А. А. Марков, О представлении рекурсивных функций, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1949, том 13, выпуск 5, 417–424

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 417—424

А. А. МАРКОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **И. Г. Петровским**)

В работе устанавливается простая характеризация примитивно рекурсивных функций P одного аргумента, обладающих тем свойством, что всякая общая рекурсивная функция n аргументов представляется в виде

$$P(\mu y(Q(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)),$$

где Q — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов.

1. В 1936 г. Kleene (4) доказал, что всякая общая рекурсивная функция n аргументов представляется в виде

1.1 $$P(\mu y(Q(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)),$$

где P — примитивно рекурсивная функция одного аргумента, Q — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов такая, что

1.2 $$(x_1) \ldots (x_n)\ (Ey)\ (Q(x_1, \ldots, x_n, y) = 0).$$

Здесь „$\mu y \ldots$" означает наименьшее из чисел y, удовлетворяющих стоящему за „μy" условию, а кванторы* относятся к совокупности натуральных чисел 0, 1, 2 . . . , которые мы здесь называем просто числами.

Впоследствии Kleene (5) уточнил свой результат, доказав возможность пользования одной определенной примитивно рекурсивной функцией P, независимой от представляемой общей рекурсивной функции. Указанная им универсальная в этом смысле функция P определялась при этом весьма сложной совокупностью схем подстановки и примитивной рекурсии. Одновременно Kleene распространил теорему представления на частично рекурсивные функции.

В 1944 г. Skolem (8) высказал предположение о возможности обойтись и без функции P, т. е. о возможности представления всякой общей рекурсивной функции n аргументов в виде

$$\mu y(Q(\mathfrak{x}, y) = 0),$$

где Q — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов, удовлетворяющая условию 1.2. Он установил простую характеризацию функ-

* В отношении терминологии и обозначений мы следуем (1) и (2) с той лишь разницей, что для обозначения эквивалентности мы применяем знак $\equiv$ вместо $\sim$. В дальнейшем мы для сокращения пишем $\mathfrak{x}$ вместо $x_1, \ldots, x_n$ и $(\mathfrak{x})$ вместо $(x_1) \ldots (x_n)$.

ций, допускающих такое представление (9), оставив открытым вопрос о совпадении класса этих функций с классом общих рекурсивных функций.

Этот вопрос был вскоре решен Post'ом (7) в отрицательном смысле. Предположение Skolem'а было, таким образом, опровергнуто.

В связи со всем этим естественно возник вопрос: какова, при данном n, должна быть примитивно рекурсивная функция P одного аргумента для того, чтобы всякая общая рекурсивная функция n аргументов представлялась в виде 1.1 с надлежащей (зависящей от представляемой функции) примитивно рекурсивной функцией Q от $n+1$ аргументов, удовлетворяющей условию 1.2?

Цитированная выше теорема Kleene'а показывает, что такие функции существуют, а из упомянутого результата Post'а следует, что далеко не все примитивно рекурсивные функции одного аргумента таковы. Было поэтому естественно спросить, что же это за функции?

Решение этого вопроса указано в заметке автора (6). Настоящая статья содержит подробное доказательство и некоторые усиления изложенного там результата*.

2. Будем говорить об арифметической функции P одного аргумента, что она есть функция большого размаха, если всякое число фигурирует в качестве ее значения бесконечное множество раз, т. е. если

$$(y)(z)(Ex)(x > y \& P(x) = z).$$

Будем говорить об арифметической функции P одного аргумента, что она универсальна для n аргументов, если она примитивно рекурсивна и всякая общая рекурсивная функция n аргументов представляется в виде 1.1, где Q — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов, удовлетворяющая условию 1.2.

Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы примитивно рекурсивная функция одного аргумента была универсальной для n аргументов, необходимо и достаточно, чтобы она была функцией большого размаха.*

Заметим, что примитивно рекурсивные функции большого размаха строятся легко. В частности, таковыми являются функции σ_1 и σ_2 Hilbert'а и Bernays'а. **

Таким образом, теорема 1 значительно обобщает и улучшает результат Kleene'а в отношении внешней функции P представления 1.1.***

3. Теорема 1, очевидно, вытекает из следующих двух теорем.

ТЕОРЕМА 2. *Если P — примитивно рекурсивная функция большого размаха, то, какова бы ни была частично рекурсивная функция R от n*

* Этот результат приводится ниже, чтобы сделать изложение настоящей статьи независимым от упомянутой заметки.

