываем то же самое для другого кортежа $\langle n_1', n_2', \ldots, n_k'\rangle$ и т. д. Все полученные множества объединяем. Это и будет $\Delta_2(M_1, M_2, \ldots, M_k)$.

Аналогом теоремы 17 является

Теорема 20. *Операция Δ_1 типа $\langle s_1, s_2, \ldots, s_k\rangle \to r$ тогда и только тогда является конструктивной, когда ее простейшее распространение сохраняет перечислимость.*

Доказательство. 1) Достаточность («тогда»). Пусть операция Δ_2 типа $\langle s_1 + 1, s_2 + 1, \ldots, s_k + 1\rangle \to r + k$, являющаяся простейшим распространением операции Δ_1, сохраняет перечислимость. Докажем, что тогда операция Δ_1 будет конструктивной. Идея доказательства будет та же, как и в теореме 17, с учетом технической разницы между двумя определениями простейшего распространения.

Введем множество $B^{(r+k)}$, определяемое следующим образом. Берем произвольный кортеж $\langle n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0\rangle$ длины k. Пусть $M_i[n_i^0]$ — множество в N^{s_i} с номером n_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Тогда $B^{(r+k)} = \bigcup [\{\langle n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0\rangle\} \times \Delta_1(M_1[n_1^0], M_2[n_2^0], \ldots, M_k[n_k^0])]$, где соединение берется по всевозможным кортежам длины k. Привлекая понятие универсального множества, определение множества $B^{(r+k)}$ можно высказать в другой форме:

$$B^{(r+k)} = \bigcup [\{\langle n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0\rangle\} \times \Delta_1(\text{пр}_{2,3,\ldots,s_1+1}[A^{(s_1+1)} \bigcap (\{\langle n_1^0\rangle\} \times N^{s_1})], \ldots \\ \ldots, \text{пр}_{2,3,\ldots,s_k+1}[A^{(s_k+1)} \bigcap (\{\langle n_k^0\rangle\} \times N^{s_k})])],$$

где соединение берется по всевозможным кортежам длины k. Если высказать определение множества $B^{(r+k)}$ в такой форме, становится ясным, что множество $B^{(r+k)}$ есть результат применения оператора Δ_2 к множествам $A^{(s_1+1)}$, $A^{(s_2+1)}$, ..., $A^{(s_k+1)}$. По условию операция Δ_2 сохраняет перечислимость. Для любого s $A^{(s+1)} \in \mathbf{P}^{(s+1)}$. Значит, $B^{(r+k)} \in \mathbf{P}^{(r+k)}$. Тогда по следствию 1 теоремы 7 существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(k)}$, которая по любому кортежу $\langle n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0\rangle$ дает один из номеров множества

$$C = \text{пр}_{k+1, k+2, \ldots, k+r}\,[B^{(r+k)} \cap (\{\langle n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0\rangle\} \times N^r)]. \tag{13}$$

С другой стороны, из самого определения множества $B^{(r+k)}$ следует, что множество C есть результат применения операции Δ_1 к множеству с номером n_1^0 из N^{s_1}, множеству с номером n_2^0 из N^{s_2}, ..., множеству с номером n_k^0 из N^{s_k}. Значит, функция $\varphi^{(k)}$ — искомая. Сохранение перечислимости следует из (13), рекурсивно-перечислимости множества $B^{(r+k)}$ и теорем 2 из § 5, 5 из § 5, 4 из § 5 и 3 из § 5.

2) Необходимость («только тогда»). Пусть операция Δ_1 конструктивна. Тогда, по определению, существует обще-рекурсивная функция $\varphi^{(k)}$, дающая по номерам множеств-аргументов операции Δ_1 номер множества-результата. Пусть, далее, Δ_2 есть простейшее распространение операции Δ_1. И пусть, наконец,

$$R^{(r+k)} = \Delta_2\,(S_1^{(s_1+1)}, \ldots, S_k^{(s_k+1)}),$$

где $S_i^{(s_i+1)} \in \mathbf{P}^{(s_i+1)}$. Покажем, что $R^{(r+k)} \in \mathbf{P}^{(r+k)}$. По следствию 1 теоремы 7 при каждом $i\,(1 \leqslant i \leqslant k)$ существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi_i^{(1)}$, что для любого m число $\varphi_i\,(m)$ есть номер множества

$$G_i^{(s_i)}\,(m) = \text{пр}_{2, 3, \ldots, s_i+1}\,[S_i \cap (\{\langle m\rangle\} \times N^{s_i})].$$

Тогда $\sigma\,(m_1, \ldots, m_k) = \varphi\,(\varphi_1\,(m_1), \ldots, \varphi_k\,(m_k))$ есть номер множества

$$H^{(r)}\,(m_1, \ldots, m_k) = \Delta_1\,(G_1\,(m_1), \ldots, G_k\,(m_k)).$$

По определению простейшего распространения

$$R = \bigcup [\{\langle m_1, \ldots, m_k\rangle\} \times H^{(r)}\,(m_1, \ldots, m_k)],$$

где соединение берется по всем кортежам $\langle m_1, \ldots, m_k \rangle \in N^k$. Так как $\sigma(m_1, \ldots, m_k)$ есть номер множества $H(m_1, \ldots, m_k)$, то

$$H(m_1, \ldots, m_k) = \\ = \text{пр}_{2, 3, \ldots, r+1} [A^{(r+1)} \cap (\{\langle \sigma(m_1, \ldots, m_k) \rangle\} \times N^r)].$$

Итак, надо доказать, что множество

$$R = \bigcup [\{\langle m_1, \ldots, m_k \rangle\} \times \\ \times \text{пр}_{2, 3, \ldots, r+1} [A^{(r+1)} \cap (\{\langle \sigma(m_1, \ldots, m_k) \rangle\} \times N^r)]]$$

рекурсивно-перечислимо. Докажем это.

$$(\langle x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+r} \rangle \in R) = \\ = (\langle \sigma(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+r} \rangle \in A^{(r+1)}).$$

Ввиду частично-рекурсивности функции σ, рекурсивно-перечислимости множества $A^{(r+1)}$ и теоремы 6 из § 6 множество R рекурсивно-перечислимо.

§ 12. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЙ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ: ВЫДЕЛЕНИЕ ВЫЧИСЛИМЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Математический анализ имеет дело с действительными числами. Ясно, однако, что не всякое действительное число может быть фактически вычислено с любой степенью точности (слово «фактически» означает здесь наличие соответствующего алгоритма, а алгоритмов ведь меньше, чем действительных чисел). В настоящем параграфе ставится вопрос о выделении «вычислимых» действительных чисел, для которых такое вычисление возможно. Решение этого вопроса требует рассмотрения вычислимых функций с рациональными аргументами и значениями; такое рассмотрение осуществляется в п. 2. В п. 3 приводится несколько вариантов определения вычислимого действительного числа, соответствующих известным вариантам определения действительного числа (эти известные варианты напоминаются в п. 1). Все варианты определения вычислимого действительного числа оказываются эквивалентными (в том смысле, что действительное число, являющееся вычислимым согласно любому из этих вариантов, является вычислимым и согласно любому другому варианту). Однако каждый из них порождает свою систему обозначений вычислимых действительных чисел, причем некоторые из этих систем оказываются эквивалентными друг другу (в том смысле, что существуют алгоритмы, позволяющие переходить от одной системы к другой), а некоторые — не эквивалентными. Вопрос о системах обозначений рассматривается в п. 4 с существенным использованием понятий и результатов § 11.

Первое определение вычислимого действительного числа как числа, обладающего вычислимой последовательностью знаков двоичного разложения (т. е. «двоично вычислимого» в нашей терминологии), сформулировал А. М. Тьюринг [1936]. Вскоре он же [1937] по существу предложил другое определение вычислимого действительного числа (как числа «сегментно вычислимого» в нашей терминологии), указав на равносильность этого нового определения предыдущему. Затем Е. Шпеккер [1949] рассмотрел четыре определения вычислимого действительного числа (соответствующих указанным в п. 1 настоящего параграфа известным вариантам определения действительного числа*)); однако Е. Шпеккер употреблял лишь примитивно-рекурсивные функции, и рассмотренные им определения оказались, как показал Е. Шпеккер в той же работе, неэквивалентными друг другу**). Изложение большинства результатов Е. Шпеккера приведено в § 24 книги Р. Петер [1951]. Р. М. Робинсон в своей рецензии [1951] на эту книгу Р. Петер указал, что в шпеккеровых определениях примитивно-рекурсивные функции целесообразно заменить на обще-рекурсивные; такая замена, как подчеркнул Р. М. Робинсон, приводит к эквивалентным друг другу определениям. Эти определения и формулируются ниже в п. 3.

1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Обозначим множество всех рациональных чисел через R, множество всех действительных чисел—через D.

В XIX веке было дано несколько определений понятия «действительное число». Для каждого из этих определений была построена своя теория действительных чисел. Впоследствии стало ясно, что «действительное число» можно определять еще многими способами, причем все эти определения и теории в некотором точном смысле оказались логически равносильными. Мы не будем, разумеется, излагать подробно ни одной из этих теорий (они нам по существу не понадобятся); мы лишь коротко сформулируем те определения понятия «действительное число», которые нам дальше будут нужны, отсылая нуждающегося читателя за логическим осмыслением этих определений или за развитием теории действительных чисел на основе этих определений к соответствующей литературе.

---

*) Из q-ичных заданий действительных чисел Е. Шпеккер рассматривал лишь десятичное задание.

**) Более того, в этой же работе построено такое вычислимое в одном из смыслов Е. Шпеккера действительное число r, что число $3r$ является в этом же смысле не вычислимым.

а) Канторова теория

Последовательность $\{r_n\}$ рациональных *) чисел называется *фундаментальной*, если для любого рационального положительного ε найдется такое натуральное n_0, что для всех n, $m \geqslant n_0$ выполняется $|r_n - r_m| \leqslant \varepsilon$. Нам удобно будет определение фундаментальной последовательности рациональных чисел высказать в другой форме. Функция $h^{(1)}$ типа $R \longrightarrow N$ называется *регулятором сходимости для последовательности рациональных чисел* $\{r_n\}$, если для любого рационального положительного ε из n, $m \geqslant h(\varepsilon)$ следует $|r_n - r_m| \leqslant \varepsilon$. Очевидно, последовательность рациональных чисел является фундаментальной тогда и только тогда, когда для нее существует регулятор сходимости.

Две последовательности рациональных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются *эквивалентными*, если $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Действительным числом называется класс эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Это определение мы будем называть «определением действительного числа по Кантору» **).

Последовательность $\{d_n\}$ действительных чисел называется *фундаментальной*, если для любого рационального положительного ε найдется такое натуральное n_0, что для всех n, $m \geqslant n_0$ выполняется $|d_n - d_m| \leqslant \varepsilon$. Функция $h^{(1)}$ типа $R \longrightarrow N$ называется *регулятором сходимости для последовательности действительных чисел* $\{d_n\}$, если для любого рационального положительного ε из n, $m \geqslant h(\varepsilon)$ следует $|d_n - d_m| \leqslant \varepsilon$. Последовательность действительных чисел является фундаментальной тогда и только тогда, когда для нее существует регулятор сходимости.

---

*) Мы даем сначала определение фундаментальной последовательности рациональных чисел, чтобы имитировать для недостаточно знакомого с этими вопросами читателя логическую последовательность определений, ведущих от считающегося известным понятия «рациональное число» к понятию «действительное число». Через несколько строк (после того как на основе понятия «фундаментальная последовательность рациональных чисел» будет определено понятие «действительное число») мы дословно также определим понятие «фундаментальная последовательность действительных чисел».

**) См. П. С. Александров [1948], гл. VII, § 6 (особенно замечание на стр. 361—362); или И. В. Арнольд [1939], гл. IX, § 80.

Исходя из определения действительного числа по Кантору, могут быть доказаны

Теорема α. (Критерий Больцано—Коши.) *Последовательность действительных чисел* $\{d_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда для нее существует регулятор сходимости* *).

Теорема β. *Если* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *— две последовательности действительных чисел, причем для всех* n *выполняется* $a_n \leqslant b_n$ *и* $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$, *то существует единственное число* c *такое, что для всех* n *выполняется* $a_n \leqslant c \leqslant b_n$. Эта теорема часто формулируется на геометрическом языке: для последовательности вложенных друг в друга неограниченно стягивающихся сегментов $\{[a_n, b_n]\}$ существует единственная точка c, общая всем сегментам **).

Теорема γ. *Любое сечение множества действительных чисел имеет границу.*

Условимся говорить, что *пара функций* $\langle f, h\rangle$, где $f^{(1)}$—функция типа $N \to R$, а $h^{(1)}$ — функция типа $R \to N$, *задает по Кантору действительное число* α, если $\{f(n)\}$ есть последовательность с регулятором сходимости h, сходящаяся к α.

b) Дедекиндова теория

Два сечения множества рациональных чисел называются *эквивалентными*, если нижний класс первого сечения или совпадает с нижним классом второго сечения, или отличается от него самое большее на один элемент. Класс эквивалентных сечений может содержать самое большее два сечения.

Действительным числом называется класс эквивалентных сечений множества рациональных чисел. Это определение мы будем называть «определением действительного числа по Дедекинду» ***).

---

*) Эта теорема является «теоремой полноты» для действительных чисел, определенных по Кантору.

**) Здесь сегмент $[a, b] = \mathscr{E}\{x \in D \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

***) См. Н. Н. Лузин [1948], § 66; или Г. М. Фихтенгольц [1951], 6°; или П. С. Александров [1948], гл. II, § 1; или И. В. Арнольд [1939], гл. VI, § 54. (В последней книге проведено достаточно подробное сравнение теорий действительных чисел по Кантору и по Дедекинду.)

Исходя из этого определения действительного числа, также могут быть доказаны теоремы $\alpha-\gamma$ *).

Функция $\chi_\alpha^{(1)}$ типа $R \to N$ называется *характеристической функцией действительного числа* α, если $\chi_\alpha(r)=0$ для любого рационального r такого, что $r<\alpha$, и $\chi_\alpha(r)=1$ для любого рационального r такого, что $r>\alpha$. Если α — рациональное число, $\chi_\alpha(\alpha)$ может быть каким угодно или даже может быть не определено **).

Условимся говорить, что *функция* χ типа $R \to N$ *задает по Дедекинду действительное число* α, если χ есть характеристическая функция числа α.

c) Сегментная теория

Две последовательности сегментов с рациональными концами назовем *эквивалентными*, если последовательности левых концов и последовательности правых концов соответственно эквивалентны.

Действительным числом называется класс эквивалентных между собой последовательностей вложенных друг в друга неограниченно стягивающихся сегментов. Это определение мы будем называть «сегментным определением действительного числа».

Опять остаются верными теоремы $\alpha-\gamma$ ***).

Условимся говорить, что *пара функций* $\langle a^{(1)}, b^{(1)}\rangle$ типа $N \to R$ *сегментно задает действительное число* α, если $\{[a(n), b(n)]\}$ есть последовательность вложенных друг в друга неограниченно стягивающихся сегментов, единственной общей точкой которых является α.

d) q-ичная теория

Несколько особняком от вышеприведенных определений стоит q-ичное определение действительного числа. Оно конструирует все действительные числа (как рациональные, так и иррациональные) сразу из натуральных чисел, а не из рациональных, как делалось выше. Поэтому оно не потребует привлечения функций типа $R \to R$.

---

*) См. Г. М. Фихтенгольц [1951], 10°, 38°, 39°. Роль «теоремы полноты» теперь играет теорема γ.

**) Таким образом, у рационального α «много» (счетное число) характеристических функций, отличающихся по значению на α.

***) Роль «теоремы полноты» играет теперь теорема β.

Начнем для простоты с наиболее привычного случая: $q=10$. Рассмотрим сначала последовательности c_0, c_1, c_2, c_3, ..., где c_0— натуральное число, а для $i>0$ c_i— одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Две такие последовательности назовем *эквивалентными*, если либо они совпадают, либо одна из них имеет вид c_0, c_1, c_2,..., c_k, 9, 9, 9, 9, ... ($k \geqslant 0$; если $k>0$, то $c_k<9$), а другая — c_0, c_1, c_2, ..., c_k+1, 0, 0, 0, 0, ..., Класс эквивалентных последовательностей может содержать самое большое две последовательности. Теперь рассмотрим пары, первым элементом которых является один из двух знаков: плюс (+) или минус (—), вторым — последовательность рассмотренного вида. Две такие пары назовем *эквивалентными*, если либо у них совпадают первые элементы и эквивалентны вторые элементы, либо вторым элементом обеих пар является последовательность «из нулей»: 0, 0, 0, 0,... Таким образом, класс эквивалентных пар может содержать самое большее две пары.

Действительным числом называется класс эквивалентных между собой пар только что рассмотренного вида. Это определение мы будем называть «десятичным определением действительного числа». Условимся говорить, что *пара* $\langle\varepsilon, c\rangle$ *десятично задает действительное число* α, если ε— одно из двух чисел 0, 1, c — функция типа $N\rightarrow N$ такая, что при $i>0$ выполняется неравенство $c(i)<10$, и

$$\alpha=(-1)^{\varepsilon}\, c(0),c(1)\, c(2)\, c(3)\ldots=$$

$$=(-1)^{\varepsilon}\left[c(0)+\frac{c(1)}{10}+\frac{c(2)}{10^2}+\frac{c(3)}{10^3}+\ldots\right].$$

Десятичное определение действительного числа легко может быть обобщено. Пусть q — целое число и $q \geqslant 2$. Рассмотрим сначала последовательности вида $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$, где c_0— натуральное число, а для $i>0$ c_i— одно из чисел 0, 1, 2, ..., $q-1$. Две такие последовательности назовем *эквивалентными*, если либо они совпадают, либо одна из них имеет вид c_0, c_1, c_2, ..., c_k, $q-1$, $q-1$, $q-1$, ...($k \geqslant 0$; если $k>0$, то $c_k<q-1$), а другая — c_0, c_1, c_2, ..., c_k+1, 0, 0, 0, ... Теперь рассмотрим пары, первым элементом которых является один из двух знаков: плюс (+) или минус (—), вторым — последовательность рассмотренного вида. Две такие пары назовем *эквивалентными*, если либо

у них совпадают первые элементы и эквивалентны вторые элементы, либо вторым элементом обеих пар является последовательность «из нулей»: 0, 0, 0, 0,...

Действительным числом называется класс эквивалентных между собой пар только что рассмотренного вида. Это определение мы будем называть «q-ичным определением действительного числа». Условимся говорить, что *пара* $\langle \varepsilon, c\rangle$ *q-ично задает действительное число* α, если ε — одно из двух чисел 0, 1, c — функция типа $N \to N$ такая, что при $i > 0$ выполняется неравенство $c(i) < q$, и

$$\alpha = (-1)^{\varepsilon}\left[c(0) + \frac{c(1)}{q} + \frac{c(2)}{q^2} + \frac{c(3)}{q^3} + \dots\right].$$

Мы указали четыре определения действительного числа *). От каждого из определений мы, естественно, желаем, чтобы оно давало нам возможность вычислять определяемое действительное число. Удовлетворяют ли этому требованию наши четыре определения? Если не удовлетворяют, то какие действительные числа мы можем вычислять, какие — не можем? Как выделить из всех действительных чисел вычислимые? Будут ли «вычислимые числа» совпадать, если исходить из разных определений действительного числа? Ответу на все эти вопросы посвящен п. 3.

2. ВЫЧИСЛИМЫЕ ФУНКЦИИ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Определение. Нумерация τ множества R рациональных чисел называется *вычислимой*, если она может быть задана формулой

$$\tau(n) = \frac{\varphi_1(n) - \varphi_2(n)}{\varphi_3(n)},$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — частично-рекурсивные функции; про функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ мы будем говорить, что они *задают* нумерацию τ.

Замечание. *Основание вычислимой нумерации множества R рекурсивно-перечислимо* как пересечение трех

*) Точнее, три (по Кантору, по Дедекинду, сегментное) и бесконечную серию (двоичное, троичное, ..., десятичное, ... определения).

рекурсивно-перечислимых множеств, трех полных прообразов: $\varphi_1^{-1}(N)$, $\varphi_2^{-1}(N)$ и $\varphi_3^{-1}(N\setminus\{0\})$ (следствие 2 теоремы 5 из § 6).

Пример 1. *Пример вычислимой нумерации множества R.*

Возьмем какое-нибудь обще-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие между N и N^3 и функции $\varkappa_1^{[3]}$, $\varkappa_2^{[3]}$, $\varkappa_3^{[3]}$, $\varkappa_0^{[3]}$, его осуществляющие (теорема 32 из § 7). Положив

$$\tau(n)=\frac{\varkappa_1^{[3]}(n)-\varkappa_2^{[3]}(n)}{\varkappa_3^{[3]}(n)},$$

получим искомую вычислимую нумерацию.

Пример 2. *Пример **натуральной** вычислимой нумерации множества R.*

Пусть τ — произвольная вычислимая нумерация множества R. Поскольку основание нумерации τ рекурсивно-перечислимо, существует обще-рекурсивная функция $\varrho^{(1)}$, пересчитывающая это основание (теорема 23 из § 7). Очевидно, нумерация τ' : $\tau'(n)=\tau(\varrho(n))$ — искомая.

Если τ — вычислимая нумерация множества R, то по любому n, входящему в основание нумерации τ, можно вычислить соответствующее $\tau(n)\in R$ и по любому $r\in R$ можно вычислить какой-нибудь из его номеров *). Значит, если имеются две вычислимые нумерации: τ_1, τ_2, множества R, то по любому номеру n_1 любого $r\in R$ в нумерации τ_1 можно сначала вычислить само r, а потом по r найти какой-нибудь из его номеров в нумерации τ_2. По номеру n_1 числа r в вычислимой нумерации τ_1 мы вычислили один из его номеров в вычислимой нумерации τ_2. Значит, *две произвольные вычислимые нумерации множества R частично-рекурсивно эквивалентны* **). Таким

---

*) Последнее так: вычисляем $\tau(0)$, $\tau(1)$, $\tau(2)$, ..., когда-нибудь дойдем до такого n, что $\tau(n)=r$; тем самым мы найдем, вычислим один из номеров числа r.

**) Легко видеть, что в этом заключении мы воспользовались Основной гипотезой теории вычислимых функций: раз мы можем по номеру числа r в нумерации τ_1 вычислить какой-то (скажем, наименьший) номер этого же числа в нумерации τ_2, раз функция, сопоставляющая каждому номеру произвольного числа r в нумерации τ_1 некоторый номер того же числа в нумерации τ_2, интуитивно-вычислима, значит, она частично-рекурсивна, и, следоваобразом, здесь все нумерации — главные. Поэтому для вычислимых нумераций множества R понятие главной нумерации является бессодержательным.

Для любой функции $f^{(s)}$ типа $R^s \to R$ обозначим через f^N функцию, определенную на $f^{-1}(N) \cap N^s$ и совпадающую на этом множестве с f. Функция f^N — это, так сказать, «натуральная часть» функции f. f^N — это уже функция типа $N^s \to N$.

Пусть τ — вычислимая нумерация множества R, заданная частично-рекурсивными функциями $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Легко видеть, что функция τ^N может быть определена «кусочно»:

$$\tau^N(n) = \frac{\varphi_1(n) - \varphi_2(n)}{\varphi_3(n)}, \text{ если } \varphi_3(n) \neq 0 \;\&$$

$$\& \; \varphi_1(n) \geqslant \varphi_2(n) \;\&\; \mathrm{Div}(\varphi_3(n), \varphi_1(n) - \varphi_2(n)).$$

По теореме 6 из § 6 и следствию 1 теоремы 7 из § 6 функция τ^N частично-рекурсивна. Пусть обще-рекурсивная функция $\varrho^{(1)}$ пересчитывает область определения функции τ^N (следствие 4 теоремы 5 из § 6 и теорема 23 из § 7). Введем функцию τ^{-1}:

$$\tau^{-1}(n) = \varrho((\mu t)[\tau^N(\varrho(t)) = n]).$$

Функция τ^{-1} по любому натуральному n дает один из его номеров (относительно τ). Очевидно, что τ^{-1} частично-рекурсивна. Для любого n

$$\tau^N(\tau^{-1}(n)) = n. \tag{1}$$

Фиксируем какую-нибудь вычислимую нумерацию τ множества R.

тельно, нумерация τ_1 частично-рекурсивно сводится к нумерации τ_2. В этом параграфе мы позволим себе для простоты и краткости (ср. интуитивное — стр. 213 (несколько строк) — и строгое — стр. 213—235 (23 страницы) — доказательство вычислимости (обще-рекурсивности) универсальной функции $\Phi^{(l+1)}$) часто, уже не оговаривая этого, пользоваться Основной гипотезой и вместо доказательства частично-рекурсивности некоторой функции ограничиваться доказательством ее интуитивной вычислимости. Заметим, что во всех таких случаях использование Основной гипотезы может быть устранено и вместо этого может быть проведено прямое доказательство частично-рекурсивности рассматриваемой функции (рекомендуем читателю осуществить ряд таких доказательств в качестве полезного упражнения).

Определение. Функция ζ типа $N^s \to N$ называется *сопряженной* (относительно τ) *с функцией* f типа $R^s \to R$, если ζ обладает следующими свойствами: 1) если n_i — номер числа r_i в нумерации τ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ и функция f определена на $\langle r_1, r_2, \ldots, r_s \rangle$, то функция ζ определена на $\langle n_1, n_2, \ldots, n_s \rangle$ и $\zeta(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ – номер числа $f(r_1, r_2, \ldots \ldots, r_s)$ в нумерации τ; 2) если функция f не определена на кортеже $\langle r_1, \ldots, r_s \rangle$, то, каковы бы ни были номера $n_1, \ldots, n_s$ рациональных чисел $r_1, \ldots, r_s$, функция ζ не определена на кортеже $\langle n_1, \ldots, n_s \rangle$.

Если нумерация τ не является натуральной, то каждая функция f типа $R^s \to R$ имеет бесконечно много сопряженных функций (ведь на натуральных числах, не входящих в основание нумерации, сопряженная функция может быть равна чему угодно или даже не определена). Назовем функцию φ типа $N^s \to N$, сопряженную (относительно τ) с функцией f типа $R^s \to R$, *вполне сопряженной с* f, если φ определена лишь на таких кортежах из N^s, все компоненты которых входят в основание нумерации.

Заметим, что функция ζ (типа $N^s \to N$) только тогда является вполне сопряженной (относительно τ) с функцией f (типа $R^s \to R$), когда имеет место равенство

$$f(\tau(n_1), \ldots, \tau(n_s)) = \tau(\zeta(n_1, \ldots, n_s)).$$

Определение. Функция f типа $R^s \to R$ называется *рациональнозначной частично-рекурсивной* или, короче, *R-частично-рекурсивной* (относительно τ), если существует сопряженная с ней (относительно τ) частично-рекурсивная функция *).

Замечание 1. Всякая R-частично-рекурсивная функция имеет частично-рекурсивную вполне сопряженную функцию. Действительно, если функция ζ типа $N^s \to N$ сопряжена (относительно τ) с функцией f типа $R^s \to R$, то функция ζ_0, определенная «кусочно» по схеме

$$\zeta_0(x_1, \ldots, x_s) = \zeta(x_1, \ldots, x_s), \text{ если } \langle x_1, \ldots, x_s \rangle \in T^s,$$

где T — основание нумерации τ, будет вполне сопряжена (относительно τ) с f. Если ζ — частично-рекурсивная

*) Ср. с определением частично-рекурсивной функции типа $M \to M$ на стр. 297—298.

функция, то, в силу замечания на стр. 341, теоремы 5 из § 5 и следствия 1 теоремы 7 из § 6, функция ζ_0 тоже будет частично-рекурсивной.

Замечание 2. Формально определение R-частично-рекурсивной функции типа $R^s \to R$ зависит от исходной вычислимой нумерации τ. Однако на самом деле это не так. Действительно. Пусть $\bar{\tau}$ — другая вычислимая нумерация. Поскольку τ и $\bar{\tau}$ частично-рекурсивно эквивалентны, то существуют частично-рекурсивные функции: α, сводящая $\bar{\tau}$ к τ, и $\bar{\alpha}$, сводящая τ к $\bar{\tau}$. Тогда, если ζ — сопряженная с f функция относительно τ, то функция $\bar{\zeta}$

$$\bar{\zeta}(n_1, \ldots, n_s) = \bar{\alpha}(\zeta(\alpha(n_1), \ldots, \alpha(n_s)))$$

будет сопряжена с f относительно $\bar{\tau}$. Если ζ — частично-рекурсивная функция, то и $\bar{\zeta}$ частично-рекурсивна и, следовательно, f R-частично-рекурсивна относительно $\bar{\tau}$. Поэтому впредь мы будем говорить просто о R-частично-рекурсивных функциях.

Приняв во внимание Основную гипотезу, легко увидеть, что функция типа $R^s \to R$ R-частично-рекурсивна тогда и только тогда, когда она вычислима в интуитивном смысле (т. е. в смысле существования вычисляющего ее алгоритма). Этим мы часто будем пользоваться для сокращения доказательств*). Очень показательно, что никакой новой гипотезы для доказательства этого утверждения не нужно.

Замечание 3. *Если функция $f^{(s)}$ типа $N^s \to N$ частично-рекурсивна, то она*, рассматриваемая как функция типа $R^s \to R$, *R-частично-рекурсивна. Если функция $f^{(s)}$ типа $R^s \to R$ R-частично-рекурсивна, то функция f^N частично-рекурсивна.* В самом деле, для любой вычислимой нумерации τ множества R равенство

$$\bar{f}(n_1, \ldots, n_s) = \tau^{-1}(f(\tau^N(n_1), \ldots, \tau^N(n_s))) \qquad (2)$$

задает некоторую функцию $\bar{f}$, сопряженную с f относи-

*) См. сноску **) на стр. 342.

тельно τ. Из (2) вытекает, что функция $\bar{f}$ частично-рекурсивна, и, следовательно, f R-частично-рекурсивна. С другой стороны, для любой функции $\bar{f}$, сопряженной с f относительно τ, имеет место равенство

$$f^N(n_1, \ldots, n_s) = \tau^N(\bar{f}(\tau^{-1}(n_1), \ldots, \tau^{-1}(n_s))). \qquad (3)$$

Из (3) следует вторая часть утверждения замечания 3.

Замечание 4. Если τ — натуральная вычислимая нумерация множества R, то сопряженной с функцией τ является функция τ^N.

Замечание 5. Поскольку частично-рекурсивных функций — счетное множество, *R-частично-рекурсивных функций — тоже счетное множество.* Поскольку функций типа $R \to R$ — несчетное множество, *существуют не R-частично-рекурсивные функции.*

Лемма. *Для любой вычислимой нумерации τ множества R и любой главной нумерации $\omega^{[s]}$ системы $\mathcal{U}^{(s)}$ существует такая обще-рекурсивная функция $\sigma^{[s]}$ типа $N \to N$, которая номер* (в нумерации $\omega^{[s]}$) *любой функции $f^{(s)} \in \mathcal{U}^{(s)}$ переводит в номер* (в нумерации $\omega^{[s]}$) *функции $g^{(s)} \in \mathcal{U}^{(s)}$, сопряженной с f* (рассматриваемой как функция типа $R^s \to R$) *относительно τ.*

Доказательство. Равенство (2) задает оператор, переводящий всякую функцию f типа $N^s \to N$ в некоторую функцию $\bar{f}$, сопряженную с f относительно τ. Очевидно, что простейшее распространение этого оператора сохраняет вычислимость. Тогда по теореме 17 из § 11 рассматриваемый оператор будет конструктивным, что и означает существование требуемой функции $\sigma^{[s]}$ (типа $N \to N$).

Пример 3. В качестве нумерации τ возьмем нумерацию, определенную в примере 1. Докажем R-частично-рекурсивность функции Sum: $\mathrm{Sum}(r_1, r_2) = r_1 + r_2$. Пусть l_1 — номер числа r_1, т. е. $r_1 = \frac{m_1 - n_1}{q_1}$, где

$$m_1 = \varkappa_1^{[3]}(l_1), \qquad n_1 = \varkappa_2^{[3]}(l_1), \qquad q_1 = \varkappa_3^{[3]}(l_1).$$

Пусть l_2 — номер числа r_2, т. е. $r_2 = \frac{m_2 - n_2}{q_2}$, где

$$m_2 = \varkappa_1^{[3]}(l_2), \qquad n_2 = \varkappa_2^{[3]}(l_2), \qquad q_2 = \varkappa_3^{[3]}(l_2).$$

Покажем, как по номерам l_1, l_2 чисел r_1, r_2 вычислить номер l_0 числа r_1+r_2.

$$r_1+r_2=\frac{m_1-n_1}{q_1}+\frac{m_2-n_2}{q_2}=\frac{(m_1q_2+m_2q_1)-(n_1q_2+n_2q_1)}{q_1q_2}.$$

Следовательно, искомый номер l_0 числа r_1+r_2 равен $\varkappa_0^{[3]}(m, n, q)$, где $m=m_1q_2+m_2q_1$, $n=n_1q_2+n_2q_1$, $q=q_1q_2$. Мы показали, что по номерам чисел r_1, r_2 можно вычислить некоторый номер числа $\mathrm{Sum}(r_1, r_2)$. Значит, функция Sum R-частично-рекурсивна. Равенство, задающее сопряженную функцию, в данном случае тоже очевидно.

Из определения R-частично-рекурсивной функции автоматически следует определение вычислимой последовательности рациональных чисел (поскольку всякая последовательность рациональных чисел является функцией типа $R\to R$). Впрочем, легко видеть, что это определение можно высказать в более простой форме (поскольку всегда можно по номеру числа n вычислить само n и по числу n найти один из его номеров).

Определение. Последовательность $\{r_n\}$ рациональных чисел называется *вычислимой*, если существует общерекурсивная функция $\zeta^{(1)}$, дающая по любому числу n номер числа r_n в нумерации τ.

Замечание. Из замечания 5 следует, что *вычислимых последовательностей рациональных чисел — счетное множество*. Множество всех последовательностей рациональных чисел несчетно; значит, *существуют невычислимые последовательности рациональных чисел*.

Еще раз подчеркнем, что так как все вычислимые нумерации множества R частично-рекурсивно эквивалентны, R-частично-рекурсивность функции типа $R^s\to R$ или вычислимость последовательности $\{r_n\}$ не зависит от выбора нумерации τ. Эту особенность вычислимых нумераций множества R надо и впредь иметь ввиду.

3. ВЫЧИСЛИМЫЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

а) Числа, вычислимые по Кантору

Действительное число α задается по Кантору парой функций $\langle f, h\rangle$ ($f^{(1)}$ — типа $N\to R$, $h^{(1)}$ — типа $R\to N$) такой, что $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$, а h — регулятор сходимости для $\{f(n)\}$, В этом случае для любого рационального положительного ε и любого n такого, что $n \geqslant h(\varepsilon)$, имеет место неравенство

$$|f(n)-\alpha| \leqslant \varepsilon, \tag{1}$$

т. е. любой член последовательности $f(n)$ с номером $n: n \geqslant h(\varepsilon)$ — является ε-приближением к α. Если последовательность $\{f(n)\}$ вычислима, это еще не достаточное основание для того, чтобы число α называть вычислимым, так как, хотя мы и можем вычислять $f(0), f(1), f(2), \ldots$, мы не можем по ε находить ε-приближение, мы не умеем для заданного n проверять, является $f(n)$ или не является искомым ε-приближением.

Определение. Действительное число α называется *слабо вычислимым в смысле Кантора*, если существует вычислимая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α.

Из этого определения и Критерия Больцано — Коши следует, что слабо вычислимое в смысле Кантора числа α может быть задано по Кантору парой функций $\langle f, h\rangle$, где f — R-частично-рекурсивная функция.

Определение. Последовательность действительных (в частности, рациональных) чисел называется *вычислимо сходящейся*, если для нее существует R-частично-рекурсивный регулятор сходимости.

Согласно Критерию Больцано — Коши, всякая вычислимо сходящаяся последовательность сходится.

Определение. Действительное число α называется *вычислимым в смысле Кантора*, если существует вычислимая и вычислимо сходящаяся последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α.

Замечание. Поскольку вычислимых последовательностей рациональных чисел — счетное множество (замечание на стр. 347), *слабо вычислимых в смысле Кантора*, а значит, и *вычислимых в смысле Кантора чисел* тоже *счетное множество*. Следовательно, *существуют действительные числа, не являющиеся слабо вычислимыми и*, тем более, *вычислимыми в смысле Кантора*.

Действительное число α вычислимо в смысле Кантора тогда и только тогда, когда оно может быть задано по Кантору парой функций $\langle f, h\rangle$, где f и h — R-частично-рекурсивные функции.

Если число α вычислимо в смысле Кантора, то по любому рациональному положительному ε мы можем вычислить ε-приближение к α (см. (1)).

Теорема 1. *Всякое действительное число α является пределом некоторой вычислимо сходящейся последовательности рациональных чисел.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $\{r_n\}$ рациональных чисел, сходящуюся к α. Теперь выберем из нее вычислимо сходящуюся подпоследовательность. Обозначим через n_i наименьшее натуральное число такое, что при $i > 0$ $n_i > n_{i-1}$ и из $p, q \geqslant n_i$ следует $|r_p - r_q| \leqslant \frac{1}{i}$. Последовательность $\{r_{n_i}\}$ по-прежнему сходится к α. Легко видеть, что R-частично-рекурсивная функция h: $h(\varepsilon) = (\mu i)\left(\frac{1}{i} < \varepsilon\right) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, будет для нее регулятором сходимости *). Следовательно, $\{r_{n_i}\}$ — искомая.

Из теоремы 1 и того, что бывают не вычислимые в смысле Кантора числа, следует, что бывают вычислимо сходящиеся, но не вычислимые последовательности рациональных чисел.

Важный пример. *Пример строго возрастающей ограниченной вычислимой, но не вычислимо сходящейся последовательности рациональных чисел* **).

Возьмем в N произвольное рекурсивно-перечислимое, но не обще-рекурсивное множество Q (§ 9, п. 2, пример 4) и однолистную обще-рекурсивную функцию $g^{(1)}$,

---

*) Функция h интуитивно-вычислима, и значит, R-частично-рекурсивна (см. стр. 345 и сноску **) на стр. 342). Подобные замечания мы впредь будем опускать.

**) Если во всех предшествующих определениях этого параграфа заменить слова «частично-рекурсивный» и «обще-рекурсивный» на «примитивно-рекурсивный», мы получим принадлежащие Е. Шпеккеру [1949] определения примитивно-рекурсивной последовательности рациональных чисел, примитивно-рекурсивно сходящейся последовательности рациональных чисел и примитивно-рекурсивного действительного числа. Настоящий «важный пример» является аналогом построенного Е. Шпеккером ([1949], теорема I) примера строго возрастающей ограниченной примитивно-рекурсивной, но не примитивно-рекурсивно сходящейся последовательности рациональных чисел. Приводимое ниже построение встречается у Г. Райса [1954].

его порождающую (§ 7, теорема 28). Рассмотрим ряд

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2^{g(t)}} . \tag{2}$$

Ряд (2) сходится, так как это ряд с положительными членами, получающийся перестановкой некоторых членов сходящегося ряда $\sum \frac{1}{2^n}$. Значит, ряд (2) определяет некоторое действительное число β

$$\beta = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2^{g(t)}} . \tag{3}$$

Число β мы пока оставим. Рассмотрим последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (2):

$$S_n = \sum_{t=0}^{t=n} \frac{1}{2^{g(t)}} . \tag{4}$$

Очевидно, $\{S_n\}$ — строго возрастающая ограниченная вычислимая последовательность рациональных чисел. Остается только показать, что $\{S_n\}$ не является вычислимо сходящейся последовательностью. $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \beta$. $\{S_n\}$ — сходящаяся последовательность. В силу Критерия Больцано — Коши, у нее существует регулятор сходимости. Обозначим произвольный регулятор сходимости последовательности $\{S_n\}$ через h и докажем равенство

$$(n \in Q) = \underset{t \leqslant h\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{(\exists t)} [g(t) = n]. \tag{5}$$

Доказательства требует только ограничение для t. Допустим, что $n \in Q$, $g(t) = n$ и $t > h\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$. Тогда $t - 1 \geqslant h\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$. По определению регулятора сходимости:

$$|S_t - S_{t-1}| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} .$$

По (4): $\frac{1}{2^{g(t)}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$. Получаем противоречие: $g(t) \geqslant n + 1$.

(5) доказано. Допустим теперь, что $\{S_n\}$ — вычислимо сходящаяся последовательность, т. е. что у нее есть

некоторый R-частично-рекурсивный регулятор сходимости h. Тогда из (5), написанного для этого регулятора сходимости h, и теорем 16 из § 7 и 18 из § 7 следует обще-рекурсивность предиката „$n \in Q$“, а следовательно, и множества Q. Противоречие с выбором Q. Итак, последовательность $\{S_n\}$ — искомая.

Поскольку $\{S_n\}$ - вычислимая последовательность, сходящаяся к β, β — слабо вычислимое в смысле Кантора число. Ниже (следствие теоремы 5) будет доказано, что β - не вычислимое в смысле Кантора число*). Значит, *существуют слабо вычислимые, но не вычислимые в смысле Кантора числа.*

b) Числа, вычислимые по Дедекинду

Действительное число α задается по Дедекинду функцией χ ($\chi^{(1)}$ — типа $R \to N$), являющейся для него характеристической функцией. Если мы для любого рационального r, отличного от α, сможем узнавать: $r < \alpha$ или $r > \alpha$ — число α естественно считать вычислимым.

Определение. Действительное число α называется *вычислимым в смысле Дедекинда*, если его характеристическая функция χ_α R-частично-рекурсивна **).

Теорема 2. *Если действительное число вычислимо в смысле Кантора, то оно вычислимо в смысле Дедекинда.*

Доказательство. Пусть действительное число α вычислимо в смысле Кантора. Это означает, что оно является пределом некоторой вычислимой, вычислимо сходящейся последовательности рациональных чисел, т. е. существуют R-частично-рекурсивные функции $f^{(1)}$ (типа $N \to R$) и $h^{(1)}$ (типа $R \to N$) такие, что $\alpha = \lim_{n\to\infty} f(n)$ и h — регулятор сходимости для $\{f(n)\}$. Докажем, что тогда число α вычислимо в смысле Дедекинда, т. е. что его характеристическая функция χ_α R-частично-рекурсивна.

---

*) Этот факт является аналогом теоремы IV статьи Е. Шпеккера [1949] о существовании такой монотонной ограниченной примитивно-рекурсивной последовательности рациональных чисел, предел которой не является примитивно-рекурсивным действительным числом.

**) Если α — рациональное, то у него бесконечно много характеристических функций, но все они непременно R-частично-рекурсивны.

Возьмем произвольное рациональное r, не равное α. Нам нужно узнать: $r < \alpha$ или $r > \alpha$. Эта задача будет решена, если мы найдем такое n, что

$$|f(n) - \alpha| < |r - \alpha|, \tag{6}$$

так как тогда из $r > f(n)$ будет следовать $r > \alpha$, а из $r < f(n)$ будет следовать $r < \alpha$, сравнить же два рациональных числа по величине мы всегда можем. Следовательно, если мы найдем n, удовлетворяющее неравенству (6), искомая функция χ_α будет равна:

$$\chi_\alpha(r) = \mathrm{Sg}\,(r \dot{-} f(n)), \tag{7}$$

где Sg — вычислимая функция от рациональных чисел, такая, что $\mathrm{Sg}\,(0) = 0$ и $\mathrm{Sg}\,(r) = 1$ при $r > 0$. Чтобы найти n, удовлетворяющее неравенству (6), достаточно найти такие n и ε, что одновременно

$$\varepsilon > 0, \tag{8}$$

$$n > h(\varepsilon) \tag{9}$$

и

$$|f(n) - r| > 2\varepsilon. \tag{10}$$

Покажем сначала, что из (8), (9), (10) для n и ε следует (6) для n. Из (8) и (9) следует (1):

$$|f(n) - \alpha| \leqslant \varepsilon. \tag{11}$$

А тогда из (10) и (11) вытекает (6):

$$|r - \alpha| = |(r - f(n)) - (\alpha - f(n))| \geqslant$$
$$\geqslant |r - f(n)| - |\alpha - f(n)| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \geqslant |f(n) - \alpha|.$$

Покажем теперь, что n и ε, удовлетворяющие неравенствам (8) — (10), существуют. Докажем, что если в качестве искомого ε взять произвольное рациональное число, удовлетворяющее неравенству

$$0 < \varepsilon < \frac{|r - \alpha|}{3}, \tag{12}$$

а в качестве n взять любое натуральное число такое, что

$$n > h(\varepsilon), \tag{13}$$

то так выбранная пара чисел $\langle n, \varepsilon\rangle$ будет удовлетворять неравенствам (8) — (10). Действительно, (8) следует из (12), а (9) совпадает с (13). Докажем неравенство (10). Из (8) и (9) следует (1); из (1) и (12) получаем:

$$|f(n)-\alpha| < \frac{|r-\alpha|}{3}.$$

А тогда при помощи (12):

$$|f(n)-r| = |r-f(n)| = |(r-\alpha)-(f(n)-\alpha)| \geqslant$$
$$\geqslant |r-\alpha| - |f(n)-\alpha| > |r-\alpha| - \frac{|r-\alpha|}{3} = \frac{2}{3}|r-\alpha| > 2\varepsilon.$$

Покажем, наконец, как по r находить, вычислять n и ε, удовлетворяющие неравенствам (8) — (10). Алгоритм нахождения чисел n и ε очень простой: перебирай «по порядку» множество $[N, R]$ и каждую пару чисел $\langle n, \varepsilon\rangle$ проверяй, испытывай на (8) — (10). Функции f и h в (9), (10) R-частично-рекурсивны, значит, эту проверку можно эффективно провести. Как доказано, пары $\langle n, \varepsilon\rangle$ с требуемым свойством существуют. Значит, наш «перебор» закончится.

По-другому, точнее, этот алгоритм нахождения чисел n, ε можно изложить так. Возьмем какую-нибудь натуральную вычислимую нумерацию τ множества R и произвольное обще-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие $\varkappa^{[2]}$ между N и N^2 (теорема 32 из § 7), осуществляемое функциями $\varkappa_1^{[2]}$, $\varkappa_2^{[2]}$, $\varkappa_0^{[2]}$. Для каждого натурального t вычислим сначала пару $\langle \varkappa_1^{[2]}(t), \varkappa_2^{[2]}(t)\rangle$, затем за n возьмем прямо $\varkappa_1^{[2]}(t)$, за ε возьмем $\tau(\varkappa_2^{[2]}(t))$ и проверим (8) — (10). Если они выполняются, пара $\langle \varkappa_1^{[2]}(t), \tau(\varkappa_2^{[2]}(t))\rangle$ — искомая. Тогда $n = \varkappa_1^{[2]}(t)$ удовлетворяет неравенству (6), по (7) вычисляем $\chi_\alpha(r)$. Окончательно:

$$\chi_\alpha(r) = \mathrm{Sg}\,\{r \dot{-} f(\varkappa_1^{[2]}((\mu t)[(\tau(\varkappa_2^{[2]}(t)) > 0)\ \& $$
$$\& \ (\varkappa_1^{[2]}(t) > h(\tau(\varkappa_2^{[2]}(t))))\ \& $$
$$\& \ (|f(\varkappa_1^{[2]}(t)) - r| > 2\tau(\varkappa_2^{[2]}(t)))]))\}. \qquad (14)$$

Из вышеизложенного следует, что функция χ_α, определенная равенством (14), является характеристической функцией числа α. Из (14) видно, что χ_α R-частично-рекурсивна. Значит, число α вычислимо в смысле Дедекинда. Теорема доказана.

c) Сегментно вычислимые числа

Действительное число α задается сегментно парой функций $\langle a, b\rangle$ ($a^{(1)}$ и $b^{(1)}$ — функции типа $N \to R$) такой, что $\{[a(n), b(n)]\}$ есть последовательность вложенных друг в друга неограниченно стягивающихся сегментов, единственной общей точкой которых является α. Если число α задано сегментно парой функций $\langle a, b\rangle$, то $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a(n) = \lim\limits_{n\to\infty} b(n)$. Если обе последовательности $\{a(n)\}$, $\{b(n)\}$ вычислимы, то число α естественно считать вычислимым, так как (в отличие от ситуации, рассмотренной на стр. 347—348) эти последовательности зажимают число α с двух сторон и по n мы можем оценить близость $a(n)$ и $b(n)$ к α:

$$|a(n)-\alpha| \leqslant |a(n)-b(n)|, \qquad |b(n)-\alpha| \leqslant |a(n)-b(n)|.$$

Определение. Последовательность сегментов $\{[a(n), b(n)]\}$ с рациональными концами называется *вычислимой*, если $\{a(n)\}$ и $\{b(n)\}$ — вычислимые последовательности.

Определение. Действительное число α называется *сегментно вычислимым*, если существует вычислимая последовательность вложенных друг в друга неограниченно стягивающихся сегментов, единственной общей точкой которых является α.

Действительное число α сегментно вычислимо тогда и только тогда, когда оно может быть задано сегментно парой R-частично-рекурсивных функций $\langle a, b\rangle$.

Теорема 3. *Если действительное число α сегментно вычислимо, то оно вычислимо в смысле Кантора.*

Доказательство. Пусть действительное число α сегментно вычислимо. Тогда оно может быть сегментно задано парой R-частично-рекурсивных функций $\langle a, b\rangle$. Вычислимая последовательность, например, левых концов $\{a(n)\}$ сходится к α. Последовательность $\{a(n)\}$ — вычислимо сходящаяся. Ее R-частично-рекурсивным регулятором сходимости является, например, функция

$$h(\varepsilon) = (\mu t)\,[\,|\,b(t) - a(t)\,| < \varepsilon].\tag{15}$$

Значит, число α вычислимо в смысле Кантора.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы 3, *если число α сегментно задается парой R-частично-рекурсивных функций $\langle a, b\rangle$, то $\{a(n)\}$ и $\{b(n)\}$ — вычислимо сходящиеся последовательности.*

Теорема 4. *Если действительное число α вычислимо в смысле Дедекинда, то оно сегментно вычислимо.*

Доказательство. Пусть действительное число α вычислимо в смысле Дедекинда. Тогда его характеристическая функция χ_α R-частично-рекурсивна. Возьмем какую-нибудь натуральную вычислимую нумерацию τ множества R и произвольное обще-рекурсивное взаимно-однозначное соответствие $\varkappa^{[2]}$ между N и N^2 (теорема 32 из § 7), осуществляемое функциями $\varkappa_1^{[2]}$, $\varkappa_2^{[2]}$, $\varkappa_0^{[2]}$. Функция $y = \chi_\alpha(\tau(t))$ частично-рекурсивна. Пусть $\varrho^{(1)}$ — обще-рекурсивная функция, пересчитывающая ее область определения (следствие 4 теоремы 5 из § 6 и теорема 23 из § 7). Функция $y = \chi_\alpha(\tau(\varrho(t)))$ уже обще-рекурсивна.

Построим вычислимую последовательность вложенных друг в друга неограниченно стягивающихся сегментов, единственной общей точкой которых является α. Последовательность левых концов задается равенствами:

$$\left\{\begin{aligned}
&a(0) = \tau(\varrho((\mu t)[\chi_\alpha(\tau(\varrho(t))) = 0])),\\
&a(n+1) = \tau\Big(\varrho\Big(\varkappa_1^{[2]}\Big((\mu q)\Big[(\chi_\alpha(\tau(\varrho(\varkappa_1^{[2]}(q)))) = 0)\,\&\\
&\quad \&\,(\tau(\varrho(\varkappa_1^{[2]}(q))) \geqslant a(n))\,\&\\
&\quad \&\,(\chi_\alpha(\tau(\varrho(\varkappa_2^{[2]}(q)))) = 1)\,\&\\
&\quad \&\,\Big(\tau(\varrho(\varkappa_2^{[2]}(q))) - \tau(\varrho(\varkappa_1^{[2]}(q))) < \frac{1}{n+1}\Big)\Big]\Big)\Big)\Big).
\end{aligned}\right.\tag{16}$$

Аналогично определяется последовательность $\{b(n)\}$ правых концов. Легко видеть, что пара R-частично-рекурсивных функций $\langle a, b\rangle$ сегментно задает число α. Значит, число α сегментно вычислимо. Теорема доказана.

Из теорем 2—4 следует, что определения вычислимости в смысле Кантора, вычислимости в смысле Дедекинда и сегментной вычислимости равносильны.

Теорема 5. *Если пределом монотонной вычислимой последовательности* $\{c_n\}$ *рациональных чисел является вычислимое* (сегментно, в смысле Кантора или в смысле Дедекинда) *действительное число, то последовательность* $\{c_n\}$ *— вычислимо сходящаяся.*

Доказательство. Доказательство проведем, например, для неубывающей последовательности. Итак, пусть $\{c_n\}$ — неубывающая вычислимая последовательность рациональных чисел и пусть $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ — вычислимое число. Так как число α сегментно вычислимо, существует вычислимая последовательность $\{[a(n), b(n)]\}$ вложенных друг в друга неограниченно стягивающихся сегментов с рациональными концами, единственной общей точкой которых является α. R-частично-рекурсивные функции a, b сегментно задают число α. По замечанию после теоремы 3 $\{a(n)\}$ — вычислимо сходящаяся последовательность. Пусть h_1 — ее R-частично-рекурсивный регулятор сходимости. Тогда R-частично-рекурсивным регулятором сходимости для последовательности $\{c_n\}$ будет функция $h_2(\varepsilon) = (\mu t)[c_t \geqslant a(h_1(\varepsilon))]$. Значит, последовательность $\{c_n\}$ — вычислимо сходящаяся.

Следствие. *Предел любой монотонной ограниченной вычислимой, но не вычислимо сходящейся последовательности* (см. важный пример на стр. 349), например, число β из (3), *есть слабо вычислимое в смысле Кантора число, не являющееся вычислимым* (ни сегментно, ни в смысле Кантора, ни в смысле Дедекинда).

d) Десятично вычислимые числа; q-ично вычислимые числа

Действительное число α задается десятично парой $\langle \varepsilon, c \rangle$, где ε — одно из чисел 0,1, $c^{(1)}$ — функция типа $N \to N$ такая, что $c(n) < 10$ при $n > 0$ и $\alpha = (-1)^{\varepsilon} c(0), c(1)\, c(2)\, c(3) \ldots$ В этом случае определение вычислимого числа будет, пожалуй, самым естественным и привычным.

Определение. Действительное число α называется *десятично вычислимым*, если функция c, входящая в его десятичное задание, обще-рекурсивна *) **).

Другими словами, действительное число α десятично вычислимо, если можно вычислять знаки его десятичного представления. Очевидно, что любое алгебраическое действительное число (в частности, любое рациональное число) десятично вычислимо. Трансцендентные числа π и e тоже, конечно, десятично вычислимы.

Теорема 6. *Если действительное число α десятично вычислимо, то оно вычислимо в смысле Кантора.*

Доказательство. Пусть действительное число α десятично вычислимо. Тогда существуют такое число ε (равное 0 или 1) и такая обще-рекурсивная функция c, что $\alpha = (-1)^{\varepsilon} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} c(i) \cdot 10^{-i}$. Определим функцию f:

$$f(n) = (-1)^{\varepsilon} \cdot \sum_{i=0}^{i=n} c(i) \cdot 10^{-i} \tag{17}$$

и функцию h:

$$h(\delta) = (\mu t)\left[\frac{1}{10^t} < \delta\right]. \tag{18}$$

Легко видеть, что $\{f(n)\}$ — последовательность с регулятором сходимости h, сходящаяся к α. Функции f и h — R-частично-рекурсивные. Значит, число α вычислимо в смысле Кантора.

Теорема 7. *Если действительное число α вычислимо в смысле Дедекинда, то оно десятично вычислимо.*

Доказательство. Если α — десятично-рациональное число $\left(\text{т. е. число вида } \frac{d}{10^k}, \text{ где } d \text{ — целое число}\right)$, то оно имеет конечное десятичное представление: $\alpha = (-1)^{\varepsilon} \cdot c_0, c_1 c_2 \ldots c_k$. В этом случае, даже без использования вычислимости в смысле Дедекинда, α тривиально

---

*) У числа α может быть два десятичных задания, но, очевидно, входящие в них функции либо обе обще-рекурсивны, либо обе — нет.

**) Очень важно, что в этом определении речь идет об обще-рекурсивности, а не о R-частично-рекурсивности, так как c — функция типа $N \to N$ (см. стр. 339).

десятично вычислимо, так как пара $\langle \varepsilon, c\rangle$, где c — функция, определенная равенством

$$c(n)=\begin{cases} c_0, & n=0,\\ c_1, & n=1,\\ c_2, & n=2,\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ c_k, & n=k,\\ 0, & n>k,\end{cases}$$

десятично задает число α.

Если α — не десятично-рациональное число, то оно имеет единственное и бесконечное десятичное представление: $\alpha=(-1)^{\varepsilon}\cdot\sum\limits_{i=0}^{\infty}c_i\cdot 10^{-i}$. Покажем, что функция $c(n)=c_n$ обще-рекурсивна. Для этого достаточно показать, что функция $C(n)=\sum\limits_{i=0}^{i=n}c_i\cdot 10^{-i}$ обще-рекурсивна, так как $c(n)=10^n[C(n)-C(n-1)]$. Покажем, как вычислять по n число $C(n)$. $C(n)$ — десятично-рациональное число вида $\frac{A}{10^n}$, удовлетворяющее равенствам:

$$\chi_{|\alpha|}(C(n))=0, \tag{19}$$

$$\chi_{|\alpha|}\left(C(n)+\frac{1}{10^n}\right)=1. \tag{20}$$

Равенствами (19), (20) число вида $\frac{A}{10^n}$ определяется однозначно. Число α вычислимо в смысле Дедекинда. Значит, χ_α — R-частично-рекурсивная функция. А тогда и $\chi_{|\alpha|}$ R-частично-рекурсивна. Алгоритм вычисления числа $C(n)$ следующий: проверяй последовательно на выполнение равенств (19), (20) десятично-рациональные числа вида $\frac{A}{10^n}$, например, в следующем порядке:

$$0,\ \frac{1}{10^n},\ \frac{2}{10^n},\ -\frac{1}{10^n},\ -\frac{2}{10^n},\ \frac{3}{10^n},\ \frac{4}{10^n},\ -\frac{3}{10^n},\ -\frac{4}{10^n},\ldots \tag{21}$$

Через конечное число шагов в последовательности (21) найдется то единственное число B, которое обладает свойством: $\chi_{|\alpha|}(B)=0$, $\chi_{|\alpha|}\left(B+\frac{1}{10^n}\right)=1$. Тогда $C(n)=B$. Теорема доказана.

Итак, понятие десятично вычислимого числа тоже оказалось равносильным всем предыдущим понятиям «вычислимости» действительных чисел.

Все изложенное в настоящем пункте может быть дословно перенесено на q-ично определенные действительные числа (q — целое число, $q \geqslant 2$). Действительное число α задается q-ично парой $\langle \varepsilon, c\rangle$, где ε — одно из чисел 0,1, $c^{(1)}$ — функция типа $N \rightarrow N$ такая, что $c(n)<q$ для $n>0$ и $\alpha=(-1)^{\varepsilon}\left[c(0)+\frac{c(1)}{q}+\frac{c(2)}{q^2}+\frac{c(3)}{q^3}+\ldots\right]$.

Определение. Действительное число α называется *q-ично вычислимым*, если функция c, входящая в его q-ичное задание, обще-рекурсивна *).

Другими словами, действительное число α q-ично вычислимо, если можно вычислять знаки его q-ичного представления. Дословным повторением (с заменой повсюду числа 10 на q) могут быть доказаны аналоги теорем 6, 7: q-ичная вычислимость действительного числа равносильна со всеми прочими «вычислимостями».

е) Конструктивный континуум

Все те естественные определения вычислимых действительных чисел, которые мы дали в а) — d), отправляясь от разных способов введения действительных чисел, оказались эквивалентными (теоремы 2—4, 6, 7).

Определение. Действительное число называется *вычислимым*, если оно удовлетворяет одному из определений, введенных в а) — d) (с тем же успехом можно было бы сказать — каждому из определений).

Множество вычислимых действительных чисел образует так называемый *конструктивный континуум*. Обозначим конструктивный континуум буквой $\mathfrak{K}$. Множество $\mathfrak{K}$ — счетное (см. замечание на стр. 348). Ниже (теорема 11) будет доказано, что конструктивный кон-

---

*) См. сноски *) и **) на стр. 357.

тинуум в некотором более узком смысле «счетности» не является счетным (а именно, не является конструктивно счетным). Можно доказать*) (интуитивно это очевидно), что $\mathfrak{K}$ — поле и, следовательно, подполе поля D действительных чисел. Любое алгебраическое действительное число (в частности, любое рациональное число) входит в $\mathfrak{K}$. Поле алгебраических действительных чисел — подполе поля $\mathfrak{K}$. Но конструктивный континуум $\mathfrak{K}$ содержит и всевозможные вычислимые трансцендентные числа, например π и e.

4. СИСТЕМЫ ОБОЗНАЧЕНИЙ ВЫЧИСЛИМЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ **)

Конструктивный континуум $\mathfrak{K}$ — счетное множество. Вычислимых действительных чисел — счетное число. Значит, их можно как-то обозначить, назвать; каждому вычислимому действительному числу можно приписать конечное обозначение, имя***). Мы покажем, что систему обозначений можно выбрать так, что имя (обозначение) каждого числа будет в каком-то смысле отражать способ его вычисления, так что по имени числа будем, возможно, вычислять само число. Поскольку каждое из определений вычислимого действительного числа давало свой способ вычисления чисел, мы введем несколько систем обозначений. Мы покажем, что некоторые из этих систем обозначений эквивалентны друг другу (в том смысле, что по имени числа в одной системе обозначений можно эффективно найти, вычислить имя этого же числа в другой системе обозначений), а некоторые не эквивалентны.

В качестве обозначений, или имен, для вычислимых действительных чисел мы будем использовать натуральные числа.

---

*) См. Г. Райс [1954], теорема 4.

**) Предпринятое в настоящем пункте рассмотрение таких систем содержится также в статье В. А. Успенского [1960].

***) В отличие, например, от произвольных действительных чисел, каждому из которых тоже можно приписать «обозначение» (скажем, такими «обозначениями» являются десятичные представления чисел), но эти «обозначения» будут уже обязательно бесконечными.

Фиксируем три объекта (в дальнейшем они часто будут называться *исходными объектами*): произвольную главную нумерацию ω класса $\mathcal{U}^{(1)}$, произвольную вычислимую нумерацию τ множества R и произвольное общерекурсивное взаимно-однозначное соответствие $\varkappa^{[2]}$ между N и N^2 (функции, его осуществляющие, обозначим, как обычно, через $\varkappa_1^{[2]}$, $\varkappa_2^{[2]}$, $\varkappa_0^{[2]}$).

Определение. *Номером R-частично-рекурсивной функции* f типа $R \to R$ назовем всякий номер (в нумерации ω) всякой частично-рекурсивной функции, сопряженной с f (относительно нумерации τ).

Канторова нумерация вычислимых действительных чисел

Пусть α — вычислимое действительное число. Возьмем произвольную пару $\langle f, h\rangle$ R-частично-рекурсивных функций, задающую число α по Кантору. Пусть n_1 — номер функции f, n_2 — номер функции h. Пару $\langle n_1, n_2\rangle$ мы назовем *канторовым обозначением* числа α. Число $n_0 = \varkappa_0^{[2]}(n_1, n_2)$ назовем *канторовым номером* числа α. Легко видеть, что по канторову номеру n_0 числа α можно вычислять (в канторовом смысле) само число α.

Дедекиндова нумерация вычислимых действительных чисел

Пусть α — вычислимое действительное число. Возьмем функцию χ, задающую число α по Дедекинду. Эта функция является характеристической функцией числа α и R-частично-рекурсивна. Пусть n — номер функции χ. Число n мы будем называть *дедекиндовым номером* (или *дедекиндовым обозначением*) числа α. По дедекиндову номеру n числа α можно вычислять (в дедекиндовом смысле) само число α.

Сегментная нумерация вычислимых действительных чисел

Пусть α — вычислимое действительное число. Возьмем произвольную пару $\langle a, b\rangle$ R-частично-рекурсивных функций, сегментно задающую число α. Пусть n_1 — номер функции a, а n_2 — номер функции b. Пару $\langle n_1, n_2\rangle$ мы назовем *сегментным обозначением* числа α. Число $n_0 = \varkappa_0^{[2]}(n_1, n_2)$ назовем *сегментным номером* числа α. По сегментному номеру n_0 числа α можно вычислять (в сегментном смысле) само число α.

Десятичная нумерация вычислимых действительных чисел

Пусть α — вычислимое действительное число. Возьмем пару $\langle \varepsilon, c\rangle$, десятично задающую число α. Функция c дает знаки десятичного представления числа α. Она является функцией типа $N \to N$ и обще-рекурсивна. Пусть n — номер функции c в нумерации ω *). Пару $\langle \varepsilon, n\rangle$ мы будем называть *десятичным обозначением*, а число $n_0 = \varkappa_0^{[2]}(\varepsilon, n)$ — *десятичным номером* числа α. По десятичному номеру n_0 числа α можно вычислять знаки его десятичного представления.

Аналогично строится q-ичная нумерация вычислимых действительных чисел (для каждого целого q, $q \geqslant 2$) и определяются понятия *q-ичного обозначения* и *q-ичного номера* вычислимого действительного числа.

В любой из построенных выше нумераций каждое вычислимое действительное число имеет, как легко показать, бесконечное множество номеров.

Все вышеперечисленные нумерации (или системы обозначений) вычислимых действительных чисел строились нами при фиксировании трех исходных объектов: главной нумерации ω класса $\mathcal{U}^{(1)}$, вычислимой нумерации τ множества R и обще-рекурсивного взаимно-однозначного соответствия $\varkappa^{[2]}$ **). Если мы будем менять эти исходные объекты, то будут, конечно, меняться и нумерации. Однако в силу того, что все главные нумерации системы $\mathcal{U}^{(1)}$ обще-рекурсивно эквивалентны (см. стр. 299), все вычислимые нумерации множества R частично-рекурсивно экви-

---

*) Подчеркиваем, что переход к сопряженной функции здесь не нужен (см. стр. 339 и сноску **) на стр. 357).

**) Заметим, что для задания дедекиндовой нумерации можно не фиксировать соответствие $\varkappa^{[2]}$, для q-ичной нумерации не нужна нумерация τ.

валентны (см. стр. 342) и все обще-рекурсивные взаимно-однозначные соответствия $\varkappa^{[2]}$ (рассматриваемые как нумерации множества N^2) обще-рекурсивно эквивалентны (см. замечание 4 на стр. 297), в силу этого все канторовы нумерации вычислимых действительных чисел частично-рекурсивно эквивалентны между собой, все дедекиндовы нумерации частично-рекурсивно эквивалентны между собой, все сегментные нумерации частично-рекурсивно эквивалентны между собой и для любого q ($q=2, 3, 4, \ldots, 10, \ldots$) все q-ичные нумерации частично-рекурсивно эквивалентны между собой.

Докажем, например, что все канторовы нумерации частично-рекурсивно эквивалентны между собой (остальные эквивалентности доказываются аналогично). Для этого, очевидно, достаточно доказать следующие три утверждения:

1) Пусть A — канторова нумерация, соответствующая объектам ω, τ, $\varkappa^{[2]}$, а B_1 — канторова нумерация, соответствующая объектам ω, τ, $\bar{\varkappa}^{[2]}$; тогда A частично-рекурсивно сводится к B_1.

2) Пусть A — канторова нумерация, соответствующая объектам ω, τ, $\varkappa^{[2]}$, а B_2 — канторова нумерация, соответствующая объектам $\bar{\omega}$, τ, $\varkappa^{[2]}$; тогда A частично-рекурсивно сводится к B_2.

3) Пусть A — канторова нумерация, соответствующая объектам ω, τ, $\varkappa^{[2]}$, а B_3 — канторова нумерация, соответствующая объектам ω, $\bar{\tau}$, $\varkappa^{[2]}$; тогда A частично-рекурсивно сводится к B_3.

Утверждение 1) немедленно следует из обще-рекурсивной эквивалентности всех обще-рекурсивных взаимно-однозначных соответствий между N и N^2, а утверждение 2) — из обще-рекурсивной эквивалентности всех главных нумераций системы $\mathcal{U}^{(1)}$. Докажем утверждение 3). Рассмотрим формулу, приведенную в замечании 2 на стр. 345. При $s=1$ она задает оператор типа $\langle 1\rangle \to 1$, переводящий функцию ζ, сопряженную с функцией $f^{(1)}$ относительно τ, в функцию $\bar{\zeta}$, сопряженную с той же f относительно $\bar{\tau}$. Поскольку, как легко проверить, простейшее распространение этого оператора сохраняет вычислимость, существует — по теореме 17 из § 11 —

обще-рекурсивная функция γ, дающая по всякому номеру функции ζ один из номеров функции $\bar{\zeta}$. Тогда, если $\langle n_1, n_2\rangle$ — канторово обозначение некоторого вычислимого действительного числа при фиксировании τ, то $\langle \gamma(n_1), \gamma(n_2)\rangle$ будет канторовым обозначением того же числа при фиксировании $\bar{\tau}$. Поэтому обще-рекурсивная функция δ:

$$\delta(n) = \varkappa_0^{[2]}(\gamma(\varkappa_1^{[2]}(n)),\ \gamma(\varkappa_2^{[2]}(n)))$$

будет сводить A к B_3.

В дальнейшем, до конца этого параграфа, мы для краткости будем писать просто «сводится» вместо «частично-рекурсивно сводится» и «эквивалентна» вместо «частично-рекурсивно эквивалентна».

Теорема 8. *Произвольные канторова, дедекиндова и сегментная нумерации вычислимых действительных чисел эквивалентны между собой*).*

Доказательство. Поскольку все канторовы нумерации эквивалентны между собой, все дедекиндовы — между собой и все сегментные — между собой, достаточно взять по одной нумерации каждого вида. Мы выберем эти три нумерации так: фиксируем три исходных объекта — ω, τ, $\varkappa^{[2]}$, причем нумерацию τ выберем так, чтобы она была натуральной, — и рассмотрим канторову, дедекиндову и сегментную нумерации, определенные этими объектами.

1) Докажем сначала, что канторова нумерация сводится к дедекиндовой. Рассмотрим равенство (14) из п. 3. Равенство (14) из п. 3 определяет оператор, переводящий всякую пару функций $\langle f, h\rangle$, задающую некоторое число α по Кантору, в функцию χ_α, задающую то же число α по Дедекинду. Из этого же равенства нетрудно извлечь оператор, переводящий всякую пару функций $\langle f^*, h^*\rangle$, сопряженных с f и h, в функцию χ_α^*, сопряженную с χ_α. Этот оператор будет обладать тем свойством, что его простейшее распространение сохраняет вычислимость; поэтому, в силу теоремы 17 из § 11, существует обще-рекурсивная функция, переводящая номера функ-

---

*) Эта теорема по существу содержится в резюме доклада И. Д. Заславского [1956].

ций f^* и h^* (а, следовательно, и функций f и h) в номер функции χ_a^* (а, следовательно, и функции χ_a); отсюда вытекает сводимость канторовой нумерации к дедекиндовой.

Построим требуемый оператор в явном виде. При этом мы будем опираться на следующие утверждения:

i) Функции типа $R^2 \to R: z = x \dot{-} y$, $z = |x-y|$, $z = x \cdot y$ и функция типа $R \to R$ Sg (см. стр. 352) суть R-частично-рекурсивные функции. Обозначим сопряженные частично-рекурсивные функции соответственно через Dif*, Adif*, Prod* и Sg*.

ii) Предикат P_1^*:

$$P_1^*(n_1, n_2) = [\tau(n_1) > \tau(n_2)]$$

обще-рекурсивен.

Рассмотрим следующее равенство:

$$\begin{aligned}\chi_a^*(n) = \mathrm{Sg}^*(\mathrm{Dif}^*\{n,\ f^*(\tau^{-1}(\varkappa_1^{[2]}((\mu t)[P_1^*\{\varkappa_2^{[2]}(t),\ \tau^{-1}(0)\}\ \&\\ \&\ P_1^*\{\tau^{-1}(\varkappa_1^{[2]}(t)),\quad h^*(\varkappa_2^{[2]}(t))\}\ \& \qquad (14^*)\\ \&\ P_1^*\{\mathrm{Adif}^*(f^*(\tau^{-1}(\varkappa_1^{[2]}(t))),\ n),\ \mathrm{Prod}^*(\tau^{-1}(2),\ \varkappa_2^{[2]}(t))\}])))\}).\end{aligned}$$

Внимательное сравнение равенств (14) и (14*) показывает, что если функции f^* и h^* сопряжены с функциями f и h, то функция χ_a^*, полученная из f^* и h^* согласно равенству (14*), сопряжена с функцией χ_a, полученной из f и h согласно равенству (14). Искомый оператор, таким образом, построен. Несмотря на его громоздкую запись, проверить, что его простейшее распространение сохраняет вычислимость, не составляет труда.

2) Аналогично при помощи равенства

$$h^*(n) = \tau^{-1}((\mu t)[P_1^*(n,\ \mathrm{Adif}^*(b^*(\tau^{-1}(t)),\ a^*(\tau^{-1}(t))))]) \qquad (15^*)$$

доказывается сводимость сегментной нумерации к канторовой (см. (15) из п. 3).

3) Доказательство сводимости дедекиндовой нумерации к сегментной требует привлечения дополнительных средств, так как равенство (16) из п. 3 выражает функ-

цию $a^{(1)}$ (входящую в сегментное задание некоторого числа α) не только через функцию $\chi_\alpha^{(1)}$ (характеристическую функцию числа α), но и через функцию $\varrho^{(1)}$ (пересчет области определения функции $y=\chi_\alpha(\tau(t))$), зависящую от функции χ_α (и притом не определенную функцией χ_α однозначно). Кроме того, нам понадобятся еще следующие утверждения:

i) Функция $z=x-y$ R-частично-рекурсивна. Обозначим сопряженную с ней функцию через Di^*.

ii) Предикаты P_2^*: $P_2^*(n_1, n_2)=[\tau(n_1)\geqslant\tau(n_2)]$ и P_3^*: $P_3^*(n_1, n_2)=[\tau(n_1)=n_2]$ обще-рекурсивны.

Рассмотрим равенства:

$$\begin{cases} a^+(0)=\tau^N(\varrho^*(\tau^{-1}((\mu t)\,P_3^*(\chi_\alpha^*(\tau^N(\varrho^*(\tau^{-1}(t)))),\,0)))) \\ a^+(n+1)=\tau^N(\varrho^*(\tau^{-1}(\varkappa_1^{[2]}((\mu q) \end{cases} \qquad (16_1^*)$$

$$\begin{aligned}[P_3^*(\chi_\alpha^*(\tau^N(\varrho^*(\tau^{-1}(\varkappa_1^{[2]}(q))))),\,0)\,\&\\
\&\,P_2^*(\tau^N(\varrho^*(\tau^{-1}(\varkappa_1^{[2]}(q)))),\,a^+(n))\,\&\\
\&\,P_3^*(\chi_\alpha^*(\tau^N(\varrho^*(\tau^{-1}(\varkappa_2^{[2]}(q))))),\,1)\,\&\\
\&\,P_1^*\left((\mu v)\left[\tau(v)=\frac{1}{n+1}\right]\right.,\\
\mathrm{Di}^*(\tau^N(\varrho^*(\tau^{-1}(\varkappa_2^{[2]}(q)))),\,\tau^N(\varrho^*(\tau^{-1}(\varkappa_1^{[2]}(q))))))]))))\,,\end{aligned}$$

$$a^*(m)=a^+(\tau^N(m)). \qquad (16_2^*)$$

Если χ_α — характеристическая функция числа α, ϱ — любой пересчет области определения функции $y=\chi_\alpha(\tau(t))$, χ_α^*, ϱ^* — какие-нибудь сопряженные с ними функции, то 1) функция a, определенная равенствами (16) из п. 3, является функцией, входящей в некоторое сегментное задание числа α, 2) функция a^+, определенная равенствами (16_1^*), дает по любому n один из номеров числа $a(n)$, 3) функция a^*, определенная равенством (16_2^*), является сопряженной с функцией a. Таким образом, в совокупности равенства (16_1^*), (16_2^*) задают оператор, переводящий всякую пару $\langle\chi_\alpha^*, \varrho^*\rangle$ функций, сопряженных с вышеописанными функциями χ_α, ϱ, в функцию a^*, сопряженную с соответствующей функцией a. Легко видеть, что простейшее распространение этого оператора сохраняет вычислимость. По теореме 17 из § 11 существует обще-рекурсивная функция $\psi^{(2)}$, переводящая номера любых функций χ_α^*, ϱ^* (а, следовательно, и функций χ_α, ϱ) в номер соответствующей функции a^* (а, следовательно, и функции a). По лемме из п. 2 § 11 существует такая обще-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$, которая номер любой функции χ_α^* переведет в номер некоторого пересчета ее области определения. Области определения функций χ_α^* и $y = \chi_\alpha(\tau(t))$ совпадают. Поэтому, если n — номер функции χ_α^*, то $\varphi(n)$ — номер некоторого пересчета ϱ области определения функции $y = \chi_\alpha(\tau(t))$. А нам нужен номер сопряженной функции ϱ^*. Возьмем обще-рекурсивную функцию $\sigma^{[1]}$, которая существует по лемме из п. 2 (при $s=1$). Искомым номером функции ϱ^* будет число $\sigma^{[1]}(\varphi(n))$. Таким образом, функция

$$g_1(n) = \psi(n, \sigma^{[1]}(\varphi(n)))$$

будет искомой функцией, переводящей номер любой функции χ_α, задающей число α по Дедекинду, в номер функции a, входящей в некоторое сегментное задание числа α. Аналогичным образом строится функция g_2, дающая по номеру функции χ_α номер второй функции, функции b, задающей сегментно (вместе с функцией a) число α. Окончательно сводящая функция задается равенством

$$g(n) = \varkappa_0^{[2]}(g_1(n), g_2(n)).$$

Теорема 9. *Произвольная десятичная нумерация вычислимых действительных чисел сводится к произвольной канторовой нумерации вычислимых действительных чисел.*

Доказательство. Опять-таки достаточно доказать, что какая-нибудь одна десятичная нумерация сводится к какой-нибудь одной канторовой нумерации. Фиксируем опять три исходных объекта — ω, τ, $\varkappa^{[2]}$, причем нумерацию τ опять выберем так, чтобы она была натуральной, — и рассмотрим десятичную и канторову нумерации, определенные этими объектами. Напишем равенство

$$f^*(m) = (\mu t)\left[\tau(t) = (-1)^{\varepsilon} \sum_{i=0}^{i=\tau(m)} c(i)\cdot 10^{-i}\right]. \qquad (17_1^*)$$

Равенство (17_1^*) переводит число ε и функцию c, десятично задающие некоторое число α, в функцию f^*, сопряженную с функцией f, входящей в некоторое канторово задание этого α (см. (17) из п. 3). К сожалению, это равенство нас еще не устраивает, так как применение теоремы 17 из § 11 дает нам функцию, переводящую номера функций $\varepsilon^{(0)}$ и c в номер функции f^*; нам же нужна функция, переводящая само число ε (а не номер функции $\varepsilon^{(0)}$) и номер функции c (в нумерации ω; напоминаем, что здесь нам не нужен переход к функции, сопряженной с c) в номер функции f^* (см. определение десятичной нумерации вычислимых действительных чисел). Так как ε принимает всего два значения (0 или 1), мы легко найдем выход. Рассмотрим два равенства:

$$f_0^*(m) = (\mu t)\left[\tau(t) = \sum_{i=0}^{i=\tau(m)} c(i)\cdot 10^{-i}\right], \qquad (17_2^*)$$

$$f_1^*(m) = (\mu t)\left[\tau(t) = -\sum_{i=0}^{i=\tau(m)} c(i)\cdot 10^{-i}\right]. \qquad (17_3^*)$$

Каждое из этих равенств задает оператор, переводящий функцию c, входящую в десятичное задание некоторого числа, в функцию f_i^* ($i = 0, 1$), сопряженную с некоторой функцией f_i ($i = 0, 1$). Очевидно, что для числа α, имеющего десятичное задание вида $\langle 0, c\rangle$, функция f_0 будет одной из функций, входящих в некоторое канторово задание числа α, а числу α, имеющему десятичное задание вида $\langle 1, c\rangle$, будет соответствовать в том же смысле функция f_1. Простейшие распространения обоих этих операторов сохраняют вычислимость. По теореме 17 из § 11 существуют обще-рекурсивные функции $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$, дающие по номеру функции c номера функций f_0^*, f_1^* (а, следовательно, и функций f_0, f_1). Тогда функция $\varphi^{(2)}$ типа $N^2 \to N$, определенная «кусочно»:

$$\varphi(\varepsilon, n) = \begin{cases} \varphi_0(n), & \varepsilon = 0, \\ \varphi_1(n), & \varepsilon = 1, \end{cases}$$

будет искомой обще-рекурсивной функцией, дающей по ε и номеру функции c номер соответствующей функции f.

Равенство (18) из п. 3 определяет регулятор сходимости h — один для всех чисел, независимо от ε и c.

фиксируем один из номеров функции h (т. е. номер сопряженной функции h^*). Обозначим его через l. Тогда окончательно сводящая функция g определяется так:

$$g(n) = \varkappa_0^{[2]}(\varphi(\varkappa_1^{[2]}(n), \varkappa_2^{[2]}(n)), l).$$

Следствие. Из теорем 8, 9 вытекает, что *любая десятичная нумерация вычислимых действительных чисел сводится к любой канторовой, дедекиндовой или сегментной нумерации.*

Замечание. Аналогичные теоремы и следствие верны для любой q-ичной нумерации вычислимых действительных чисел.

Теорема 10. *Произвольная p-ичная нумерация вычислимых действительных чисел тогда и только тогда сводится к произвольной q-ичной нумерации, когда множество простых делителей числа q содержится в множестве простых делителей числа p* *).

Доказательство 1) Достаточность («тогда»). Пусть множество простых делителей числа q содержится в множестве простых делителей числа p.

Фиксируем два исходных объекта — ω, $\varkappa^{[2]}$ — и рассмотрим p-ичную и q-ичную нумерации, определенные этими объектами **). Докажем, что эта p-ичная нумерация сводится к этой q-ичной нумерации. Тем самым достаточность будет доказана. Нужную сводимость мы докажем, построив оператор, переводящий всякую функцию b, входящую в p-ичное задание некоторого числа ξ, в функцию a, входящую в q-ичное задание того же числа.

Пусть число ξ p-ично задается парой $\langle \varepsilon, b \rangle$. Тогда

$$\xi = (-1)^{\varepsilon}\left[b_0 + \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \ldots + \frac{b_i}{p^i} + \ldots\right], \tag{1}$$

где $b_i = b(i)$ и $0 \leqslant b_i < p$ для $i > 0$.

Для $j = 0, 1, 2, \ldots$ введем число

$$B_j = p^j \cdot \sum_{k=0}^{k=j} \frac{b_k}{p^k}. \tag{2}$$

---

*) Этот результат опубликован в качестве теоремы 4 в статье В. А. Успенского [1960].

**) См. сноску **) на стр. 362.

Например, $B_0 = b_0$. Из (1) и (2):

$$\frac{B_j}{p^j} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{B_j+1}{p^j}. \tag{3}$$

Так как множество простых делителей числа q содержится в множестве простых делителей числа p, существуют такие целые положительные числа m и d, что

$$p^m = dq. \tag{4}$$

Возьмем какие-нибудь такие числа m и d и фиксируем их до конца доказательства. Из (4) следует, что для любого натурального i

$$p^{im} = d^i q^i. \tag{5}$$

Для любогс натурального i существует и единственное такое число y, что

$$yd^i \leqslant B_{im} < B_{im} + 1 \leqslant (y+1)\, d^i.$$

Обозначим это число y через A_i. Короче определенпе числа A_i можно записать так:

$$A_i = (\mu y)\,[B_{im} + 1 \leqslant (y+1)\, d^i]. \tag{6}$$

Из (6) следуют неравенства

$$A_i d^i \leqslant B_{im} < B_{im} + 1 \leqslant (A_i+1)\, d^i. \tag{7}$$

Для дальнейшего полезно заметить, что переменную y в (6) можно ограничить. А именно:

$$A_i = \underset{y \leqslant B_{im}}{(\mu y)}\,[B_{im} + 1 \leqslant (y+1)\, d^i]. \tag{6'}$$

Заметим, что $A_0 = B_0$. Из (7)

$$\frac{A_i d^i}{p^{im}} \leqslant \frac{B_{im}}{p^{im}} < \frac{B_{im}+1}{p^{im}} \leqslant \frac{(A_i+1)\, d^i}{p^{im}}. \tag{8}$$

Из (3), (5) и (8)

$$\frac{A_i}{q^i} \leqslant \frac{B_{im}}{p^{im}} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{B_{im}+1}{p^{im}} \leqslant \frac{A_i+1}{q^i}. \tag{9}$$

Из (9)

$$\frac{A_i}{q^i} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{A_i+1}{q^j}. \tag{10}$$

Введем функцию $a^{(1)}$ (обозначая $a(i)$ через a_i):

$$\begin{cases} a_0 = A_0, \\ a_i = A_i - qA_{i-1} \ (i = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{11}$$

Докажем, что для $i = 1, 2, \ldots$

$$0 \leqslant a_i < q. \tag{12}$$

Допустим, что при некотором i ($i = 1, 2, \ldots$) $a_i < 0$. Тогда из (11) $A_i < A_{i-1}q$. Значит, $A_i + 1 \leqslant A_{i-1}q$. А тогда $\frac{A_i+1}{q^i} \leqslant \frac{A_{i-1}}{q^{i-1}}$. Но из (10) $\frac{A_{i-1}}{q^{i-1}} \leqslant |\xi|$, а $\frac{A_i+1}{q^i} \geqslant |\xi|$. Следовательно,

$$|\xi| = \frac{A_{i-1}}{q^{i-1}} = \frac{A_i+1}{q^i}. \tag{13}$$

Из (13) и (9)

$$|\xi| = \frac{B_{(i-1)m}}{p^{(i-1)m}} = \frac{B_{im}+1}{p^{im}}. \tag{14}$$

Из (14) и (2)

$$b_0 + \frac{b_1}{p} + \ldots + \frac{b_{(i-1)m}}{p^{(i-1)m}} = b_0 + \frac{b_1}{p} + \ldots + \frac{b_{im}}{p^{im}} + \frac{1}{p^{im}}.$$

$$\frac{b_{im-m+1}}{p^{im-m+1}} + \ldots + \frac{b_{im}}{p^{im}} + \frac{1}{p^{im}} = 0.$$

Но $b_i \geqslant 0$ при $i > 0$. Противоречие.

Аналогично допущение, что при некотором i ($i = 1, 2, \ldots$) $a_i \geqslant q$ приводит сначала к равенствам $|\xi| = \frac{A_{i-1}+1}{q^{i-1}} = \frac{A_i}{q^i}$, затем к равенствам $|\xi| = \frac{B_{(i-1)m}+1}{p^{(i-1)m}} = \frac{B_{im}}{p^{im}}$ и, наконец, к равенству $\frac{1}{p^{(i-1)m}} = \frac{b_{im-m+1}}{p^{im-m+1}} + \ldots + \frac{b_{im}}{p^{im}}$. Но, так как $b_i < p$ при $i > 0$, то

$$\frac{b_{im-m+1}}{p^{im-m+1}} + \ldots + \frac{b_{im}}{p^{im}} <$$

$$< \frac{p-1}{p^{im-m+1}} + \ldots + \frac{p-1}{p^{im}} + \frac{p-1}{p^{im+1}} + \ldots = \frac{1}{p^{(i-1)m}}.$$

Противоречие.

Из (10), (11) и (12) следует, что пара $\langle 0, a\rangle$ q-ично задает число $|\xi|$, а, следовательно, пара $\langle \varepsilon, a\rangle$ q-ично задает само ξ.

Равенства (2), (6′) и (11) определяют оператор, переводящий всякую функцию b, входящую в p-ичное задание числа ξ, в функцию a, входящую в q-ичное задание того же числа. Легко видеть, что простейшее распространение этого оператора сохраняет вычислимость. По теореме 17 из § 11 существует обще-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$, дающая по номеру функции b номер соответствующей функции a. Следовательно, рассматриваемая p-ичная нумерация сводится к рассматриваемой q-ичной нумерации. Доказательство достаточности закончено.

2) Необходимость («только тогда»). Пусть множество простых делителей числа q не содержится в множестве простых делителей числа p.

Фиксируем два исходных объекта — ω, $\varkappa^{[2]}$ — и докажем, что p-ичная нумерация, определенная этими объектами, не сводится к q-ичной нумерации, определенной этими же объектами. Этим необходимость будет доказана.

Обозначим универсальную функцию фиксированной нами главной нумерации ω класса $\mathfrak{A}^{(1)}$ через Ω.

Так как множество простых делителей числа q не содержится в множестве простых делителей числа p, число $\frac{1}{q}$ не является p-ично-рациональным. А тогда: если разложение числа $\frac{1}{q}$ в p-ичную дробь имеет вид

$$\frac{1}{q} = b_0 + \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \ldots + \frac{b_i}{p^i} + \ldots,$$

то для любого j

$$\sum_{k=0}^{k=j} \frac{b_k}{p^k} < \frac{1}{q} < \sum_{k=0}^{k=j} \frac{b_k}{p^k} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^k}. \tag{15}$$

Заметим, что $b_0 = 0$ и $0 \leqslant b_i < p$ при $i > 0$. Последовательность $\{b_i\}$, очевидно, обще-рекурсивна (как функция от i).