** См. (2), стр. 321 и 328. Что σ_1 и σ_2 — функции большого размаха, непосредственно следует из приводимых ниже равенств 6.42 и 6.43.

*** Мы не рассматриваем здесь явно установленную Kleene'ом (5) нормализацию внутренней функции Q. Из нашего доказательства теоремы 2 (см. ниже) легко следует, однако, что нормализация внутренней функции, аналогичная Kleene'овской, возможна при любом допустимом закреплении внешней функции.

аргументов, существует примитивно рекурсивная функция Q от $n+1$ аргументов такая, что

3.1 $$R(\mathfrak{x}) \simeq P(\mu y(Q(\mathfrak{x}, y)=0)).$$

ТЕОРЕМА 3. *Для всякого целого положительного числа n может быть построена такая общая рекурсивная функция n аргументов, что при всяком ее представлении в виде 1.1 с примитивно рекурсивными P и Q и с Q, удовлетворяющей условию 1.2, P будет функцией большого размаха.*

Знак $\simeq$, встречающийся в теореме 2, означает совпадение функций, определяемых выражениями, стоящими справа и слева от него. Точнее говоря, мы ставим этот знак между двумя выражениями, определяющими арифметические функции, когда хотим утверждать, во-первых, что выражения эти имеют смысл для одних и тех же систем значений входящих в них свободных переменных, и, во-вторых, что совпадают значения этих выражений для любой системы значений свободных переменных, для которой выражения имеют смысл.

4. В лемме, которую мы сейчас формулируем, встречается арифметическая функция β двух переменных такая, что

4.1 $$\beta(y, z)=\begin{cases}1 \text{ при } y=z,\\ 0 \text{ при } y \neq z.\end{cases}$$

Эта функция, как известно, примитивно рекурсивна *.

ЛЕММА. *Пусть P — примитивно рекурсивная функция большого размаха. Определим функцию W двух аргументов схемой:*

4.2 $$W(0, z)=0,$$

4.21 $$W(y', z)=W(y, z)+\beta(P(y), z);$$

функцию V одного аргумента — равенством

4.22 $$V(y)=W(y, P(y)).$$

*Тогда V — примитивно рекурсивная функция и, каков бы ни был двучленный предикат ** $\mathfrak{A}$,*

4.3 $$(Ey)(Ez)\,\mathfrak{A}(y, z) \equiv (Et)\,\mathfrak{A}(V(t), P(t)).$$

Доказательство. Принимая во внимание примитивную рекурсивность функции β и предположенную примитивную рекурсивность функции P, заключаем из 4.2 и 4.21, что W — примитивно рекурсивная функция. Отсюда следует, согласно 4.22, что V — примитивно рекурсивная функция.

Определим функцию U двух аргументов равенством

4.4 $$U(y, z)=\mu x(x \geqslant y \;\&\; P(x)=z),$$

правая часть которого имеет смысл при любых y и z, так как P — функция большого размаха. Функция U является общей рекурсивной,

* См., напр., (2), стр. 317.

** Все рассматриваемые здесь предикаты относятся к натуральным числам.

согласно теореме Kleene'а о замкнутости класса общих рекурсивных функций относительно оператора μ *, что существенно для конструктивности проводимого доказательства. Определим функцию T двух аргументов схемой примитивной рекурсии

4.41 $\quad T(0, z) = U(0, z),$

4.42 $\quad T(y', z) = U(T(y, z)', z).$

(Функция T также общая рекурсивная).

Имеем

4.5 $\quad U(y, z) \geqslant y$ [4.4

4.51 $\quad P(U(y, z)) = z$ [4.4

$y \leqslant x < U(y, z) \rightarrow P(x) \neq z$ [4.4

4.52 $\quad \rightarrow W(x', z) = W(x, z)$ [4.21, 4.1

4.6 $\quad W(U(y, z), z) = W(y, z)$ [4.52,4.5

$W(U(y, z)', z) = W(U(y, z), z')$ [4.21,4.1,4.51

4.61 $\quad = W(y, z)'$ [4.6

$W(T(0, z)', z) = W(0, z)'$ [4.41,4.61

4.7 $\quad = 0'$ [4.2

$W(T(y', z)', z) = W(U(T(y, z)', z)', z)$ [4.42

4.71 $\quad = W(T(y, z)', z)'$ [4.61

4.72 $\quad W(T(y, z)', z) = y'$ [4.7,4.71

$V(U(y, z)) = W(U(y, z), z)$ [4.22,4.51

4.8 $\quad = W(y, z)$ [4.6

4.81 $\quad V(T(0, z)) = 0$ [4.41,4.8,4.2

$V(T(y', z)) = V(U(T(y, z)', z))$ [4.42

$= W(T(y, z)', z)$ [4.8

4.82 $\quad = y'$ [4.72

4.83 $\quad V(T(y, z)) = y$ [4.81,4.82

4.84 $\quad P(T(y, z)) = z$ [4.41,4.42,4.51

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — произвольный двучленный предикат. Имеем