Возьмем не пересекающиеся рекурсивно-перечислимые линейные множества M_0, M_1, не отделимые обще-рекурсивными множествами (теорема 7 из § 10), и обще-рекурсивные функции f_0, f_1, перечисляющие их (теорема 23 из § 7).

Введем теперь функцию $\varphi^{(2)}$:

$$\varphi(n, k) = \begin{cases} 0 & \underset{t \leqslant k}{(\exists t)} [f_0(t) = n], \\ p-1 & \underset{t \leqslant k}{(\exists t)} [f_1(t) = n], \\ b_k & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{16}$$

По теоремам 16 из § 7, 17 из § 7, 18 из § 7 и 22 из § 7 функция φ обще-рекурсивна. По теореме 2 из § 11 существует такая обще-рекурсивная функция $\varrho^{(1)}$, что

$$\Omega(\varrho(n), k) = \varphi(n, k). \tag{17}$$

Для любых n и k $0 \leqslant \varphi(n, k) \leqslant p-1$. Поэтому при любом n ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(n, k)}{p^k}$ сходится. Введем последовательность чисел $\{\xi_n\}$:

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(n, k)}{p^k}. \tag{18}$$

Докажем, что либо $0 \leqslant \xi_n \leqslant 1$, либо $\xi_n = p$. Прежде всего, как сумма ряда с неотрицательными членами, любое $\xi_n \geqslant 0$. Фиксируем n и начнем вычислять $\varphi(n, k)$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ Если $n \in M_0$ и $f_0(0) = n$, то $\varphi(n, k) = 0$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $\xi_n = 0$. Пусть теперь $n \in M_0$, но $f_0(0) \neq n$. Пусть $k_0 = (\mu t)[f_0(t) = n]$. По предположению $k_0 > 0$. Тогда для $k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1$ $\varphi(n, k) = b_k$, для $k \geqslant k_0$ $\varphi(n, k) = 0$. Если $b_0 = b_1 = \ldots = b_{k_0-1} = 0$, то все-таки $\xi_n = 0$. Если же среди чисел $b_0, b_1, \ldots, b_{k_0-1}$ не все равны нулю, то $\xi_n > 0$. Из доказательства видно, что если $n \in M_0$ и $k_0 = (\mu t)[f_0(t) = n]$, то $\xi_n = \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\varphi(n, k)}{p^k} = \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{b_k}{p^k}$. Из (15) $\xi_n < \frac{1}{q}$. Итак, если $n \in M_0$, то

$0 \leqslant \xi_n < \frac{1}{q}$. Пусть теперь $n \in M_1$. Если $f_1(0) = n$, то $\varphi(n, k) = p-1$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае $\xi_n = p$. Если $n \in M_1$ и $k_0 = (\mu t)[f_1(t) = n] > 0$, то $\varphi(n, k) = b_k$ для $k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1$ и $\varphi(n, k) = p - 1$ для $k \geqslant k_0$. В этом случае $\xi_n = \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{b_k}{p^k} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{p-1}{p^k}$. Из (15) $\xi_n > \frac{1}{q}$. Так как $\varphi(n, 0) = b_0 = 0$, $\xi_n \leqslant 1$. Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_{k_0-1} = p-1$, то $\xi_n = 1$. Если же среди чисел $b_1, b_2, \ldots, b_{k_0-1}$ не все равны числу $p-1$, то $\xi_n < 1$. Итак, если $n \in M_1$, то $\frac{1}{q} < \xi_n \leqslant 1$ или $\xi_n = p$. Если же $n \overline{\in} M_0$ и $n \overline{\in} M_1$, то $\varphi(n, k) = b_k$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $\xi_n = \frac{1}{q}$.

Из (17) и (18) следует, что $\varrho(n)$ — номер функции, входящей в p-ичное задание числа ξ_n. Так как при всех n $\xi_n \geqslant 0$, то при всех n число $\varkappa_0^{[2]}(0, \varrho(n))$ является p-ичным номером числа ξ_n.

Предположим, наконец, противное тому, что надо доказать. А именно, предположим, что существует частично-рекурсивная функция $g^{(1)}$, дающая по p-ичному номеру произвольного вычислимого действительного числа α его q-ичный номер. Тогда функция $\sigma^{(1)}$: $\sigma(n) = g(\varkappa_0^{[2]}(0, \varrho(n)))$ дает по числу n q-ичный номер числа ξ_n. Функции ϱ и $\varkappa_0^{[2]}$ обще-рекурсивны, функция g частично-рекурсивна. Следовательно, функция σ частично-рекурсивна. Так как функции ϱ и $\varkappa_0^{[2]}$ всюду определены и при любом n число $\varkappa_0^{[2]}(0, \varrho(n))$ является p-ичным номером некоторого вычислимого действительного числа (а именно: числа ξ_n), функция σ тоже всюду определена. Итак, функция σ обще-рекурсивна. При любом n число $\sigma(n)$ является q-ичным номером числа ξ_n. Следовательно, при любом n число $\varkappa_2^{[2]}(\sigma(n))$ является номером функции, входящей в q-ичное задание числа ξ_n. А тогда при любых n и i число $\Omega(\varkappa_2^{[2]}(\sigma(n)), i)$ является i-м знаком некоторого (ведь их может быть два) q-ичного разложения числа ξ_n. Функция $\mu^{(2)}$: $\mu(n, i) = \Omega(\varkappa_2^{[2]}(\sigma(n)), i)$ всюду определена и, значит, обще-рекурсивна.

Если $n \in M_0$, то $0 \leqslant \xi_n < \frac{1}{q}$. Тогда $\mu(n, 0) = 0$ и $\mu(n, 1) = 0$. Если $n \in M_1$, то $\frac{1}{q} < \xi_n \leqslant 1$ или $\xi_n = p$. Тогда, в свою очередь, 1) если $\frac{1}{q} < \xi_n < 1$, то $\mu(n, 0) = 0$, $\mu(n, 1) > 0$; 2) если $\xi_n = 1$, то либо $\mu(n, 0) = 0$, $\mu(n, 1) = q - 1$ $\left(\text{имея в виду представление } 1 = 0 + \frac{q-1}{q} + \frac{q-1}{q^2} + \frac{q-1}{q^3} + \ldots\right)$, либо $\mu(n, 0) = 1$, $\mu(n, 1) = 0$ $\left(\text{имея в виду представление } 1 = 1 + \frac{0}{q} + \frac{0}{q^2} + \frac{0}{q^3} + \ldots\right)$; 3) если $\xi_n = p$, то либо $\mu(n, 0) = p - 1$, $\mu(n, 1) = q - 1$ $\left(p = p - 1 + \frac{q-1}{q} + \frac{q-1}{q^2} + \frac{q-1}{q^3} + \ldots\right)$, либо $\mu(n, 0) = p$, $\mu(n, 1) = 0$ $\left(p = p + \frac{0}{q} + \frac{0}{q^2} + \frac{0}{q^3} + \ldots\right)$. Окончательно, если $n \in M_1$, то по крайней мере одно из двух чисел $\mu(n, 0)$, $\mu(n, 1)$ больше 0.

Введем два множества:

$$P_0 = \mathscr{E}\{n \mid \mu(n, 0) = 0 \,\&\, \mu(n, 1) = 0\},$$
$$P_1 = \mathscr{E}\{n \mid \mu(n, 0) > 0 \vee \mu(n, 1) > 0\}.$$

Множества P_0 и P_1 являются, очевидно, непересекающимися обще-рекурсивными множествами, отделяющими множества M_0, M_1. Противоречие с выбором множеств M_0, M_1. Доказательство закончено.

Следствие. *Никакая канторова, дедекиндова или сегментная нумерация вычислимых действительных чисел ни при каком q не сводится ни к какой q-ичной нумерации* *).

---

*) Для сегментной и двоичной нумерации это обстоятельство было замечено еще А. М. Тьюрингом [1937] в следующей форме: «Следующее ложно:

существует правило, согласно которому по данному правилу образования последовательностей a_n, b_n [левых и правых концов вложенных сегментов.— *В. У.*] *мы можем получить* $D. N.$ [номер в некоторой стандартной нумерации.— *В. У.*] *некоторой машины, вычисляющей* [двоичное разложение числа.— *В. У.*] α».

Заключенное в кавычки утверждение А. М. Тьюринга было доказано им (в той же работе [1937]) однако лишь в предположении, что двоичные разложения чисел вида $\frac{m}{2^n}$ всегда оканчиваются нулями.

Доказательство. Действительно, если бы, скажем, какая-нибудь канторова нумерация сводилась к некоторой q-ичной нумерации, то поскольку любая p-ичная нумерация сводится к любой канторовой нумерации (см. замечание после теоремы 9), то любая p-ичная нумерация сводилась бы и к нашей q-ичной нумерации. Но по теореме 10 к данной q-ичной нумерации не может сводиться любая p-ичная нумерация.

Займемся, наконец, вопросом о счетности конструктивного континуума $\mathfrak{K}$ (см. п. 3е).

Как известно, множество M называется *счетным*, если между элементами этого множества и элементами натурального ряда N можно установить взаимно-однозначное соответствие. При таком понимании счетности конструктивный континуум, очевидно, счетен. Однако, в приведенном определении счетности совершенно не обращается внимания на то, как именно можно установить требуемое соответствие. Представляет интерес среди всех счетных множеств выделить «конструктивно счетные», т. е. такие счетные множества, которые можно пересчитать в конструктивном, алгоритмическом смысле.

Для случая множеств натуральных чисел (или, общее,— множеств кортежей натуральных чисел) такими «конструктивно счетными» будут рекурсивно-перечислимые множества.

Мы дадим сейчас определение конструктивной счетности для интересующего нас случая множеств вычислимых действительных чисел.

Подмножество $\mathfrak{M}$ множества $\mathfrak{K}$ вычислимых действительных чисел назовем *конструктивно счетным относительно некоторой нумерации* Γ множества $\mathfrak{K}$, если существует такое рекурсивно-перечислимое множество M натуральных чисел, что каждое число $m \in M$ является номером (относительно Γ) некоторого числа $\alpha \in \mathfrak{M}$ и каждое число $\alpha \in \mathfrak{M}$ имеет среди элементов множества M хотя бы один номер.

Замечание. *Если нумерация* Γ_1 *множества* $\mathfrak{K}$ *сводится к нумерации* Γ_2 *множества* $\mathfrak{K}$ *и множество* $\mathfrak{M}$ *конструктивно счетно относительно нумерации* Γ_1, *то оно конструктивно счетно и относительно нумерации* Γ_2.

Теорема 11. *Какова бы ни была канторова, дедекиндова, сегментная или q-ичная* (при любом q) *нумерация вычислимых действительных чисел, конструктивный континуум $\mathfrak{K}$ не является конструктивно счетным относительно этой нумерации.*

Доказательство. Фиксируем три произвольных исходных объекта: ω, τ, $\varkappa^{[2]}$ — и рассмотрим сначала сегментную нумерацию Γ множества $\mathfrak{K}$, определенную ими.

Докажем сначала, что множество $\mathfrak{K}$ не является конструктивно счетным относительно этой конкретной нумерации Γ. Докажем мы это в следующей форме*). Пусть M — произвольное рекурсивно-перечислимое множество натуральных чисел такое, что любой его элемент является сегментным номером некоторого вычислимого действительного числа, т. е. некоторого элемента из $\mathfrak{K}$. Докажем, что существует вычислимое действительное число, не имеющее сегментного номера в M. Отсюда будет следовать, что конструктивный континуум $\mathfrak{K}$ не является конструктивно счетным относительно Γ.

Пусть $f^{(1)}$ — обще-рекурсивная функция, пересчитывающая множество M (теорема 23 из § 7). Для любого натурального n число $f(n)$ является сегментным номером некоторого $\alpha_n \in \mathfrak{K}$, а пара $\langle \varkappa_1^{[2]}(f(n)),\ \varkappa_2^{[2]}(f(n)) \rangle$ является его сегментным обозначением. Не исключается, что при $n \neq m$ и $f(n) \neq f(m)$ окажется $\alpha_n = \alpha_m$. Обозначим функцию с номером $\varkappa_1^{[2]}(f(n))$ через a_n, функцию с номером $\varkappa_2^{[2]}(f(n))$ — через b_n. Пара $\langle a_n,\ b_n \rangle$ сегментно задает вычислимое действительное число α_n. a_n и b_n — R-частично-рекурсивные функции типа $N \to R$. Определим теперь R-частично-рекурсивные функции c, d типа $N \to R$ так, чтобы пара $\langle c,\ d \rangle$ сегментно задавала некоторое вычислимое действительное число β, не имеющее сегментного номера в M. Определим функции c, d индуктивно.

За $c(0)$ и $d(0)$ возьмем любые числа такие, чтобы сегмент $[c(0),\ d(0)]$ не пересекался с сегментом $[a_0(0),\ b_0(0)]$.

$$[c(0),\ d(0)] \cap [a_0(0),\ b_0(0)] = \Lambda. \tag{19}$$

*) Приводимое ниже доказательство любезно сообщено автору А. А. Марковым.

Пусть числа $c(t)$, $d(t)$ уже определены, сегмент $[c(t), d(t)]$ построен. Определим числа $c(t+1)$, $d(t+1)$. Найдем сначала такое натуральное число z, чтобы имело место

$$[c(t),\ d(t)] \setminus [a_{t+1}(z),\ b_{t+1}(z)] \neq \Lambda, \tag{20}$$

т. е. чтобы сегмент $[c(t), d(t)]$ не входил целиком в сегмент $[a_{t+1}(z), b_{t+1}(z)]$. Так как сегменты $\{[a_{t+1}(n), b_{t+1}(n)]\}$ при фиксированном t и переменном n неограниченно стягиваются, такое z существует. Теперь за $c(t+1)$, $d(t+1)$ возьмем любые числа такие, чтобы выполнялись условия

$$[c(t+1),\ d(t+1)] \subseteq [c(t),\ d(t)] \setminus [a_{t+1}(z),\ b_{t+1}(z)], \tag{21}$$

$$d(t+1) - c(t+1) < \frac{1}{t+1}. \tag{22}$$

Из (20) следует, что такие числа $c(t+1)$, $d(t+1)$ существуют. Из (21), (22) следует, что пара $\langle c, d\rangle$ сегментно задает некоторое действительное число β. Так как функции a_n, b_n при всех n R-частично-рекурсивны, функции c, d вычислимы (в интуитивном смысле), а значит, тоже R-частично-рекурсивны *). Следовательно, β—вычислимое действительное число, $\beta \in \mathfrak{R}$.

Из (19) и (21) следует, что β не имеет сегментного номера в M. Итак, конструктивный континуум $\mathfrak{R}$ не является конструктивно счетным относительно нумерации Г.

Из замечания перед теоремой 11, теорем 8,9 и замечания после теоремы 9 следует, что $\mathfrak{R}$ не является конструктивно счетным ни для какой из рассмотренных нами нумераций. Теорема доказана.

Замечание. То, что множество $\mathfrak{R}$ не является конструктивно счетным относительно произвольной q-ичной нумерации, можно было легко доказать и непосредственно имитацией канторовского диагонального процесса.

Советуем читателю проделать это.

---

*) См. сноску **) на стр. 342.

§ 13. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЙ К ЛОГИКЕ: КОНСТРУКТИВИЗАЦИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Этот параграф посвящен попытке приложить теорию вычислимых функций к тому разделу логики, который занимается определениями. Существуют, как известно, различные типы определений: определения по индукции, определения через родовое понятие и видовое отличие и др. Здесь нас будет интересовать рассмотрение определений с точки зрения их «конструктивности». «Конструктивным» мы условно называем такое определение, в котором тó, что определяется, определяется путем указания некоторой конструкции. Таково, например, определение перечислимого множества: множество перечислимо, если существует вычислимая функция (т. е., в конечном счете, алгоритм), пересчитывающая его элементы. Другой характер носят отрицательные определения, в которых тó, что определяется, определяется путем отрицания некоторого ранее определенного свойства, т. е. объявляется, что определяемые объекты суть просто те и только те, которые не обладают некоторым ранее определенным свойством A. Таково, например, определение неперечислимого множества. Спрашивается, нельзя ли и в этом случае указать некоторую конструкцию. Оказывается, что в ряде случаев среди всех объектов, не обладающих свойством A — «объектов не-A» — удается выделить объекты, не обладающие свойством A в некотором конструктивном смысле — «объекты конструктивно не-A». Именно, объект «конструктивно не-A» — это такой объект, для которого существует алгоритм, отличающий его от любого объекта, обладающего свойством A. В настоящем параграфе эта общая постановка вопроса иллюстрируется на примерах определений неконечного множества (п.1), неперечислимого множества (п.2) и неотделимых множеств (п.3).

Идея «конструктивизации» или «эффективизации» отрицательных определений восходит к статье П. С. Новикова [1939], назвавшего множество в бэровском пространстве эффективно-несчетным, если существует функция некоторой определенной природы (а именно, непрерывная в определенном смысле), отличающая это множество от любого его счетного подмножества. Впоследствии П. С. Новиков предложил аналогичное понятие эффективного отличия от множеств, получаемых данной теоретико-множественной операцией (см. стр. 135 статьи Я. Л. Крейнина [1956]). Брать функцию, осуществляющую требуемое отличие, непрерывной является естественным в рамках дескриптивной теории множеств, рассматривающей множества в метрических пространствах. В применении же к подмножествам пространств N^s, в частности к подмножествам натурального ряда, естественно в качестве «отличающих» функций брать вычислимые функции, что и делается в настоящем параграфе (первая публикация в этом направлении принадлежит, по-видимому, Дж. Деккеру [1955]; см. также диссертацию В. А. Успенского [1955]).

1. КОНСТРУКТИВНАЯ НЕКОНЕЧНОСТЬ

Прежде всего мы хотим предупредить читателя, что в этом параграфе, как и во всех остальных параграфах книги, мы стоим на традиционной «наивной» точке зрения, согласно которой множества бывают либо конечными, либо бесконечными. Понятия «бесконечное» и «неконечное» имеют для нас, следовательно, один и тот же объем и выражают одно и то же свойство множеств. Занимаясь, однако, различными способами определения этого свойства (т. е. способами, посредством которых из всех множеств выделяются множества, обладающие этим свойством), мы будем предпочитать употреблять термин «бесконечное» в тех случаях, когда это свойство определяется позитивно (например: «множество называется бесконечным, если при некотором его упорядочении оно не имеет последнего элемента»), и термин «неконечное» в тех случаях, когда это свойство определяется негативно, простым отрицанием свойства конечности. Впрочем, читатель без ущерба для понимания дальнейшего может отказаться от понимания предшествующей фразы: ведь речь в ней идет всего лишь о предпочтительном употреблении терминов. К тому же слово «бесконечное» с указанным специфическим оттенком значения встретится лишь в конце набранной мелким шрифтом части этого пункта, а сейчас нас будет интересовать именно определение «неконечного» множества.

В каком случае множество называется *конечным*?

В том случае, если оно может быть задано списком своих элементов; следовательно, множество *неконечно*, если оно не может быть задано таким списком. Ограничимся для простоты множествами натуральных чисел. Тогда можно сказать, что множество *конечно*, если оно совпадает с множеством компонент некоторого кортежа, и множество неконечно, если оно отлично от множества компонент любого кортежа. Поскольку различие двух множеств равносильно непустоте их симметрической разности *), мы можем сказать, что множество $M \subseteq N$ тогда и только тогда *неконечно*, когда для всякого $\alpha \in N^\infty$ симметрическая разность $M \triangle [\alpha]$ не пуста**). Итак, в случае неконечного множества M каждому кортежу α ставится в соответствие некоторое непустое множество, а именно $M \triangle [\alpha]$. В силу аксиомы произвольного выбора ***) существует функция φ, ставящая в соответствие каждому кортежу α некоторый элемент множества $M \triangle [\alpha]$.

А теперь сформулируем следующее определение: множество $M \subseteq N$ называется *конструктивно неконечным*, если существует такая всюду определенная вычислимая ****)

---

*) *Симметрической разностью* двух множеств A и B называется множество $A \triangle B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$. Очевидно, $A \triangle B = \Lambda$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

**) Напомним, что на стр. 289 через $[\alpha]$ мы условились обозначать множество элементов кортежа α.

***) Одна из форм этой аксиомы такова: если имеется функция f, определенная на некотором множестве C, значениями которой служат не пустые множества, то существует такая функция φ, определенная на том же C, что для каждого $c \in C$ выполняется включение $\varphi(c) \in f(c)$.

****) Слово «вычислимая» употребляется здесь и в дальнейшем в интуитивном смысле; однако, при желании, оно легко может быть уточнено на основе соображений п. 1 § 11 (если рассмотреть N^∞ как занумерованное множество при нумерации, задаваемой, скажем, примитивно-рекурсивным взаимно-однозначным соответствием между N и N^∞) и Основной гипотезы. Вообще в этом параграфе мы будем широко пользоваться такими интуитивными понятиями, как *вычислимая функция* и *перечислимое множество*. При этом вычислимые функции с натуральными аргументами и значениями и перечислимые множества натуральных чисел будут отождествляться — на основании Основной гипотезы — соответственно с частично-рекурсивными функциями и рекурсивно-перечислимыми множествами.

функция φ типа $N^\infty \to N$, что для всякого $\alpha \in N^\infty$ выполняется включение $\varphi(\alpha) \in M \triangle [\alpha]$.

Понятие конструктивно неконечного множества естественно назвать *конструктивным аналогом* понятия неконечного множества*).

Очевидно, что каждое конструктивно неконечное множество является просто неконечным, или бесконечным. Очевидно также, что конструктивно неконечные множества существуют. Конструктивно неконечным является, например, натуральный ряд; в силу теоремы 1 (см. ниже) любое бесконечное перечислимое множество является конструктивно-неконечным. В п. 2 (примеры 1,3) будут построены примеры конструктивно неконечных множеств, не являющихся перечислимыми.

Следующая теорема дает описание класса конструктивно неконечных множеств в привычных для нас терминах и позволяет обнаружить существование бесконечных множеств, не являющихся конструктивно неконечными.

Теорема 1. *Для того, чтобы множество натуральных чисел было* ***конструктивно неконечным*** *необходимо и достаточно, чтобы оно имело бесконечное перечислимое подмножество* **). Другая формулировка: *для того, чтобы множество натуральных чисел было* ***конструктивно неконечным****, необходимо и достаточно, чтобы оно было бесконечным и не было иммунным.*

---

*) Мы не собираемся определять здесь термин «конструктивный аналог» (да и не очень знаем, как это делать). У читателя может возникнуть интуитивное представление о значении этого термина при знакомстве со следующими случаями его употребления: понятие вычислимой функции — конструктивный аналог понятия функции; понятие перечислимого множества — конструктивный аналог понятия счетного множества; понятие вычислимого действительного числа — конструктивный аналог понятия действительного числа. Дальнейшие примеры конструктивных аналогов см. в статье В. А. Успенского [1957].

**) В силу следствия теоремы 25 из § 7, множество натуральных чисел тогда и только тогда конструктивно неконечно, когда оно имеет бесконечное разрешимое подмножество. Ср. результат П. С. Новикова [1939], гласящий, что множество (в бэровском пространстве) тогда и только тогда эффективно-несчетно, когда оно содержит совершенное подмножество (или, что то же самое, когда оно содержит несчетное B-подмножество).

Следствие. *Для того, чтобы* ***бесконечное*** *множество натуральных чисел было* ***конструктивно неконечным*** *необходимо и достаточно, чтобы оно не было иммунным.*

Это следствие позволяет заключить, что существуют бесконечные множества, не являющиеся конструктивно неконечными, причем такие множества существуют даже среди дополнений к перечислимым (см. пример 3 в п. 3 § 10).

Доказательство теоремы 1. 1) Достаточность. Пусть R — бесконечное перечислимое подмножество множества M и ϱ — пересчитывающая это подмножество однолистная вычислимая всюду определенная функция (такая существует по теореме 28 из § 7). Для каждого кортежа $\alpha \in N^\infty$ обозначим через $\varphi(\alpha)$ первое встречающееся в последовательности

$$\varrho(0),\ \varrho(1),\ \varrho(2),\ \varrho(3),\ \ldots \tag{$*$}$$

число, не являющееся компонентой кортежа α. Поскольку все члены последовательности $(*)$ различны между собой, такое $\varphi(\alpha)$ найдется для любого α. Поскольку все члены последовательности $(*)$ принадлежат множеству M, то и $\varphi(\alpha)$ принадлежит множеству M; в то же время $\varphi(\alpha) \overline{\in} [\alpha]$. Поэтому $\varphi(\alpha) \in M \setminus [\alpha] \subseteq M \triangle [\alpha]$. Поскольку, наконец, φ вычислима (ведь указан алгоритм ее вычисления), множество M конструктивно неконечно.

2) Необходимость. Пусть φ — вычислимая всюду определенная функция типа $N^\infty \to N$ такая, что всегда $\varphi(\alpha) \in M \triangle [\alpha]$. Определим индуктивно вычислимую функцию γ:

$$\begin{cases} \gamma(0) = \varphi(\Lambda), \\ \gamma(i+1) = \varphi(\langle \gamma(0),\ \gamma(1),\ \ldots,\ \gamma(i)\rangle). \end{cases}$$

Все значения функции γ принадлежат множеству M и различны между собой. Действительно: $\gamma(0) \in M \triangle \Lambda = M$ и если $\gamma(0) \in M,\ \gamma(1) \in M,\ \ldots,\ \gamma(i) \in M$, то

$$\gamma(i+1) = \varphi(\langle \gamma(0),\ \gamma(1),\ \ldots,\ \gamma(i)\rangle) \in$$
$$\in M \triangle [\langle \gamma(0),\ \gamma(1),\ \ldots,\ \gamma(i)\rangle] = M \setminus \{\gamma(0),\ \ldots,\ \gamma(i)\}.$$

Множество значений функции γ и есть искомое бесконечное перечислимое подмножество множества M. Доказательство теоремы 1 закончено.

Возможны и другие конструктивные аналоги понятия неконечного множества. Справедлива ведь и такая формулировка: множество M *неконечно*, если оно не исчерпывается никаким списком, т. е. если для любого списка существует элемент из M, не принадлежащий этому списку; другими словами (ограничиваясь по-прежнему множествами натуральных чисел), M неконечно, если для любого кортежа α существует элемент, принадлежащий разности $M \setminus [\alpha]$. Не изменяя объема понятия неконечности, можно ограничиться списками элементов из M, т. е. сказать, что множество M *неконечно*, если для любого кортежа α такого, что $[\alpha] \subseteq M$, существует элемент, принадлежащий разности $M \setminus [\alpha]$. «Конструктивизируя» эти формулировки, приходим к следующим определениям:

(KH_2) множество $M \subseteq N$ называется *конструктивно неконечным*, если существует такая всюду определенная вычислимая функция φ типа $N^\infty \to N$, что для всякого $\alpha \in N^\infty$ выполняется включение $\varphi(\alpha) \in M \setminus [\alpha]$.

(KH_3) множество $M \subseteq N$ называется *конструктивно неконечным*, если существует такая вычислимая функция φ типа $N^\infty \to N$, что для всякого $\alpha \in N^\infty$, для которого $[\alpha] \subseteq M$, функция φ определена и выполняется включение $\varphi(\alpha) \in M \setminus [\alpha]$.

Нетрудно убедиться, что оба эти определения равносильны как друг другу, так и первоначальному определению конструктивной неконечности, которое мы обозначим (KH_1). Действительно. Если множество M удовлетворяет определению (KH_2), то, как непосредственно ясно, оно удовлетворяет и определению (KH_3). Далее, если множество удовлетворяет определению (KH_1), то оно, согласно теореме 1, содержит бесконечное перечислимое подмножество, а прочитав еще раз первую часть доказательства теоремы 1, мы увидим, что если M содержит бесконечное перечислимое подмножество, то оно конструктивно неконечно в смысле определения (KH_2). Наконец, вторая часть доказательства теоремы 1 полностью сохраняется и в том случае, если предполагать конструктивную неконечность в смысле определения (KH_3); поэтому множество, удовлетворяющее определению (KH_3), содержит бесконечное перечислимое подмножество и, следовательно, согласно теореме 1, удовлетворяет определению (KH_1).

Было бы ошибкой, однако, предполагать, что все мыслимые конструктивные аналоги определения неконечного множества эквивалентны между собой. Вернемся к уже рассмотренной нами формулировке: «*M неконечно*, если для любого кортежа α существует элемент, принадлежащий разности $M \setminus [\alpha]$». Следующим образом ослабим эту формулировку (однако ослабим лишь словесно, поскольку новая формулировка будет эквивалентна первоначальной): множество M *неконечно*, если для любого кортежа α существует такой кортеж β, одна из компонент которого принадлежит разности $M \setminus [\alpha]$. Конструктивным аналогом полученной формулировки служит следующее определение, являющееся ослаблением определения (KH_2):

(KH_2') множество $M \subseteq N$ называется *конструктивно неконечным*, если существует такая всюду определенная вычислимая функция φ' типа $N^\infty \to N^\infty$, что для всякого $\alpha \in N^\infty$ пересечение $[\varphi'(\alpha)] \cap (M \setminus [\alpha])$ не пусто.

Мы покажем, что определение (KH_2') уже не равносильно определениям (KH_1), (KH_2), (KH_3).

Множества, удовлетворяющие определению (KH_2'), будем называть *конструктивно неконечными в слабом смысле*, а множества, удовлетворяющие определениям (KH_1), (KH_2), (KH_3) — просто *конструктивно неконечными*.

Каждое конструктивно неконечное множество является и конструктивно неконечным в слабом смысле, так как если M удовлетворяет определению (KH_2), то достаточно положить $\varphi'(\alpha) = \langle \varphi(\alpha) \rangle$, чтобы получить функцию, требуемую в определении (KH_2'). Но не всякое конструктивное неконечное в слабом смысле множество является конструктивно неконечным. Это обстоятельство вытекает из следующей теоремы:

Теорема 2. *Для того, чтобы множество $M \subseteq N$ было* ***конструктивно неконечным в слабом смысле****, необходимо и достаточно, чтобы существовало перечислимое множество попарно непересекающихся кортежей**), *каждый из которых имеет хотя бы одну компоненту, принадлежащую множеству M*. Другая формулировка: *для того, чтобы множество $M \subseteq N$ было* ***конструктивно неконечным в слабом смысле****, необходимо и достаточно, чтобы оно было бесконечным и не было гипериммунным.*

Следствие. *Для того, чтобы* ***бесконечное*** *множество натуральных чисел было* ***конструктивно неконечным в слабом смысле****, необходимо и достаточно, чтобы оно не было гипериммунным.*

---

*) Напомним, что на стр. 289 мы условились называть кортежи непересекающимися, если не пересекаются множества их компонент.

Сочетание вторых формулировок теорем 1 и 2 позволяет заключить, что существуют конструктивно неконечные в слабом смысле множества, не являющиеся конструктивно неконечными, и что, более того, такие множества существуют среди дополнений к перечислимым множествам (см. пример 4 в п. 3 § 10).

Доказательство теоремы 2. 1) Достаточность. Пусть R — перечислимое множество попарно непересекающихся кортежей, каждый из которых имеет хотя бы одну компоненту, принадлежащую множеству M. Пусть ϱ — всюду определенная вычислимая функция типа $N \to N^\infty$, пересчитывающая это множество, т. е. такая определенная на N вычислимая функция, множеством значений которой является R. Для каждого кортежа α обозначим через $\varphi'(\alpha)$ первый встречающийся в последовательности

$$\varrho(0),\ \varrho(1),\ \varrho(2),\ \varrho(3),\ \ldots \tag{$*$}$$

кортеж, не пересекающийся с α. Кортеж $\varphi'(\alpha)$ существует для каждого α (поскольку члены последовательности ($*$) не пересекаются между собой). Функция φ' и есть требуемая определением (KH_2') вычислимая функция.

2) Необходимость. Пусть M конструктивно неконечно в слабом смысле и φ' — вычислимая функция, соответствующая множеству M, согласно определению (KH_2'). Пусть $\varphi'(\alpha) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ и пусть $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ (где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$) суть те и только те компоненты кортежа $\varphi'(\alpha)$, которые не являются компонентами кортежа α. Положим $\varphi''(\alpha) = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\rangle$. Тем самым мы определили всюду определенную вычислимую функцию φ'' типа $N^\infty \to N^\infty$. Легко видеть, что для всякого $\alpha \in N^\infty$ пересечение $[\varphi''(\alpha)] \cap [\alpha]$ пусто, а пересечение $[\varphi''(\alpha)] \cap M$ — в силу (KH_2') — не пусто. Положим теперь

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= \varphi''(\Lambda), \\ \varrho_1 &= \varphi''(\varrho_0), \\ \varrho_{i+1} &= \varphi''(\varrho_0 \times \varrho_1 \times \ldots \times \varrho_i), \end{aligned}$$

где через $\varrho_0 \times \varrho_1 \times \ldots \times \varrho_i$ обозначено геометрическое произведение кортежей $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_i$. В силу свойств функции φ'' имеем:

$$1^\circ\ [\varrho_{i+1}] \cap [\varrho_0 \times \ldots \times \varrho_i] = \Lambda,$$

откуда при любых i, j ($i \neq j$) $[\varrho_i] \cap [\varrho_j] = \Lambda$ и

$$2^\circ \text{ при любом } k\ [\varrho_k] \cap M \neq \Lambda.$$

Множество R всех кортежей ϱ_k перечислимо как множество значений вычислимой функции ϱ:

$$\varrho(k) = \varrho_k.$$

Итак, мы нашли перечислимое множество R попарно непересекающихся кортежей, каждый из которых имеет хотя бы одну компоненту, принадлежащую множеству M. Доказательство теоремы 2 закончено.

Займемся теперь «конструктивизацией» термина «бесконечное».

Рассмотрим следующие три определения бесконечного множества натуральных чисел: множество *бесконечно*, если для любого натурального числа можно указать больший, чем это число, элемент рассматриваемого множества; множество *бесконечно*, если оно не пусто и для любого натурального числа, принадлежащего рассматриваемому множеству, можно указать больший, чем это число, элемент рассматриваемого множества; множество *бесконечно*, если для любого натурального числа можно указать кортеж длины, большей чем это число, состоящий из различных элементов рассматриваемого множества.

Их конструктивными аналогами служат следующие определения:

($КБ_1$) множество $M \subseteq N$ называется *конструктивно бесконечным*, если существует такая всюду определенная вычислимая функция φ типа $N \to N$, что для любого натурального n выполняются включение $\varphi(n) \in M$ и неравенство $\varphi(n) > n$.

($КБ_2$) множество $M \subseteq N$ называется *конструктивно бесконечным*, если оно не пусто и существует такая вычислимая функция φ типа $N \to N$, что для любого натурального n, принадлежащего множеству M, функция φ определена и выполняются включение $\varphi(n) \in M$ и неравенство $\varphi(n) > n$.

($КБ_3$) множество $M \subseteq N$ называется *конструктивно бесконечным*, если существует такая вычислимая всюду определенная функция φ типа $N \to N^{\infty}$, что для любого $m \in N$ кортеж $\varphi(m)$ имеет длину, большую чем m, и состоит из различных элементов множества M.

По аналогии с теоремой 1 легко доказывается следующая

Теорема 3. *Множество $M \subseteq N$ тогда и только тогда* ***конструктивно бесконечно*** (в смысле любого из определений ($КБ_1$), ($КБ_2$), ($КБ_3$)), *когда оно имеет бесконечное перечислимое подмножество.*

Следствие. *Множество натуральных чисел тогда и только тогда* ***конструктивно бесконечно****, когда оно конструктивно неконечно.*

В заключение этого пункта рассмотрим еще одно определение бесконечного множества: множество M *бесконечно*, если для каждого натурального m существует такое m^*, что на сегменте $[0, m^*]$ расположено больше, чем m элементов множества M. Это определение является словесным (но не по существу) ослаблением третьего из рассмотренных ранее определений бесконечного множества. Конструктивным аналогом этого определения является следующее определение:

($КБ'_3$) множество M называется *конструктивно бесконечным*, если существует такая вычислимая всюду определенная функция ψ типа $N \to N$, что для любого натурального m на сегменте $[0, \psi(m)]$ расположено более чем m элементов множества M.

Это определение является ослаблением определения ($КБ_3$), поскольку последнее позволяло по m явно найти более, чем m элементов множества M. Множества, удовлетворяющие определе нию ($КБ_3$), будем называть *конструктивно бесконечными в слабом смысле*, а множества, удовлетворяющие определениям ($КБ_1$), ($КБ_2$), ($КБ_3$), — просто *конструктивно бесконечными*.

Теорема 4. *Для того, чтобы множество M было **конструктивно бесконечным в слабом смысле**, необходимо и достаточно, чтобы оно было бесконечным и его прямой пересчет мажорировался некоторой вычислимой всюду определенной функцией.*

Доказательство этой теоремы весьма просто. Пусть μ — прямой пересчет множества M. Если ψ — мажорирующая функцию μ вычислимая функция, т. е. $\psi(m) \geqslant \mu(m)$ при всяком m, то на сегменте $[0, \psi(m)]$ лежит по крайней мере $m+1$ элемент из M, а именно $\mu(0)$, $\mu(1), \ldots, \mu(m)$. Обратно, если на сегменте $[0, \psi(m)]$ лежит более, чем m элементов из M, то $(m+1)$-й по порядку элемент из M (равный $\mu(m)$) все еще лежит на этом сегменте, т. е. $\mu(m) \leqslant \psi(m)$.

Следствие. *Множество натуральных чисел тогда и только тогда **конструктивно бесконечно в слабом смысле**, когда оно конструктивно неконечно в слабом смысле.*

Для доказательства достаточно, наряду с теоремой 4, применить теорему 2 и теорему 8 из § 10.

2. КОНСТРУКТИВНАЯ НЕПЕРЕЧИСЛИМОСТЬ

В этом пункте мы попытаемся конструктивизировать понятие неперечислимого множества. Как и в предыдущем пункте, мы, во-первых, ограничимся подмножествами натурального ряда и, во-вторых, будем широко пользоваться интуитивными понятиями перечислимого множества и вычислимой функции и Основной гипотезой, отождествляющей их — для случая множеств натуральных чисел и функций с натуральными аргументами и значениями — с понятиями рекурсивно-перечислимого множества и частично-рекурсивной функции.

Что означает, что множество $M \subseteq N$ неперечислимо? Это можно сказать, например, так. Множество $M \subseteq N$ неперечислимо, если оно отлично от любого перечислимого множества, т. е. если для любого перечислимого множества $R \subseteq N$ симметрическая разность $M \triangle R$ не пуста. В силу аксиомы произвольного выбора*) существует функция, ставящая в соответствие каждому перечислимому множеству $R \subseteq N$ некоторый элемент множества $M \triangle R$. Мы не можем положить эту функцию вычислимой (как это мы делали при конструктивизации

*) См. подстрочное примечание ***) на стр. 381.

определения неконечности), поскольку при нашем понимании понятия «множество» не имеет смысла говорить о вычислимых функциях от множеств (так как множества, во всяком случае — бесконечные множества, не являются при нашем понимании конструктивными объектами). Поэтому мы перейдем от самих перечислимых множеств к их номерам в некоторой нумерации системы $\mathbf{P}^{(1)}$.

Пусть τ — натуральная нумерация системы $\mathbf{P}^{(1)}$; множество $M \subseteq N$ называется *конструктивно неперечислимым относительно* τ, если существует такая всюду определенная вычислимая функция φ типа $N \to N$, что для всякого n значение $\varphi(n)$ принадлежит симметрической разности $M \triangle R_n$, где R_n — множество с номером n в нумерации τ *).

Множество $M \subseteq N$ называется *конструктивно неперечислимым* (в абсолютном смысле), если оно конструктивно неперечислимо относительно любой вычислимой нумерации системы $\mathbf{P}^{(1)}$ **).

Следующее важное утверждение значительно облегчает пользование вторым из сформулированных определений:

для того, чтобы множество было ***конструктивно неперечислимым*** (в абсолютном смысле), *необходимо и достаточно, чтобы оно было конструктивно неперечислимым относительно какой-либо главной нумерации системы* $\mathbf{P}^{(1)}$ (стр. 305). Действительно, если M конструк-

---

*) По терминологии Дж. Деккера [1955] такое множество называется *вполне продуктивным*.

**) Определение конструктивно неперечислимого множества тесно связано с принадлежащим Э. Л. Посту [1944] определением творческого множества (творческие множества называют также креативными; у Э. Л. Поста буквально «creative»). Э. Л. Пост, рассматривая некоторую конкретную вычислимую нумерацию системы $\mathbf{P}^{(1)}$, назвал *творческим* всякое перечислимое множество M, для которого существует такая всюду определенная вычислимая функция η типа $N \to N$, что если n — номер перечислимого подмножества $P \subseteq \overline{M}$ (где $\overline{M} = N \setminus M$), то $\eta(n) \in \overline{M} \setminus P$. Очевидно, что перечислимое множество с конструктивно неперечислимым дополнением является творческим (существование таких перечислимых множеств обнаруживается в примере 2). Из результатов Дж. Майхилла об изоморфизме творческих множеств (см. теорему 19 его статьи [1955]) вытекает, что всякое творческое множество имеет конструктивно неперечислимое дополнение.

тивно неперечислимо в абсолютном смысле, то оно конструктивно неперечислимо относительно любой вычислимой, в том числе любой главной, нумерации. Пусть теперь τ — произвольная главная и α — произвольная вычислимая нумерации системы $\mathbf{P}^{(1)}$ и η — вычислимая функция, сводящая α к τ. Если M конструктивно неперечислимо относительно τ, причем функция φ_1 дает по номеру n множества R в нумерации τ число $\varphi_1(n) \in M \triangle R$, то, полагая $\varphi_2(n) = \varphi_1(\eta(n))$, получим, что $\varphi_2(n) \in M \triangle R$, коль скоро n — номер множества R в нумерации α; отсюда M конструктивно неперечислимо относительно α.

Понятие конструктивно неперечислимого множества является конструктивным аналогом понятия неперечислимого множества *). Очевидно, что каждое конструктивно неперечислимое множество является неперечислимым в обычном смысле. Покажем, что конструктивно неперечислимые множества существуют.

Пример 1. *Пример конструктивно неперечислимого множества* **).

Пусть τ — произвольная главная нумерация системы $\mathbf{P}^{(1)}$, а $A^{(2)}$ — ее универсальное множество. Таким образом, $A^{(2)}$ — плоское неперечислимое множество, универсальное для линейных перечислимых множеств. Пусть $B = \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \mid x = y\}$ — «диагональ», $C = A^{(2)} \cap B$, $D = \text{пр}_2 C$ и $\overline{D} = N \setminus D$. Из теоремы 7 из § 9 следует, что $\overline{D}$ неперечислимо. Докажем, что $\overline{D}$ конструктивно неперечислимо относительно τ. Для произвольного $n \in N$ линейное перечислимое множество с номером n относительно τ обозначим через R_n. Покажем, что $I_1^{(1)}(n) = n \in R_n \triangle \overline{D}$ для любого натурального n. В самом деле. Пусть $n \in R_n$. Так как $R_n = \text{пр}_2[(\{\langle n\rangle\} \times N) \cap A^{(2)}]$, то $\langle n, n\rangle \in A^{(2)}$. Тогда $n \in D$ и, следовательно, $n \in R_n \setminus \overline{D}$. Пусть $n \overline{\in} R_n$. Тогда $n \overline{\in} D$ и, значит, $n \in \overline{D} \setminus R_n$. Итак, в данном случае для доказательства конструктивной неперечислимости множества $\overline{D}$ годится просто функция $I_1^{(1)}$.

---

*) См. сноску *) на стр. 382.

**) В силу следствия из теоремы 5 (см. ниже) этот же пример является примером конструктивно неконечного множества, не являющегося перечислимым.

Пример 2. *Пример перечислимого множества с конструктивно неперечислимым дополнением.*

Пусть $A^{(2)}$ — универсальное множество какой-нибудь главной нумерации системы $\mathbf{P}^{(1)}$. Тогда множество $D = \text{пр}_2 [A^{(2)} \cap \mathscr{E} \{\langle x, y\rangle \mid x = y\}]$, являющееся перечислимым в силу теоремы 2 из § 5, теоремы 4 из § 5 и теоремы 3 из § 5, имеет конструктивно неперечислимое дополнение $\overline{D}$ (пример 1).

Следующая теорема позволит обнаружить существование неперечислимых множеств, не являющихся конструктивно неперечислимыми.

Теорема 5. *Если M — конструктивно неперечислимое множество и P — его перечислимое подмножество, то разность $M \setminus P$ имеет бесконечное перечислимое подмножество**). Другая формулировка: *разность между конструктивно неперечислимым множеством и любым его перечислимым подмножеством бесконечна, но не иммунна.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 5, заметим, что в силу этой теоремы любое иммунное множество не является конструктивно неперечислимым (ибо разность между самим этим множеством и его пустым подмножеством бесконечна, но иммунна). Поскольку иммунные множества существуют (пример 3 в п. 3 § 10) и неперечислимы, то, стало быть, существуют неперечислимые множества, не являющиеся конструктивно неперечислимыми (причем — см. упомянутый пример 3 — такие множества существуют среди дополнений к перечислимым).

Доказательство теоремы 5. Фиксируем произвольную главную нумерацию системы $\mathbf{P}^{(1)}$. Пусть p — один из номеров множества P; пусть ψ — вычислимая функция, дающая по номеру множества $R \in \mathbf{P}^{(1)}$ элемент симметрической разности $M \triangle R$; пусть $\sigma^{(2)}$ — вычислимая функция, дающая по номерам множеств R_1, R_2 из $\mathbf{P}^{(1)}$

---

*) Заметим, что обратное утверждение неверно: существует множество M, не являющееся конструктивно неперечислимым и такое, что для любого его перечислимого подмножества P разность $M \setminus P$ содержит бесконечное перечислимое подмножество (легко показать, что в качестве M может быть взято любое множество, отнесенное в § 5 статьи В. А. Успенского [1957а] к классу (ββββ)).

номер множества $R_1 \cup R_2$ (такая функция существует по теореме 18 из § 11); пусть, наконец, φ — вычислимая функция, дающая по x номер одноэлементного множества $\{x\}$ (такая функция существует по следствию 2 теоремы 7 из § 11). Введем последовательно всюду определенные вычислимые функции α и β типа $N \to N$:

$$\begin{cases} \alpha(0) = p, & (1) \\ \alpha(i+1) = \sigma(\alpha(i), \varphi(\psi(\alpha(i)))), & (2) \end{cases}$$

$$\beta(i) = \psi(\alpha(i)). \tag{3}$$

Множество значений функции β перечислимо, как множество значений вычислимой функции. Теорема будет доказана, если мы обнаружим, что все значения функции β различны между собой и принадлежат разности $M \setminus P$. Итак, докажем, что при любом i все числа $\beta(0), \beta(1), \beta(2), \ldots, \beta(i)$ различны между собой и принадлежат разности $M \setminus P$. С этой целью положим

$$\begin{cases} P_0 = P, \\ P_{i+1} = P_i \cup \{\beta(i)\}, \end{cases} \tag{4}$$

и докажем индукцией по числу i следующее более сильное утверждение:

При любом i 1) все числа $\beta(0), \beta(1), \ldots, \beta(i)$ различны между собой и принадлежат разности $M \setminus P$; 2) число $\alpha(i+1)$ является номером множества P_{i+1}.

Базис индукции. Пусть $i = 0$. Тогда, так как p есть номер множества P, то $\beta(0) = \psi(p) \in M \triangle P = M \setminus P$. Далее, в силу равенств (2), (1) и (3), $\alpha(1) = \sigma(p, \varphi(\beta(0)))$, т. е. — по определению функции σ — число $\alpha(1)$ есть номер множества $P \cup \{\beta(0)\} = P_1$.

Шаг индукции. Предположим, что доказываемое утверждение верно при $i = k$. Тогда, в силу свойств функции ψ и второй части индуктивного предположения,

$$\beta(k+1) = \psi(\alpha(k+1)) \in M \triangle P_{k+1}.$$

В силу (4) и первой части индуктивного предположения $P \subseteq P_{k+1} \subseteq M$; поэтому

$$M \triangle P_{k+1} = M \setminus P_{k+1} \subseteq M \setminus P.$$

Следовательно, $\beta(k+1)$ отлично от всех чисел $\beta(0)$, $\beta(1), \ldots, \beta(k)$ и принадлежит разности $M \setminus P$; значит, все числа $\beta(0), \beta(1), \ldots, \beta(k), \beta(k+1)$ различны между собой и принадлежат разности $M \setminus P$. Далее, в силу (2) и (3),

$$\alpha(k+2) = \sigma(\alpha(k+1), \varphi(\beta(k+1))).$$

Отсюда, в силу второй части индуктивного предположения и свойств функции σ, число $\alpha(k+2)$ есть номер множества $P_{k+1} \bigcup \{\beta(k+1)\} = P_{k+2}$.

Теорема 5 доказана.

Следствие. *Каждое конструктивно неперечислимое множество является конструктивно неконечным**) (этот факт является конструктивным аналогом того факта, что каждое неперечислимое множество является неконечным).

Доказательство. Полагаем в формулировке теоремы 5 $P = \Lambda$ и применяем теорему 1.

Утверждение, обратное к утверждению только что сформулированного следствия теоремы 5, неверно. Действительно, бесконечное перечислимое множество является примером конструктивно неконечного (в силу теоремы 1) множества, не являющегося конструктивно неперечислимым. Существуют, однако, и неперечислимые конструктивно неконечные множества, не являющиеся конструктивно неперечислимыми, как показывает

Пример 3. *Пример неперечислимого конструктивно неконечного множества, не являющегося конструктивно неперечислимым***).

Возьмем какое-либо простое множество S (§ 10, п. 3, пример 2) и пересчитывающую его вычислимую всюду определенную функцию σ типа $N \to N$. Положим

$$\sigma''(n) = 2 \cdot \sigma(n).$$

Обозначим через S'' множество значений функции σ''. Очевидно, $S'' \subseteq N''$, где N'' — множество всех четных

---

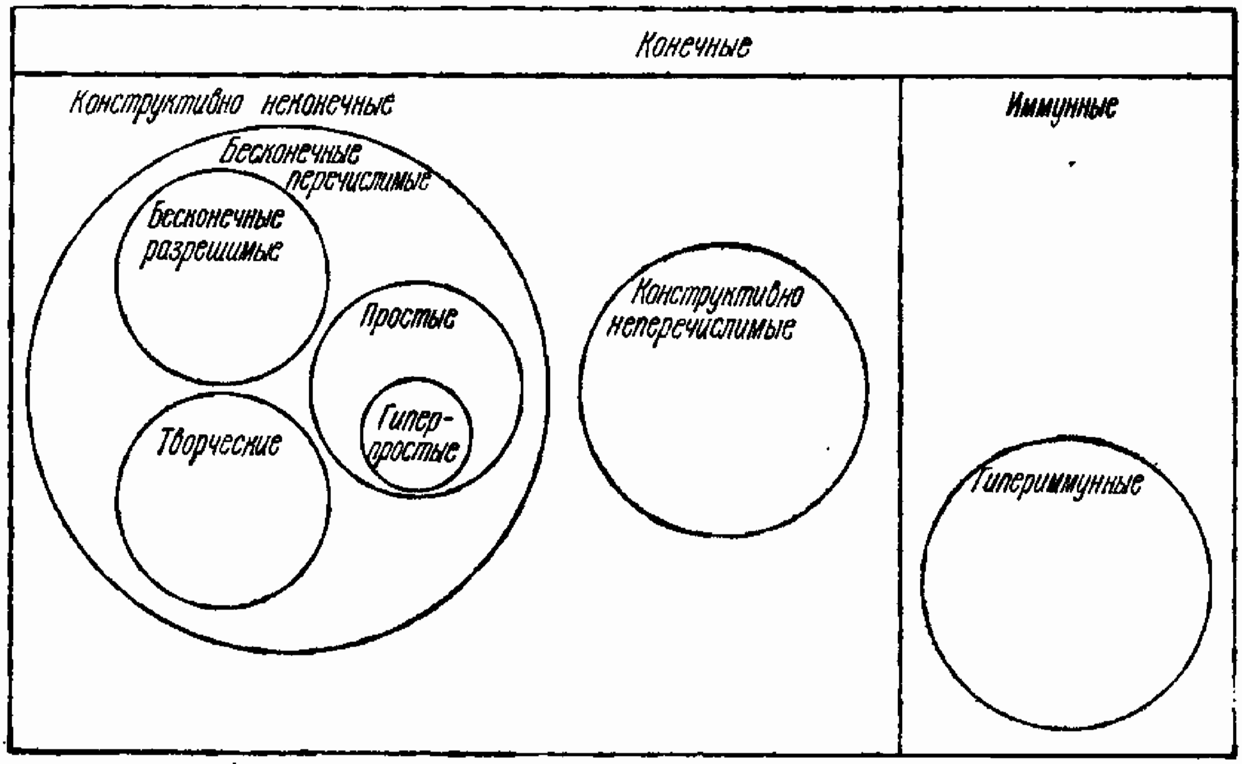
*) Ср. теорему IV а) из статьи Я. Л. Крейнина [1956], гласящую, что если СА-множество эффективно отлично от всех Λ-множеств, то оно эффективно-несчетно.

**) Приводимое ниже построение принадлежит Дж. Деккеру [1953].

натуральных чисел. Положим $M = N' \cup (N'' \setminus S'')$, где N' — множество всех нечетных натуральных чисел, и докажем, что M — неперечислимое конструктивно бесконечное множество, не являющееся конструктивно неперечислимым. Действительно, M содержит бесконечное перечислимое подмножество N', поэтому, по теореме 1, M конструктивно неконечно. В то же время разность $M \setminus N'$ иммунна (в самом деле, $M \setminus N' = N'' \setminus S''$, а $N'' \setminus S''$ получается из иммунного множества $N \setminus S$ удвоением его элементов); поэтому, по теореме 5, M не является конструктивно неперечислимым. И, наконец, M неперечислимо, так как иначе, как легко видеть, было бы перечислимым иммунное множество $N'' \setminus S''$.

Замечание. Множество M, построенное в примере 3, является дополнением к перечислимому множеству (а именно, к множеству S''); поэтому неперечислимые конструктивно неконечные множества, не являющиеся конструктивно неперечислимыми, существуют даже среди дополнений к перечислимым.

Таблица 1



В заключение настоящего пункта мы приведем схему (табл. 1), иллюстрирующую установленное нами взаимоотношение между классами множеств натуральных чисел, рассмотренными в этом параграфе (пп. 1, 2) и в п. 3 § 10.

3. КОНСТРУКТИВНАЯ НЕОТДЕЛИМОСТЬ

В этом пункте нас будет занимать вопрос о конструктивизации определения множеств, не отделяющихся никакими обще-рекурсивными множествами. В дальнейшем для краткости такие множества будем называть просто *неотделимыми*, а множества, отделяющиеся какими-нибудь обще-рекурсивными множествами, — просто *отделимыми*. Заметим, что если множества M_1 и M_2 отделимы и отделяются обще-рекурсивными множествами H_1 и H_2, то они отделяются и взаимно-дополнительными рекурсивно-перечислимыми множествами H_1 и $\overline{H_1}$; обратно, если M_1 и M_2 отделяются взаимно-дополнительными рекурсивно-перечислимыми множествами K_1 и K_2, то, поскольку в этом случае K_1 и K_2 обще-рекурсивны, M_1 и M_2 отделимы. Поэтому определение отделимых множеств можно высказать и в такой форме: множества M_1 и M_2 называются *отделимыми*, если существуют взаимно-дополнительные рекурсивно-перечислимые множества K_1 и K_2, отделяющие множества M_1 и M_2; множества M_1 и M_2 называются, следовательно, *неотделимыми*, если таких множеств K_1 и K_2 не существует.

В дальнейшем мы, продолжая придерживаться принятого в этом параграфе стиля интуитивных рассмотрений, будем вместо «рекурсивно-перечислимое» писать просто «перечислимое» и вместо «частично-рекурсивная» — писать «вычислимая». При этом мы по-прежнему ограничиваемся множествами натуральных чисел.

Резольвентой множеств K_1, K_2 относительно множеств M_1, M_2 назовем множество

$$\boldsymbol{R}[K_1, K_2/M_1, M_2] = \\ = (K_1 \cap K_2) \cap \overline{(K_1 \cup K_2)} \cup (M_1 \setminus K_1) \cup (M_2 \setminus K_2).$$

Заметим, что резольвента $\boldsymbol{R}[K_1, K_2/M_1, M_2]$ пуста тогда и только тогда, когда K_1 и K_2 суть взаимно-дополнительные множества, отделяющие множества M_1 и M_2. Поэтому естественно следующим образом «конструктивизировать» определение неотделимых множеств (сразу переходя от перечислимых множеств к их номерам в некоторой нумерации системы $\mathbf{P}^{(1)}$).

Пусть τ — натуральная нумерация системы $\mathbf{P}^{(1)}$; множества $M_1 \subseteq N$ и $M_2 \subseteq N$ называются *конструктивно неотделимыми относительно* τ, если существует такая всюду определенная вычислимая функция ψ типа $N^2 \to N$, что для всяких n_1, n_2 значение $\psi(n_1, n_2)$ принадлежит резольвенте $\boldsymbol{R}[K_1, K_2/M_1, M_2]$, где K_i — множество с номером n_i в нумерации τ $(i = 1, 2)$.

Множества $M_1 \subseteq N$ и $M_2 \subseteq N$ называются *конструктивно неотделимыми* (в абсолютном смысле), если они конструктивно неотделимы относительно любой вычислимой нумерации системы $\mathbf{P}^{(1)}$ *).

По аналогии с тем, как это было сделано для определения конструктивной неперечислимости (п. 2, стр. 389—390), легко доказывается следующее важное утверждение:

для того, чтобы множества были ***конструктивно неотделимыми*** (в абсолютном смысле), *необходимо и достаточно, чтобы они были конструктивно неотделимы относительно какой-либо главной нумерации системы* $\mathbf{P}^{(1)}$.

Очевидно, что конструктивно неотделимые множества и просто неотделимы.

Замечание. *Если множества M_1 и M_2 конструктивно неотделимы и $M_1' \supseteq M_1$, $M_2' \supseteq M_2$, то M_1' и M_2' также конструктивно неотделимы.* Написанное

---

*) Это определение представляет собой модификацию сформулированного в заметке В. А. Успенского [1953] определения эффективной неотделимости. В указанной заметке автор, имея в виду некоторую конкретную вычислимую нумерацию системы $\mathbf{P}^{(1)}$, назвал множества M_1 и M_2 эффективно-неотделимыми в случае существования такой вычислимой функции ψ, что для любых рекурсивно-перечислимых множеств K_1, K_2, отделяющих множества M_1, M_2 и имеющих номера n_1, n_2, значение $\psi(n_1, n_2)$ определено и принадлежит множеству $\overline{K_1 \cup K_2}$. Конструктивно неотделимые множества являются и эффективно-неотделимыми, поскольку если K_1, K_2 отделяют множества M_1, M_2, то $\boldsymbol{R}[K_1, K_2/M_1, M_2] = \overline{K_1 \cup K_2}$. Из результатов А. А. Мучника об изоморфизме пар эффективно-неотделимых множеств (см. следствие теоремы 2 в его статье [1958]) вытекает, что для случая рекурсивно-перечислимых M_1, M_2 верно и обратное: если M_1 и M_2 эффективно-неотделимы, то они и конструктивно неотделимы.

утверждение следует из того, что в этом случае

$$\boldsymbol{R}[K_1, K_2/M_1, M_2] \subseteq \boldsymbol{R}[K_1, K_2/M_1', M_2'].$$

Доказано*), что существуют неотделимые перечислимые множества, не являющиеся конструктивно неотделимыми. Существование непересекающихся конструктивно неотделимых множеств мы получим как следствие Основной леммы, к которой мы сейчас переходим.

Пусть c — натуральное число; прямую $\{\langle c\rangle\} \times N$ будем обозначать для краткости Y_c. *Номером упорядоченной пары линейных множеств* K_1, K_2 *относительно упорядоченной пары плоских множеств* E_1, E_2 назовем такое число c, для которого

$$K_1 = \text{пр}_2(E_1 \cap Y_c); \qquad K_2 = \text{пр}_2(E_2 \cap Y_c).$$

Для любых плоских множеств E_1, E_2 через $\boldsymbol{D}(E_1, E_2)$ мы будем обозначать множество

$$\boldsymbol{D}[E_1, E_2] = \text{пр}_2(E_1 \cap d) \setminus \text{пр}_2(E_2 \cap d),$$

где

$$d = \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \mid x = y\}.$$

Основная лемма. *Если c — номер пары линейных множеств K_1, K_2 относительно пары плоских множеств E_1, E_2, то*

$$c \in \boldsymbol{R}[K_1, K_2/\boldsymbol{D}[E_2, E_1], \boldsymbol{D}[E_1, E_2]].$$

Доказательство. Имеются следующие четыре возможности:

$$1)\ c \in K_1 \cap K_2; \qquad 2)\ c \in K_1 \setminus K_2;$$
$$3)\ c \in K_2 \setminus K_1; \qquad 4)\ c \in \overline{K_1 \cup K_2}.$$

Если имеет место случай 1) или случай 4), то заключение леммы выполняется. Случаи 2) и 3) разбираются совершенно одинаково. Рассмотрим случай 2). Так как $c \in K_1$, то

$$c \in \text{пр}_2(E_1 \cap Y_c); \qquad \langle c, c\rangle \in E_1; \qquad c \in \text{пр}_2(E_1 \cap d).$$

*) А. А. Мучник [1956].

Так как $c \bar{\in} K_2$, то

$$c \bar{\in} \text{пр}_2 (E_2 \cap Y_c); \qquad \langle c, c \rangle \bar{\in} E_2; \qquad c \bar{\in} \text{пр}_2 (E_2 \cap d).$$

Итак, $c \in \text{пр}_2 (E_1 \cap d)$; $c \bar{\in} \text{пр}_2 (E_2 \cap d)$; $c \bar{\in} K_2$. Поэтому

$$c \in [\text{пр}_2 (E_1 \cap d) \setminus \text{пр}_2 (E_2 \cap d)] \setminus K_2 =$$
$$= \boldsymbol{D}[E_1, E_2] \setminus K_2 \subseteq \boldsymbol{R}[K_1, K_2 / \boldsymbol{D}[E_2, E_1], \boldsymbol{D}[E_1, E_2]].$$

Теорема 6. *Существуют два непересекающихся конструктивно неотделимых перечислимых множества.*

Доказательство. Фиксируем какую-либо главную нумерацию τ системы $\mathbf{P}^{(1)}$ и универсальное множество E этой нумерации. Применим к E построение, указанное во втором доказательстве теоремы 9 из § 9. Получим пару перечислимых множеств E_1 и E_2, дважды универсальную для класса линейных перечислимых множеств. Если K_1 и K_2 суть линейные перечислимые множества с номерами n_1 и n_2 (относительно τ), то, как вытекает из указанного доказательства теоремы 9 из § 9, номером пары K_1, K_2 относительно пары E_1, E_2 служит число $\varkappa_0(n_1, n_2)$, где $\varkappa_0$ — вычислимая всюду определенная функция. Поэтому, согласно Основной лемме,

$$\varkappa_0 (n_1, n_2) \in \boldsymbol{R}[K_1, K_2 / \boldsymbol{D}[E_2, E_1], \boldsymbol{D}[E_1, E_2]].$$

Итак, множества

$$\boldsymbol{D}[E_2, E_1] \quad \text{и} \quad \boldsymbol{D}[E_1, E_2]$$

конструктивно неотделимы. Но эти множества являются разностями перечислимых множеств $\text{пр}_2 (E_2 \cap d)$ и $\text{пр}_2 (E_1 \cap d)$ и потому, согласно теореме 5 из § 10, могут быть отделены некоторыми перечислимыми множествами H_1 и H_2. В силу замечания на стр. 396 множества H_1 и H_2 конструктивно неотделимы. Множества H_1, H_2 — искомые.

Замечание. Основная лемма позволяет дать новое доказательство того, что множества, построенные в примерах 1 из п. 2 и 2 из п. 2, обладают требуемыми (в заглавиях этих примеров) свойствами. Приведем это новое доказательство. Фиксируем произвольную главную нумерацию τ системы $\mathbf{P}^{(1)}$; пусть $A = A^{(2)}$ — универсальное множество этой нумерации и $\bar{A} = N^2 \setminus A$. Положим

$$D_1 = \boldsymbol{D}[A, \bar{A}], \quad D_2 = \boldsymbol{D}[\bar{A}, A].$$

Легко видеть, что множества D_1 и D_2 взаимно-дополнительны (так как множества $\text{пр}_2(A \cap d)$ и $\text{пр}_2(\bar{A} \cap d)$ взаимно-дополнительны), причем D_1 перечислимо (ибо $D_1 = \text{пр}_2(A \cap d)$). Покажем, что D_2 конструктивно неперечислимо относительно τ. Пусть c — номер перечислимого множества K в нумерации τ. Тогда c есть номер пары $K, \bar{K}$ относительно пары A, $\bar{A}$. По Основной лемме

$$c \in \boldsymbol{R}[K, \bar{K}/D_2, D_1] = \boldsymbol{R}[K, \bar{K}/D_2, \bar{D}_2] =$$
$$= (K \cap \bar{K}) \cup \overline{(K \cup \bar{K})} \cup (D_2 \setminus K) \cup (\bar{D}_2 \setminus \bar{K}) =$$
$$= (D_2 \setminus K) \cup (\bar{D}_2 \setminus \bar{K}) = (D_2 \setminus K) \cup (K \setminus D_2) = D_2 \triangle K.$$

Поэтому достаточно положить $\varphi(x) = I_1^{(1)}(x) = x$, чтобы получить требуемую в определении конструктивной неперечислимости функцию φ. Остается заметить, что множества D_1 и D_2 совпадают соответственно с множествами D и $\bar{D}$, построенными в примерах 1 из п. 2 и 2 из п. 2.

Следующие три теоремы связывают понятие конструктивной неотделимости с понятием конструктивной неперечислимости.

Теорема 7. *Если множество конструктивно неперечислимо, то оно и его дополнение конструктивно неотделимы.*

Доказательство вытекает из того, что для любых K_1, K_2 имеет место включение

$$M \triangle K_1 \subseteq \boldsymbol{R}[K_1, K_2/M, \bar{M}].$$

Теорема 8. *Если два взаимно-дополнительных множества конструктивно неотделимы и одно из этих множеств перечислимо, то другое конструктивно неперечислимо.*

Доказательство. Пусть M перечислимо, M и $\bar{M}$ конструктивно неотделимы. Фиксируем произвольную главную нумерацию τ системы $\mathrm{P}^{(1)}$. Пусть ψ — функция, фигурирующая в определении конструктивной неотделимости (применительно к τ). Докажем, что $\bar{M}$ конструктивно неперечислимо. Пусть m — номер множества M в нумерации τ. Тогда, если n — номер перечислимого множества R в нумерации τ, то

$$\psi(m, n) \in \boldsymbol{R}[M, R/M, \bar{M}].$$

Положим для любого n

$$\varphi(n) = \psi(m, n).$$

Как показывает несложная выкладка,

$$\boldsymbol{R}\,[M,\ R/M,\ \overline{M}]=\overline{M}\triangle R.$$

Следовательно, функция φ — искомая и $\overline{M}$ конструктивно неперечислимо.

Теорема 9. *Если два непересекающихся перечислимых множества конструктивно неотделимы, то дополнение к каждому из них конструктивно неперечислимо.*

Доказательство. Пусть перечислимые множества M_1 и M_2 не пересекаются и конструктивно неотделимы. Покажем, например, что $\overline{M}_1$ конструктивно неперечислимо. В самом деле: $\overline{M}_1 \supseteq M_2$; поэтому множества M_1, $\overline{M}_1$ конструктивно неотделимы в силу замечания на стр. 396; поскольку M_1 перечислимо, то $\overline{M}_1$ конструктивно неперечислимо в силу теоремы 8.

Замечание. Пользуясь теоремой 9, существование перечислимого множества с конструктивно неперечислимым дополнением (установленное в примере 2 в п. 2) можно было бы вывести из существования непересекающихся конструктивно неотделимых перечислимых множеств, установленного теоремой 6.

§ 14. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЙ К ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ: ВОЗМОЖНОСТИ АБСТРАКТНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

Вычислительная машина выдает свои результаты в том или ином материальном виде; можно считать, что эти результаты печатаются на бумажной ленте в виде некоторой последовательности символов. Не будем ограничивать работу машины в пространстве и времени; предположим, именно, что лента бесконечна в одну сторону (имеет начало, но не имеет конца) и что машина может работать сколь угодно долго или даже вовсе не прекращать работу. Как охарактеризовать класс последовательностей, которые могут быть напечатаны на выходных лентах машин при указанных идеализирующих допущениях? Ответ на этот вопрос дают: для машин без «внешней памяти» — теоремы 1 и 2 (п.1); для машин с «внешней памятью» (которая тоже предполагается неограниченной) — теоремы 3 и 4 (формулируются в п.2, доказываются в п.5). В п.3 вводятся в рассмотрение так называемые многоленточные машины. В п.4 устанавливается (теоремы 6, 7, 10), что класс частично-рекурсивных функций совпадает с классом функций, вычислимых на рассматриваемых абстрактных машинах, — еще одно подтверждение Основной гипотезы.

1. МАШИНЫ ТИПА I

Машина типа I имеет *внутреннюю память* и *выходную ленту* (рис. 28). Внутренняя память (A на рис. 28) есть устройство, которое в каждый момент находится в одном из конечного числа возможных состояний

$a_1, a_2, \dots, a_\alpha$. Состояния внутренней памяти мы будем называть *внутренними состояниями* машины. Для машин типа I состояние машины полностью определяется ее внутренним состоянием. Поэтому (в п. 1!) мы слово «внутреннее» будем часто опускать.

Работа машины состоит в переходе от одного состояния к другому. Машина работает «шагами». За один

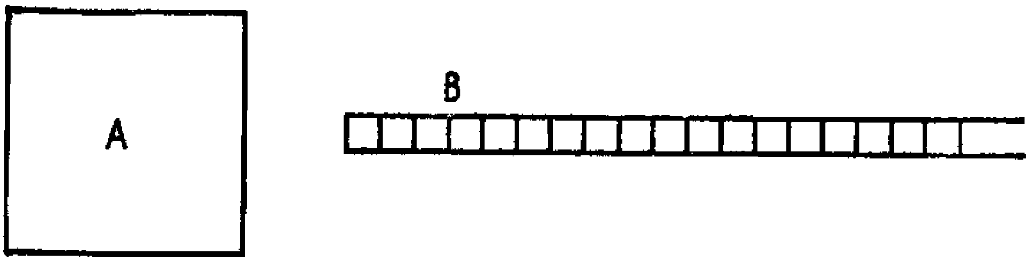


Рис. 28.

шаг машина переходит из одного состояния в следующее. Работа машины определяется *управляющей таблицей* следующего вида:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a_1 & a_2 & \dots & a_d & \dots & a_\alpha \\ \hline & & & a_{i_d} & & \end{array} \qquad \text{(1a)}$$

Эта таблица указывает для некоторых состояний машины (верхняя строка) то состояние, в котором машина окажется на следующем такте *). Для остальных состояний таблица не указывает следующего состояния; это значит, что, придя в данное состояние, машина прекращает работу. Для того, чтобы машину «пустить в ход», необходимо задать некоторое *начальное состояние*. Начав работу с этого состояния, машина либо в конце концов остановится, либо будет продолжать работу бесконечно. Это зависит от устройства управляющей таблицы. Если нижняя строка в таблице заполнена целиком, так что для каждого состояния машины указано следующее, то машина будет работать бесконечно, вновь и вновь проходя некоторый цикл состояний.

---

*) Здесь и в дальнейшем *такт* — промежуток между двумя последовательными шагами.

Пример 1. Машина с тремя состояниями a_1, a_2, a_3 и с управляющей таблицей

$$\begin{array}{c|c|c} a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_3 & a_1 & a_2 \end{array},$$

начав с состояния a_2, будет работать бесконечно, повторно проходя цикл состояний a_2, a_1, a_3, a_2, a_1, a_3, a_2, a_1, a_3, ...

Этот цикл может состоять и из одного состояния. Так бывает в тех случаях, когда в таблице какому-то состоянию машины соотносится это же самое состояние.

Пример 2. Машина с тремя состояниями a_1, a_2, a_3 и с управляющей таблицей

$$\begin{array}{c|c|c} a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_2 & a_2 & a_1 \end{array},$$

начав работу с состояния a_1, будет проходить последовательность состояний a_1, a_2, a_2, a_2, ...

Если же таблица устроена так, что некоторым состояниям в верхней строке не соответствует никакого состояния в нижней строке, и если машина в ходе работы придет в одно из таких «безвыходных» состояний (будем называть такие состояния *заключительными*), то она остановится, поскольку следующее состояние для нее не определено. В этом случае мы будем говорить, что машина окончила работу. Очевидно, что машина, имеющая α состояний, либо работает бесконечно, либо оканчивает работу не позже, чем через $(\alpha-1)$ шагов.

Последовательность смены состояний машины может задаваться и не таблично, а в виде списка команд вида

$$a_i \Rightarrow a_j.$$

Команда $a_i \Rightarrow a_j$ означает, что из состояния a_i машина переходит в состояние a_j. Очевидно, что в каждом списке команд все левые части должны быть различны. Если для некоторого i в списке команд нет ни одной команды вида

$$a_i \Rightarrow a_j,$$

то состояние a_i является заключительным.

Результаты работы машины фиксируются на *выходной ленте* (В на рис. 28). Выходную ленту, или ленту для печати, мы будем предполагать бесконечно продолженной в одну сторону (имеющей начало, но не имеющей конца) и разделенной на клетки. В каждой из клеток может быть напечатан один символ из конечного списка символов $e_1, e_2, \ldots, e_\beta$, называемого *алфавитом печати* или выходным алфавитом. На каждом такте машина печатает на выходной ленте какой-то символ e_j или, возможно, не печатает ничего в зависимости от состояния, в котором машина находится на данном такте. Эта зависимость определяется *таблицей печати*:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a_1 & a_2 & \ldots & a_d & \ldots & a_\alpha \\ \hline & & & e_{j_d} & & \end{array} \qquad \text{(Ie)}$$

Таблица (Ie) указывает для некоторых состояний машины (верхняя строка) тот символ, который печатается, когда машина приходит в данное состояние. Придя в любое из тех состояний, которым таблица не относит никакого символа e_j, машина ничего не печатает. Начав работу, машина, попадая в те внутренние состояния, которым таблица печати относит какой-нибудь символ, печатает эти символы последовательно, без пропусков, слева направо, начиная с крайней левой клетки выходной ленты. Таким образом, на выходной ленте печатается некоторая (быть может, пустая) последовательность *) символов алфавита печати.

Назовем машину типа I *постоянно-печатающей*, если ее таблица печати каждому внутреннему состоянию ставит в соответствие печатаемый символ.

Замечание. Очевидно, что каждой не постоянно-печатающей машине с алфавитом печати из β символов

---

*) Вступая в некоторое расхождение с каноническим употреблением термина «последовательность», мы будем обозначать этим словом как кортежи, так и последовательности в обычном смысле (таким образом, согласно нашей терминологии, можно говорить о конечных последовательностях и бесконечных последовательностях). Тем самым мы получили единообразное наименование для всего того, что может быть напечатано на выходной ленте.

можно поставить в соответствие постоянно-печатающую машину с алфавитом печати из $(\beta+1)$ символов, добавив к алфавиту печати первой машины еще один символ и заполнив им пустые места в ее таблице печати. Тогда всякой последовательности символов, напечатанной на выходной ленте исходной машины, будет соответствовать последовательность символов, напечатанная на выходной ленте полученной описанным образом постоянно-печатающей машины. Очевидно, что первую последовательность можно получить из второй, если выбросить из последней добавленный нами символ и сдвинуть влево оставшиеся символы.

Пример 3. Рассмотрим машину типа I с состояниями a_1, a_2, a_3, a_4, с управляющей таблицей

a_1	a_2	a_3	a_4
a_2	a_3	a_4	a_1

,

с алфавитом печати $\{e_1, e_2, e_3\}$ и с таблицей печати

a_1	a_2	a_3	a_4
e_2	e_3	e_1	

.

Пусть машина начинает работу с состояния a_2. Она будет проходить последовательность состояний a_2, a_3, a_4, a_1, a_2, a_3, a_4, a_1, a_2, ... На ленте будет печататься последовательность

e_3	e_1	e_2	e_3	e_1	e_2	e_3	...

Прибавив к алфавиту печати символ e_4 и дополнив таблицу печати до

a_1	a_2	a_3	a_4
e_2	e_3	e_1	e_4

(так что машина превратится в постоянно-печатающую), получим на выходной ленте последовательность

e_3	e_1	e_4	e_2	e_3	e_1	e_4	e_2	e_3	...

.

Докажем теперь две довольно очевидные теоремы о том, какие последовательности символов могут быть напечатаны на выходной ленте машины типа I.

Теорема 1. *Всякая последовательность символов, которая может быть напечатана на выходной ленте некоторой машины типа* I, *есть либо конечная, либо смешанная периодическая последовательность.*

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала постоянно-печатающую машину. Если машина оканчивает работу, то напечатанная последовательность, очевидно, будет конечной.

Пусть машина работает бесконечно. Тогда, поскольку число α состояний машины конечно, то через конечное число шагов машина должна вторично прийти в какое-то пройденное состояние a^*. Далее машина будет повторно проходить цикл, заключенный между первым и вторым появлением состояния a^*. Поскольку печатаемый символ есть функция внутреннего состояния, циклу состояний машины будет соответствовать цикл печатаемых символов.

2) Рассмотрим произвольную (т. е., вообще говоря, не постоянно-печатающую) машину типа I. Возьмем постоянно-печатающую машину, полученную из нее преобразованием, описанным в замечании на стр. 404. Каждой последовательности, напечатанной на выходной ленте данной машины, соответствует некоторая последовательность, напечатанная построенной постоянно-печатающей машиной. По пункту 1) на выходной ленте постоянно-печатающей машины печатается либо конечная, либо смешанная периодическая последовательность символов. Выбросив из нее добавленный нами символ и сдвинув оставшиеся символы, получим последовательность, напечатанную на выходной ленте данной машины типа I. Она, очевидно, будет также либо конечной, либо смешанной периодической.

Теорема 2. *Любая последовательность символов, являющаяся либо конечной, либо смешанной периодической, может быть напечатана на выходной ленте некоторой машины типа* I.

Доказательство. Для доказательства достаточно указать способ, как для произвольной конечной или смешанной периодической последовательности символов построить машину, которая на своей выходной ленте ее печатает.

1) Если данная последовательность конечная и содержит n символов, то машина должна иметь n состояний, проходимых последовательно, причем начальному состоянию должен соответствовать в таблице печати первый символ данной последовательности, состоянию, принимаемому на втором такте,— второй символ и т. д. Последнее, n-е состояние машины должно быть заключительным.

2) Если данная последовательность — смешанная периодическая с периодом из m символов и предпериодом из n символов, то машина должна иметь $n+m$ состояний; управляющая таблица и таблица печати строятся так же, как и в 1), за исключением того, что из $(n+m)$-го состояния машина должна переходить в $(n+1)$-е состояние.

Замечание. Мы считаем, таким образом, что машина типа I полностью определяется заданием списка внутренних состояний, алфавита печати, управляющей таблицы и таблицы печати, причем задание всех этих четырех элементов необходимо для задания машины. Возможна и другая точка зрения, согласно которой машина типа I определяется лишь первыми двумя элементами: списком внутренних состояний и алфавитом печати — так что у одной и той же машины могут быть различные управляющие таблицы и различные таблицы печати. Мы же считаем, что в этом случае мы имеем дело с различными машинами. По существу, различие между указанными точками зрения есть лишь вопрос терминологии. Принятую нами точку зрения (или, если угодно, принятую нами терминологию) мы будем применять и в отношении других машин, которые будут рассматриваться ниже, считая, что изменение управляющей таблицы или таблицы печати означает изменение машины.

2. МАШИНЫ ТИПА II

Перейдем теперь к рассмотрению машины типа II, обладающей более сложной структурой и, соответственно, большими возможностями.

Машина типа II имеет *внутреннюю память* и *выходную ленту*, устроенные так же, как в машине типа I. Кроме того, она имеет устройство внешней памяти, состоящее *из ленты внешней памяти* (C на рис. 29) и *считывающей и записывающей головки* (D на рис. 29).

Лента внешней памяти разбита на клетки, в каждой из которых может быть записан один из символов *алфавита внешней памяти* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_\gamma\}$. Нам будет удобно говорить о тех клетках, в которых ничего не записано, что в них записан символ $\square$, называемый «пустым» и обо-

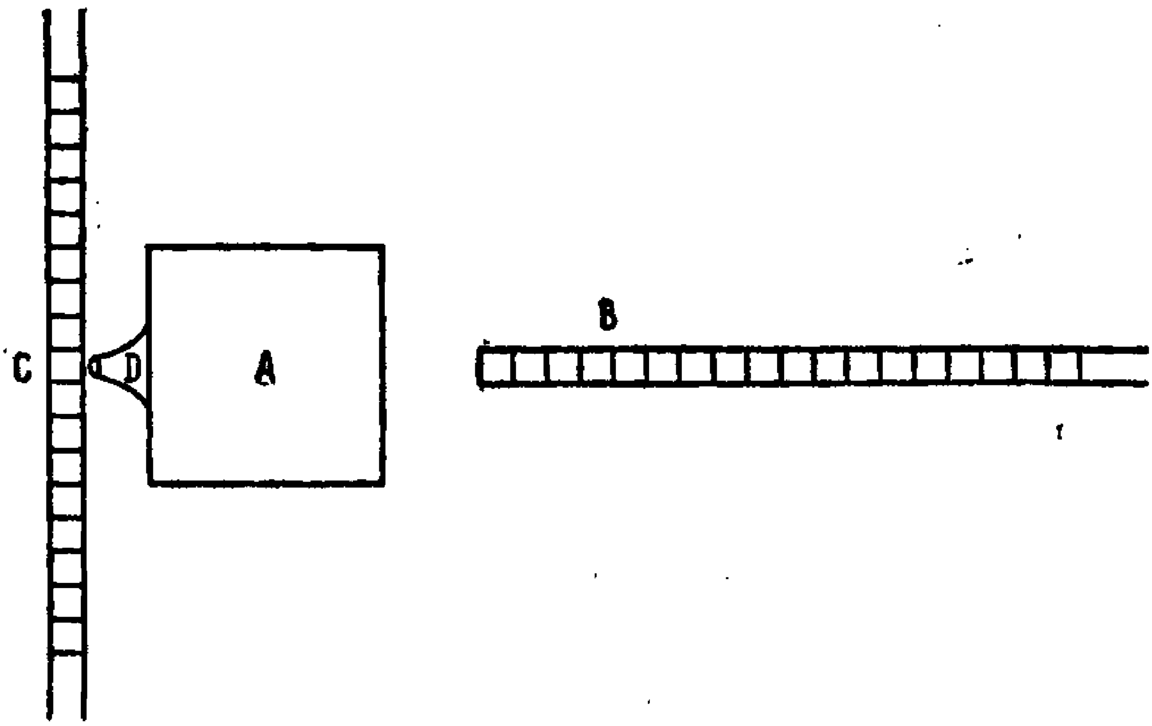


Рис. 29.

значаемый часто через s_0. Таким образом, мы как бы предполагаем, что лента, на которой ничего не написано, сплошь заполнена символами s_0. Принимается, что лента внешней памяти может быть неограниченно продолжена в обе стороны (вверх и вниз на рис. 29).

Символы, записанные на ленте внешней памяти (в том числе — пустые), образуют слова в алфавите $S \cup \{\square\}$. Напомним, что *словом* в некотором алфавите называется ряд написанных друг за другом символов (букв) этого алфавита. При этом должен быть точно определен порядок следования символов, т. е. для любых двух символов должно быть ясно, какой из них предшествующий и какой последующий; кроме того, должны быть указаны начало и конец слова. Для последовательности символов, записанных на ленте внешней памяти, может быть принят порядок следования символов (порядок чтения) сверху вниз или снизу вверх. Начало и конец слова могут указываться различными способами. В одном случае словом может считаться последовательность символов (безразлично, пустых или непустых), записанных на определенном участке ленты (пример — слово $s_3s_0s_2s_3s_0s_0$ на рис. 30, *а*, стрелка указывает порядок чтения). В другом случае словом может считаться последовательность непустых символов между двумя ближайшими пустыми клетками (слова $s_1s_2s_4$ и $s_3s_3s_2s_1$ на рис. 30, *б*). Далее, началом или концом слова может считаться крайний непустой символ на ленте (при условии, что непустых символов на ленте конечное число); например, началом и концом слова $s_1s_2s_0s_0s_4s_0s_2s_3$ на рис. 30, *в* служат крайние непустые символы; у слова $s_2s_0s_1s_3s_4$ на рис. 30, *г* начало определено указанием места на ленте, а конец — верхний непустой символ. Во всяком случае, порядок чтения, начало и конец слова всегда должны быть определены недвусмысленно.

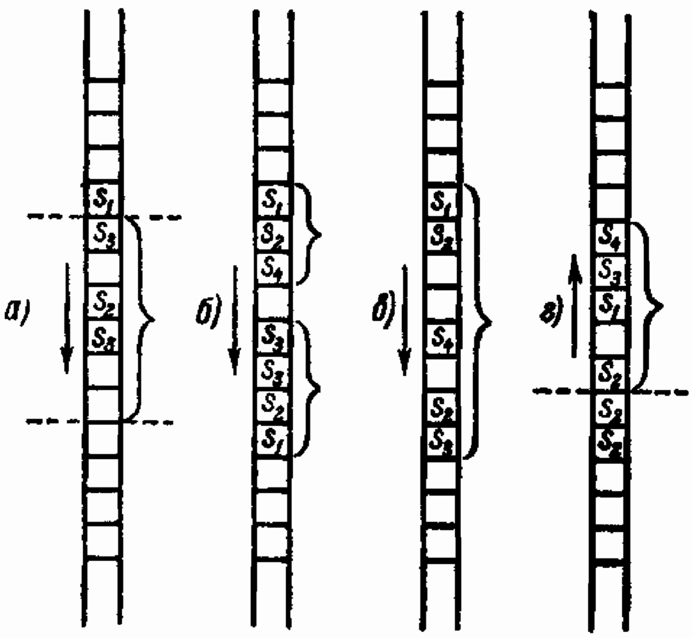


Рис. 30.

Мы будем рассматривать также пустое слово, не содержащее ни одного непустого символа; обозначим его Λ.

На каждом такте считывающая и записывающая головка «смотрит» на одну из клеток ленты внешней памяти. Символ, записанный в этой клетке, называется *считываемым символом*; обозначим его через s_c. Выше него на ленте расположена последовательность символов $s_{u_0}s_{u_1}\ldots s_{u_k}\ldots$, ниже — последовательность $s_{v_0}s_{v_1}\ldots s_{v_h}\ldots$ Обозначим через A (соответственно, через B) слово, началом которого является символ, ближайший сверху (соответственно, снизу) к s_c; концом — последний непустой символ. Если выше (ниже) s_c не стоит ни одного непустого символа, будем считать, что A (соответственно, B) пусто, т. е. $A=\Lambda$ (соответственно, $B=\Lambda$). Состояние машины в каждый данный момент полностью описывается указанием внутреннего состояния машины a_d, считываемого символа s_c и слов A и B. Поэтому четверку $\langle a_d, s_c, A, B\rangle$ естественно называть *полным состоянием* машины. В отличие от машин типа I (где полными состояниями естественно считать внутренние состояния), каждая машина типа II с непустым алфавитом внешней памяти имеет бесконечное число полных состояний. Перед началом работы машины необходимо привести ее внутреннюю память в некоторое *начальное внутреннее состояние*, указать, что написано на ленте и где находится головка (т. е., другими словами, задать ее начальное полное состояние). Работа машины состоит в переходе от одного полного состояния к другому. За один шаг машина последовательно совершает следующие элементарные действия: (1) записывает вместо считываемого символа s_c некоторый символ s_{c^*} (не исключено, что $c^* = c$); (2) сдвигается по ленте внешней памяти на одну клетку вверх или вниз или остается на месте (точнее, сдвигается или остается на месте считывающая и записывающая головка); (3) переходит в следующее внутреннее состояние a_{d^*} (которое может совпадать с a_d, т. е. d^* может равняться d). Сдвиг будем обозначать, соответственно, символами $\uparrow$, $\downarrow$, $\cdot$, или, когда это будет удобно, через z_b, где $b = 1,2,3$ и $z_1 = \uparrow$, $z_2 = \downarrow$, $z_3 = \cdot$.

Элементарные действия, осуществляемые машиной при переходе от данного такта к следующему, полностью определяются внутренним состоянием машины и считываемым символом на данном такте. Другими словами, работа машины типа II определяется управляющей таблицей следующего вида:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & a_1 & \ldots & a_d & \ldots & a_\alpha \\
\hline
s_1 & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
s_c & & & s_{c^*}\, z_b\, a_{d^*} & & \\
\vdots & & & & & \\
s_\gamma & & & & & \\
s_0 & & & & &
\end{array} \qquad \text{(IIasz)}$$

В крайней сверху строке этой таблицы указаны все возможные внутренние состояния машины; в крайнем левом столбце — все возможные считываемые символы (в том числе — пустой). На пересечении соответствующих строки и столбца указаны: (1) символ, записываемый на место считываемого; (2) сдвиг головки; (3) внутреннее состояние, в которое переходит машина. На пересечении некоторых строк и столбцов может не стоять ничего; это значит, что при таких внутреннем состоянии и считываемом символе машина прекращает работу.

Управляющую таблицу можно рассматривать и как объединение трех таблиц: IIa, IIs, IIz — каждая из которых имеет два входа: индекс внутреннего состояния d и индекс считываемого символа c — и один выход: соответственно, d^*, c^* и b. Таблица IIa соответствует таблице Ia для машины типа I (стр. 402), но, в отличие от нее, имеет не один, а два входа (так как внутреннее состояние машины на данном такте зависит теперь не только от внутреннего состояния на предшествующем такте, но и от символа, считываемого на предшествующем такте).