$\mathfrak{A}(y, z) \rightarrow \mathfrak{A}(V(T(y, z)), P(T(y, z)))$ [4.83,4.84

4.9 $\quad \rightarrow (Et)\, \mathfrak{A}(V(t), P(t))$

$(Ey)(Ez)\, \mathfrak{A}(y, z) \rightarrow (Et)\, \mathfrak{A}(V(t), P(t))$ [4.9

Так как обратная импликация очевидна, имеем 4.3, что и требовалось доказать.

(В связи с этим доказательством возникает вопрос: могут ли функции U и T не быть примитивно рекурсивными при соблюдении условий леммы?).

* См. ([5]), стр. 51.

5. Докажем теорему 2.

Пусть P — произвольная примитивно рекурсивная функция большого размаха; R — произвольная частично рекурсивная функция n аргументов.

Согласно теореме Kleen'a о представлении частично рекурсивных функций *, существуют примитивно рекурсивная функция F одного аргумента и $(n+1)$-членный примитивно рекурсивный предикат $\mathfrak{B}$ такие, что

5.1 $$R(\mathfrak{x}) \simeq F(\mu y\, \mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y)),$$

5.11 $$(\mathfrak{x})(y)(\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y) \rightarrow F(y) = R(\mathfrak{x})).$$

Построим функции W и V, как в лемме. Согласно лемме, V — примитивно рекурсивная функция одного аргумента и для любого двучленного предиката $\mathfrak{A}$ соблюдается 4.3.

Определим $n+1$-членный предикат $\mathfrak{C}$ условием

5.2 $$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \equiv \mathfrak{B}(\mathfrak{x}, V(t))\,\&\, P(t) = F(V(t)).$$

Согласно теоремам Gögel'я о примитивно рекурсивных функциях и примитивно рекурсивных предикатах **, предикат $\mathfrak{C}$ примитивно рекурсивен, т. е. существует такая примитивно рекурсивная функция Q от $n+1$ аргументов, что

5.21 $$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \equiv Q(\mathfrak{x}, t) = 0.$$

Докажем, что имеет место представление 3.1.

Имеем

5.3 $$(Ez)(z = F(y))$$

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y) \equiv \mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y)\,\&\,(Ez)(z = F(y)) \qquad [5.3$$

5.31 $$\equiv (Ez)(\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y)\,\&\, z = F(y))$$

$$(Ey)\,\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y) \equiv (Ey)(Ez)(\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y)\,\&\, z = E(y)) \qquad [5.31$$

$$\equiv (Et)\,\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \qquad [4.3, 5.2$$

В силу 5.1, отсюда следует, что $R(\mathfrak{x})$ имеет смысл тогда и только тогда, когда

$$(Et)\,\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t),$$

т. е. когда имеет смысл выражение $P(\mu t\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t))$.

Кроме того,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{x}, V(t)) \qquad [5.2$$

5.4 $$\rightarrow F(V(t)) = R(\mathfrak{x}) \qquad [5.11$$

5.41 $$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \rightarrow P(t) = F(V(t)) \qquad [5.2$$

5.42 $$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \rightarrow P(t) = R(\mathfrak{x}). \qquad [5.4, 5.41$$

Если $P(\mu t\,\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t))$ имеет смысл, то

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, \mu t\,\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t)),$$

и поэтому, согласно 5.42,

$$R(\mathfrak{x}) = P(\mu t\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t)).$$

Этим доказано, что

$$R(\mathfrak{x}) \simeq P(\mu t\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t)),$$

а, согласно 5.21, это дает 3.1.

* См. ([5]) стр. 53.

** См. ([5]), стр. 180, теоремы I — III.

6. В доказательстве теоремы 3, к которому мы сейчас перейдем, существенную роль играет общая рекурсивная, но не примитивно рекурсивная функция одного аргумента, принимающая лишь значения 0 и 1. Функция с такими свойствами была построена Skolem'ом ([9]).

Пусть ω — общая рекурсивная функция одного аргумента такая, что

6.1 ω не есть примитивно рекурсивная функция;

6.11 $$(x)(\omega(x) = 0 \vee \omega(x) = 1).$$

Требуется построить для любого целого положительного n общую рекурсивную функцию n аргументов такую, что при всяком ее представлении в виде 1.1 с примитивно рекурсивными P, Q и с Q, удовлетворяющей 1.2, P была бы функцией большого размаха.

Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Покажем, что в этом случае функция φ_2 двух аргументов, определяемая равенством

6.2 $$\varphi_2(x_1, x_2) = \omega(x_1) + x_2,$$

обладает всеми требуемыми свойствами.

В самом деле, эта функция — общая рекурсивная, так как ω — общая рекурсивная функция. Допустим, что имеет место представление

6.21 $$\varphi_2(x_1, x_2) = P(\mu y(Q(x_1, x_2, y) = 0)),$$

где P — примитивно рекурсивная функция одного аргумента, Q — примитивно рекурсивная функция трех аргументов, удовлетворяющая условию 1.2 с $n = 2$. Докажем, что P — функция большого размаха.

Допустим противное. Тогда, согласно определению функций большого размаха (см. п. 2), существуют числа a и b такие, что

6.22 $$(z)(P(z) = b \rightarrow z \leqslant a).$$

Закрепим пару таких чисел a и b.

Определим последовательно трехчленный предикат $\mathfrak{D}$, трехчленный предикат $\mathfrak{E}$ и одночленный предикат $\mathfrak{F}$ условиями

6.23 $$\mathfrak{D}(x_1, x_2, y) \equiv Q(x_1, x_2, y) = 0,$$

6.24 $$\mathfrak{E}(x_1, x_2, y) \equiv \mathfrak{D}(x_1, x_2, y) \,\&\, (t)(t < y \rightarrow \overline{\mathfrak{D}}(x_1, x_2, t)),$$

6.25 $$\mathfrak{F}(x) \equiv (Ez)(z \leqslant a \,\&\, P(z) = b \,\&\, \mathfrak{E}(x, b, z)).$$

Предикат $\mathfrak{D}$ примитивно рекурсивен, так как функция Q примитивно рекурсивна. Согласно теоремам Gödel'я *, предикаты $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F}$ поэтому также примитивно рекурсивны. Отсюда следует, что функция G, определяемая условием

6.26 $$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathfrak{F}(x), \\ 1, & \text{если } \overline{\mathfrak{F}}(x), \end{cases}$$

примитивно рекурсивна.

Имеем

$$\mathfrak{E}(x_1, x_2, y) \equiv y = \mu z \mathfrak{D}(x_1, x_2, z) \qquad [6.24$$

6.27 $$\omega(x) = 0 \equiv \varphi_2(x, b) = b \qquad [6.2$$

$$\equiv P(\mu y \mathfrak{D}(x, b, y)) = b \qquad [6.21, 6.23$$

$$\equiv (Ez)(z = \mu y \mathfrak{D}(x, b, y) \,\&\, P(z) = b)$$

* См. ([3]), стр. 180, теоремы I – IV.

$$\equiv (Ez)(\mathfrak{C}(x, b, z) \,\&\, P(z) = b) \qquad [6.27$$

$$\equiv \mathfrak{F}(x) \qquad [6.22, 6.25$$

6.28 $$\equiv G(x) = 0 \qquad [6.26$$

$$\omega(x) = 1 \equiv \omega(x) \neq 0 \qquad [6.11$$

$$\equiv G(x) \neq 0 \qquad [6.28$$

6.29 $$\equiv G(x) = 1 \qquad [6.26$$

$$\omega(x) = G(x) \qquad [6.11, 6.28, 6.29$$

Следовательно, ω — примитивно рекурсивная функция, вопреки 6.1. Это противоречие доказывает теорему 3 для $n = 2$.

Рассмотрим теперь случай $n > 2$. В этом случае мы определим функцию φ_n от n аргументов равенством

6.3 $$\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_2(x_1, x_2).$$

Эта функция — общая рекурсивная, так как φ_2 — общая рекурсивная функция.

Допустим, что имеет место представление

6.31 $$\varphi_n(\mathfrak{x}) = P(\mu y(Q(\mathfrak{x}, y) = 0)),$$

где P — примитивно рекурсивная функция одного аргумента, Q — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов, удовлетворяющая условию 1.2. Докажем, что P — функция большого размаха.