Смена полных состояний машины типа II может быть задана и списком команд, имеющих общий вид:

$$a_d s_c \Rightarrow s_{c^*} z_b a_{d^*}.$$

Список команд машины мы будем называть ее *программой*.

Что касается таблицы печати, то она ничем не отличается от таблицы печати в машине типа I (табл. Ie на стр. 404). Символ, печатаемый на выходной ленте на данном такте, зависит только от внутреннего состояния машины на данном такте. По аналогии с машинами типа I среди машин типа II выделяются постоянно-печатающие машины.

Любая последовательность символов, которая может быть напечатана на выходной ленте данной машины типа I, может быть напечатана и некоторой машиной типа II. Для этого достаточно взять такую машину типа II, в программе которой каждой команде

$$a_d \Rightarrow a_{d^*}$$

данной машины типа I соответствует команда

$$a_d s_c \Rightarrow s_c a_{d^*}.$$

Но машина типа II может печатать и бесконечные непериодические последовательности, которые, как мы видели, не могут печататься машиной типа I.

Пример. Рассмотрим машину типа II, имеющую два внутренних состояния: a_1, a_2, алфавит внешней памяти $S=\{|\}$ («палочка»), алфавит печати $\{p, q\}$, программу из четырех команд:

$$
\begin{array}{ll}
K1. & a_1 \square \Rightarrow | \downarrow a_2 \\
K2. & a_1 | \Rightarrow | \uparrow a_1 \\
K3. & a_2 \square \Rightarrow \square \uparrow a_1 \\
K4. & a_2 | \Rightarrow | \, ! \, a_2
\end{array}
$$

и таблицу печати

a_1	a_2
p	q

Пусть машина начинает работу, находясь во внутреннем состоянии a_1, причем на ленте внешней памяти ничего не записано. Применяется команда $K1$:

$$a_1 \square \Rightarrow | \downarrow a_2. \text{ Печатается } p.$$

Сдвинувшись на клетку вниз, машина оказывается во внутреннем состоянии a_2 и смотрит на пустую клетку. Применяется команда $K3$:

$$a_2 \square \Rightarrow \square \uparrow a_1. \text{ Печатается } q.$$

Перейдя во внутреннее состояние a_1 и сдвинувшись вверх, машина смотрит на символ |. Применяется команда $K2$:

$$a_1 | \Rightarrow | \uparrow a_1. \text{ Печатается } p.$$

Сдвинувшись вверх, машина остается во внутреннем состоянии a_1 и смотрит на пустую клетку. Вновь применяется $K1$:

$$a_1 \square \Rightarrow | \downarrow a_2. \text{ Печатается } p.$$

Теперь машина во внутреннем состоянии a_2 смотрит на |. Применяется команда $K4$:

$$a_2 | \Rightarrow | \downarrow a_2. \text{ Печатается } q.$$

Уже ясно, как будет дальше работать машина. Двигаясь вниз по сплошному массиву палочек, она находится во внутреннем состоянии a_2 и, соответственно, печатает на каждом такте q; дойдя до первой пустой клетки, она переходит в состояние a_1 и начинает двигаться вверх, печатая на каждом такте p; дойдя до первой пустой клетки, она записывает в нее |, печатает еще одно p и начинает весь цикл снова, но с длиной пробега, увеличенной на один такт. Таким образом, она будет печатать бесконечную непериодическую последовательность $pqppqqpppqqq \ldots$

Итак, мы показали, что машина типа II может печатать и непериодические бесконечные последовательности символов. Естественно возникает вопрос: всякая ли бесконечная непериодическая последовательность символов может быть напечатана на выходной ленте машины типа II? Если не всякая, то как можно по-другому описать класс последовательностей, печатаемых машинами типа II?

Прежде чем ответить на этот вопрос, введем следующее

Определение. Бесконечная последовательность символов некоторого конечного алфавита называется *примитивно-рекурсивной* (*обще-рекурсивной*), если последовательность номеров этих символов при некоторой взаимно-однозначной нумерации алфавита примитивно-рекурсивна (обще-рекурсивна).

Заметим, что объем введенных понятий не зависит от выбора нумерации, поскольку любые две взаимно-однозначные нумерации конечного множества примитивно-рекурсивно эквивалентны (замечание 1 на стр. 296).

Теперь мы можем сформулировать теоремы, дающие ответ на поставленный выше вопрос.

Теорема 3. *Всякая последовательность символов, которая может быть напечатана на выходной ленте некоторой машины типа* II, *есть либо конечная, либо обще-рекурсивная последовательность.*

Теорема 4. *Любая последовательность символов, являющаяся либо конечной, либо обще-рекурсивной, может* *быть напечатана на выходной ленте некоторой машины типа* II*).

Доказательство этих теорем будет дано в п. 5.

Теоремы 3 и 4 дают независимое (от понятия машины) описание класса тех последовательностей символов, которые могут быть напечатаны на выходных лентах машин типа II. Однако при обращении с реальными вычислительными машинами (идеализацией которых и служат рассматриваемые машины) информация, получаемая на выходе таких машин, воспринимается не в виде просто последовательности с и м в о л о в, а в виде последовательности ч и с е л, образуемых этими символами. Выходной алфавит реальной машины содержит обычно цифры

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

и какой-либо символ, служащий для отделения чисел друг от друга; таким символом может служить запятая или даже просто пробел; нам будет удобно использовать в этих целях звездочку $*$. Будем говорить, что на выходной ленте машины типа II *напечатана* (конечная или бесконечная) *последовательность чисел* $m_0, m_1, m_2, \ldots$, если на этой ленте напечатана (соответственно, конечная или бесконечная) последовательность символов $M_0*M_1*M_2*\ldots$, где M_i — конечная последовательность цифр, образующая десятичную запись числа m_i. Встает вопрос: какие последовательности чисел могут быть напечатаны на выходных лентах машин типа II? Ответ на этот вопрос дает

Т е о р е м а 5. *Числовая последовательность тогда и только тогда может быть напечатана на выходной ленте некоторой машины типа* II, *когда она либо конечна, либо обще-рекурсивна.*

Эта теорема, являющаяся еще одним аргументом в пользу Основной гипотезы, немедленно вытекает из теорем 3, 4 и следующей леммы:

---

*) В силу леммы 1 из п. 5 и примера 1 из п. 3 § 8, не всякая обще-рекурсивная последовательность символов может быть напечатана на выходной ленте постоянно-печатающей машины типа II. Таким образом, существенным является то, что на некоторых тактах машина ничего не печатает — ей нужно, так сказать, «время на размышление», прежде чем напечатать очередной символ.

Лемма. *Бесконечная числовая последовательность*

$$m_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k,\ \ldots$$

тогда и только тогда обще-рекурсивна, когда обще-рекурсивна соответствующая ей последовательность символов (из алфавита печати $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ *\}$)

$$M_0 * M_1 * M_2 * \ldots * M_k * \ldots,$$

где M_i — десятичная запись числа m_i.

Доказательство. Прежде всего вспомним, что обще-рекурсивность последовательности символов не зависит от того, как именно эти символы занумерованы. Поэтому мы вправе занумеровать символы алфавита печати, например, по порядку.

Итак, положим $e_0 = 0$, $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, $e_3 = 3$, $e_4 = 4$, $e_5 = 5$, $e_6 = 6$, $e_7 = 7$, $e_8 = 8$, $e_9 = 9$, $e_{10} = *$.

Приступим теперь к доказательству необходимости и достаточности сформулированного в лемме условия.

1) Достаточность («тогда»). Пусть обще-рекурсивная последовательность символов $e_{i_0}e_{i_1}e_{i_2} \ldots e_{i_k} \ldots$ соответствует некоторой бесконечной числовой последовательности

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m,\ \ldots$$

Докажем, что эта числовая последовательность тоже обще-рекурсивна. По условию функция ψ: $\psi(n) = i_n$, обще-рекурсивна. Требуется доказать, что функция φ: $\varphi(m) = y_{me}$ обще-рекурсивна. Докажем сначала, что функция η, дающая по n номер клетки, в которой расположен $(n+1)$-й символ e_{10} (т. е. $(n+1)$-я «звездочка»), обще-рекурсивна (нумерация клеток начинается с нуля: символ e_{i_0} расположен в *нулевой* клетке, e_{i_1} — в *первой* и т. д.).

Легко видеть, что

$$\eta(n) = (\mu t)\,[(\psi(t) = 10) \,\&\, ((\underset{i<t}{\nu i})\,[\psi(i) = 10] = n)].$$

Из теорем § 7 (в частности, теоремы 21 из § 7) вытекает обще-рекурсивность функции η. Через функцию η легко выражается функция φ:

$$\varphi(n) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{j=\eta(0)-1} 10^{\eta(0)-1-j}\cdot\psi(j), & n=0, \\ \sum\limits_{j=0}^{j=\eta(n)-\eta(n-1)-2} 10^{\eta(n)-\eta(n-1)-2-j}\cdot\psi(\eta(n-1)+1+j), & \\ & n>0. \end{cases}$$

Из теоремы 7 из § 6, леммы 1 из п. 3 § 4 и частично-рекурсивности функций ψ и η следует частично-рекурсивность функции φ. Кроме того, нетрудно проверить, что φ всюду определена; поэтому φ — обще-рекурсивная функция.

2) Необходимость («только тогда»). Пусть бесконечная числовая последовательность

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m,\ \ldots$$

обще-рекурсивна, т. е. функция φ: $\varphi(n)=y_n$, обще-рекурсивна. Докажем, что соответствующая последовательность символов

$$e_{i_0}e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k}\ldots$$

тоже обще-рекурсивна, т. е. что функция ψ: $\psi(n)=i_n$, обще-рекурсивна.

Число цифр в десятичной записи произвольного натурального числа z равно $\overline{\mathrm{sg}}\, z+\mathrm{sg}\, z\cdot(\mu t)\,[10^t>z]$. Поэтому номер $\eta(n)$ клетки, в которой будет расположен $(n+1)$-й символ e_{10} ($(n+1)$-я «звездочка»), определяется равенствами:

$$\begin{cases} \eta(0)=\overline{\mathrm{sg}}\,\varphi(0)+\mathrm{sg}\,\varphi(0)\cdot(\mu t)\,[10^t>\varphi(0)], \\ \eta(n+1)=\eta(n)+\overline{\mathrm{sg}}\,\varphi(n+1)+ \\ \qquad\qquad +\mathrm{sg}\,\varphi(n+1)\cdot(\mu t)\,[10^t>\varphi(n+1)]+1. \end{cases}$$

Из обще-рекурсивности функции φ и теоремы 21 из § 7 вытекает обще-рекурсивность функции η.

Введем функцию $\mathrm{des}^{(2)}$: $\mathrm{des}(m,\ n)$ равно $(n+1)$-му знаку в десятичной записи числа m, если $10^n\leqslant m$, и равно 0, если $10^n>m$. Легко видеть, что

$$\mathrm{des}(m,\ n)=\mathrm{div}(m,\ 10^n)-\mathrm{div}(m,\ 10^{n+1})\cdot 10.$$

Функция des обще-рекурсивна (даже примитивно-рекурсивна). Заметим, что $\eta(k) \geqslant k$ для любого k. Теперь легко «кусочно» выразить функцию ψ:

$$\psi(n) = \begin{cases} 10 & \underset{k \leqslant \eta(k)}{(\exists k)} [\eta(k) = n] \\ \operatorname{des}(\varphi((\mu t)[\eta(t) > n]), & \\ \eta((\mu t)[\eta(t) > n]) - n - 1) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Из теорем § 7 и обще-рекурсивности функций φ, η и des следует обще-рекурсивность функции ψ. Лемма доказана.

3. МНОГОЛЕНТОЧНЫЕ МАШИНЫ

Займемся теперь машинами без ленты для печати.

Введем в рассмотрение *многоленточные машины*. Каждая *l-ленточная* ($l = 1, 2, 3, \ldots$) *машина* имеет

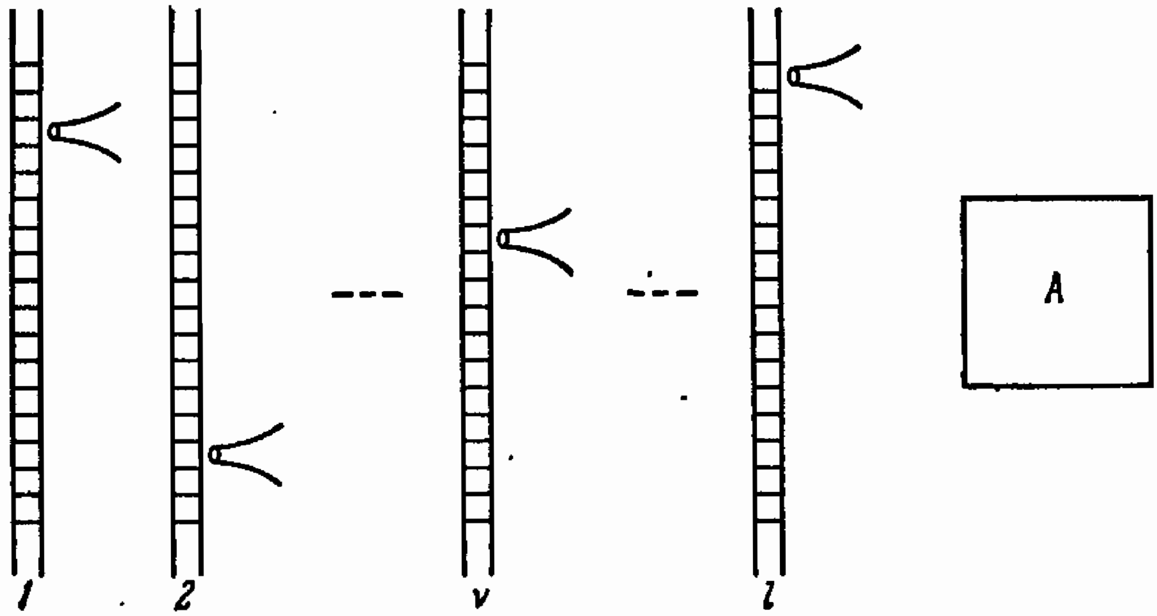


Рис. 31.

внутреннюю память (которая в каждый момент находится в одном из конечного числа *внутренних состояний*) и устройство внешней памяти, состоящее из *l лент внешней памяти* и, соответственно, *l считывающих и записывающих* головок (рис. 31). В каждой клетке каждой из лент записан либо один из символов *алфавита внешней памяти* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_\gamma\}$ данной машины, либо «пустой символ» $s_0 = \square$. Символ на ν-й ленте, на который на данном такте смотрит ν-я считывающая и записывающая головка, обозначим через s_{c_ν}. Выше него на ленте расположена последовательность символов $s_{u_{\nu,0}} s_{u_{\nu,1}} \ldots s_{u_{\nu,k}} \ldots$, ниже — последовательность $s_{v_{\nu,0}} s_{v_{\nu,1}} \ldots s_{v_{\nu,k}} \ldots$ Обозначим через A_ν (соответственно, B_ν) слово на ν-й ленте, началом которого является символ, ближайший сверху (соответственно, снизу) к s_{c_ν}; концом — последний непустой символ. Если выше (ниже) s_{c_ν} не стоит ни одного непустого символа, будем считать, что A_ν (соответственно, B_ν) пусто, т. е. $A_\nu = \Lambda$ (соответственно, $B_\nu = \Lambda$).

На каждом такте каждая из головок смотрит на символ (может быть, пустой), напечатанный на соответствующей ленте. Одна из головок является выделенной; от считываемого ею символа зависят (в смысле, разъясняемом ниже) действия машины при переходе к следующему такту. Головка выделяется своя для каждого такта; эта головка — и соответствующая ей лента — называются *активными* на данном такте.

Состояние машины в каждый данный момент полностью определяется следующими $(3l+2)$ объектами: внутренним состоянием a_d, номером k активной ленты и для каждого ν $(1 \leqslant \nu \leqslant l)$ символом s_{c_ν} и словами A_ν, B_ν. Кортеж длины $3l+2$

$$\langle a_d,\ k,\ s_{c_1},\ A_1,\ B_1,\ s_{c_2},\ A_2,\ B_2,\ \ldots,\ s_{c_l},\ A_l,\ B_l \rangle$$

будем называть *полным состоянием* машины. Перед началом работы машины необходимо задать в качестве *начального* некоторое ее полное состояние. Работа машины состоит в переходе от данного полного состояния к другому.

На каждом такте многоленточная машина находится во внутреннем состоянии a_d и считывает с активной ленты № k символ $s_c = s_{c_k}$. В зависимости от значений d, k и c машина при переходе к следующему такту (т. е. за один шаг) совершает последовательно следующие элементарные действия: (1) записывает на ленте № h символ s_{c*} вместо того символа s_{c_h}, на который была направлена головка № h; (2) сдвигает i-ю головку по соответствующей ленте (остальные головки при этом остаются неподвижными); (3) переходит во внутреннее состояние a_{d^*}; (4) делает активной ленту № j. При этом не исключается возможность того, что некоторые из чисел k, h, i, j (или даже все они) попарно равны и $c^* = c_h$, $d^* = d$.

Таким образом, работа машины полностью определяется таблицей с тремя входами: индексом d внутреннего состояния машины, номером k активной ленты и индексом c символа $s_c = s_{c_k}$, считываемого с активной ленты, — и с шестью выходами: (1) индексом c^* записываемого символа; (2) номером h ленты, на которую записывается s_{c^*} (3) индексом b сдвига; (4) номером i ленты, на которой происходит сдвиг; (5) индексом d^* нового внутреннего состояния a_{d^*}; (6) номером j новой активной ленты. Эту таблицу можно рассматривать и как объединение шести таблиц (IIIs, IIIh, IIIz, IIIi, IIIa, IIIj) с тремя общими входами и одним выходом у каждой.

Вместо таблицы с тремя входами (которую и изобразить-то невозможно на листе бумаги) мы будем предпочитать задавать работу машины программой, т. е. списком команд вида

$$a_d\,(k)\,s_c \Rightarrow (h)\,s_{c^*}\,(i)\,z_b\,a_{d^*}\,(j).$$

Такая команда означает следующее: если на данном такте внутреннее состояние машины есть a_d, активна лента № k и с нее считывается символ s_c, то в клетку, на которую смотрит головка № h, записывается (вместо того, что там написано) символ s_{c^*}, головка № i подвергается сдвигу z_b, машина переходит во внутреннее состояние a_{d^*} и активной становится лента № j.

Частным случаем многоленточной машины — когда $l = 1$ — является *одноленточная машина*. Одноленточные машины называют обычно *машинами Тьюринга*, по имени английского математика, который [1936] впервые рассматривал подобные машины*) Присоединив к одноленточной машине выходную ленту и снабдив ее таблицей печати, получим машину типа II. Обратно, отбросив от

*) Описание машин Тьюринга можно найти в § 67 книги С. К. Клини [1952] и §§ 7—8 книги Б. А. Трахтенброта [1957].

произвольной машины типа II выходную ленту и таблицу печати, мы получим одноленточную машину.

Множество полных состояний каждой многоленточной машины (с непустым алфавитом внешней памяти) бесконечно. Занумеруем это множество (отдельно для каждой многоленточной машины). Пусть $S=\{s_1, \ldots, s_\gamma\}$ — алфавит внешней памяти данной l-ленточной машины. *Номером* непустого слова

$$C = s_{i_0} s_{i_1} \ldots s_{i_k}$$

в алфавите $S \bigcup \{s_0\}$ назовем число

$$w = p_0^{i_0} \cdot p_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k}, \tag{1}$$

где, согласно обозначениям § 4, $p_0, p_1, p_2, \ldots$ — простые числа в порядке возрастания. Номером пустого слова назовем число 1. *Вектором* полного состояния

$$\langle a_d, k, s_{c_1}, A_1, B_1, \ldots, s_{c_l}, A_l, B_l \rangle$$

данной машины назовем кортеж из N^{3l+2}:

$$\langle d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l \rangle,$$

где u_ν, v_ν — номера слов A_ν, B_ν $(1 \leqslant \nu \leqslant l)$. *Номером* этого полного состояния назовем число

$$m = p_0^d \cdot p_1^k \cdot p_2^{c_1} \cdot p_3^{u_1} \cdot p_4^{v_1} \cdot p_5^{c_2} \cdot \ldots \cdot p_{3l-1}^{c_l} \cdot p_{3l}^{u_l} \cdot p_{3l+1}^{v_l}.$$

Заметим, что $d = \exp_0(m)$, $k = \exp_1(m)$, $c_\nu = \exp_{3\nu-1}(m)$, $u_\nu = \exp_{3\nu}(m)$, $v_\nu = \exp_{3\nu+1}(m)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, l)$. Теперь мы можем доказать следующую основную лемму:

Лемма 1. *Для любой многоленточной машины существует примитивно-рекурсивная функция τ типа $N^2 \to N$, обладающая следующим свойством: если m есть номер некоторого полного состояния машины, и машина, начиная работать с этого полного состояния, остановится не ранее, чем через i шагов, то $\tau(m, i)$ есть номер того полного состояния, в которое машина придет через i шагов.*

Доказательство леммы 1 опирается на лемму 2.

Обозначим номера произвольных последовательных полных состояний данной многоленточной машины через m и $\overline{m}$, а векторы этих полных состояний через $\langle d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l\rangle$ и $\langle \overline{d}, \overline{k}, \overline{c}_1, \overline{u}_1, \overline{v}_1, \ldots \ldots, \overline{c}_l, \overline{u}_l, \overline{v}_l\rangle$.

Лемма 2. *Существуют такие примитивно-рекурсивные функции $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{3l+2}$ типа $N^{3l+2} \to N$, что для любых последовательных полных состояний*

$$\begin{aligned}
\overline{d} &= f_1(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l),\\
\overline{k} &= f_2(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l),\\
\overline{c}_1 &= f_3(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l),\\
\overline{u}_1 &= f_4(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l),\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
\overline{c}_l &= f_{3l}(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, u_l),\\
\overline{u}_l &= f_{3l+1}(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l),\\
\overline{v}_l &= f_{3l+2}(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l).
\end{aligned}$$

Доказательство леммы 1. Предположим, что лемма 2 верна. Тогда можно доказать, что функция f: $\overline{m} = f(m)$ примитивно-рекурсивна. В самом деле, согласно лемме 2,

$$\begin{aligned}
\overline{m} = {} & 2^{f_1(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l)} \cdot 3^{f_2(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l)} \cdot \ldots \\
& \ldots \cdot p_{3l+1}^{f_{3l+2}(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l)} = \\
= {} & 2^{f_1(\exp_0(m), \exp_1(m), \ldots, \exp_{3l+1}(m))} \cdot \\
& \cdot 3^{f_2(\exp_0(m), \exp_1(m), \ldots, \exp_{3l+1}(m))} \cdot \ldots \\
& \ldots \cdot p_{3l+1}^{f_{3l+2}(\exp_0(m), \exp_1(m), \ldots, \exp_{3l+1}(m))}.
\end{aligned}$$

Мы видим, что функция f получается подстановками примитивно-рекурсивных функций в примитивно-рекурсивные функции. Следовательно, функция f примитивно-рекурсивна. Искомая функция τ легко выражается через функцию f:

$$\begin{cases}
\tau(m, 0) = 0,\\
\tau(m, i+1) = f(\tau(m, i)).
\end{cases}$$

Итак, в предположении, что лемма 2 верна, лемма 1 доказана.

Для доказательства леммы 2 нам потребуется

Лемма 3. *Если функция f типа $N^s \to N$ определена на конечном множестве, то она может быть продолжена до примитивно-рекурсивной функции.*

Доказательство леммы 3. Пусть функция f типа $N^s \to N$ определена на конечном множестве $M = \{m_1, \ldots, m_q\}$, где $m_i = \langle x_{i1}, \ldots, x_{is}\rangle$ $(i = 1, \ldots, q)$. Таким образом,

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} f(x_{11}, \ldots, x_{1s}) & \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in \{m_1\}, \\ f(x_{21}, \ldots, x_{2s}) & \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in \{m_2\}, \\ \vdots & \\ f(x_{q1}, \ldots, x_{qs}) & \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in \{m_q\}. \end{cases}$$

Искомое продолжение получается тривиально:

$$\bar{f}(x_1, \ldots, x_s) = \begin{cases} f(x_{11}, \ldots, x_{1s}) & \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in \{m\}, \\ f(x_{21}, \ldots, x_{2s}) & \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in \{m_2\}, \\ \vdots & \\ f(x_{q1}, \ldots, x_{qs}) & \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in \{m_q\}, \\ 0 & \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in N^s \setminus M. \end{cases}$$

Функция $\bar{f}$ определена «кусочно» через примитивно-рекурсивные (константные) функции и примитивно-рекурсивные множества. По следствию теоремы 8 из § 4 функция $\bar{f}$ примитивно-рекурсивна.

Доказательство леммы 2. 1) Докажем существование примитивно-рекурсивной функции f_1:

$$\bar{d} = f_1(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l).$$

Число $\bar{d}$ — это индекс внутреннего состояния, соответствующего тому полному состоянию, в которое машина переходит из полного состояния с вектором $\langle d, k, \ldots, c_k, \ldots\rangle$ (точки показывают, что остальные элементы вектора полного состояния в данном случае безразличны). Очевидно, $\bar{d}$ есть d^*, определяемое (по тройке $\langle d, k, c_k\rangle$) таблицей IIIa (см. стр. 419). Таким образом, $\bar{d}$ есть значение функции, определенной на конечном числе троек $\langle d, k, c\rangle$; согласно лемме 3, ее можно продолжить до примитивно-рекурсивной функции $y=\psi(d, k, c)$.

Для каждого j $(j=1, 2, \ldots, l)$ введем функцию $g_j^{(3l+2)}$:

$$g_j(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_j, u_j, v_j, \ldots, c_l, u_l, v_l)=\psi(d, j, c_j).$$

Функции $g_1, \ldots, g_l$, очевидно, примитивно-рекурсивны. Теперь можем определить искомую f_1 следующим образом:

$$f_1(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l)=$$
$$=\begin{cases} g_1(d, k, c_1, \ldots, v_l), & \text{если } k=1,\\ g_2(d, k, c_1, \ldots, v_l), & \text{если } k=2,\\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ g_l(d, k, c_1, \ldots, v_l), & \text{если } k=l,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Функция f_1 кусочно задана с помощью примитивно-рекурсивных функций и предикатов и, следовательно, примитивно-рекурсивна (следствие теоремы 15 из § 4).

2) Число $\bar{k}$ задается таблицей IIIj, которая во всем подобна таблице IIIa. Доказательство существования примитивно-рекурсивной функции f_2:

$$\bar{k}=f_2(d, k, c_1, v_1, u_1, \ldots, c_l, u_l, v_l)$$

проводится так же, как в пункте 1).

3) Докажем существование примитивно-рекурсивной функции f_3:

$$\bar{c}_1=f_3(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l).$$

Число $\bar{c}_1$ — индекс символа на первой ленте, на который смотрит головка № 1 в полном состоянии № $\bar{m}$. Если при переходе от полного состояния № m к следующему головка № 1 сдвинулась вверх или вниз, то $s_{\bar{c}_1}$ будет, соответственно, $s_{u_{1,0}}$ или $s_{v_{1,0}}$; если же головка № 1 не сдвинулась, то $s_{\bar{c}_1}$ будет либо s_{c_1}, либо s_{c*} (последнее — в том случае, если машина напечатала на первой ленте символ s_{c*}). Таким образом, $\bar{c}_1$ можно представить как значение функции $f_3^{(3l+2)}$, определенной «кусочно» (здесь h, i, b определены как в общей схеме команды для многоленточной машины на стр. 419; в частности, $b=1$, 2, 3 и $z_1=\uparrow$, $z_2=\downarrow$, $z_3=\cdot$, как на стр. 410):

$$\bar{c}_1 = f_3(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l) = \begin{cases} c_1, & \text{если } (h\neq 1)\,\&\,[(i\neq 1)\vee(i=1\,\&\,b=3)], \\ c^*, & \text{если } (h=1)\,\&\,[(i\neq 1)\vee(i=1\,\&\,b=3)], \\ u_{1,0}, & \text{если } (i=1)\,\&\,(b=1), \\ v_{1,0} & \text{если } (i=1)\,\&\,(b=2). \end{cases}$$

Число c^* — индекс символа, записываемого на ленте № 1 при переходе машины от полного состояния № m к следующему полному состоянию. Оно определяется таблицей IIIs, подобной таблице IIIa. Так же, как в 1), доказывается существование примитивно-рекурсивной функции φ_1:

$$\varphi_1(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l) = c^*.$$

Числа h, i, b определяются, соответственно, таблицами IIIh, IIIi, IIIz. Опять способом пункта 1) доказывается существование таких примитивно-рекурсивных функций η, ι, β, что

$$h=\eta(d, k, c_1, \ldots, v_l),\quad i=\iota(d, k, c_1, \ldots, v_l),$$
$$b=\beta(d, k, c_1, \ldots, v_l).$$

Следовательно, предикаты „$h=1$“, „$h\neq 1$“, „$i=1$“ и т. д. примитивно-рекурсивны. Легко видеть, что $u_{1,0}=\exp_0(u_1)$, $v_{1,0}=\exp_0(v_1)$ [см. (1)]. Итак,

$$f_3(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l) = \begin{cases} c_1, & \text{если } (h\neq 1)\,\&\,[(i\neq 1)\vee(i=1\,\&\,b=3)], \\ \varphi_1(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l), & \\ & \text{если } (h=1)\,\&\,[(i\neq 1)\vee(i=1\,\&\,b=3)], \\ \exp_0(u_1), & \text{если } (i=1)\,\&\,(b=1), \\ \exp_0(v_1), & \text{если } (i=1)\,\&\,(b=2). \end{cases}$$

Функция f_3 кусочно задана с помощью примитивно-рекурсивных функций и предикатов; следовательно, f_3 примитивно-рекурсивна. Функция f_3 — искомая.

4) Докажем существование примитивно-рекурсивной функции f_4:

$$\overline{u}_1 = f_4(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l).$$

Число $\overline{u}_1$ есть номер слова $\overline{A}_1$, стоящего на ленте № 1 выше символа $s_{\overline{c}_1}$, т. е. символа, на который смотрит головка № 1 в полном состоянии № $\overline{m}$. Слово $\overline{A}_1$ начинается символом $s_{u_{1,1}}$, если головка № 1 сдвинулась вверх (т. е. $i=1$ и $b=1$); символом $s_{u_{1,0}}$, если головка № 1 не сдвинулась ($i=1$ и $b=3$, или $i \neq 1$) символом s_{c_1} или s_{c*}, если головка № 1 сдвинулась вниз ($i=1$ и $b=2$).

При помощи примитивно-рекурсивной функции $\varphi_1^{(3l+2)}$ из пункта 3) определим «кусочно» функцию $f_4^{(3l+2)}$:

$$f_4(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots, c_l, u_l, v_l) = \begin{cases} \prod\limits_{g \leqslant u_1} p_g^{\exp_{g+1}(u_1)}, & \text{если } i=1 \,\&\, b=1, \\ u_1, & \text{если } i \neq 1 \vee (i=1 \,\&\, b=3), \\ 2^{c_1} \cdot \prod\limits_{g \leqslant u_1} p_{g+1}^{\exp_g(u_1)}, & \text{если } i=1 \,\&\, b=2 \,\&\, h \neq 1, \\ 2^{\varphi_1(d, k, c_1, \ldots, v_l)} \cdot \prod\limits_{g \leqslant u_1} p_{g+1}^{\exp_g(u_1)}, & \text{если } i=1 \,\&\, b=2 \,\&\, h=1. \end{cases}$$

Функция f_4 кусочно задана с помощью примитивно-рекурсивных функций и предикатов; следовательно, f_4 примитивно-рекурсивна. Легко видеть, что $f_4(d, k, c_1, u_1, v_1, \ldots$ $\ldots, c_l, u_l, v_l) = \overline{u}_1$. Функция f_4 — искомая.

5) Доказательство для функций $f_5, f_6, \ldots, f_{3l+2}$ проводится по образцу пунктов 3) и 4).

Доказательство леммы 2, а значит, и леммы 1 закончено.

4. ФУНКЦИИ, ВЫЧИСЛИМЫЕ НА МАШИНАХ

Рассмотрим какой-либо алфавит S, содержащий знак $|$ («палочка»). В дальнейшем, перечисляя буквы $s_1, \ldots, s_\gamma$ алфавита S, мы всегда будем считать, что $s_1 = |$. Слово

$$\underbrace{||| \ldots |}_{n+1 \text{ раз}}$$

мы будем называть *записью* числа n.

Рассмотрим теперь какую-нибудь многоленточную машину. Будем говорить, что данное полное состояние многоленточной машины *реализует запись числа* n *на ленте* № ν, если эта лента содержит только запись числа n, причем соответствующая головка смотрит на эту запись (более точно: в каких-то $(n+1)$ последовательных клетках ленты записаны символы |, на один из этих символов смотрит головка, остальные клетки пусты). Будем говорить, что данное полное состояние многоленточной машины *реализует запись кортежа* $\langle n_1, \ldots, n_r\rangle$ *на лентах с номерами* $\nu_1, \ldots, \nu_r$, если это состояние на ленте № ν_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ реализует запись числа n_i. Кроме того, будем считать, что пустой кортеж реализуется любым полным состоянием.

Введем два определения, касающиеся машинной вычислимости функций.

Определение. Функция f типа $N^r \to N$ называется *вычислимой на данной l-ленточной машине*, коль скоро существует такое внутреннее состояние машины a^0, что для всякого кортежа $\langle x_1, \ldots, x_r\rangle \in N^r$ и для всякого полного состояния машины с внутренним состоянием a^0, реализующего запись этого кортежа на лентах с номерами $1, 2, \ldots, r$ и имеющего остальные ленты пустыми, выполняется следующее: если функция f не определена на кортеже $\langle x_1, \ldots, x_r\rangle$, то машина, отправляясь от указанного полного состояния, никогда не прекращает работу; если же $f(x, \ldots, x_r)$ определено, то машина, отправляясь от указанного полного состояния, через какое-то число шагов останавливается, причем ее заключительное полное состояние реализует на лентах с номерами $1, 2, \ldots, r, r+1$ запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_r, f(x_1, \ldots, x_r)\rangle$, а остальные ленты — пустые.

Определение. Функция f типа $N^r \to N$ называется *машинно-вычислимой*, если существует такая многоленточная машина, на которой f вычислима.

Лемма 1. *Для любой многоленточной машины существует частично-рекурсивная функция η типа $N \to N$, обладающая следующими свойствами: если m есть номер такого полного состояния, начиная с которого машина через какое-то число шагов останавливается, то $\eta(m)$ есть номер соответствующего заключительного полного состоя-*

ния; если же, начиная с полного состояния с номером m, машина работает бесконечно, то $\eta(m)$ не определено.

Доказательство. Для данной многоленточной машины введем функцию $\omega^{(1)}$:

$$\omega(m)=\begin{cases}0, & \text{если } m\text{ — номер заключительного полного состояния,}\\ 1 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тройку $\langle a_d, k, s_c\rangle$ (или соответствующую ей тройку $\langle d, k, c\rangle$) назовем *заключительной* для данной машины, если она не встречается в левой части ни одной из команд этой машины. Очевидно, полное состояние машины является заключительным (т. е. машина, приходя в это полное состояние, останавливается), если соответствующая ему тройка $\langle a_d, k, s_{c_k}\rangle$ заключительная. Множество M заключительных троек конечно. Легко видеть, что

$$\omega(m)=\begin{cases}0 & \langle \exp_0(m), \exp_1(m), \exp_{3\exp_1(m)\dot{-}1}(m)\rangle\in M,\\ 1 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Поэтому ω примитивно-рекурсивна (следствие 1 теоремы 3 из § 4 и следствие 1 теоремы 15 из § 4). Через функцию ω и примитивно-рекурсивную функцию τ из леммы 1 из п. 3, взятую для нашей машины, легко выражается искомая функция η:

$$\eta(m)=\tau(m, (\mu i)[\omega(\tau(m, i))=0]).$$

Лемма доказана.

Теорема 6. *Всякая машинно-вычислимая функция частично-рекурсивна.*

Доказательство. Пусть функция f типа $N^r\to N$ вычислима на данной l-ленточной машине. Пусть a_{d_0} — соответствующее начальное внутреннее состояние. Возьмем произвольный кортеж $\langle x_1, \ldots, x_r\rangle\in N^r$ и такое начальное полное состояние

$$\langle a_d, k, s_{c_1}, A_1, B_1, \ldots, s_{c_r}, A_r, B_r; s_{c_{r+1}}, \\ A_{r+1}, B_{r+1}, \ldots, s_{c_l}, A_l, B_l\rangle$$

с внутренним состоянием a_{d_0} $(d=d_0)$, реализующее запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_r\rangle$ на лентах с номерами 1, 2, ..., r и имеющее остальные ленты пустыми, что $k=1$

и для $i=1, 2, \ldots, r$ головка № i смотрит на верхнюю палочку записи числа x_i. Выразим номер m_0 этого начального полного состояния через $x_1, \ldots, x_r$. Вследствие нашего выбора,

$$s_{c_i} = \begin{cases} |, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant r \\ \square, & \text{если } r+1 \leqslant i \leqslant l, \end{cases}$$

$$A_i = \Lambda \quad (1 \leqslant i \leqslant l),$$

$$B_i = \begin{cases} \underbrace{||\ldots|}_{x_i \text{ раз}}, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ \Lambda, & \text{если } r+1 \leqslant i \leqslant l. \end{cases}$$

Следовательно,

$$c_i = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 0, & \text{если } r+1 \leqslant i \leqslant l, \end{cases}$$

$$u_i = 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant l),$$

$$v_i = \begin{cases} p_0^1 \cdot p_1^1 \cdot \ldots \cdot p_{x_{i-1}}^1, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant r \text{ и } x_i > 0, \\ 1, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant r \text{ и } x_i = 0, \\ 1, & \text{если } r+1 \leqslant i \leqslant l, \end{cases}$$

где u_i, v_i — номера слов A_i, B_i.

Введем функцию $\delta^{(1)}$:

$$\begin{cases} \delta(0) = 1, \\ \delta(x+1) = \operatorname{prod}(\delta(x), \operatorname{prim}(x)) = \delta(x) \cdot p_x. \end{cases}$$

Из примитивно-рекурсивности функций prod и prim следует примитивно-рекурсивность функции δ. Очевидно, что для $x \geqslant 1$

$$\delta(x) = p_0 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_{x-1}.$$

Следовательно,

$$v_i = \begin{cases} \delta(x_i), & 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 1, & r+1 \leqslant i \leqslant l. \end{cases}$$

Итак, вектор выбранного нами начального полного состояния равен

$$\langle d_0, 1, 1, 1, \delta(x_1), 1, 1, \delta(x_2), \ldots$$
$$\ldots, 1, 1, \delta(x_r), 0, 1, 1, \ldots, 0, 1, 1\rangle,$$

а его номер m_0, соответственно, равен

$$m_0 = p_0^{d_0} \cdot p_1^1 \cdot p_2^1 \cdot p_3^1 \cdot p_4^{\delta(x_1)} \cdot p_5^1 \cdot p_6^1 \cdot p_7^{\delta(x_2)} \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot p_{3r-1}^1 \cdot p_{3r}^1 \cdot p_{3r+1}^{\delta(x_r)} \cdot p_{3r+2}^0 \cdot p_{3r+3}^1 \cdot p_{3r+4}^1 \cdot \ldots \cdot p_{3l-1}^0 \cdot p_{3l}^1 \cdot p_{3l+1}^1.$$

Так как функция δ примитивно-рекурсивна, функция $\varepsilon^{(r)}$, дающая по $x_1, \ldots, x_r$ номер m_0, тоже примитивно-рекурсивна. Возьмем частично-рекурсивную функцию η, существующую для нашей машины по лемме 1. Введем функцию ϱ:

$$\varrho(x_1, \ldots, x_r) = \eta(\varepsilon(x_1, \ldots, x_r)) = \eta(m_0).$$

Функция ϱ частично-рекурсивна. Функция f тогда и только тогда определена на кортеже $\langle x_1, \ldots, x_r\rangle$, когда функция ϱ определена на этом кортеже, причем, если $\varrho(x_1, \ldots, x_r)$ определено, то оно равно номеру полного состояния, реализующего на ленте с номером $r+1$ запись числа $f(x_1, \ldots, x_r)$ (остальные свойства этого полного состояния нам сейчас не важны). Итак, в полном состоянии с номером $\varrho(x_1, \ldots, x_r)$ на ленте № $(r+1)$ записана $f(x_1, \ldots, x_r)+1$ палочка, и головка № $(r+1)$ глядит на какую-то из них. Пусть в этом полном состоянии слово A_{r+1} состоит из t палочек $(t \geqslant 0)$, B_{r+1} — из w палочек $(w \geqslant 0)$. Тогда $t+w+1 = f(x_1, \ldots, x_r)+1$, и, следовательно, $f(x_1, \ldots, x_r) = t+w$. Если A_{r+1} состоит из t палочек, то $u_{r+1} = \delta(t)$. С другой стороны, $u_{r+1} = \exp_{3(r+1)}(\varrho(x_1, \ldots, x_r))$. Следовательно,

$$\delta(t) = \exp_{3r+3}(\varrho(x_1, \ldots, x_r)).$$

Аналогично получаем, что

$$\delta(\omega) = \exp_{3r+4}(\varrho(x_1, \ldots, x_r)).$$

Введем функцию $\mathrm{lh}^{(\,)}$: $\mathrm{lh}(a) = (\nu t)_{t \leqslant a}[\exp_t(a) \neq 0]$. По следствию теоремы 14 из § 4 функция lh примитивно-рекурсивна. Очевидно, $\mathrm{lh}(1)=0$ и для $a>1$ число $\mathrm{lh}(a)$ равно числу ненулевых экспонент числа a (стр. 115). Следовательно, для любого x

$$\mathrm{lh}(\delta(x)) = x.$$

В частности, $t = \mathrm{lh}(\delta(t))$, $w = \mathrm{lh}(\delta(w))$. Окончательно получаем:

$$f(x_1, \ldots, x_r) =$$
$$= \mathrm{lh}(\exp_{3r+3}(\varrho(x_1, \ldots, x_r))) + \mathrm{lh}(\exp_{3r+4}(\varrho(x_1, \ldots, x_r))).$$

Следовательно, функция f частично-рекурсивна. Теорема доказана.

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству теоремы 7, приведем несколько примеров программ многоленточных машин, которые нам понадобятся для ее доказательства.

Пример 1. *Записывание на ленте № k числа g.* В начальный момент внутреннее состояние — a^0, активна лента № k, на ленте № k ничего не написано.

$$\begin{aligned}
&K1.\ a^0(k)\,\square \Rightarrow (k)\,|\,(k)\downarrow a^1(k)\\
&K2.\ a^1(k)\,\square \Rightarrow (k)\,|\,(k)\downarrow a^2(k)\\
&\qquad\vdots\\
&Kg.\ a^{g-1}(k)\,\square \Rightarrow (k)\,|\,(k)\downarrow a^g(k)\\
&K(g+1).\ a^g(k)\,\square \Rightarrow (k)\,|\,(k)\cdot b^0(k).
\end{aligned}$$

Заключительное полное состояние реализует запись числа g, имеет внутреннее состояние — b^0 и активной — ленту № k.

Пример 2. *Перезапись числа с ленты № k_1 на ленту № k_2.*

Начальное полное состояние реализует на ленте № k_1 запись какого-то числа g, внутреннее состояние — a^0, активна лента № k_1, лента № k_2 — пустая.

$$\begin{aligned}
&K1.\ a^0(k_1)\ |\cdot \Rightarrow (k_1)\,|\,(k_1)\uparrow a^0(k_1)\\
&K2.\ a^0(k_1)\,\square \Rightarrow (k_1)\,\square\,(k_1)\downarrow a^1(k_1)\\
&K3.\ a^1(k_1)\ | \Rightarrow (k_2)\,|\,(k_2)\downarrow a^2(k_1)\\
&K4.\ a^2(k_1)\ | \Rightarrow (k_1)\,|\,(k_1)\downarrow a^1(k_1)\\
&K5.\ a^1(k_1)\,\square \Rightarrow (k_1)\,\square\,(k_1)\uparrow a^3(k_2)\\
&K6.\ a^3(k_2)\,\square \Rightarrow (k_2)\,\square\,(k_2)\uparrow b^0(k_2).
\end{aligned}$$

Заключительное полное состояние реализует на лентах № k_1, № k_2 запись пары $\langle g, g\rangle$, внутреннее состояние — b^0, активна лента № k_2.

Пример 3. *Перезапись числа с ленты № k_1 на ленту № k_2 с прибавлением* 1.

В программе предыдущего примера надо команду $K6$ заменить на

$$K6^*. \quad a^3(k_2)\,\square \Rightarrow (k_2)\,|\,(k_2)\cdot b^0(k_2).$$

Заключительное полное состояние реализует на лентах № k_1, № k_2 запись пары $\langle g,\ g+1\rangle$.