Имеем

$$\varphi_2(x_1, x_2) = P(\mu y(Q(x_1, x_2, 0, \ldots, 0, y) = 0)). \qquad [6.3,\ 6.31$$

Здесь выражение $Q(x_1, x_2, 0, \ldots, 0, y)$ определяет примитивно рекурсивную функцию трех аргументов x_1, x_2, y, причем

$$(x_1)(x_2)(Ey)(Q(x_1, x_2, 0, \ldots, 0, y) = 0).$$

Поэтому, согласно доказанному для $n = 2$, P — функция большого размаха.

Остается случай $n = 1$. В этом случае определим функцию φ_1 одного аргумента равенством

6.4 $$\varphi_1(x) = \varphi_2(\sigma_1(x), \sigma_2(x)),$$

где σ_1 и σ_2 — упомянутые выше примитивно рекурсивные функции Hilbert'а и Bernays'а *. Функция φ_1 — общая рекурсивная, так как φ_2, σ_1 и σ_2 — общие рекурсивные функции.

Допустим, что имеет место представление

6.41 $$\varphi_1(x) = P(\mu y(Q(x, y) = 0)),$$

где P — примитивно рекурсивная функция одного аргументв, Q — примитивно рекурсивная функция двух аргументов, удовлетворяющая условию 1.2 с $n = 1$. Докажем, что P — функция большого размаха.

Для этого воспользуемся примитивно рекурсивной функцией σ двух аргументов, обладающей теми свойствами, что **

* См. (2), стр. 321 и 328.

** См. (2), стр. 321.

6.42 $$\sigma_1(\sigma(x_1, x_2)) = x_1,$$
6.43 $$\sigma_2(\sigma(x_1, x_2)) = x_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_1, x_2) &= \varphi_2(\sigma_1(\sigma(x_1\, x_2)), \sigma_2(\sigma(x_1, x_2))) && [6.42, 6.43 \\ &= \varphi_1(\sigma(x_1, x_2)) && [6.4 \\ &= P(\mu y(Q(\sigma(x_1, x_2), y) = 0)). && [6.41 \end{aligned}$$

Здесь выражение $Q(\sigma(x_1, x_2), y)$ определяет примитивно рекурсивную функцию трех аргументов x_1, x_2, x_3, причем

$$(x_1)(x_2)(Ey)(Q(\sigma(x_1, x_2), y) = 0).$$

Поэтому, согласно доказанному для $n = 2$, P — функция большого размаха, что и требовалось доказать.

Это доказательство теоремы 3 неконструктивно, поскольку оно является доказательством «от противного» и опирается на закон исключенного третьего. Заменить его коструктивным доказательством едва ли возможно. Проведенное рассуждение дает, однако, конструктивное доказательство следующей ослабленной формы теоремы 3.

Условимся говорить об арифметической функции P одного аргумента, что она есть функция малого размаха, если мы можем указать числа y и z, такие, что y будет ограничивать сверху числа x, для которых $P(x) = z$, т. е. если

$$(Ey)(Ez)(x)(P(x) = z \rightarrow x \leqslant y).$$

Конструктивно доказуемая форма теоремы 3 состоит в следующем.

Для всякого целого положительного n может быть построена общая рекурсивная функция n аргументов, не допускающая представлений 1.1, *в которых Q — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов, удовлетворяющая* 1.2, *P — примитивно рекурсивная функция малого размаха.*

Очевидно, что уже в этом утверждении содержится отрицательное решение формулированной выше проблемы Skolem'a.

Поступило
8.IX.1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гильберт Д. и Аккерман В., Основы теоретической логики, Москва, 1944.

[2] Hilbert D. u. Bernays P., Grundlagen der Mathematik, Bd. I, Berlin, 1934.

[3] Gödel A., Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatshefte f. Math. u. Phys.. 38 (1931), 173—198.

[4] Kleene S. C., Recursive predicates and quantities, Trans. Amer. Math. Soc., 53 (1943), 41—73.

[5] Kleene S. C., General recursive functions of natural numbers, Math. Ann., 112 (1936), 727—742.

[6] Марков А. А., О представлении рекурсивных функций, Доклады Ак. Наук СССР, 58 (1947), 1891—1892.

[7] Post E. L., Note on a conjecture of Skolem, J. of Symb. Logic, 11 (1946), 73—74.

[8] Skolem Th., Remarks on recursive functions and relations, Norske Vid. Selsk. Forh., 17 (1944), 89—92.

[9] Skolem Th., Some remarks on recursive arithmetic, Norske Vid. Selsk. Forh., 17 (1944), 103—106.