Пример 4. *Прибавление* 1 *на той же ленте.*

Начальное полное состояние реализует на ленте № k запись какого-то числа g, внутреннее состояние — a^0, активна лента № k.

$$K1. \quad a^0(k)\ \ | \Rightarrow (k)\,|\,(k)\uparrow a^0(k)$$
$$K2. \quad a^0(k)\,\square \Rightarrow (k)\,|\,(k)\cdot b^0(k).$$

Заключительное полное состояние реализует на ленте № k запись числа $g+1$, внутреннее состояние — b^0, активна лента № k.

Пример 5. *Уничтожение записи числа на ленте* № k.

Начальное полное состояние реализует на ленте № k запись какого-то числа g, внутреннее состояние — a^0, активна лента № k.

$$K1. \quad a^0(k)\ \ | \Rightarrow (k)\,|\,(k)\uparrow a^0(k)$$
$$K2. \quad a^0(k)\,\square \Rightarrow (k)\,\square\,(k)\downarrow a^1(k)$$
$$K3. \quad a^1(k)\ \ | \Rightarrow (k)\,\square\,(k)\downarrow a^1(k)$$
$$K4. \quad a^1(k)\,\square \Rightarrow (k)\,\square\,(k)\cdot b^0(k).$$

В заключительном полном состоянии лента № k пуста, внутреннее состояние — b^0, активна лента № k.

Пример 6. *Сравнение числа x, записанного на ленте № k_1, и числа y, записанного на ленте № k_2, в предположении, что $x \leqslant y$.*

Начальное полное состояние реализует на лентах № k_1, № k_2 пару $\langle x,\ y\rangle$ и имеет внутреннее состояние a^0, активна лента № k_1.

$$K1. \quad a^0(k_1)\ \ | \Rightarrow (k_1)\ \ |\ \ (k_1)\uparrow a^0(k_1)$$
$$K2. \quad a^0(k_1)\,\square \Rightarrow (k_1)\,\square\,(k_1)\downarrow a^0(k_2)$$
$$K3. \quad a^0(k_2)\ \ | \Rightarrow (k_2)\ \ |\ \ (k_2)\uparrow a^0(k_2)$$

$K4.\quad a^0(k_2)\,\square \Rightarrow (k_2)\,\square\,(k_2)\downarrow a^1(k_1)$

$K5.\quad a^1(k_1)\,\mid\, \Rightarrow (k_1)\,\mid\,(k_1)\downarrow a^1(k_2)$

$K6.\quad a^1(k_2)\,\mid\, \Rightarrow (k_2)\,\mid\,(k_2)\downarrow a^1(k_1)$

$K7.\quad a^1(k_1)\,\square \Rightarrow (k_1)\,\square\,(k_1)\uparrow a^2(k_2)$

$K8.\quad a^2(k_2)\,\mid\, \Rightarrow (k_2)\,\mid\,(k_2)\cdot b^1(k_2)$

$K9.\quad a^2(k_2)\,\square \Rightarrow (k_2)\,\square\,(k_2)\uparrow b^2(k_2).$

Машина с этой программой работает следующим образом: команды $K1-K4$ переводят головки обеих лент на верхние палочки соответствующих чисел; затем команды $K5-K6$ отсчитывают от обоих чисел палочки по одной; команда $K7$ опознает конец числа x; и, наконец, команда $K8$, если $x<y$, или $K9$, если $x=y$, переводит внутреннюю память машины в одно из внутренних состояний b^1 или b^2. Итак, в заключительном полном состоянии внутреннее состояние равно b^1, если $x<y$, и b^2, если $x=y$. Случай $x>y$ нас не интересует.

Лемма 2. *Пусть функции $f_1^{(r_1)}, \ldots, f_t^{(r_t)}$ машинно-вычислимы, причем функция $f_i^{(r_i)}$ машинно-вычислима на некоторой l_i-ленточной машине $(i=1, \ldots, t)$. Тогда для любого $q \geqslant 0$ существует такая $(q+l_1+\ldots+l_t)$-ленточная машина и такие ее внутренние состояния $a^{01}, \ldots, a^{0t}$, что для любого i: $1 \leqslant i \leqslant t$, для любого кортежа $\langle x_1, \ldots, x_{r_i}\rangle \in N^{r_i}$ и для любого полного состояния машины с внутренним состоянием a^{0i}, реализующего запись этого кортежа на лентах с номерами*

$$q+l_1+\ldots+l_{i-1}+1,\quad q+l_1+\ldots+l_{i-1}+2, \ldots, q+ \\ +l_1+\ldots+l_{i-1}+r_i \quad (*)$$

и имеющего ленты с номерами

$$q+l_1+\ldots+l_{i-1}+r_i+1,\ q+l_1+\ldots+l_{i-1}+r_i+ \\ +2, \ldots, q+l_1+\ldots+l_{i-1}+l_i \quad (**)$$

пустыми, при котором активна одна из лент групп (*), (**), выполняется следующее: если функция f_i не определена на кортеже $\langle x_1, \ldots, x_{r_i}\rangle$, то машина, отправляясь от указанного полного состояния, никогда не прекращает *работу; если же $f_i(x_1, \ldots, x_{r_i})$ определено, то машина, отправляясь от указанного полного состояния, через какое-то число шагов останавливается, причем ее заключительное полное состояние реализует на лентах с номерами*

$$q+l_1+\ldots+l_{i-1}+1, \quad q+l_1+\ldots+l_{i-1}+2, \ldots, q+ \\ +l_1+\ldots+l_{i-1}+r_i, \quad q+l_1+\ldots+l_{i-1}+r_i+1$$

запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_{r_i}, f_i(x_1, \ldots, x_{r_i})\rangle$, ленты с номерами

$$q+l_1+\ldots+l_{i-1}+r_i+2, \quad q+l_1+\ldots+l_{i-1}+r_i+3, \ldots \\ \ldots, q+l_1+\ldots+l_{i-1}+l_i$$

— пустые, а остальные ленты и головки находятся в том же состоянии (имеют те же самые s_{c_ν}, A_ν, B_ν), *что и в начале работы.*

Несмотря на длинную формулировку, лемма, по существу, очень проста. Она, говоря описательно, утверждает, что если t функций машинно-вычислимы, то существует единая машина для их вычисления, причем число лент этой машины может быть взято сколь угодно большим и каждая из рассматриваемых функций вычисляется, так сказать, на «своих» лентах.

Доказательство леммы тоже чрезвычайно просто. Для построения искомой машины достаточно переименовать внутренние состояния данных t машин так, чтобы каждое внутреннее состояние любой из них было отлично от каждого внутреннего состояния остальных $(t-1)$ машин, потом в каждой команде программы i-й машины $(1 \leqslant i \leqslant t)$ заменить внутренние состояния на соответствующие новые внутренние состояния и ко всем четырем номерам лент (одному — слева, трем — справа) прибавить по $q+l_1+\ldots+l_{i-1}$ и, наконец, в качестве внутренних состояний строящейся машины взять просто объединение новых внутренних состояний всех t машин, в качестве ее программы — объединение новых программ всех t машин. Роль a^{0i} будет играть то внутреннее состояние, в которое перешло внутреннее состояние a^0 i-й машины, существующее по определению вычислимости функции f_i на l_i-ленточной машине.

Теперь может, наконец, быть доказана

Теорема 7. *Всякая частично-рекурсивная функция машинно-вычислима.*

Доказательство. В силу следствия 4 теоремы 1 из § 6, нам достаточно доказать, что функции $O^{(0)}$, $\lambda_1^{(1)}$, $I_k^{(n)}$ машинно-вычислимы и что операции регулярной подстановки, примитивной рекурсии и операция μ сохраняют машинную вычислимость. Машинная вычислимость функций $O^{(0)}$, $\lambda_1^{(1)}$, $I_k^{(n)}$ вытекает из примеров 1, 3, 2.

1) Докажем, что операция регулярной подстановки сохраняет машинную вычислимость. Пусть

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$$

и пусть функции $\chi_1^{(n)}, \ldots, \chi_m^{(n)}$, $\psi^{(m)}$ машинно-вычислимы. Пусть функция χ_i $(i = 1, \ldots, m)$ вычислима на l_i-ленточной машине, а функция ψ — на l-ленточной машине. Положим $q = n + 1$. Возьмем $(q + l_1 + \ldots + l_m + l)$-ленточную машину, существующую по лемме 2. Обозначим эту машину через $\mathfrak{A}$. Искомая машина получится из машины $\mathfrak{A}$ расширением программы. Пусть первые n лент машины $\mathfrak{A}$ реализуют кортеж $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, остальные ленты — пустые. Вычислять $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ можно следующим образом.

1°. Переписать число x_i $(i = 1, \ldots, n)$ с ленты № i на ленты с номерами

$$q + i,\ q + l_1 + i,\ q + l_1 + l_2 + i, \ldots, q + l_1 + l_2 + \ldots + l_{m-1} + i.$$

2°. Приведя машину $\mathfrak{A}$ в соответствующее внутреннее состояние (см. лемму 2), получить на ленте № $(q + l_1 + \ldots + l_{j-1} + n + 1)$ число $\chi_j(x_1, \ldots, x_n)$ (для каждого $j = 1, \ldots, m$).

3°. Переписать число $\chi_j(x_1, \ldots, x_n)$ (для $j = 1, \ldots, m$) с ленты № $(q + l_1 + \ldots + l_{j-1} + n + 1)$ на ленту № $(q + l_1 + \ldots + l_m + j)$.

4°. Приведя машину $\mathfrak{A}$ в соответствующее внутреннее состояние, получить на ленте № $(q + l_1 + \ldots + l_m + m + 1)$ число $\psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n)) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

5°. Переписать число $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с ленты № $(q + l_1 + \ldots + l_m + m + 1)$ на ленту № $(n + 1)$.

6°. Уничтожить записи чисел на лентах с номерами

$$\begin{array}{lll} q+1, \ldots, & q+n, & q+n+1, \\ q+l_1+1, \ldots, & q+l_1+n, & q+l_1+n+1, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q+l_1+\ldots+l_{m-1}+1, \ldots, & q+l_1+\ldots+l_{m-1}+n, & q+l_1+\ldots+l_{m-1}+n+1, \\ q+l_1+\ldots+l_{m-1}+l_m+1, \ldots, & q+l_1+\ldots+l_{m-1}+l_m+m, & q+l_1+\ldots+l_{m-1}+l_m+m+1. \end{array}$$

После выполнения всех пунктов этого плана, ленты с номерами $1, \ldots, n, n+1$ будут реализовать кортеж $\langle x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\rangle$, а все остальные ленты будут пустыми. Пункты 2° и 4° плана осуществляются программой машины $\mathfrak{A}$. Программы для выполнения пунктов 1°, 3°, 5° («переписать») и 6° («уничтожить») пишутся по образцу примеров 2 и 5. Для того, чтобы построить искомую машину, нужно все эти программы объединить в одну. А для этого, во-первых, переименовываются (так же, как при доказательстве леммы 2) внутренние состояния (номеров лент в командах здесь менять не нужно), и, во-вторых, к каждой подпрограмме (кроме последней) добавляется серия команд, в которых слева стоят все заключительные тройки $\langle a_d, k, s_c\rangle$ данной подпрограммы, а справа — соответствующие выражения вида

$$(k)\, s_c\,(k)\cdot a_{d^*}\,(i),$$

где a_{d^*} — начальное внутреннее состояние для следующей подпрограммы, i — номер ленты, стоящий слева в начальной команде следующей подпрограммы.

2) Докажем, что операция примитивной рекурсии сохраняет машинную вычислимость. Ограничимся, ради простоты записи, частным случаем. Общий случай рассматривается совершенно аналогично. Пусть функции $\psi^{(1)}$ и $\chi^{(3)}$ машинно-вычислимы и пусть

$$\begin{cases} \varphi(0, y) = \psi(y), \\ \varphi(x+1, y) = \chi(x, y, \varphi(x, y)). \end{cases}$$

Пусть функция ψ вычислима на l_1-ленточной, функция χ — на l_2-ленточной машине. Положим $q=4$. Возьмем $(q+l_1+l_2)$-ленточную машину, существующую по лемме 2. Обозначим эту машину через $\mathfrak{B}$. Искомая машина получится расширением программы машины $\mathfrak{B}$. Пусть первые две ленты машины $\mathfrak{B}$ реализуют пару $\langle x, y\rangle$, остальные ленты — пустые. Изложим следующий алгоритм вычисления $\varphi(x, y)$:

1°. Переписать число y с ленты № 2 на ленту № $(q+1)$ и на ленту № $(q+l_1+2)$.

2°. Приведя машину $\mathfrak{B}$ в соответствующее внутреннее состояние, получить на ленте № $(q+2)$ число $\psi(y)$.

3°. Переписать число $\psi(y)$ с ленты № $(q+2)$ на ленту № 3.

4°. Записать на ленте № 4 число 0.

5°. Сравнить [4] и [1]*). Если $[4]<[1]$, выполнять 6°. Если $[4]=[1]$, выполнять 12°.

6°. Переписать число [4] с ленты № 4 на ленту № $(q+l_1+1)$ и число [3] с ленты № 3 на ленту № $(q+l_1+3)$.

7°. Приведя машину $\mathfrak{B}$ в соответствующее внутреннее состояние, получить на ленте № $(q+l_1+4)$ число $\chi([q+l_1+1],\ [q+l_1+2],\ [q+l_1+3])$.

8°. Уничтожить запись числа на ленте № 3.

9°. Переписать число $[q+l_1+4]$ с ленты № $(q+l_1+4)$ на ленту № 3.

10°. Уничтожить записи чисел на лентах с номерами $q+l_1+1,\ q+l_1+3,\ q+l_1+4$.

11°. Прибавить 1 к числу [4] на ленте № 4 и перейти к 5°

12°. Уничтожить записи чисел на лентах с номерами $4,\ q+1,\ q+2,\ q+l_1+2$.

По окончании выполнения этого алгоритма ленты с номерами 1, 2, 3 будут реализовать тройку $\langle x, y, \varphi(x, y)\rangle$, а все остальные ленты будут пустыми. Шаги 2° и 7° этого алгоритма осуществляются программой машины $\mathfrak{B}$. Программы для выполнения шагов 1°, 3°, 6°, 9° («переписать»), 8°, 10°, 12° («уничтожить»), 4° («записать число»), 11° («прибавить 1 на той же ленте») и 5° («сравнить два числа») пишутся по образцу примеров 2, 5, 1, 4 и 6. Объединение программ проделывается так же, как в 1), за исключением того, что заключительным тройкам подпрограммы 5° вида $\langle b^1, k, s_c\rangle$ (см. прим. 6) ставится в соответствие начальное внутреннее состояние подпро-

*) Через $[i]$ мы — до окончания доказательства теоремы 7 — будем обозначать число, записанное на ленте № i.

граммы 6°, а тройкам вида $\langle b^2, k, s_c\rangle$ — внутреннее состояние подпрограммы 12°.

3) Докажем, наконец, что операция μ сохраняет машинную вычислимость. Ограничимся опять частным случаем. Пусть функция $\psi^{(2)}$ машинно-вычислима и пусть

$$\varphi(x) = (\mu y)[\psi(x, y) = 0].$$

Пусть функция ψ вычислима на l-ленточной машине. Положим $q = 3$. Возьмем $(q+l)$-ленточную машину, существующую по лемме 2. Обозначим эту машину через $\mathfrak{C}$. Искомая машина получится расширением программы машины $\mathfrak{C}$. Пусть первая лента машины $\mathfrak{C}$ реализует число x, остальные ленты — пустые. Алгоритм вычисления $\varphi(x)$ следующий:

1°. Записать на лентах № 2 и № 3 число 0.

2°. Переписать число x с ленты № 1 на ленту № $(q+1)$ и число 0 с ленты № 2 на ленту № $(q+2)$.

3°. Приведя машину $\mathfrak{C}$ в соответствующее внутреннее состояние, получить на ленте № $(q+3)$ число $\psi([q+1], [q+2])$.

4°. Сравнить [3] и $[q+3]$. Если $[3] < [q+3]$, выполнять 5°. Если $[3] = [q+3]$, выполнять 7°.

5°. Прибавить 1 к числу $[2] = [q+2]$ на ленте № 2 и на ленте № $(q+2)$.

6°. Уничтожить запись числа на ленте № $(q+3)$ и перейти к 3°.

7°. Уничтожить записи чисел на лентах с номерами 3, $q+1$, $q+2$, $q+3$.

По окончании выполнения этого алгоритма ленты с номерами 1, 2 будут реализовать пару $\langle x, \varphi(x)\rangle$, а все остальные ленты будут пустыми. Шаг 3° этого алгоритма осуществляется программой машины $\mathfrak{C}$. Остальные шаги программируются с помощью примеров 1, 2, 4 — 6. Объединение программ выполняется подобно тому, как это было намечено в 2).

Теорема 7 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Просмотрев снова доказательство теоремы 7, легко убедиться, что мы доказали немного больше, чем утверждалось, а именно мы доказали, что всякая частично-рекурсивная функция вычислима на некоторой многоленточной машине с о д н о б у к в е н н ы м алфавитом внешней памяти. Принимая во внимание теорему 6, получим отсюда, что *всякая машинно-вычислимая функция вычислима на некоторой многоленточной машине с однобуквенным алфавитом внешней памяти.*

Научимся теперь вычислять функции на одноленточных машинах.

Условимся говорить, что данное полное состояние одноленточной машины *реализует запись кортежа* $\langle n_1, \ldots, n_r \rangle$, если на ленте снизу вверх расположены последовательно записи чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$, отделенные друг от друга двумя пустыми клетками, остальные клетки пусты и головка смотрит на одну из палочек.

Определение. Функция f типа $N^r \to N$ называется *вычислимой по Тьюрингу на данной одноленточной машине* (машине Тьюринга), коль скоро существует такое внутреннее состояние машины a^0, что для всякого кортежа $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle \in N^r$ и для всякого полного состояния машины с внутренним состоянием a^0, реализующего запись этого кортежа, выполняется следующее: если функция f не определена на кортеже $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$, то машина, отправляясь от указанного полного состояния, никогда не прекращает работу; если же $f(x_1, \ldots, x_r)$ определено, то машина, отправляясь от указанного полного состояния, через какое-то число шагов останавливается, причем ее заключительное полное состояние реализует запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_r \ f(x_1, \ldots, x_r) \rangle$*).

Определение. Функция f типа $N^r \to N$ называется *вычислимой по Тьюрингу*, если существует такая одноленточная машина (машина Тьюринга), на которой f вычислима*).

Имеет место следующее важное утверждение, являющееся еще одним подтверждением Основной гипотезы: *функция f типа $N^r \to N$ тогда и только тогда вычислима по Тьюрингу, когда она частично-рекурсивна.* Это утверждение мы получим ниже в качестве теоремы 10. Для его доказательства нам понадобится ввести промежуточное, вспомогательное понятие *вычислимости с разрежением* и доказать две теоремы (теоремы 8 и 9).

---

*) Эти определения лишь в незначительных деталях отличаются от определений, приведенных в § 67 книги С. К. Клини [1952].

Возьмем ленту внешней памяти одноленточной машины и фиксируем какое-нибудь целое положительное число l. Разобьем взятую ленту на группы по l соседних клеток. Назовем эти группы *l-секциями*. Нумеровать клетки каждой l-секции мы будем — от первой до l-й — снизу вверх. Каждое разбиение ленты на l-секции будем называть *l-разбиением*. Очевидно, для каждого l существует l различных l-разбиений ленты.

Условимся говорить, что данное полное состояние одноленточной машины *m-реализует запись числа n относительно данного l-разбиения* ленты (здесь $1 \leqslant m \leqslant l$), если на m-х клетках каких-то $n+1$ последовательных l-секций записаны палочки, а m-е клетки всех остальных l-секций пусты. Условимся далее говорить, что данное полное состояние одноленточной машины *реализует запись кортежа $\langle n_1, \ldots, n_r\rangle$ относительно данного l-разбиения* ленты, если выполняются следующие три условия: 1) для каждого i, для которого $1 \leqslant i \leqslant r$, рассматриваемое полное состояние i-реализует запись числа n_i относительно рассматриваемого l-разбиения; 2) для каждого i, для которого $r+1 \leqslant i \leqslant l$, i-е клетки всех l-секций пусты; 3) существует такая l-секция, в которой записано ровно r палочек, причем головка смотрит на первую клетку этой l-секции. Кроме того, будем считать, что пустой кортеж реализуется — относительно любого l-разбиения — любым полным состоянием, при котором на ленте ничего не написано.

Определение. Функция f типа $N^r \to N$ называется *вычислимой с l-разрежением на данной одноленточной машине*, коль скоро существует такое внутреннее состояние машины a^0, что для всякого кортежа $\langle x_1, \ldots, x_r\rangle \in N^r$ и для всякого полного состояния машины с внутренним состоянием a^0, реализующего запись этого кортежа относительно некоторого l-разбиения ее ленты, выполняется следующее: если функция f не определена на кортеже $\langle x_1, \ldots, x_r\rangle$, то машина, отправляясь от указанного полного состояния, никогда не прекращает работу; если же $f(x_1, \ldots, x_r)$ определено, то машина, отправляясь от указанного полного состояния, через какое-то число шагов останавливается, причем ее заключительное полное состояние реализует запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_r, f(x_1, \ldots, x_r)\rangle$ относительно того же самого l-разбиения.

Определение. Функция f типа $N^r \longrightarrow N$ называется *разрежённо-вычислимой*, если существуют такое число l и такая одноленточная машина, что f вычислима с l-разрежением на этой одноленточной машине.

Прежде чем перейти к теореме 8, приведем три примера программ одноленточных машин, которые нам понадобятся при ее доказательстве.

Пример 7. *Поиск символа.*

Дан алфавит $S_1 = \{s_1, \ldots, s_\delta\}$. Один символ в нем выделен: $s_c \in S_1$. Требуется построить одноленточную машину, которая на ленте внешней памяти, в каждой непустой клетке которой записан один из символов алфавита S_1, находила бы символ s_c. Искомой будет машина с алфавитом внешней памяти $S_2 = \{s_1, \ldots, s_\delta, \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{c-1}, \bar{s}_{c+1}, \ldots, \bar{s}_\delta, \bar{s}_0\}$ и программой *)

$K1.$	$a^0 s_c \Rightarrow s_c \cdot b^0$	$K10.$	$a^3 s_c \Rightarrow s_c \cdot b^0$
$K2.$	$a^0 \xi \Rightarrow \bar{\xi} \uparrow a^1$	$K11.$	$a^4 \xi \Rightarrow \xi \uparrow a^4$
$K3.$	$a^1 \xi \Rightarrow \bar{\xi} \downarrow a^2$	$K12.$	$a^4 s_c \Rightarrow s_c \cdot b^0$
$K4.$	$a^2 \bar{\xi} \Rightarrow \bar{\xi} \downarrow a^2$	$K13.$	$a^2 s_c \Rightarrow s_c \uparrow a^5$
$K5.$	$a^2 \xi \Rightarrow \bar{\xi} \uparrow a^1$	$K14.$	$a^5 \bar{\xi} \Rightarrow \xi \uparrow a^5$
$K6.$	$a^1 \bar{\xi} \Rightarrow \bar{\xi} \uparrow a^1$	$K15.$	$a^5 \xi \Rightarrow \xi \downarrow a^6$
$K7.$	$a^1 s_c \Rightarrow s_c \downarrow a^3$	$K16.$	$a^5 s_c \Rightarrow s_c \cdot b^0$
$K8.$	$a^3 \bar{\xi} \Rightarrow \xi \downarrow a^3$	$K17.$	$a^6 \xi \Rightarrow \xi \downarrow a^6$
$K9.$	$a^3 \xi \Rightarrow \xi \uparrow a^4$	$K18.$	$a^6 s_c \Rightarrow s_c \cdot b^0,$

где $\xi \in \{s_1, \ldots, s_{c-1}, s_{c+1}, \ldots, s_\delta, s_0\}$**).

---

*) Команда одноленточной, как и всякой многоленточной, машины имеет вид $a_d\,(k)\,s_c \Rightarrow (h)\,s_{c*}\,(i)\,z_b a_{d*}\,(j)$. Поскольку, в случае одноленточной машины, $k = h = i = j = 1$, мы будем чаще всего записывать такую команду в виде

$$a_d s_c \Rightarrow s_{c*} z_b a_{d*}.$$

**) Эта запись означает, что ξ замещает собой произвольную букву из алфавита $\{s_1, \ldots, s_{c-1}, \ldots, s_{c+1}, s_\delta, s_0\}$; таким образом, каждая команда, содержащая букву ξ, является на самом деле сокращенной записью целой серии команд, получающихся подстановкой вместо ξ букв $s_1, \ldots, s_{c-1}, s_{c+1}, \ldots, s_\delta, s_0$.

Если в начальный момент на ленте внешней памяти имеются только символы алфавита $S_1 \bigcup \{s_0\}$, в какой-то клетке действительно написан символ s_c и машина имеет внутреннее состояние a^0, то через какое-то число шагов машина — во внутреннем состоянии b^0 — останавливается, на ленте написано то же самое, что и перед началом работы машины, и считываемый символ есть s_c.

Пример 8. *Поиск символа с запоминанием стороны, в которой он найден.*

Если в программе, построенной в предыдущем примере, заменить команды $K1$, $K10$, $K12$, $K16$, $K18$ на команды

$$\begin{aligned} &K1^*. && a^0 s_c \Rightarrow s_c \cdot b^1 \\ &K10^*. && a^3 s_c \Rightarrow s_c \cdot b^2 \\ &K12^*. && a^4 s_c \Rightarrow s_c \cdot b^3 \\ &K16^*. && a^5 s_c \Rightarrow s_c \cdot b^3 \\ &K18^*. && a^6 s_c \Rightarrow s_c \cdot b^2, \end{aligned}$$

то полученная машина обладает следующим свойством: если в начальный момент на ленте внешней памяти имеются только символы алфавита $S_1 \bigcup \{s_0\}$, в какой-то клетке действительно написан символ s_c и машина имеет внутреннее состояние a^0, то через какое-то число шагов машина останавливается, на ленте внешней памяти написано то же самое, что и перед началом работы машины, считываемый символ есть s_c и внутреннее состояние есть b^1, b^2 или b^3 в зависимости от того, совпадает ли клетка, в которой расположен найденный символ s_c, с клеткой, на которую перед началом работы смотрела головка, лежит ли она ниже исходной клетки или выше.

Пример 9. *Поиск одного из двух символов.* Дан алфавит $S_1 = \{s_1, \ldots, s_\delta\}$. В нем выделены два символа: s_c и s_d. Требуется построить одноленточную машину, которая на ленте внешней памяти, в каждой непустой клетке которой записан один из символов алфавита S_1, находила бы какой-нибудь из символов: s_c или s_d. Искомой будет машина с алфавитом внешней памяти $S_2' = \{s_1, \ldots, s_\delta, \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{c-1}, \bar{s}_{c+1}, \ldots, \bar{s}_{d-1}, \bar{s}_{d+1}, \ldots, \bar{s}_\delta, \bar{s}_0\}$ и программой из примера 7, в которую вносятся следующие изменения: во-первых, s_c заменяется на η, где

$\eta \in \{s_c, s_d\}$ (т. е., другими словами, каждая из команд, содержавшая s_c, «раздваивается», превращается в две команды), и, во-вторых, ограничивается область изменения $\xi : \xi \in \{s_1, \ldots, s_{c-1}, s_{c+1}, \ldots, s_{d-1}, s_{d+1}, \ldots, s_\delta, s_0\}$. Если в начальный момент на ленте внешней памяти имеются только символы алфавита $S_1 \bigcup \{s_0\}$, в какой-то клетке действительно написан один из символов: s_c или s_d, и машина имеет внутреннее состояние a^0, то через какое-то число шагов машина — во внутреннем состоянии b^0 — останавливается, на ленте написано то же самое, что и перед началом работы машины, и считываемый символ есть либо s_c, либо s_d.

Замечание. Рассмотрим снова три одноленточные машины, построенные в примерах 7 — 9. Возьмем сначала машину, построенную в примере 7. Она по существу вполне определяется алфавитом S_1, символом s_c и внутренними состояниями a^0, b^0. Преобразуем ее. В том виде, в котором она построена в примере 7, она имеет внутренние состояния a^0, b^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6. Заменим внутреннее состояние a^i для $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ на тройку $\langle a^i, a^0, b^0\rangle$. Теперь машина имеет внутренние состояния a^0, b^0, $\langle a^1, a^0, b^0\rangle$, $\langle a^2, a^0, b^0\rangle, \ldots, \langle a^6, a^0, b^0\rangle$. Обозначим программу такой модифицированной машины поиска через $\Gamma_1(S_1; s_c; a^0, b^0)$. Цель такого преобразования станет вполне ясна при доказательстве теоремы 8. Пока же заметим, что если, исходя из одного и того же алфавита S_1 и одного и того же символа s_c, построить две машины, отличающиеся начальным и конечным внутренними состояниями — скажем, машины с программами $\Gamma_1(S_1; s_c; a^0, b^0)$ и $\Gamma_1(S_1; s_c; a_0, b_0)$, то каждое внутреннее состояние любой из этих двух машин будет отлично от каждого внутреннего состояния другой машины. Возьмем теперь машину, построенную в примере 8. Она определяется алфавитом S_1, символом s_c и внутренними состояниями a^0, b^1, b^2, b^3. Ее список внутренних состояний: a^0, b^1, b^2, b^3, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6. Заменим внутреннее состояние a^i для $i : 1 \leqslant i \leqslant 6$ на $\langle a^i, a^0, b^1, b^2, b^3\rangle$. Программу полученной после такого преобразования машины обозначим через $\Gamma_2(S_1; s_c; a^0, b^1, b^2, b^3)$. Возьмем, наконец, машину, построенную в примере 9. Она определяется алфавитом S_1, символами s_c, s_d и внутренними состояниями a^0, b^0. Ее список внутренних состояний: a^0, b^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6. Заменим внутреннее состояние a^i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ на $\langle a^i, a^0, b^0 \rangle$. Программу полученной машины обозначим через $\Gamma_3(S_1; s_c, s_d; a^0, b^0)$.

Теорема 8. *Функция f типа $N^t \to N$ тогда и только тогда разрежённо-вычислима, когда она машинно-вычислима.*

Доказательство. Нульместные функции машинно-вычислимы и разреженно-вычислимы. Остается рассмотреть функции от положительного числа аргументов.

1) Достаточность («тогда»). Пусть функция f типа $N^t \to N$ $(t > 0)$ машинно-вычислима, т. е. вычислима на некоторой l-ленточной машине $\mathfrak{M}$. В силу замечания на стр. 437, можно считать, что машина $\mathfrak{M}$ имеет однобуквенный алфавит внешней памяти $S = \{s_1\}$. Пусть внутренними состояниями машины $\mathfrak{M}$ являются $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$. Пусть, наконец, начальное внутреннее состояние машины $\mathfrak{M}$, с которого начинается вычисление значений функции f, будет a_{d_0}. Начнем строить одноленточную машину $\mathfrak{D}$, на которой вычислима с l-разрежением функция f. Алфавит внешней памяти S' машины $\mathfrak{D}$ мы можем написать сразу же:

$$S' = \{s_1, s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, \ldots, s_1^{(l)}, s_0^{(1)}, s_0^{(2)}, \ldots, s_0^{(l)},$$
$$\overline{s_1}, \overline{s_1^{(1)}}, \overline{s_1^{(2)}}, \ldots, \overline{s_1^{(l)}}, \overline{s_0^{(1)}}, \overline{s_0^{(2)}}, \ldots, \overline{s_0^{(l)}}, \overline{s_0}\}.$$

Напомним, что $s_1 = |$ служит для записи чисел, $s_0 = \square$ — пустой символ. Обозначим через S_1 следующий подалфавит алфавита S':

$$S_1 = \{s_1, s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, \ldots, s_1^{(l)}, s_0^{(1)}, s_0^{(2)}, \ldots, s_0^{(l)}\}.$$

Внутренние состояния машины $\mathfrak{D}$ мы выпишем пока лишь частично. Остальные ее внутренние состояния определятся после написания программы: это будут те (и только те!) символы и кортежи символов (чаще — кортежи), которые будут фигурировать в программе в качестве внутренних состояний.

Прежде всего, в число внутренних состояний строящейся машины включим всевозможные четверки вида $\langle a_d, k, s_c, 0 \rangle$, где $1 \leqslant d \leqslant \alpha$, $1 \leqslant k \leqslant l$, $0 \leqslant c \leqslant 1$. Кроме того, объявим внутренним состоянием машины $\mathfrak{D}$

символ a^0. Он будет играть роль начального (для вычисления с l-разрежением) внутреннего состояния.

Начнем составлять программу машины $\mathfrak{D}$. Программу мы будем составлять последовательно, по частям (см. на рис. 32, a блок-схему программы; во внутренних состояниях a^0 и a^1 машина $\mathfrak{D}$ будет начинать и кончать вычисление значений функции f; во внутренних состояниях $\langle a_{d_0}, l, s_0, 0\rangle$ и b^{l+2} она будет переходить от подпрограм-

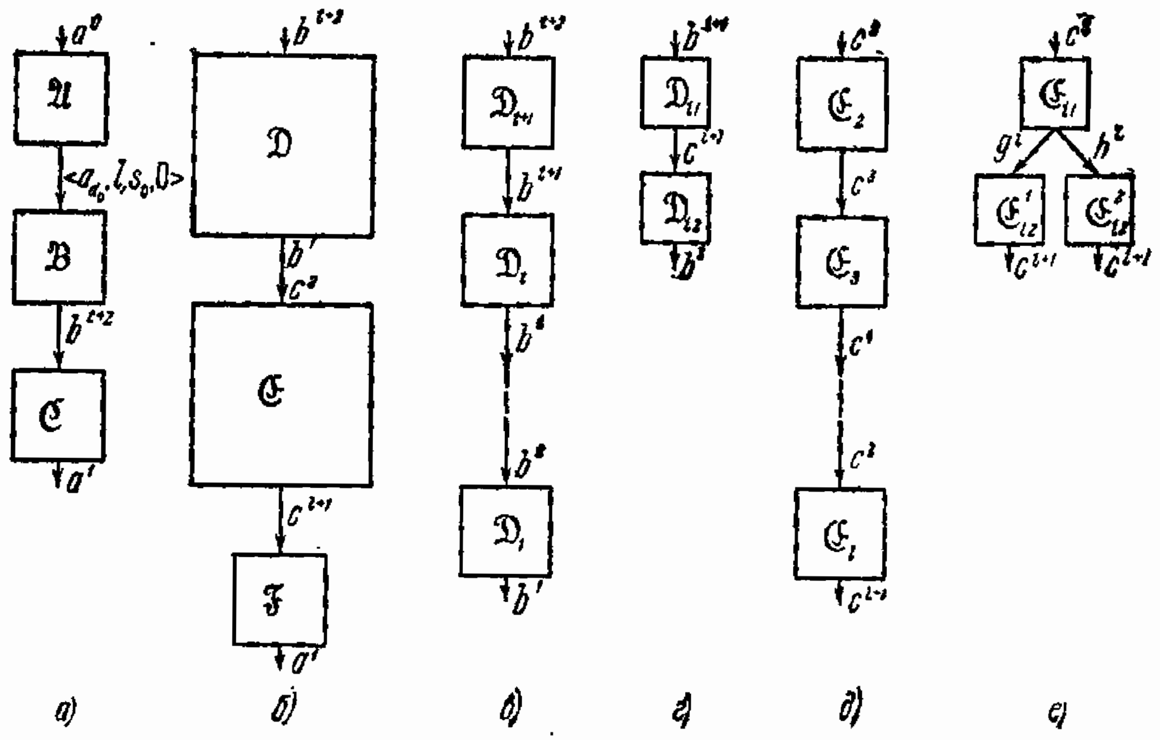


Рис. 32.

мы $\mathfrak{A}$ к подпрограмме $\mathfrak{B}$ и от подпрограммы $\mathfrak{B}$ к подпрограмме $\mathfrak{C}$). Одновременно мы будем доказывать, что составляемая программа приводит строящуюся машину к нужному результату.

Возьмем произвольный кортеж $\langle x_1, \ldots, x_l\rangle \in N^l$ и произвольное полное состояние Ξ_0 машины $\mathfrak{D}$ с внутренним состоянием a^0, реализующее запись этого кортежа относительно некоторого l-разбиения $\varkappa$ ленты внешней памяти машины $\mathfrak{D}$. Фиксируем l-разбиение $\varkappa$ до конца доказательства достаточности. Все дальнейшие упоминания о первых, ..., i-х, ..., l-х клетках l-секций относятся именно к l-разбиению $\varkappa$. Разумеется, сама программа не будет явно ссылаться на это l-разбиение.

Для доказательства нам удобно будет ввести два вспомогательных понятия. Рассмотрим какое-нибудь полное состояние Σ машины $\mathfrak{M}$ с внутренним состоянием a_d, активной лентой № k и считываемым на ленте № k символом s_c. Полное состояние Ξ машины $\mathfrak{D}$ мы назовем *почти соответствующим* полному состоянию Σ, коль скоро в полном состоянии Ξ считываемый символ есть $s_c^{(k)}$ и для каждого i: $1 \leqslant i \leqslant l$ выполняется следующее условие: если головка № i машины $\mathfrak{M}$ смотрит на символ s_n, то в i-й клетке некоторой l-секции записан символ $s_n^{(i)}$ и для любого $p=1, 2, 3, \ldots$ символы, записанные в i-й клетке p-й сверху l-секции и в i-й клетке p-й снизу l-секции (отсчет ведется от той l-секции, в которой записан символ $s_n^{(i)}$), совпадают с символами, записанными, соответственно, в p-й сверху клетке и в p-й снизу клетке на ленте № i (отсчет ведется от той клетки, на которую смотрит головка № i). Другими словами, в полном состоянии Ξ для каждого i: $1 \leqslant i \leqslant l$ на i-х клетках l-секций записано (по порядку!) содержимое ленты № i, положение головки № i замечается отметкой $^{(i)}$ на соответствующем символе, и головка машины $\mathfrak{D}$ считывает символ, соответствующий символу, считываемому активной головкой. В этом определении ничего не говорится о внутреннем состоянии полного состояния Ξ. Полное состояние Ξ машины $\mathfrak{D}$ мы назовем *соответствующим* полному состоянию Σ, если, во-первых, оно почти соответствует полному состоянию Σ и, во-вторых, его внутреннее состояние есть $\langle a_d, k, s_c, 0\rangle$.

Каждому полному состоянию машины $\mathfrak{M}$ соответствует, вообще говоря, бесконечное множество полных состояний машины $\mathfrak{D}$.

Перейдем к выписыванию команд. Подпрограмма $\mathfrak{A}$

$$a^0 s_1 \quad \Rightarrow s_1^{(1)} \uparrow u_1$$

$$u_1 s_1 \quad \Rightarrow s_1^{(2)} \uparrow u_2$$

$$\vdots$$

$$u_{t-1}\, s_1 \Rightarrow s_1^{(t)} \uparrow u_t$$

$$u_t\, s_0 \quad \Rightarrow s_0^{(t+1)} \uparrow u_{t+1}$$

$$u_{t+1}\, s_0 \Rightarrow s_0^{(t+2)} \uparrow u_{t+2}$$

$$\vdots$$

$$u_{l-2}\, s_0 \Rightarrow s_0^{(l-1)} \uparrow u_{l-1}$$

$$u_{l-1}\, s_0 \Rightarrow s_0^{(l)} \cdot \langle a_{d_0},\, l,\, s_0,\, 0\rangle$$

переведет машину $\mathfrak{O}$ из полного состояния Ξ_0 в полное состояние Ξ_1, соответствующее некоторому полному состоянию Σ_1 машины $\mathfrak{M}$ с внутренним состоянием a_{d_0} и активной лентой № l, реализующему на лентах с номерами $1, 2, \ldots, t$ запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_t\rangle$ и имеющему остальные ленты пустыми. Отправляясь от полного состояния Σ_1, машина $\mathfrak{M}$ может начинать вычисление значения $f(x_1, \ldots, x_t)$. Если $f(x_1, \ldots, x_t)$ определено, машина $\mathfrak{M}$, начав из полного состояния Σ_1, через какое-то число шагов остановится, и ее заключительное полное состояние Σ_2 будет реализовать на лентах с номерами $1, 2, \ldots, t, t+1$ запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_t, f(x_1, \ldots, x_t)\rangle$, а все остальные ленты будут пустыми.

Подпрограмма $\mathfrak{B}$ (которая будет описана ниже), во-первых, переведет машину $\mathfrak{O}$ в некоторое полное состояние Ξ_2, соответствующее заключительному полному состоянию Σ_2 машины $\mathfrak{M}$ (если $f(x_1, \ldots, x_t)$ не определено, то машина $\mathfrak{M}$ и, вследствие устройства подпрограммы $\mathfrak{B}$, машина $\mathfrak{O}$ будут работать бесконечно), и, во-вторых, изменит внутреннее состояние полного состояния Ξ_2 на b^{t+2}. Таким образом, подпрограмма $\mathfrak{B}$ должна, прежде всего, имитировать работу машины $\mathfrak{M}$ в следующем смысле: если машина $\mathfrak{M}$ переводит полное состояние Σ' в полное состояние Σ'', то машина $\mathfrak{O}$ должна переводить любое полное состояние Ξ', соответствующее полному состоянию Σ', в некоторое полное состояние Ξ'', соответствующее полному состоянию Σ''.

Возьмем произвольную команду

$$a_d\,(k)\, s_c \Rightarrow (h)\, s_{c*}\,(i)\, z_b a_{d*}\,(j) \qquad (*)$$

машины $\mathfrak{M}$. Напишем такую серию команд $\mathfrak{B}_{(*)}$ для машины $\mathfrak{O}$, которая будет обладать следующим свойством: каково бы ни было полное состояние Σ' машины $\mathfrak{M}$ с первой компонентой a_d, второй компонентой k и $3k$-й компонентой s_c и каково бы ни было полное состояние Ξ' машины $\mathfrak{D}$, соответствующее полному состоянию Σ', если полное состояние Σ' под действием команды (*) переходит в полное состояние Σ'', то полное состояние Ξ' под действием серии команд $\mathfrak{B}_{(*)}$ переходит в некоторое полное состояние Σ'', соответствующее полному состоянию Σ''. Серия команд $\mathfrak{B}_{(*)}$ состоит из семи групп:

I. $\langle a_d, k, s_c, 0\rangle s_c^{(h)} \Rightarrow s_c^{(h)} \cdot \langle a_d, k, s_c, \text{ищи}_1\ (h)\rangle.$

II. $\Gamma_3(S_1;\ s_0^{(h)}, s_1^{(h)};$

$\langle a_d, k, s_c, \text{ищи}_1\ (h)\rangle, \langle a_d, k, s_c, \text{нашла}_1\ (h)\rangle).$

III. $\langle a_d, k, s_c, \text{нашла}_1\ (h)\rangle s_0^{(h)} \Rightarrow s_{c*}^{(h)} \cdot \langle a_d, k, s_c, \text{ищи}_2\ (i)\rangle.$

$\langle a_d, k, s_c, \text{нашла}_1\ (h)\rangle s_1^{(h)} \Rightarrow s_{c*}^{(h)} \cdot \langle a_d, k, s_c, \text{ищи}_2\ (i)\rangle.$

IV. $\Gamma_3(S_1;\ s_0^{(i)}, s_1^{(i)};$

$\langle a_d, k, s_c, \text{ищи}_2\ (i)\rangle, \langle a_d, k, s_c, \text{нашла}_2\ (i)\rangle).$

V. $\langle a_d, k, s_c, \text{нашла}_2\ (i)\rangle s_0^{(i)} \Rightarrow s_0 z_b \langle a_d, k, s_c, \text{перенос}\ (i)_1\rangle$

$\langle a_d, k, s_c, \text{нашла}_2\ (i)\rangle s_1^{(i)} \Rightarrow s_1 z_b \langle a_d, k, s_c, \text{перенос}\ (i)_1\rangle$

$\langle a_d, k, s_c, \text{перенос}\ (i)_p\rangle \xi \Rightarrow \xi z_b \langle a_d, k, s_c, \text{перенос}\ (i)_{p+1}\rangle,$

где $\xi \in S_1$, $p = 1, 2, \ldots, l-1$

$\langle a_d, k, s_c, \text{перенос}\ (i)_l\rangle s_0 \Rightarrow s_0^{(i)} \cdot \langle a_d, k, s_c, \text{ищи}_3\ (j)\rangle$

$\langle a_d, k, s_c, \text{перенос}\ (i)_l\rangle s_1 \Rightarrow s_1^{(i)} \cdot \langle a_d, k, s_c, \text{ищи}_3\ (j)\rangle.$

VI. $\Gamma_3(S_1;\ s_0^{(j)}, s_1^{(j)};$

$\langle a_d, k, s_c, \text{ищи}_3\ (j)\rangle, \langle a_d, k, s_c, \text{нашла}_3\ (j)\rangle).$

VII. $\langle a_d, k, s_c, \text{нашла}_3\ (j)\rangle s_0^{(j)} \Rightarrow s_0^{(j)} \cdot \langle a_{d*}, j, s_0, 0\rangle$

$\langle a_d, k, s_c, \text{нашла}_3\ (j)\rangle s_1^{(j)} \Rightarrow s_1^{(j)} \cdot \langle a_{d*}, j, s_1, 0\rangle.$

Здесь кортежи $\langle a_d, k, s_c, \text{ищи}_2\ (i)\rangle$, $\langle a_d, k, s_c, \text{перенос}\ (i)_p\rangle$ и т. п. обозначают внутренние состояния строящейся машины $\mathfrak{D}$; относительно Γ_3 см. замечание на стр. 442. Предоставляем читателю убедиться, что серия команд $\mathfrak{B}_{(*)}$ обладает нужным свойством.

Напишем теперь для каждой команды машины $\mathfrak{M}$ соответствующую серию команд машины $\mathfrak{D}$. Очевидно, любое внутреннее состояние, входящее в любую из этих серий, отлично от любого внутреннего состояния, входящего в любую другую серию. Поэтому, если мы объединим все эти серии в один список, то никакие две команды этого объединенного списка не будут иметь одинаковых левых частей и, следовательно, этот список может рассматриваться как программа (отметим, что именно для этого нам и нужно было преобразование, проделанное в замечании на стр. 442). Подпрограмма $\mathfrak{B}$ и состоит, во-первых, из объединения серий команд, соответствующих всем командам машины $\mathfrak{M}$, и, во-вторых, из группы команд вида

$$\langle a_d, k, s_c, 0\rangle s_0^{(p)} \Rightarrow s_0^{(p)} \cdot b^{t+2},$$
$$\langle a_d, k, s_c, 0\rangle s_1^{(p)} \Rightarrow s_1^{(p)} \cdot b^{t+2},$$

написанной для всех заключительных троек $\langle a_d, k, s_c\rangle$ машины $\mathfrak{M}$ и для $p = 1, 2, \ldots, l$. После выполнения команд подпрограммы $\mathfrak{B}$ машина $\mathfrak{O}$ перейдет в полное состояние Ξ_2', почти соответствующее заключительному полному состоянию Σ_2 машины $\mathfrak{M}$. Внутреннее состояние машины $\mathfrak{O}$ в полном состоянии Ξ_2' есть b^{t+2}.

Подпрограмма $\mathfrak{C}$ (блок-схему см. на рис. 32, *б*) переведет полное состояние Ξ_2' в некоторое полное состояние, реализующее запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_t, f(x_1, \ldots, x_t)\rangle$ относительно l-разбиения $\varkappa$.

Сначала блок $\mathfrak{D}$ (блок-схему см. на рис. 32, *в*) для каждого $i = t+1, t, t-1, \ldots, 1$ обменяет местами символ $s_1^{(i)}$ и самый нижний из непустых символов, записанных в i-х клетках l-секций. Полученное полное состояние Ξ_3' машины $\mathfrak{O}$ будет почти соответствовать такому полному состоянию Σ_3 машины $\mathfrak{M}$, реализующему запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_t, f(x_1, \ldots, x_t)\rangle$ на лентах с номерами $1, 2, \ldots, t+1$ и имеющему остальные ленты пустыми, в котором первые $(t+1)$ головок стоят на нижних палочках. Блок $\mathfrak{D}$ состоит из $(t+1)$ последовательно включаемых, одинаково устроенных подблоков $\mathfrak{D}_i$ $(i = t+1, t, t-1, \ldots, 1)$. Фиксируем i $(t+1 \geqslant i \geqslant 1)$ и опишем устройство подблока $\mathfrak{D}_i$. Подблок $\mathfrak{D}_i$ (см. блок-схему на рис. 32, *г*) меняет местами символ $s_1^{(i)}$ и самый нижний из непустых символов, записанных в i-х клетках l-секций. Он состоит из двух серий команд:

I. Серия $\mathfrak{D}_{i1}$: 128

$$\Gamma_1(S_1;\ s_1^{(i)};\ b^{i+1},\ c^{i+1}).$$

II. Серия $\mathfrak{D}_{i2}$:

$$c^{i+1}s_1^{(i)} \Rightarrow s_1 \downarrow \langle \mathfrak{D}_{i2},\ \mathrm{I},\ 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{D}_{i2},\ \mathrm{I},\ p\rangle \xi \Rightarrow \xi \downarrow \langle \mathfrak{D}_{i2},\ \mathrm{I},\ p+1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{D}_{i2},\ \mathrm{I},\ l\rangle s_1 \Rightarrow s_1 \downarrow \langle \mathfrak{D}_{i2},\ \mathrm{I},\ 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{D}_{i2},\ \mathrm{I},\ l\rangle s_0 \Rightarrow s_0 \uparrow \langle \mathfrak{D}_{i2},\ \mathrm{II},\ 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{D}_{i2},\ \mathrm{II},\ p\rangle \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{D}_{i2},\ \mathrm{II},\ p+1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{D}_{i2},\ \mathrm{II},\ l\rangle s_1 \Rightarrow s_1^{(i)} \cdot b^i,$$

где $\xi \in S_1$, $p = 1,\ 2,\ \ldots,\ l-1$.

Блок $\mathfrak{D}$ последовательно включает подблоки $\mathfrak{D}_{t+1}$, $\mathfrak{D}_t$, $\mathfrak{D}_{t-1}, \ldots, \mathfrak{D}_1$ и проводит машину через внутренние состояния b^{t+2}, c^{t+2}, b^{t+1}, c^{t+1}, b^t, c^t, $b^{t-1}, \ldots, b^2$, c^2, b^1. Когда машина $\mathfrak{D}$ придет во внутреннее состояние b^1, головка будет считывать символ $s_1^{(1)}$ и для каждого $i: 1 \leqslant i \leqslant l$ символ $s_1^{(i)}$ будет самым нижним из непустых символов, записанных в i-х клетках l-секций (для $i: t+2 \leqslant i \leqslant l$ это условие было выполнено еще в полном состоянии Ξ_2', так как в этом полном состоянии для каждого i: $t+2 \leqslant i \leqslant l$ в i-х клетках l-секций имеется всего один непустой символ $s_0^{(i)}$).

Между блоками $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ нам удобно вставить одну команду:

$$b^1 s_1^{(1)} \Rightarrow s_1^{(1)} \cdot c^2.$$

Блок $\mathfrak{E}$ (блок-схему см. на рис. 32,*д*) должен для каждого $i = 2,\ 3,\ \ldots,\ l$ перенести все непустые символы, записанные в i-х клетках l-секций, таким образом, чтобы все «отмеченные» символы $s_1^{(1)}$, $s_1^{(2)}, \ldots, s_1^{(t)}$, $s_1^{(t+1)}$, $s_0^{(t+2)}$, $s_0^{(t+3)}, \ldots, s_0^{(l)}$ оказались в одной l-секции (практически они окажутся в той же l-секции, в которой в полном состоянии Ξ_3' находится символ $s_1^{(1)}$, так как символов, записанных в первых клетках l-секций, блок $\mathfrak{E}$ не будет трогать) и полученное полное состояние Ξ_3'' машины $\mathfrak{O}$ почти соответствовало тому же самому полному состоянию Σ_3 машины $\mathfrak{M}$, которому почти соответствует полное состояние Ξ_3' (второе требование можно иначе сформулировать так: для каждого i все непустые символы, записанные в i-х клетках l-секций, должны подвергнутся одинаковому сдвигу). Блок $\mathfrak{C}$ состоит из $(l-1)$ последовательно включаемых подблоков $\mathfrak{C}_i$ $(i=2, 3, \ldots, l)$.

Опишем устройство подблока $\mathfrak{C}_i$. Этот подблок устроен по-разному, в зависимости от того, превосходит или не превосходит число i числа $t+1$.

Случай первый: $2 \leqslant i \leqslant t+1$. Подблок $\mathfrak{C}_i$ (см. блок-схему на рис. 32,e) сдвигает непустые символы, записанные в i-х клетках l-секций, таким образом, что символ $s_1^{(i)}$ оказывается в той же l-секции, что и $s_1^{(1)}$, и полное состояние машины $\mathfrak{O}$ по-прежнему почти соответствует полному состоянию Σ_3 машины $\mathfrak{M}$. Он состоит из трех серий команд:

I. Серия $\mathfrak{C}_{i1}$: $\Gamma_2(S_1;\, s_1^{(i)};\, c^i,\, e^i,\, g^i,\, h^i)$.

II. Серия $\mathfrak{C}_{i2}^1$ работает, когда символ $s_1^{(i)}$ записан ниже символа $s_1^{(1)}$. Она имеет вид:

$$g^i s_1^{(i)} \Rightarrow s_0 \uparrow \langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{I}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{I}, p\rangle\, \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{I}, p+1\rangle \quad (p=1, 2, \ldots, l-1)$$

$$\langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{I}, l\rangle\, s_1 \Rightarrow s_1^{(i)} \uparrow \langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{II}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{II}, p\rangle\, \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{II}, p+1\rangle \quad (p=1, 2, \ldots, l-1)$$

$$\langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{II}, l\rangle\, s_1 \Rightarrow s_1 \uparrow \langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{II}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{II}, l\rangle\, s_0 \Rightarrow s_1 \downarrow \langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{III}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{III}, p\rangle\, \xi \Rightarrow \xi \downarrow \langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{III}, p+1 \quad (p=1, 2, \ldots, l-1)$$

$$\langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{III}, l\rangle\, s_1 \Rightarrow s_1 \downarrow \langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{III}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{III}, l\rangle\, s_1^{(i)} \Rightarrow s_1^{(i)} \downarrow \langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{IV}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{IV}, p\rangle\, \xi \Rightarrow \xi \downarrow \langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{IV}, p+1\rangle \; (p=1, 2, \ldots, i-2)$$

$$\langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{IV}, i-1\rangle\, s_1^{(1)} \Rightarrow s_1^{(1)} \cdot c^{i+1}$$

$$\langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{IV}, i-1\rangle\, s_1 \Rightarrow s_1 \uparrow \langle \mathfrak{C}_{i2}^1, \mathrm{V}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{IV}, i-1\rangle s_0 \Rightarrow s_0 \uparrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{V}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{V}, p\rangle \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{V}, p+1\rangle \quad (p=1, 2, \ldots, i-2)$$
$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{V}, i-1\rangle s_1^{(i)} \Rightarrow s_0 \uparrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{I}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{I}, l\rangle s_0 \Rightarrow s_1^{(i)} \downarrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{IV}, 1\rangle,$$

где $\xi \in S_1$.

III. Серия $\mathfrak{E}^2_{i2}$ работает, когда символ $s_1^{(i)}$ записан выше символа $s_1^{(1)}$. Она имеет вид:

$$h^i s_1^{(i)} \Rightarrow s_1^{(i)} \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{I}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{I}, p\rangle \xi \Rightarrow \xi \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{I}, p+1\rangle \quad (p=1, 2, \ldots, i-2)$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{I}, i-1\rangle s_1^{(1)} \Rightarrow s_1^{(1)} \cdot c^{i+1}$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{I}, i-1\rangle s_1 \Rightarrow s_1 \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{II}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{I}, i-1\rangle s_0 \Rightarrow s_0 \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{II}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{II}, p\rangle \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{II}, p+1\rangle \quad (p=1, 2, \ldots, i-2)$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{II}, i-1\rangle s_1^{(i)} \Rightarrow s_1^{(i)} \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{III}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{III}, p\rangle \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{III}, p+1\rangle \ (p=1, 2, \ldots, l-1)$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{III}, l\rangle s_1 \Rightarrow s_1 \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{IV}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{IV}, p\rangle \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{IV}, p+1\rangle \quad (p=1, 2, \ldots, l-1)$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{IV}, l\rangle s_1 \Rightarrow s_1 \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{IV}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{IV}, l\rangle s_0 \Rightarrow s_0 \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{V}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{V}, p\rangle \xi \Rightarrow \xi \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{V}, p+1\rangle \ p=1, 2, \ldots, l-1)$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{V}, l\rangle s_1 \Rightarrow s_0 \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VI}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VI}, p\rangle \xi \Rightarrow \xi \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VI}, p+1\rangle \ (p=1, 2, \ldots, l-1)$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VI}, l\rangle s_1 \Rightarrow s_1 \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VI}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VI}, l\rangle s_1^{(i)} \Rightarrow s_1 \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VII}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VII}, p\rangle \xi \Rightarrow \xi \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VII}, p+1\rangle \ (p=1, 2, \ldots, l-1)$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VII}, l\rangle s_0 \Rightarrow s_1^{(i)} \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{I}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{III}, l\rangle s_0 \Rightarrow s_0 \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VIII}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VIII}, p\rangle \xi \Rightarrow \xi \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VIII}, p+1\rangle \ (p=1, 2, \ldots, l-1)$$
$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{VIII}, l\rangle s_1^{(i)} \Rightarrow s_0 \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{IX}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{IX},\ p\rangle\, \xi \Rightarrow \xi \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{IX}, p+1\rangle \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1).$$

$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{IX},\ l\rangle\, s_0 \Rightarrow s_1^{(i)} \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{I},\ 1\rangle,$$

где $\xi \in S_1$.

Случай второй: $t+2 \leqslant i \leqslant l$.

Подблок $\mathfrak{E}_i$ (рис. 32,e) переносит символ $s_0^{(i)}$ в ту l-секцию, в которой записан символ $s_1^{(1)}$. Он тоже состоит из трех серий команд.

I. Серия $\mathfrak{E}_{i1} : \Gamma_2(S_1;\ s_0^{(i)};\ c^i,\ e^i,\ g^i,\ h^i)$.

II. Серия $\mathfrak{E}^1_{i2}$ работает, когда символ $s_0^{(i)}$ записан ниже символа $s_1^{(1)}$. Она имеет вид:

$$g^i s_0^{(i)} \Rightarrow s_0 \uparrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{I},\ 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{I},\ p\rangle\, \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{I},\ p+1\rangle \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1)$$

$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{I},\ l\rangle\, s_0 \Rightarrow s_0^{(i)} \downarrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{II},\ 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{II}, p\rangle\, \xi \Rightarrow \xi \downarrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{II}, p+1\rangle \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ i-2)$$

$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{II}, i-1\rangle\, s_1^{(1)} \Rightarrow s_1^{(1)} \cdot c^{i+1}$$

$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{II},\ i-1\rangle\, s_1 \Rightarrow s_1 \uparrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{III},\ 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{II},\ i-1\rangle\, s_0 \Rightarrow s_0 \uparrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{III},\ 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{III},\ p\rangle\, \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{III},\ p+1\rangle \quad (p=1, 2, \ldots, i-2)$$

$$\langle \mathfrak{E}^1_{i2}, \mathrm{III}, i-1\rangle\, s_0^{(i)} \Rightarrow s_0 \uparrow \langle \mathfrak{E}^1_{i2},\ \mathrm{I},\ 1\rangle,$$

где $\xi \in S_1$.

III. Серия $\mathfrak{E}^2_{i2}$ работает, когда символ $s_0^{(i)}$ записан выше символа $s_1^{(1)}$. Она имеет вид:

$$h^i s_0^{(i)} \Rightarrow s_0^{(i)} \downarrow \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{I},\ 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{I},\ p\rangle\, \xi \Rightarrow \xi \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{I},\ p+1\rangle \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ i-2)$$

$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{I}, i-1\rangle\, s_1^{(1)} \Rightarrow s_1^{(1)} \cdot c^{i+1}$$

$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{I},\ i-1\rangle\, s_1 \Rightarrow s_1 \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{II},\ 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{I},\ i-1\rangle\, s_0 \Rightarrow s_0 \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{II},\ 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{II},\ p\rangle\, \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{II},\ p+1\rangle \quad (p=1,\ 2,\ \ldots, i-2)$$

$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2}, \mathrm{II}, i-1\rangle\, s_0^{(i)} \Rightarrow s_0 \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{III},\ 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{III},\ p\rangle\, \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{III},\ p+1\rangle \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1)$$

$$\langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{III},\ l\rangle\, s_0 \Rightarrow s_0^{(i)} \downarrow \langle \mathfrak{E}^2_{i2},\ \mathrm{I},\ 1\rangle,$$

где $\xi \in S_1$.

Блок $\mathfrak{E}$ последовательно включает подблоки $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, ..., $\mathfrak{E}_l$ и проводит машину $\mathfrak{D}$ через внутренние состояния c^2, c^3, ..., c^{t+1}, c^{t+2}, c^{t+3}, ..., c^l, c^{l+1}. Когда машина $\mathfrak{D}$ придет во внутреннее состояние c^{l+1}, головка будет считывать символ $s_1^{(1)}$, все «отмеченные» символы $s_1^{(1)}$, $s_1^{(2)}$, ..., $s_1^{(t)}$, $s_1^{(t+1)}$, $s_0^{(t+2)}$, $s_0^{(t+3)}$, ..., $s_0^{(l)}$ будут записаны в одной l-секции, и полное состояние Ξ_3' машины $\mathfrak{D}$ будет почти соответствовать полному состоянию Σ_3 машины $\mathfrak{M}$.

Остается «убрать отметки» и «вернуться на место». Тогда полное состояние Ξ_4 машины $\mathfrak{D}$ будет реализовать запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_t, f(x_1, \ldots, x_t)\rangle$ относительно l-разбиения $\varkappa$. Эту заключительную работу проделает блок $\mathfrak{F}$:

$$c^{l+1}s_1^{(1)} \Rightarrow s_1^{(1)} \uparrow v_1$$
$$v_1 s_1^{(2)} \Rightarrow s_1^{(2)} \uparrow v_2$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$v_t s_1^{(t+1)} \Rightarrow s_1^{(t+1)} \uparrow v_{t+1}$$
$$v_{t+1} s_0^{(t+2)} \Rightarrow s_0^{(t+2)} \uparrow v_{t+2}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$v_{l-2} s_0^{(l-1)} \Rightarrow s_0^{(l-1)} \uparrow v_{l-1}$$
$$v_{l-1} s_0^{(l)} \Rightarrow s_0 \downarrow w_1$$
$$w_1 s_0^{(l-1)} \Rightarrow s_0 \downarrow w_2$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$w_{l-t-2} s_0^{(t+2)} \Rightarrow s_0 \downarrow w_{l-t-1}$$
$$w_{l-t-1} s_1^{(t+1)} \Rightarrow s_1 \downarrow w_{l-t}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$w_{l-2} s_1^{(2)} \Rightarrow s_1 \downarrow w_{l-1}$$
$$w_{l-1} s_1^{(1)} \Rightarrow s_1 \cdot a^1.$$

Построение одноленточной машины $\mathfrak{D}$, разреженно-вычисляющей функцию f, закончено. Достаточность доказана.

2) Необходимость («только тогда»). Пусть функция f типа $N^t \to N$ $(t > 0)$ разреженно-вычислима, т. е. вычислима с некоторым l-разрежением на некоторой одноленточной машине $\mathfrak{D}$. Пусть машина $\mathfrak{D}$ имеет внутренние состояния $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ и алфавит внешней памяти $S = \{s_1, \ldots, s_\gamma\}$. Пусть начальное (для вычисления значений функции f) внутреннее состояние — a_{d_0}. Начнем строить многоленточную машину $\mathfrak{M}$, на которой вычислима функция f. Машина $\mathfrak{M}$ будет l-ленточной. Ее алфавит внешней памяти будет S. Внутренними состояниями будут, во-первых, всевозможные пары вида $\langle a_d, p\rangle$, где $1 \leqslant d \leqslant \alpha$, $0 \leqslant p \leqslant l-1$ и, во-вторых, символы $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_t$. Начальным внутренним состоянием будет символ u_0. Остается написать программу машины $\mathfrak{M}$ (см. блок-схему на рис. 33).

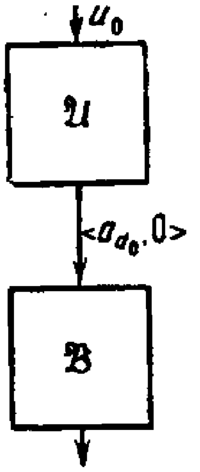


Рис. 33.

Возьмем произвольный кортеж $\langle x_1, \ldots, x_t\rangle \in N^t$ и произвольное полное состояние Σ_0 машины $\mathfrak{M}$ с внутренним состоянием u_0, реализующее запись этого кортежа на лентах с номерами $1, 2, \ldots, t$ и имеющее остальные ленты пустыми.

Подпрограмма $\mathfrak{A}$

$$u_0(p)\,\xi \Rightarrow (p)\,\xi\,(p)\cdot u_t(t) \quad (p = 1, 2, \ldots, l;\ \xi \in \{s_0, s_1\})$$
$$u_t(t)\,s_1 \Rightarrow (t)\,s_1(t) \downarrow u_t(t)$$
$$u_t(t)\,s_0 \Rightarrow (t)\,s_0(t) \uparrow u_{t-1}(t-1)$$
$$u_{t-1}(t-1)\,s_1 \Rightarrow (t-1)\,s_1(t-1) \downarrow u_{t-1}(t-1)$$
$$u_{t-1}(t-1)\,s_0 \Rightarrow (t-1)\,s_0(t-1) \uparrow u_{t-2}(t-2)$$

.

.

.

$$u_2(2)\,s_1 \Rightarrow (2)\,s_1(2) \downarrow u_2(2)$$
$$u_2(2)\,s_0 \Rightarrow (2)\,s_0(2) \uparrow u_1(1)$$
$$u_1(1)\,s_1 \Rightarrow (1)\,s_1(1) \downarrow u_1(1)$$
$$u_1(1)\,s_0 \Rightarrow (1)\,s_0(1) \mid \langle a_{d_0}, 0\rangle(1)$$

переведет машину $\mathfrak{M}$ в такое полное состояние Σ_1, реализующее запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_t\rangle$ на лентах с номерами $1, 2, \ldots, t$ и имеющее остальные ленты пустыми, в котором внутреннее состояние есть $\langle a_{d_0}, 0\rangle$, активна лента № 1 и первые t головок стоят на нижних палочках соответствующих записей.

Для разъяснения подпрограммы $\mathfrak{B}$ введем снова понятие соответствующего полного состояния (мы могли бы, разумеется, и без него выписать сразу ее команды). Возьмем такое полное состояние Ξ_1 машины $\mathfrak{D}$ с внутренним состоянием a_{d_0}, реализующее запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_t\rangle$ относительно некоторого l-разбиения $\varkappa$ ленты внешней памяти машины $\mathfrak{D}$, что ниже l-секции разбиения $\varkappa$, в которой находится головка, нет ни одной палочки. Отправляясь от полного состояния Ξ_1, машина $\mathfrak{D}$ может начинать вычисление значения $f(x_1, \ldots, x_t)$. Если $f(x_1, \ldots, x_t)$ определено, машина $\mathfrak{D}$, начав из полного состояния Ξ_1, через какое-то число шагов остановится и ее заключительное полное состояние Ξ_2 будет реализовать — относительно того же l-разбиения $\varkappa$ — запись кортежа $\langle x_1, \ldots, x_t, f(x_1, \ldots, x_t.)\rangle$. Фиксируем l-разбиение $\varkappa$ до конца доказательства необходимости. Все дальнейшие упоминания о первых, $\ldots$, i-х, $\ldots$, l-х клетках l-секций относятся именно к l-разбиению $\varkappa$. Разумеется, сама программа не будет явно ссылаться на это l-разбиение.

Рассмотрим какое-нибудь полное состояние Ξ машины $\mathfrak{D}$ с внутренним состоянием a_d и считываемым символом s_c, расположенным в k-й клетке некоторой l-секции. Полное состояние Σ машины $\mathfrak{M}$ мы назовем *соответствующим* полному состоянию Ξ, коль скоро в полном состоянии Σ внутреннее состояние машины $\mathfrak{M}$ есть $\langle a_d, 0\rangle$, активна лента № k и для каждого i: $1 \leqslant i \leqslant l$ выполняется следующее условие: если в i-й клетке той l-секции, в которой расположен считываемый символ, записан символ s_n, то головка № i смотрит на символ s_n и для любого $p = 1, 2, 3, \ldots$ символы, записанные в p-й сверху клетке на ленте № i и в p-й снизу клетке на ленте № i (отсчет ведется от той клетки, на которую смотрит головка № i), совпадают с символами, записанными, соответственно, в i-й клетке p-й сверху l-секции и в i-й клетке p-й снизу l-секции (отсчет ведется от той l-секции, в которой расположен считываемый символ). Другими словами, в полном состоянии Σ для каждого i: $1 \leqslant i \leqslant l$ на i-й ленте записано (по порядку!) содержимое i-х клеток l-секций, головка № i смотрит на символ, соответствующий символу, записанному в той l-секции, в которой расположен считываемый символ, и номер активной ленты совпадает с номером клетки, на которую смотрит головка машины $\mathfrak{D}$.

Этим определением устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством всех полных состояний машины $\mathfrak{D}$ и множеством некоторых полных состояний машины $\mathfrak{M}$.

Заметим, что полное состояние Σ_1 машины $\mathfrak{M}$, с которого начнет работать подпрограмма $\mathfrak{B}$, соответствует взятому нами полному состоянию Ξ_1 машины $\mathfrak{D}$, с которого машина $\mathfrak{D}$ может начать вычисление значения $f(x_1, \ldots, x_t)$.

Подпрограмма $\mathfrak{B}$ переведет машину $\mathfrak{M}$ в полное состояние Σ_2, соответствующее заключительному полному состоянию Ξ_2 машины $\mathfrak{D}$ (если $f(x_1, \ldots, x_t)$ не определено, то машина $\mathfrak{D}$ и, вследствие устройства подпрограммы $\mathfrak{B}$, машина $\mathfrak{M}$ будут работать бесконечно). Таким образом, подпрограмма $\mathfrak{B}$ должна имитировать работу машины $\mathfrak{D}$ в следующем смысле: если машина $\mathfrak{D}$ переводит полное состояние Ξ' в полное состояние Ξ'', то машина $\mathfrak{M}$ должна переводить полное состояние Σ', соответствующее полному состоянию Ξ' в полное состояние Σ'', соответствующее полному состоянию Ξ''.

Возьмем произвольную команду

$$a_d s_c \Rightarrow s_{c*} z_b a_{d*} \tag{*}$$

машины $\mathfrak{D}$. Напишем такую серию команд $\mathfrak{B}_{(*)}$ для машины $\mathfrak{M}$, которая любое полное состояние Σ', соответствующее некоторому полному состоянию Ξ' машины $\mathfrak{D}$ с внутренним состоянием a_d и считываемым символом s_c, переводит в полное состояние Σ'', соответствующее тому полному состоянию Ξ'' машины $\mathfrak{D}$, в которое машина $\mathfrak{D}$ переводит полное состояние Ξ'. Серия команд $\mathfrak{B}_{(*)}$ пишется по-разному в зависимости от сдвига z_b команды (*). Разберем три возможных случая.

Если $z_b = \uparrow$, т. е. команда (*) имеет вид

$$a_d s_c \Rightarrow s_{c^*} \uparrow a_{d^*},$$

то серия $\mathfrak{B}_{(*)}$ состоит из l следующих групп:

I. $\langle a_d,\ 0\rangle\,(1)\,s_c \Rightarrow (1)\,s_{c^*}\,(1)\cdot\langle a_{d^*},\ 0\rangle\,(2)$

II. $\langle a_d,\ 0\rangle\,(2)\,s_c \Rightarrow (2)\,s_{c^*}\,(2)\cdot\langle a_{d^*},\ 0\rangle\,(3)$

III. $\langle a_d,\ 0\rangle\,(3)\,s_c \Rightarrow (3)\,s_{c^*}\,(3)\cdot\langle a_{d^*},\ 0\rangle\,(4)$

.
.
.

$\overline{\underline{l-1}}$. $\langle a_d,\ 0\rangle\,(l-1)\,s_c \Rightarrow (l-1)\,s_{c^*}\,(l-1)\cdot\langle a_{d^*},\ 0\rangle\,(l)$

(каждая из $(l-1)$ первых групп состоит из одной команды).

$\bar{l}$. $\langle a_d,\ 0\rangle\,(l)\,s_c \Rightarrow (l)\,s_c\,(1)\uparrow\langle a_d,\ 1\rangle\,(l)$

$\langle a_d,\ 1\rangle\,(l)\,s_c \Rightarrow (l)\,s_c\,(2)\uparrow\langle a_d,\ 2\rangle\,(l)$

$\langle a_d,\ 2\rangle\,(l)\,s_c \Rightarrow (l)\,s_c\,(3)\uparrow\langle a_d,\ 3\rangle\,(l)$

.
.
.

$\langle a_d,\ l-2\rangle\,(l)\,s_c \Rightarrow (l)\,s_c\,(l-1)\uparrow\langle a_d,\ l-1\rangle\,(l)$

$\langle a_d,\ l-1\rangle\,(l)\,s_c \Rightarrow (l)\,s_{c^*}\,(l)\uparrow\langle a_{d^*},\ 0\rangle\,(1).$

В зависимости от номера активной ленты в полном состоянии Σ' работает одна из групп.

Если $z_b = \downarrow$, т. е. команда (*) имеет вид

$$a_d s_c \Rightarrow s_{c^*} \downarrow a_{d^*},$$

то серия $\mathfrak{B}_{(*)}$ состоит из l следующих групп:

I. $\langle a_d,\ 0\rangle\,(1)\,s_c \Rightarrow (1)\,s_c\,(l)\downarrow\langle a_d,\ 1\rangle\,(1)$

$\langle a_d,\ 1\rangle\,(1)\,s_c \Rightarrow (1)\,s_c\,(l-1)\downarrow\langle a_d,\ 2\rangle\,(1)$

$\langle a_d,\ 2\rangle\,(1)\,s_c \Rightarrow (1)\,s_c\,(l-2)\downarrow\langle a_d,\ 3\rangle\,(1)$

.
.
.

$\langle a_d,\ l-2\rangle\,(1)\,s_c \Rightarrow (1)\,s_c\,(2)\downarrow\langle a_d,\ l-1\rangle\,(1)$

$\langle a_d,\ l-1\rangle\,(1)\,s_c \Rightarrow (1)\,s_{c^*}\,(1)\downarrow\langle a_{d^*},\ 0\rangle\,(l)$

II. $\langle a_d, 0\rangle(2)s_c \Rightarrow (2)s_{c^*}(2)\cdot\langle a_{d^*}, 0\rangle(1)$

III. $\langle a_d, 0\rangle(3)s_c \Rightarrow (3)s_{c^*}(3)\cdot\langle a_{d^*}, 0\rangle(2)$

IV. $\langle a_d, 0\rangle(4)s_c \Rightarrow (4)s_{c^*}(4)\cdot\langle a_{d^*}, 0\rangle(3)$

.
.
.

$\overline{\underline{l-1}}$. $\langle a_d, 0\rangle(l-1)s_c \Rightarrow (l-1)s_{c^*}(l-1)\cdot\langle a_{d^*}, 0\rangle(l-2)$

$\overline{\underline{l}}$. $\langle a_d, 0\rangle(l)s_c \Rightarrow (l)s_{c^*}(l)\cdot\langle a_{d^*}, 0\rangle(l-1)$

(каждая из $(l-1)$ последних групп состоит из одной команды).

И, наконец, если $z_b = \cdot$, т. е. команда (*) имеет вид

$$a_d s_c \Rightarrow s_{c^*}\cdot a_{d^*},$$

то соответствующая серия $\mathfrak{B}_{(*)}$ состоит из l групп следующего вида:

I. $\langle a_d, 0\rangle(1)s_c \Rightarrow (1)s_{c^*}(1)\cdot\langle a_{d^*}, 0\rangle(1)$

II. $\langle a_d, 0\rangle(2)s_c \Rightarrow (2)s_{c^*}(2)\cdot\langle a_{d^*}, 0\rangle(2)$

III. $\langle a_d, 0\rangle(3)s_c \Rightarrow (3)s_{c^*}(3)\cdot\langle a_{d^*}, 0\rangle(3)$

.
.
.

$\overline{\underline{l-1}}$. $\langle a_d, 0\rangle(l-1)s_c \Rightarrow (l-1)s_{c^*}(l-1)\cdot\langle a_{d^*}, 0\rangle(l-1)$

$\overline{\underline{l}}$. $\langle a_d, 0\rangle(l)s_c \Rightarrow (l)s_{c^*}(l)\cdot\langle a_{d^*}, 0\rangle(l)$

(каждая из l групп состоит из одной команды). Предоставляем читателю убедиться, что серия команд $\mathfrak{B}_{(*)}$ обладает нужным свойством.

Напишем теперь для каждой команды машины $\mathfrak{O}$ соответствующую серию команд машины $\mathfrak{M}$. Подпрограмма $\mathfrak{B}$ состоит из объединения всех этих серий команд. Легко видеть, что левые части любых двух команд такого объединения различны, т. е. такое объединение действительно можно взять в качестве подпрограммы.

После выполнения команд подпрограммы $\mathfrak{B}$ машина $\mathfrak{M}$ перейдет в полное состояние Σ_2, соответствующее заключительному полному состоянию Ξ_2 машины $\mathfrak{O}$. Так как полное состояние Ξ_2 машины $\mathfrak{D}$ реализует кортеж $\langle x_1, \ldots, x_t, f(x_1, \ldots, x_t)\rangle$ относительно l-разбиения $\varkappa$, а полное состояние Σ_2 машины $\mathfrak{M}$ соответствует полному состоянию Ξ_2, полное состояние Σ_2 реализует на лентах с номерами $1, 2, \ldots, t, t+1$ кортеж

$$\langle x_1, \ldots, x_t, f(x_1, \ldots, x_t)\rangle$$

и имеет остальные ленты пустыми.

Построение многоленточной машины, вычисляющей функцию f, закончено. Необходимость, а вместе с ней и теорема 8, доказаны.

Теорема 9. *Функция f типа $N^t \to N$ тогда и только тогда вычислима по Тьюрингу, когда она разрежённо-вычислима.*

Доказательство. 1) Необходимость («только тогда»). Пусть функция f типа $N^t \to N$ вычислима по Тьюрингу на одноленточной машине $\mathfrak{D}$ с внутренними состояниями $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ и алфавитом внешней памяти $S = \{s_1, \ldots, s_\gamma\}$. Пусть a_{d_0} — начальное (для вычисления значений функции f на машине $\mathfrak{D}$) внутреннее состояние. Докажем, что функция f вычислима на некоторой $(t+1)$-ленточной машине $\mathfrak{M}$. Из теоремы 8 будет следовать тогда, что она разреженно-вычислима. Нужная $(t+1)$-ленточная машина $\mathfrak{M}$ строится очень просто. Ее внутренними состояниями будут, во-первых, внутренние состояния машины $\mathfrak{D}$ и, во-вторых, символы $b_0, b_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_t, g_1, g_2, g_3, \ldots, g_{t+1}, h_1, h_2, h_3, c_{ij}$ $(i = 2, 3, 4, \ldots \ldots, t-1;\ j = 1, 2, 3, 4)$, c_{tj} $(j = 1, 2, 3)$, g_{1j} $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$, g_{i1} $(i = 2, 3, 4, \ldots, t)$. Алфавитом ее внешней памяти останется S. Роль начального внутреннего состояния будет играть символ b_0.

При $t > 1$ программа (блок-схему см. на рис. 34,a) состоит из четырех подпрограмм. Подпрограмма $\mathfrak{A}$

$$b_0(1) \mid \Rightarrow (1) \mid (1) \uparrow b_0(1)$$
$$b_0(2) \mid \Rightarrow (1) \mid (1) \uparrow b_0(1)$$
$$b_0(3) \mid \Rightarrow (1) \mid (1) \uparrow b_0(1)$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$b_0(t) \mid \Rightarrow (1) \mid (1) \uparrow b_0(1)$$

$$b_0(t+1)\,\square \Rightarrow (1)\,|\,(1) \uparrow b_0(1)$$
$$b_0(1)\,\square \Rightarrow (1)\,\square\,(1) \uparrow b_1(1)$$
$$b_1(1)\,\square \Rightarrow (1)\,\square\,(1) \uparrow c_2(2)$$

переведет произвольное полное состояние Σ_0 машины $\mathfrak{M}$ с внутренним состоянием b_0, реализующее на лентах

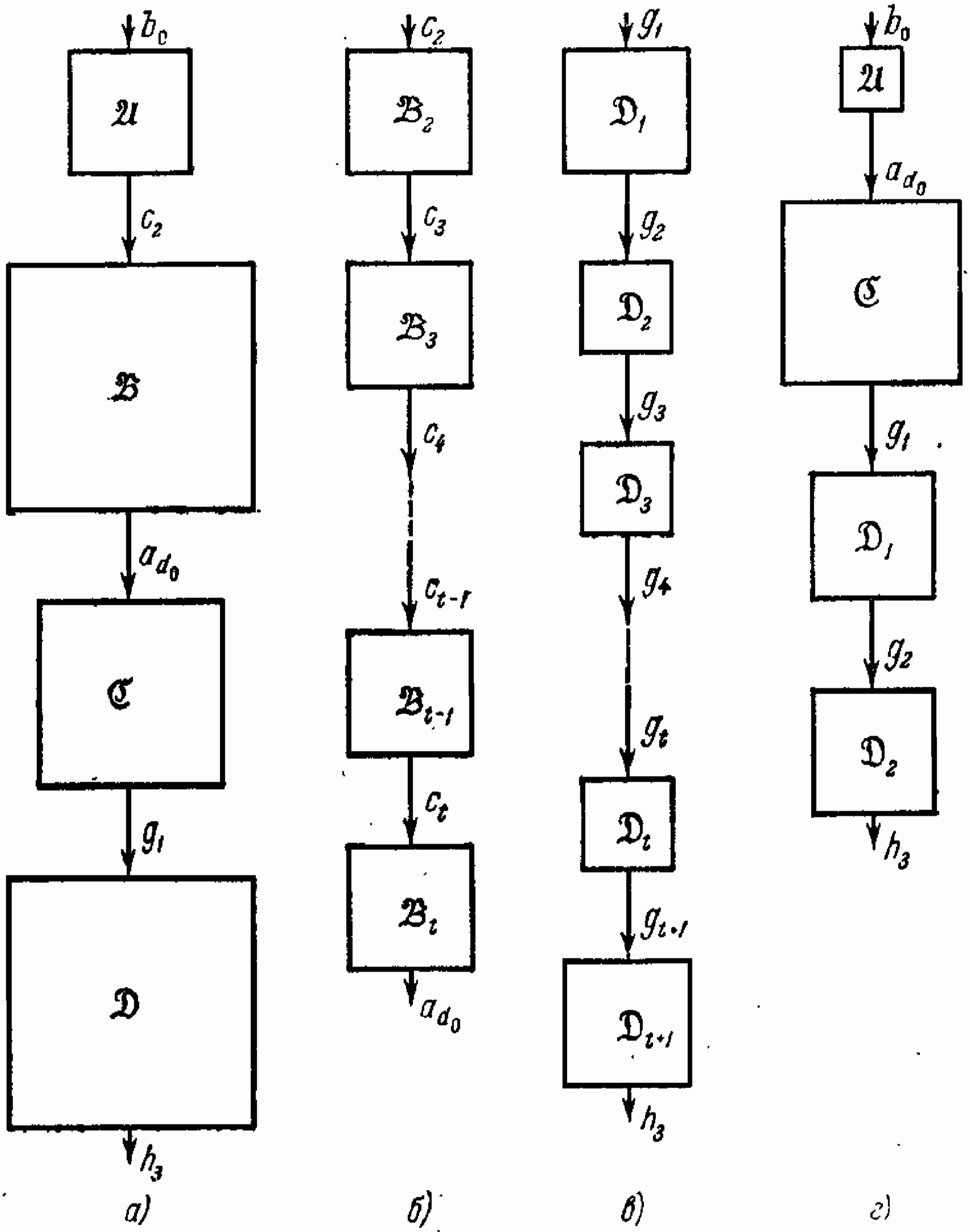


Рис. 34.

с номерами 1, 2, ..., t запись кортежа $\langle x_1, x_2, \ldots, x_t\rangle$ и имеющее ленту № $(t+1)$ пустой, в такое полное состояние Σ_1 с внутренним состоянием c_2, активной лентой № 2 и считываемым на ленте № 2 символом s_1, в котором все $(t+1)$ лент сохраняют тот же вид, что и в полном состоянии Σ_0, все головки, кроме первой, находятся на тех же местах, что и в полном состоянии Σ_0, а головка № 1 находится над записью числа x_1 в третьей пустой клетке.

Подпрограмма $\mathfrak{B}$ (блок-схему см. на рис. 34,*б*) состоит из $(t-1)$ последовательно включаемых блоков: $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \ldots, \ldots, \mathfrak{B}_{t-1}, \mathfrak{B}_t$. Блоки $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \ldots, \mathfrak{B}_{t-1}$ устроены одинаково. Для i: $2 \leqslant i \leqslant t-1$ блок $\mathfrak{B}_i$ имеет вид:

$$c_i(i)\,|\Rightarrow(i)\,|\,(i)\downarrow c_i(i)$$
$$c_i(i)\,\square\Rightarrow(i)\,\square\,(i)\uparrow c_{i1}(i)$$
$$c_{i1}(i)\,|\Rightarrow(1)\,|\,(1)\uparrow c_{i2}(i)$$
$$c_{i2}(i)\,|\Rightarrow(i)\,|\,(i)\uparrow c_{i1}(i)$$
$$c_{i1}(i)\,\square\Rightarrow(i)\,\square\,(i)\downarrow c_{i3}(1)$$
$$c_{i3}(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\uparrow c_{i4}(1)$$
$$c_{i4}(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\uparrow c_{i+1}(i+1).$$

Блок $\mathfrak{B}_t$ устроен чуть-чуть по-другому. Он имеет вид:

$$c_t(t)\,|\Rightarrow(t)\,|\,(t)\downarrow c_t(t)$$
$$c_t(t)\,\square\Rightarrow(t)\,\square\,(t)\uparrow c_{t1}(t)$$
$$c_{t1}(t)\,|\Rightarrow(1)\,|\,(1)\uparrow c_{t2}(t)$$
$$c_{t2}(t)\,|\Rightarrow(t)\,|\,(t)\uparrow c_{t1}(t)$$
$$c_{t1}(t)\,\square\Rightarrow(t)\,\square\,(t)\downarrow c_{t3}(1)$$
$$c_{t3}(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\downarrow a_{d_0}(1).$$

Блок $\mathfrak{B}_i$ $(i=2, 3, \ldots, t-1, t)$ переписывает на ленту № 1 запись числа x_i. Когда блок $\mathfrak{B}_t$ закончит свою работу, машина $\mathfrak{M}$ будет находиться в таком полном состоянии Σ_2 с внутренним состоянием a_{d_0}, активной лентой № 1 и считываемым на ленте № 1 символом s_1, в котором на ленте № 1 снизу вверх через две пустые клетки будут расположены записи чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots, x_{t-1}, x_t$, все остальные ленты будут в том же виде, в котором они находились в полном состоянии Σ_1, и первые t головок будут смотреть на палочки.

Подпрограмма $\mathfrak{C}$ состоит, во-первых, из команд машины $\mathfrak{D}$ и, во-вторых, из группы команд вида

$$a_d(1)\,s_1\Rightarrow(1)\,s_1\,(1)\cdot g_1(1),$$

написанной для всех таких a_d, что тройка $\langle a_d, 1, s_1\rangle$ является для машины $\mathfrak{D}$ заключительной. Полное состояние Σ_2 подпрограмма $\mathfrak{C}$ переведет (если $f(x_1, \ldots, x_t)$ определено) в такое полное состояние Σ_3 с внутренним состоянием g_1, активной лентой № 1 и считываемым на ленте № 1 символом s_1, в котором на ленте № 1 снизу вверх через две пустые клетки будут расположены записи чисел $x_1, \ldots, x_t, f(x_1, \ldots, x_t)$, все остальные клетки ленты № 1 будут пустыми, головка № 1 будет смотреть на палочку, а ленты и головки с номерами $2, 3, \ldots, \ldots, t, t+1$ будут в том же виде и положении, в котором они находились в полном состоянии Σ_2 (если $f(x_1, \ldots, x_t)$ не определено, то, вследствие устройства подпрограммы $\mathfrak{C}$, машина $\mathfrak{M}$ будет работать бесконечно).

Подпрограмма $\mathfrak{D}$ (блок-схему см. на рис. 34,*в*) состоит из $(t+1)$ последовательно включаемых блоков. Блок $\mathfrak{D}_1$

$$\begin{gathered}
g_1(1)\,|\Rightarrow(1)\,|\,(1)\downarrow g_1(1)\\
g_1(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\downarrow g_{11}(1)\\
g_{11}(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\downarrow g_{12}(1)\\
g_{12}(1)\,|\Rightarrow(1)\,|\,(1)\downarrow g_1(1)\\
g_{12}(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\uparrow g_{13}(1)\\
g_{13}(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\uparrow g_{13}(1)\\
g_{13}(1)\,|\Rightarrow(1)\,|\,(1)\uparrow g_{14}(1)\\
g_{14}(1)\,|\Rightarrow(1)\,|\,(1)\uparrow g_{14}(1)\\
g_{14}(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\uparrow g_{15}(1)\\
g_{15}(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\uparrow g_2(1)
\end{gathered}$$

переведет головку № 1 на нижнюю палочку записи числа x_2. Блоки $\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \ldots, \mathfrak{D}_t$ устроены одинаково. Для i: $2 \leqslant i \leqslant t$ блок $\mathfrak{D}_i$ имеет вид:

$$\begin{gathered}
g_i(1)\,|\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\uparrow g_i(1)\\
g_i(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\uparrow g_{i1}(1)\\
g_{i1}(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\uparrow g_{i+1}(1)
\end{gathered}$$

Блок $\mathfrak{D}_i$ $(i=2, 3, \ldots, t)$ уничтожает на ленте № 1 запись числа x_i и переводит головку № 1 на нижнюю палочку записи числа x_{i+1}, если $i < t$, или числа $f(x_1, \ldots, x_t)$, если $i = t$. Когда блок $\mathfrak{D}_t$ закончит свою работу, головка

№ 1 будет смотреть на нижнюю палочку записи числа $f(x_1, \ldots, x_t)$. Блок $\mathfrak{D}_{t+1}$

$$g_{t+1}(1)\,|\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\uparrow h_1(t+1)$$
$$h_1(t+1)\,\square\Rightarrow(t+1)\,|\,(t+1)\uparrow g_{t+1}(1)$$
$$g_{t+1}(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(t+1)\downarrow h_2(1)$$
$$h_2(1)\,\square\Rightarrow(1)\,\square\,(1)\downarrow h_2(1)$$
$$h_2(1)\,|\Rightarrow(1)\,|\,(1)\cdot h_3(1)$$

перепишет на ленту № $(t+1)$ запись числа $f(x_1, \ldots, x_t)$ и уничтожит эту запись на ленте № 1. Когда блок $\mathfrak{D}_{t+1}$ (а с ним и подпрограмма $\mathfrak{D}$) закончит работу, машина $\mathfrak{M}$ придет в полное состояние, реализующее на лентах с номерами $1, 2, \ldots, t, t+1$ запись кортежа $\langle x_1, x_2, \ldots, x_t, f(x_1, \ldots, x_t)\rangle$.

Для случая $t=1$ программа (блок-схему см. на рис. 34,*г*) получается из предыдущей программы следующим образом: подпрограмма $\mathfrak{A}$ состоит из двух команд:

$$b_0(1)\,|\Rightarrow(1)\,|\,(1)\cdot a_{d_0}(1)$$
$$b_0(2)\,\square\Rightarrow(1)\,|\,(1)\cdot a_{d_0}(1);$$

подпрограмма $\mathfrak{B}$ отсутствует; подпрограмма $\mathfrak{C}$ имеет тот же вид, что и при $t>1$; от подпрограммы $\mathfrak{D}$ остаются два блока: $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_{t+1}$ (остальные блоки отсутствуют).

Необходимость доказана.

2) Достаточность («тогда») будет доказана нами, для простоты, лишь для $t=1$. Пусть функция f типа $N\to N$ вычислима с l-разрежением на одноленточной машине $\mathfrak{T}_1$. Пусть внутренними состояниями машины $\mathfrak{T}_1$ будут $a_1, \ldots, a_\alpha$, алфавитом внешней памяти будет $S=\{s_1, \ldots, s_\gamma\}$, начальным (для вычисления с l-разрежением) внутренним состоянием будет a_{d_0}. Построим одноленточную машину $\mathfrak{T}_2$, на которой будет вычислима по Тьюрингу функция f.

Алфавитом внешней памяти машины $\mathfrak{T}_2$ останется алфавит S.

Внутренние состояния машины $\mathfrak{T}_2$ мы выпишем пока лишь частично. Остальные ее внутренние состояния определятся после написания программы: это будут те (и только те!) символы и кортежи символов (чаще —

кортежи), которые будут фигурировать в программе в качестве внутренних состояний.

На данном этапе в число внутренних состояний машины $\mathfrak{D}_2$ мы включим, во-первых, все внутренние состояния машины $\mathfrak{D}_1$ и, во-вторых, символы b_0, b_1, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, h_0. Символ b_0 будет играть роль начального (для вычисления по Тьюрингу) внутреннего состояния.

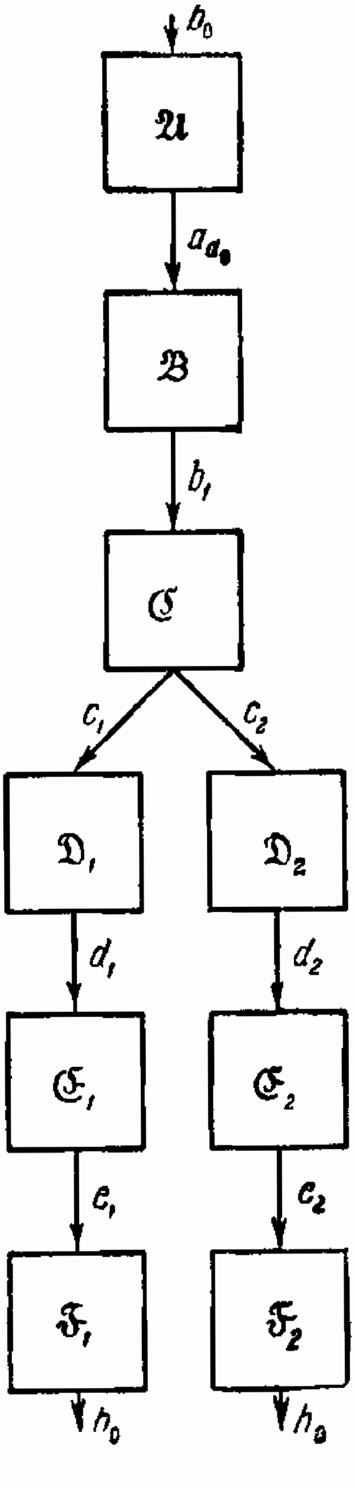


Рис. 35.

Начнем составлять программу машины $\mathfrak{D}_2$ (блок-схему см. на рис. 35). Одновременно мы будем доказывать, что составляемая программа приводит строящуюся машину к нужному результату.

Возьмем произвольное число x и произвольное полное состояние Ξ_0 машины $\mathfrak{D}_2$ с внутренним состоянием b_0, реализующее запись кортежа $\langle x\rangle$.

Подпрограмма $\mathfrak{A}$:

$$b_0 | \Rightarrow | \uparrow b_0$$
$$b_0 \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, 0\rangle$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, 0\rangle | \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, 1\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, p\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, p+1\rangle$$
$$(p=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1,\ l)$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, l+1\rangle \square \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{II}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{II}, p\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{II}, p+1\rangle$$
$$(p=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1)$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{II}, l\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{III}, 0\rangle$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{III}, 0\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{III}, 0\rangle$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{III}, 0\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, 0\rangle$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, l+1\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, 2\rangle$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{II}, l\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{II}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{I}, 0\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{IV}, 0\rangle$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{IV}, 0\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{A}, \mathrm{IV}, 0\rangle$$
$$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{IV}, 0\rangle | \Rightarrow | \cdot a_{d_0}$$

приведет машину $\mathfrak{D}_2$ в полное состояние Ξ_1 с внутренним состоянием a_{d_0}, реализующее запись кортежа $\langle x\rangle$

относительно некоторого l-разбиения $\varkappa$ ленты внешней памяти (говоря образно, разрядит запись числа x в l раз), т. е. в такое полное состояние, с которого машина $\mathfrak{D}_1$ может начинать вычисление с l-разрежением значения $f(x)$. Фиксируем l-разбиение $\varkappa$ до конца доказательства.

Подпрограмма $\mathfrak{B}$ состоит, во-первых, из команд машины $\mathfrak{D}_1$ и, во-вторых, из группы команд вида

$$a_d s_1 \Rightarrow s_1 \cdot b_1,$$

написанной для всех таких a_d, что тройка $\langle a_d, 1, s_1\rangle$ является для машины $\mathfrak{D}_1$ заключительной. Эта подпрограмма, если $f(x)$ определено, переведет машину $\mathfrak{D}_2$ в некоторое полное состояние Ξ_2 с внутренним состоянием b_1, реализующее пару $\langle x, f(x)\rangle$ относительно l-разбиения $\varkappa$. Если $f(x)$ не определено, то вследствие свойств машины $\mathfrak{D}_1$ машина $\mathfrak{D}_2$ будет работать бесконечно.

Подпрограмма $\mathfrak{C}$

$$b_1 | \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{C}, \mathrm{I}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{I}, p\rangle \xi \Rightarrow \xi \uparrow \langle \mathfrak{C}, \mathrm{I}, p+1\rangle \ (p = 1, 2, \ldots, l-1;\ \xi \in \{\square, |\})$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{I}, l\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{C}, \mathrm{I}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{I}, l\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{C}, \mathrm{II}, 0\rangle$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{II}, 0\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{C}, \mathrm{III}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{III}, p\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{C}, \mathrm{III}, p+1\rangle \ (p = 1, 2, \ldots, l-1)$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{III}, l\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{C}, \mathrm{III}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{III}, l\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{C}, \mathrm{IV}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{IV}, p\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{C}, \mathrm{IV}, p+1\rangle \ (p = 1, 2, \ldots, l-1)$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{IV}, l\rangle | \Rightarrow | \cdot c_1$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{II}, 0\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{C}, \mathrm{V}, 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{V}, p\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{C}, \mathrm{V}, p+1\rangle \ (p = 1, 2, \ldots, l-1)$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{V}, l\rangle | \Rightarrow | \cdot c_1$$
$$\langle \mathfrak{C}, \mathrm{V}, l\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow c_2$$

приведет головку машины $\mathfrak{D}_2$ к самой верхней палочке, записанной на ленте, сама же лента сохранит тот же вид, который она имела в полном состоянии Ξ_2. Если верхняя палочка, записанная на ленте, находится во второй клетке некоторой l-секции l-разбиения $\varkappa$ (т. е. принадлежит к 2-реализации записи числа $f(x)$ относительно $\varkappa$), то внутреннее состояние машины $\mathfrak{O}_2$ после выполнения подпрограммы $\mathfrak{S}$ будет c_1 (обозначим соответствующее полное состояние машины $\mathfrak{O}_2$ через Ξ_3'). Если же эта верхняя палочка находится в первой клетке некоторой l-секции l-разбиения $\varkappa$ (т. е. принадлежит к 1-реализации записи числа x относительно $\varkappa$), то внутреннее состояние машины $\mathfrak{O}_2$ после выполнения подпрограммы $\mathfrak{S}$ будет c_2 (обозначим соответствующее полное состояние через Ξ_3'').

Подпрограммы $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ имеют одинаковое строение. Подпрограммы $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ тоже одинаково устроены. Выпишем сначала команды этих подпрограмм, а потом объясним их действие.

Подпрограмма $\mathfrak{D}_i$ $(i = 1,\ 2)$ имеет вид:

$$
\begin{array}{l}
c_i \,|\Rightarrow|\downarrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{I},\ 1\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{I},\ p\rangle\,\xi\Rightarrow\xi\downarrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{I},\ p+1\rangle\quad(p=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1)\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{I},\ l\rangle\,|\Rightarrow|\downarrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{I},\ 1\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{I},\ l\rangle\,\square\Rightarrow\square\uparrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{II},\ 1\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{II},\ p\rangle\,\xi\Rightarrow\xi\uparrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{II},\ p+1\rangle\quad(p=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1)\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{II},\ l\rangle\,|\Rightarrow\square\uparrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{III},\ 1\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{III},\ p\rangle\,\xi\Rightarrow\xi\uparrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{III},\ p+1\rangle\quad(p=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1)\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{III},\ l\rangle\,|\Rightarrow|\uparrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{III},\ 1\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{III},\ l\rangle\,\square\Rightarrow\square\uparrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{IV},\ 0\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{IV},\ 0\rangle\,\square\Rightarrow\ \downarrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{V},\ 0\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{V},\ 0\rangle\,\square\Rightarrow\square\downarrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{I},\ 1\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{IV},\ 0\rangle\,|\Rightarrow|\uparrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{IV},\ 0\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{V},\ 0\rangle\,|\Rightarrow|\downarrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{V},\ 0\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{II},\ l\rangle\,\square\Rightarrow\square\downarrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{VI},\ 0\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{VI},\ 0\rangle\,\square\Rightarrow\square\downarrow\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{VI},\ 0\rangle\\
\langle\mathfrak{D}_i,\ \mathrm{VI},\ 0\rangle\,|\Rightarrow|\cdot d_i,
\end{array}
$$

где $\xi\in\{\square,\ |\}$.

Подпрограмма $\mathfrak{E}_i$ $(i = 1,\ 2)$ имеет вид:

$$
\begin{array}{l}
d_i\,|\Rightarrow\square\downarrow\langle\mathfrak{E}_i,\ \mathrm{I},\ 1\rangle\\
\langle\mathfrak{E}_i,\ \mathrm{I},\ p\rangle\,\square\Rightarrow\square\downarrow\langle\mathfrak{E}_i,\ \mathrm{I},\ p+1\rangle\quad(p=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1)\\
\langle\mathfrak{E}_i,\ \mathrm{I},\ l\rangle\,|\Rightarrow|\downarrow\langle\mathfrak{E}_i,\ \mathrm{I},\ 1\rangle
\end{array}
$$

$$\langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{I},\ l,\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{II},\ 0\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{II},\ 0\rangle \square \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{III},\ 0\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{III},\ 0\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{IV},\ 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{IV},\ p\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{IV},\ p+1\rangle \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1)$$
$$\langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{IV},\ l\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{IV},\ 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{IV},\ l\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{V},\ 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{V},\ p\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{V},\ p+1\rangle \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1)$$
$$\langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{V},\ l\rangle | \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{I},\ 1\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{II},\ 0\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{II},\ 0\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{III},\ 0\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{III},\ 0\rangle$$
$$\langle \mathfrak{E}_i,\ \mathrm{V},\ l\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow e_i.$$

Если машина $\mathfrak{O}_2$ придет в полное состояние Ξ_3' с внутренним состоянием c_1, то работать будут подпрограммы $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{E}_1$. Сначала подпрограмма $\mathfrak{D}_1$, не трогая палочек на первых клетках l-секций, перенесет все палочки, записанные на вторых клетках l-секций, наверх и запишет их подряд выше той клетки, где в полном состоянии Ξ_3' находилась самая верхняя из записанных на ленте палочек. Обозначим через Ξ_4' то полное состояние, в котором находится машина после выполнения подпрограммы $\mathfrak{D}_1$. Говоря образно, $\mathfrak{D}_1$, переводя машину из полного состояния Ξ_3' в полное состояние Ξ_4', «сожмет $f(x)$ вверх». Потом подпрограмма $\mathfrak{E}_1$, не трогая собранных вверху $f(x)+1$ палочек (записи числа $f(x)$), «сожмет число x вниз», а именно она перенесет все палочки, стоящие на первых клетках l-секций, вниз и запишет их подряд ниже той клетки, где в полном состоянии Ξ_4' находилась самая нижняя из записанных на ленте палочек. После последовательного применения подпрограмм $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{E}_1$ машина придет в некоторое полное состояние Ξ_5 (с внутренним состоянием e_1), в котором на ленте будут находиться (снизу вверх) записи чисел x и $f(x)$, разделенные, по крайней мере, двумя пустыми клетками. При этом головка будет смотреть на верхнюю палочку записи x.

Если машина $\mathfrak{O}_2$ придет в полное состояние Ξ_3'' с внутренним состоянием c_2, то работать будут подпрограммы $\mathfrak{D}_2$ и $\mathfrak{E}_2$. Сначала подпрограмма $\mathfrak{D}_2$ «сожмет x вверх», потом подпрограмма $\mathfrak{E}_2$ «сожмет $f(x)$ вниз». Когда машина $\mathfrak{D}_2$ придет в полное состояние Ξ_5'' с внутренним состоянием e_2, на ленте внизу будут записаны подряд $f(x)+1$ палочка, вверху $-x+1$ палочка, причем головка будет смотреть на верхнюю палочку записи $f(x)$. Расстояние между нижней палочкой записи x и верхней палочкой записи $f(x)$ будет опять не меньше двух пустых клеток.

Подпрограмма $\mathfrak{F}_1$

$$e_1 | \Rightarrow | \downarrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{I}, 0\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{I}, 0\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{II}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{I}, 0\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{III}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{II}, 1\rangle | \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{II}, 2\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{II}, 2\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{II}, 2\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{II}, 2\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{IV}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{IV}, 1\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{IV}, 2\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1\ \mathrm{IV}, 2\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{V}, 0\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{V}, 0\rangle \square \Rightarrow | \downarrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{V}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{V}, 1\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{V}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{V}, 1\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{VI}, 0\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{VI}, 0\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{VII}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{VI}, 0\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{VIII}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{VII}, 1\rangle | \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{VII}, 2\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{VII}, 2\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{VII}, 2\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{VII}, 2\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{V}, 0\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{VIII}, 1\rangle | \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{IX}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{IX}, 1\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{IX}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{IX}, 1\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{X}, 0\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{X}, 0\rangle \square \Rightarrow | \cdot h_0$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{III}, 1\rangle | \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{XI}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{XI}, 1\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{XI}, 1\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{XI}, 1\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle \mathfrak{F}_1, \mathrm{XII}, 1\rangle$$

$$\langle\mathfrak{F}_1, \mathrm{XII}, 1\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle\mathfrak{F}_1, \mathrm{XII}, 2\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_1, \mathrm{XII}, 2\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle\mathfrak{F}_1, \mathrm{XIII}, 0\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_1, \mathrm{XIII}, 0\rangle \square \Rightarrow | \cdot h_0$$

будет работать, если машина $\mathfrak{O}_2$ придет в полное состояние Ξ_5' с внутренним состоянием e_1. Она «поднимет» запись x вверх и приведет машину $\mathfrak{O}_2$ в полное состояние, реализующее на ленте внешней памяти пару $\langle x, f(x)\rangle$.

Подпрограмма $\mathfrak{F}_2$

$$e_2 | \Rightarrow | \downarrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{I}, 0\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{I}, 0\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{II}, 1\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{I}, 0\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{III}, 1\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{II}, 1\rangle | \Rightarrow \square \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{II}, 2\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{II}, 2\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{II}, 2\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{II}, 2\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{IV}, 1\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{IV}, 1\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{IV}, 1\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{IV}, 1\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{IV}, 2\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{IV}, 2\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{V}, 1\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{V}, 1\rangle \square \Rightarrow | \downarrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 1\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{V}, 1\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{V}, 1\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 1\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 1\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 1\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 2\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 2\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 2\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 2\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 3\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 3\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 3\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 3\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 4\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 4\rangle \square \Rightarrow \square \downarrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 4\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VI}, 4\rangle | \Rightarrow | \downarrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{I}, 0\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{III}, 1\rangle | \Rightarrow \square \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VII}, 1\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VII}, 1\rangle \square \Rightarrow \square \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VII}, 1\rangle$$
$$\langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VII}, 1\rangle | \Rightarrow | \uparrow \langle\mathfrak{F}_2, \mathrm{VII}, 2\rangle$$

$$\langle \mathfrak{F}_2,\ \mathrm{VII},\ 2\rangle \,|\Rightarrow|\uparrow\langle \mathfrak{F}_2,\ \mathrm{VII},\ 2\rangle$$
$$\langle \mathfrak{F}_2,\ \mathrm{VII},\ 2\rangle\,\square\Rightarrow\square\uparrow\langle \mathfrak{F}_2,\ \mathrm{VII},\ 3\rangle$$
$$\langle \mathfrak{F}_2,\ \mathrm{VII},\ 3\rangle\,\square\Rightarrow\square\uparrow\langle \mathfrak{F}_2,\ \mathrm{VII},\ 4\rangle$$
$$\langle \mathfrak{F}_2,\ \mathrm{VII},\ 4\rangle\,\square\Rightarrow\,\vdots\cdot h_0$$
$$\langle \mathfrak{F}_2,\ \mathrm{VII},\ 4\rangle \,|\Rightarrow|\uparrow\langle \mathfrak{F}_2,\ \mathrm{VII},\ 4\rangle$$

будет работать, если машина $\mathfrak{D}_2$ придет в полное состояние Ξ_5'' с внутренним состоянием e_2. Она «перенесет» запись $f(x)$ через запись x и приведет машину $\mathfrak{D}_2$ в полное состояние, реализующее на ленте внешней памяти пару $\langle x,\ f(x)\rangle$.

Построение одноленточной машины $\mathfrak{D}_2$, вычисляющей по Тьюрингу функцию f, закончено. Достаточность, а вместе с ней и теорема 9 доказаны.

Из теорем 6, 7, 8 и 9 вытекает

Теорема 10*). *Функция f типа $N^t\longrightarrow N$ тогда и только тогда частично-рекурсивна, когда она вычислима по Тьюрингу.*

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 3 И 4

Лемма 1. *Всякая последовательность символов, которая может быть напечатана на выходной ленте некоторой **постоянно-печатающей** машины типа* II, *есть либо конечная, либо примитивно-рекурсивная последовательность.*

Доказательство. Полное состояние машины типа II есть четверка вида

$$\langle a_d,\ s_c,\ A,\ B\rangle. \tag{1}$$

Назовем номером полного состояния (1) число

$$m=2^d\cdot 3^c\cdot 5^u\cdot 7^v,$$

где u и v — номера слов A и B. Для дальнейшего заметим, что

$$d=\exp_0 m. \tag{2}$$

---

*) Другое доказательство этой известной теоремы можно найти, например, в §§ 68 и 69 книги С. К. Клини [1952].

Возьмем произвольную постоянно-печатающую машину типа II. Таблица печати этой машины каждому внутреннему состоянию, а следовательно, и каждому полному состоянию сопоставляет некоторый печатаемый символ. В силу (2) и леммы 3 из п.3, примененной к таблице печати взятой машины, существует такая примитивно-рекурсивная функция $\varphi^{(1)}$, которая номеру m произвольного полного состояния взятой машины соотносит номер $\varphi(m)$ символа, печатаемого машиной на выходной ленте в полном состоянии с номером m.

Легко видеть, что для машин типа II имеет место аналог леммы 1 из п. 3*).

Возьмем примитивно-рекурсивную функцию $\tau^{(2)}$, существующую для нашей машины в силу этого аналога. Пусть машина, начав с полного состояния с номером m_0, печатает бесконечную последовательность. Тогда примитивно-рекурсивная функция $\psi^{(1)}$:

$$\psi(i) = \varphi(\tau(m_0, i))$$

дает по i номер символа, печатаемого машиной на i-м такте. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если из примитивно-рекурсивной последовательности символов выбросить фиксированный символ и сдвинуть оставшиеся символы, получится либо конечная, либо обще-рекурсивная последовательность.*

Доказательство. Пусть бесконечная последовательность

$$e_{i_0},\ e_{i_1},\ \ldots,\ e_{i_n},\ \ldots \tag{3}$$

есть примитивно-рекурсивная последовательность символов из алфавита $\{e_1, \ldots, e_\beta\}$. Следовательно, функция φ: $\varphi(n) = i_n$ примитивно-рекурсивна. Выбросим из последовательности (3) некоторый фиксированный символ e_d. Пусть при этом получится бесконечная последовательность

$$e_{j_0},\ e_{j_1},\ \ldots,\ e_{j_m},\ \ldots \tag{4}$$

*) Более того, доказательство — с соответствующими упрощениями — сохраняется дословно. Можно, кроме того, заметив, что машины типа II отличаются от одноленточных машин только наличием алфавита, таблицы и ленты печати, не влияющих на изменение полных состояний, и изменив немного определение номера полного состояния ($m = 2^d \cdot 3^1 \cdot 5^c \cdot 7^u \cdot 11^v$), считать, что нужное нам утверждение есть просто частный случай леммы 1 из п. 3.

Требуется доказать, что функция ψ: $\psi(n) = j_n$ обще-рекурсивна. Легко видеть, что

$$\psi(n) = \varphi\left((\mu t)\left[\left((\nu k)_{k<t}\left[\varphi(k) \neq d\right] = n\right) \& \left(\varphi(t) \neq d\right)\right]\right).$$

Из теорем 16 из § 7, 20 из § 7, 17 из § 7 и 21 из § 7 и того, что функция ψ всюду определена, следует ее обще-рекурсивность.

Доказательство теоремы 3. Пусть бесконечная последовательность

$$e_{i_0},\ e_{i_1},\ e_{i_2},\ \ldots,\ e_{i_n},\ \ldots \tag{5}$$

символов из алфавита $\{e_1, \ldots, e_\beta\}$ печатается на ленте (вообще говоря, не постоянно-печатающей) машины типа II. Добавим к алфавиту печати символ $e_{\beta+1}$ и заполним им все пустые места в таблице печати. Получится постоянно-печатающая машина, которая напечатает примитивно-рекурсивную (по лемме 1) последовательность (символов из алфавита $\{e_1, \ldots, e_\beta, e_{\beta+1}\}$). Последовательность (5) можно получить из этой новой последовательности, выбросив из последней символ $e_{\beta+1}$ и сдвинув оставшиеся символы. По лемме 2 последовательность (5) обще-рекурсивна.

Доказательство теоремы 4. Любая конечная последовательность символов может быть напечатана даже машиной типа I (см. теорему 2), тем более, как это показано на стр. 411, она может быть напечатана машиной типа II. Пусть бесконечная последовательность

$$e_{i_0},\ e_{i_1},\ \ldots,\ e_{i_n},\ \ldots \tag{6}$$

есть обще-рекурсивная последовательность символов из алфавита $\{e_1, \ldots, e_\beta\}$. По определению функция φ: $\varphi(n) = i_n$ обще-рекурсивна. По теореме 10 функция φ вычислима по Тьюрингу на некоторой одноленточной машине $\mathfrak{O}_1$ с внутренними состояниями $a_1, \ldots, a_\alpha$ и алфавитом внешней памяти $S = \{s_1, \ldots, s_\gamma\}$. Пусть a_{d_0} — начальное (для вычисления значений функции φ по Тьюрингу) внутреннее состояние. Внутренними состояниями искомой машины $\mathfrak{O}_2$ типа II будут, во-первых, внутренние состояния одноленточной машины $\mathfrak{O}_1$ и, во-вторых, символы $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, c_3, \ldots$ $\ldots, c_{\beta+2}, g_1, g_2, \ldots, g_\beta, h_1, h_2, h_3$. Алфавитом внешней памяти машины $\mathfrak{D}_2$ останется алфавит S, алфавитом печати будет алфавит $\{e_1, \ldots, e_\beta\}$. Таблицей печати машины $\mathfrak{D}_2$ будет таблица

g_1	g_2	g_3	$\ldots$	g_β
e_1	e_2	e_3		e_β

(в остальных внутренних состояниях строящаяся машина $\mathfrak{D}_2$ ничего не будет печатать).

Остается написать программу машины $\mathfrak{D}_2$. Программа машины $\mathfrak{D}_2$ (блок-схему см. на рис. 36) будет состоять из четырех подпрограмм: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$.

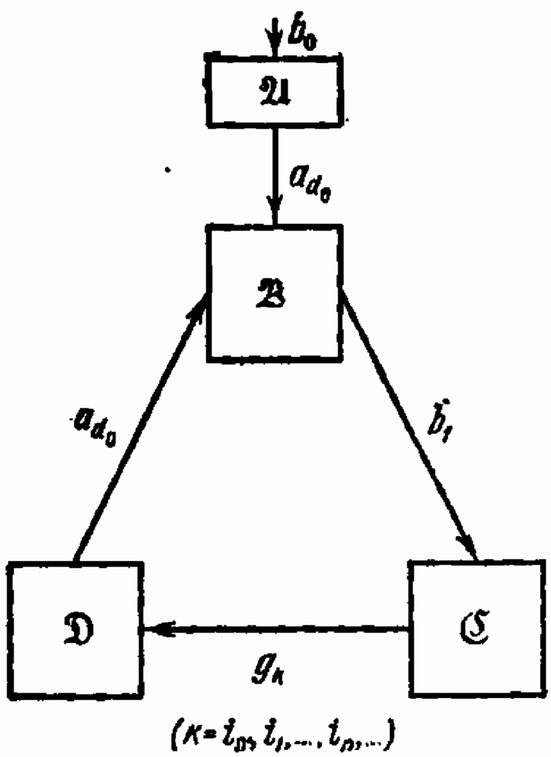


Рис. 36.

Подпрограмма $\mathfrak{A}$ состоит из одной команды:

$$b_0 \square \Rightarrow | \cdot a_{d_0}.$$

Подпрограмма $\mathfrak{B}$ состоит, во-первых, из команд машины $\mathfrak{D}_1$, записанных в сокращенном виде *), и, во-вторых, из группы команд

$$a_d s_1 \Rightarrow s_1 \cdot b_1,$$

*) См. подстрочное примечание *) на стр. 440; поскольку сокращенная форма записи команд одноленточных машин совпадает с принятой нами формой записи команд машин типа II, команды машины $\mathfrak{D}_1$, записанные сокращенно, можно рассматривать как команды некоторой машины типа II.

написанных для всех таких a_d, что тройка является для машины $\mathfrak{D}_1$ заключительной.

Подпрограмма $\mathfrak{C}$ имеет вид

$$
\begin{gathered}
b_1 | \Rightarrow | \downarrow b_1 \\
b_1 \Box \Rightarrow \Box \downarrow b_2 \\
b_2 \Box \Rightarrow \Box \downarrow b_3 \\
b_3 | \Rightarrow | \uparrow b_4 \\
b_4 \Box \Rightarrow \Box \uparrow b_5 \\
b_5 \Box \Rightarrow \Box \uparrow c_1 \\
b_3 \Box \Rightarrow \Box \uparrow b_3 \\
b_4 | \Rightarrow | \uparrow b_4 \\
c_1 | \Rightarrow | \uparrow c_2 \\
c_2 | \Rightarrow | \uparrow c_3 \\
c_3 | \Rightarrow | \uparrow c_4 \\
\vdots \\
c_\beta | \Rightarrow | \uparrow c_{\beta+1} \\
c_{\beta+1} | \Rightarrow | \uparrow c_{\beta+2} \\
c_3 \Box \Rightarrow \Box \downarrow g_1 \\
c_4 \Box \Rightarrow \Box \downarrow g_2 \\
c_5 \Box \Rightarrow \Box \downarrow g_3 \\
\vdots \\
c_{\beta+1} \Box \Rightarrow \Box \downarrow g_{\beta-1} \\
c_{\beta+2} \Box \Rightarrow \Box \downarrow g_\beta .
\end{gathered}
$$

И, наконец, подпрограмма $\mathfrak{D}$ имеет вид

$$
\begin{gathered}
g_1 | \Rightarrow \Box \downarrow h_1 \\
g_2 | \Rightarrow \Box \downarrow h_1 \\
g_3 | \Rightarrow \Box \downarrow h_1 \\
\vdots \\
g_{\beta-1} | \Rightarrow \Box \downarrow h_1 \\
g_\beta | \Rightarrow \Box \downarrow h_1 \\
h_1 | \Rightarrow \Box \downarrow h_1
\end{gathered}
$$

$$h_1 \square \Rightarrow \square \downarrow h_2$$
$$h_2 \square \Rightarrow \square \downarrow h_3$$
$$h_3 | \Rightarrow | \downarrow h_3$$
$$h_3 \square \Rightarrow | \cdot a_{d_0}.$$

Пусть начальным полным состоянием будет такое полное состояние, в котором внутреннее состояние есть b_0 и на ленте внешней памяти ничего не написано. Подпрограмма $\mathfrak{A}$ напишет на ленте внешней памяти запись числа 0 (одну палочку) и приведет машину во внутреннее состояние a_{d_0} (т. е. в то самое внутреннее состояние, с которого на машине $\mathfrak{D}_1$ начинается вычисление по Тьюрингу значений функции φ). Потом подпрограмма $\mathfrak{B}$ вычислит $\varphi(0)$ и приведет машину $\mathfrak{D}_2$ в полное состояние с внутренним состоянием b_1, реализующее на ленте внешней памяти пару $\langle 0, \varphi(0)\rangle$. Затем подпрограмма $\mathfrak{C}$ подсчитает палочки записи числа $\varphi(0) = i_0$ и приведет машину $\mathfrak{D}_2$ в полное состояние с внутренним состоянием g_{i_0}. На этом такте машина в первый раз напечатает на выходной ленте некоторый символ, а именно символ e_{i_0}. Потом подпрограмма $\mathfrak{D}$ уничтожит запись числа $\varphi(0)$, переделает запись числа 0 в запись числа 1 (прибавит одну палочку) и переведет машину в полное состояние с внутренним состоянием a_{d_0}. В действие снова вступит подпрограмма $\mathfrak{B}$. Машина вычислит $\varphi(1)$ и придет в полное состояние с внутренним состоянием b_1, реализующее на ленте внешней памяти пару $\langle 1, \varphi(1)\rangle$. Затем подпрограмма $\mathfrak{C}$ подсчитает палочки записи числа $\varphi(1) = i_1$ и приведет машину в полное состояние с внутренним состоянием g_{i_1}. На этом такте машина во второй раз напечатает на выходной ленте некоторый символ, а именно символ e_{i_1}. Затем запись числа $\varphi(1)$ уничтожится, а запись числа 1 перейдет в запись числа 2 (подпрограмма $\mathfrak{D}$); машина вычислит число $\varphi(2) = i_2$ (подпрограмма $\mathfrak{B}$), подсчитает палочки его записи (подпрограмма $\mathfrak{C}$) и напечатает на выходной ленте e_{i_2} и т. д. Машина $\mathfrak{D}_2$ будет работать бесконечно, печатая на выходной ленте нужную последовательность (6).

УПОМЯНУТАЯ ЛИТЕРАТУРА

А к к е р м а н В. (A c k e r m a n W.)

[1928]. Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. Math. Ann. 99, 1—2, стр. 118—133.

А л е к с а н д р о в П. С.

[1916]. Sur la puissance des ensembles mesurables B. C. r. Acad. Sci. 162, 9, стр. 323—325.

[1948]. Введение в общую теорию множеств и функций. М.—Л., 441 стр.

А р н о л ь д И. В.

[1939]. Теоретическая арифметика, изд. 2-е, М., 400 стр.

А р с е н и н В. Я. и Л я п у н о в А. А.

[1950]. Теория А-множеств. Успехи матем. наук 5, 5, стр. 45—108.

Г ё д е л ь К. (G ö d e l K.)

[1934]. On undecidable propositions of formal mathematical systems. Записки С. К. Клини (S. C. Kleene) и Дж. В. Россера (J. B. Rosser) лекций в Институте высших исследований (the Institute for Advanced Study), mimeographed, Princeton, N. J., 30 стр.*).

[1938]. The concistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. Proc. Nat. Acad. Sci. 24, 12, стр. 556—557.

Г и л ь б е р т Д. (H i l b e r t D.) и А к к е р м а н В. (A c k e r m a n W.)

[1938]. Grundzuge der theoretischen Logik; изд. 2-е, Berlin, VIII+133 стр. Перепечатка: New York, 1946. Русский перевод нью-йоркского издания: Г и л ь б е р т Д. и А к к е р м а н В.,

*) См. подстрочное примечание на стр. 154. Настоящее библиографическое описание дается по библиографии в книге С. К. Клини [1952].

Основы теоретической логики; перевод с немецкого А. А. Ерофеева, редакция, вступительная статья и комментарии С. А. Яновской. М., 1947, 304 стр.

Деккер Дж. (Dekker J. C. E.)

[1953]. Two notes on recursively enumerable sets. Proc. Amer. Math. Soc. 4, 3, стр. 495—501.

[1954]. A theorem on hypersimple sets. Proc. Amer. Math. Soc. 5, 5, стр. 791—796.

[1955]. Productive sets. Trans. Amer. Math. Soc. 78, 1, стр. 129—149.

Заславский И. Д.

[1956]. О конструктивных дедекиндовых сечениях. Труды Третьего всесоюзного математического съезда, Москва, июнь — июль 1956; т. 1, М., стр. 182—183.

Клини С. К. (Kleene S. C.)

[1936]. General recursive functions of natural number. Math. Ann. **112**, 5, стр. 727—742.

[1938]. On notation for ordinal numbers. J. Symbolic Logic **3**, 4, стр. 150—155.

[1943]. Recursive predicates and quantifiers. Trans. Amer. Math. Soc. **53**, 1, стр. 41—73.

[1950]. A symmetric form of Gödel's theorem. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. A **53**, 5—6, стр. 800—802; или (что то же самое) Indagationes mathematicae **12**, 3, стр. 244—246.

[1952]. Introduction to metamathematics. New York — Toronto, X+550 стр. Русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику; перевод с английского А. С. Есенина-Вольпина, под редакцией В. А. Успенского. М., 1957, 526 стр.

Колмогоров А. Н.

[1954]. Предисловие редактора перевода. В книге: Петер Р., Рекурсивные функции; М., стр. 3—10.

Колмогоров А. Н. и Успенский В. А.

[1958]. К определению алгоритма. Успехи матем. наук **13**, 4, стр. 3—28.

Колмогоров А. Н. и Фомин С. В.

[1954]. Элементы теории функций и функционального анализа, вып. I. Метрические и нормированные пространства. М., 154 стр.

Кондо М. (Kondô M.)

[1937]. L'Uniformisation des complémentaires analytiques. Proc. Acad. Tokyo **13**, 8, стр. 287—290.

Крейнин Я. Л.

[1956]. О множествах, эффективно отличных от всех Ф-множеств. Матем. сб. **38** (80), 2, стр. 129—148.

Кузнецов А. В.

[1950]. О примитивно-рекурсивных функциях большого размаха. Докл. АН СССР **71**, 2, стр. 233—236.

Лузин Н. Н.

[1927]. Sur les ensembles analytique. Fundam. Math. **10**, стр. 1—95. Русский перевод: «Об аналитических множествах», в книге Лузин Н. Н., Собрание сочинений, т. II, Дескриптивная теория множеств, М., 1958, стр. 380—459.

[1948]. Теория функций действительного переменного, общая часть; изд. 2-е, М., 318 стр.

Ляпунов А. А. и Новиков П. С.

[1948]. Дескриптивная теория множеств. Математика в СССР за тридцать лет, 1917—1947; М.—Л., стр. 243—255.

Майхилл Дж. (Myhill J.)

[1955]. Creative sets. Z. math. Logik und Grundl. Math. **1**, 2, стр. 97—108.

Марков А. А.

[1947]. О представлении рекурсивных функций. Докл. АН СССР **58**, 9, стр. 1891—1892.

[1949]. О представлении рекурсивных функций. Изв. АН СССР, сер. матем. **13**, 5, стр. 417—424.

[1954]. Теория алгорифмов. Тр. матем. ин-та АН СССР **42**, 374 стр.

Медведев Ю. Т.

[1955]. О неизоморфных рекурсивно-перечислимых множествах. Докл. АН СССР **102**, 2, стр. 211—214.

Мостовский А. (Mostowski A.)

[1947]. On definable sets of positive integers. Fundam. math. **34**, стр. 81—82.

Мучник А. А.

[1956]. Об отделимости рекурсивно-перечислимых множеств. Докл. АН СССР **109**, 1, стр. 29—32.

[1958]. Изоморфизм систем рекурсивно-перечислимых множеств с эффективными свойствами. Тр. Моск. матем. о-ва **7**, стр. 407—412.

Новиков П. С.

[1931]. Sur le fonctions implicites mesurables B. Fundam. math. 17, стр. 8—25.

[1939]. О множествах эффективно несчетных. Изв. АН СССР, сер. матем. 1, стр. 35—40.

[1951]. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств. Тр. Матем. ин-та АН СССР 38, стр. 279—316.

Петер Р. (Peter R.)

[1935]. Konstruktion nichtrekursiven Funktionen. Math. Ann. 111, 1, стр. 42—60.

[1951]. Rekursive Funktionen. Budapest, 206 стр. Русский перевод: Петер Р., Рекурсивные функции; перевод с немецкого В. А. Успенского, под редакцией и с предисловием А. Н. Колмогорова. М., 264 стр.

Пост Э. Л. (Post E. L.)

[1936]. Finite combinatory processes—formulation I. J. Symbolic Logic 1, 3, стр. 103—105.

[1944]. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Bull. Amer. Math. Soc. 50, 5, стр. 284—316.

[1946]. Note on a conjecture of Skolem. J. Symbolic Logic 11, 3, стр. 73—74.

Райс Г. (Rice H. G.)

[1953]. Classes of recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Trans. Amer. Math. Soc. 74, 2, стр. 358—366.

[1954]. Recursive real numbers. Proc. Amer. Math. Soc. 5, 5, стр. 784—791.

Робинсон Р. М. (Robinson R. M.)

[1951]. Rózsa Péter. Recursive Funktionen. Akadémiai Kiadó (Akademische Verlag), Budapest, 1951, 206 pp. J. Symbolic Logic 16, 4, стр. 280—282.

Сколем Т. (Skolem Th.)

[1945]. Remarks on recursive functions and relations. Det Kongelige Norske Videnskaber Selskabs Forhandlinger 17 (за 1944 г.*)), 22, стр. 89—92.

*) Том издан в 1945 г.

Суслин М. Я.

[1917]. Sur une definition des ensembles mesurables B sans nombre transfinis. C. r. Acad. Sci. **164**, 2, стр. 88—91.

Тарский А. (Tarski A.)

[1941]. Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences. N.Y. Русский перевод: Тарский А., Введение в логику и методологию дедуктивных наук; перевод с английского О. Н. Дынник, редакция и предисловие к русскому переводу С. А. Яновской, Примечания Г. М. Адельсона-Вельского, М., 326 стр.

Трахтенброт Б. А.

[1957]. Алгоритмы и машинное решение задач. М., 95 стр.

Тьюринг А. М. (Turing A. M.)

[1936]. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. London Math. Soc., ser. 2, **42**, 3, 4; стр. 230—265.

[1937]. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. A correction. Proc. London. Math. Soc., ser. 2, **43**, 7, стр. 544—546.

Успенский В. А.

[1953]. Теорема Гёделя и теория алгоритмов. Докл. АН СССР **91**, 4, стр. 737—740.

[1955]. Об операциях над перечислимыми множествами, 208 стр. [Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет.]

[1955a]. Системы перечислимых множеств и их нумерации. Докл. АН СССР **105**, 6, стр. 1155—1158.

[1956]. Вычислимые операции и понятие программы. Успехи матем. наук **11**, 4, стр. 172—176.

[1957]. К теореме о равномерной непрерывности. Успехи матем. наук **12**, 1, стр. 99—142.

[1957a]. Несколько замечаний о перечислимых множествах. Z. math. Logik und Grundl. Math. **3**, 2, 157—170.

[1960]. К вопросу о соотношении между различными системами конструктивных действительных чисел. Известия высших учебных заведений, Математика, № 2 (15), стр. 199—208.

Фихтенгольц Г. М.

[1951]. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том I, М.—Л., 696 стр.

Чёрч А. (Church A.)

[1936]. An unsolvable problem of elementary number theory. Amer. J. Math. 58, 2, стр. 345—363.

[1956]. Introduction to mathematical logic, vol. 1, Princeton (N.Y.) 376 стр. Печатается русский перевод: Чёрч А., Введение в математическую логику, том 1; перевод с английского В. С. Чернявского, под редакцией В. А. Успенского. М., 1960, 464 стр.

Шпеккер Е. (Specker E.)

[1949]. Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. J. Symbolic Logic 14, 3, стр. 145—158.

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

А. ТИПОВЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В указателе применяется следующая символика:

i, k, n, q, r, s (с нижними индексами или без) — произвольные натуральные числа

A, B, E, K, L, M, X, Y (с нижними индексами или без) — произвольные множества

f (с нижним индексом или без) — произвольная функция

φ — произвольное частичное отображение

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ (с нижними индексами или без) — произвольные высказывательные формы

P — произвольный предикат

τ — произвольная вычислимая нумерация множества рациональных чисел

α — произвольная алгебраическая подстановка

I. Высказывательные формы и предикаты

II. Множества

III. Функции

В. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

I. Истинностные значения и предикаты

II. Множества

III. Функции и операторы

IV. Множества множеств

V. Множества функций

C. ЛОКАЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

I. В § 4

II. В п. 3 § 11

III. В § 12

IV. В п. 4 § 12

V. В § 14

1) Символы алфавита внешней памяти

2) Сдвиги

z_1 или $\uparrow$ 410
z_2 или $\downarrow$ 410
z_3 или $\cdot$ 410

3) Команды

$a_i \Longrightarrow a_j$ 403
$a_d s_c \Longrightarrow s_{c*} z_b a_{d*}$ 411
$a_d\,(k)\,s_c \Longrightarrow (h)\,s_{c*}\,(i)\,z_a a_{d*}\,(j)$ 419

4) Стандартные подпрограммы поис

$\Gamma_1\,(S_1;\ s_c;\ a^0,\ b^0)$ 442
$\Gamma_2\,(S_1;\ s_c;\ a^0,\ b^1,\ b^2,\ b^3)$ 442
$\Gamma_3\,(S_1;\ s_c,\ s_d;\ a^0,\ b^0)$ 443