

Континуум-гипотеза

В 1877 году Георг Кантор выдвинул и впоследствии безуспешно пытался доказать так называемую континуум-гипотезу, которую можно сформулировать следующим образом:

«Любое бесконечное подмножество континуума является либо счётным, либо континуальным.»

Краткое слово об **Аксиоматике теории множеств**:

Эрнест Фридрих Фердинанд Цермело — немецкий математик

Абрахам Галевй (Адольф) Френкель - израильский математик, внёсшие значительный вклад в теорию множеств и создание аксиоматических оснований математики.

В 1940 году Гёдель доказал, что отрицание континуум-гипотезы недоказуемо в системе аксиом Цермело — Френкеля с аксиомой выбора, а в 1963 году Коэн с помощью разработанного им метода форсинга доказал, что континуум-гипотеза также недоказуема в ZFC. Оба эти результата опираются на предположение о непротиворечивости ZFC, причем оно является необходимым, так как в противоречивой теории любое утверждение является тривиально доказуемым. Таким образом, континуум-гипотеза является независимой от ZFC.

Вариация и обобщение континуум-гипотезы заключается в предположении, что для любого бесконечного кардинала \aleph_n выполняется равенство $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ или, другими словами, в любом множестве, превосходящем по мощности некоторое бесконечное множество S , найдётся подмножество, равномощное булеану 2^S

Обобщённая континуум-гипотеза также не противоречит аксиоматике Цермело — Френкеля, и, как показали Серпинский (Вацлав Франциск, польский математик) в 1947 г. и Шпеккер в 1952 г., из неё следует *аксиома выбора*.

Аксиома выбора утверждает:

Пусть X — множество непустых попарно непересекающихся множеств. Тогда мы можем выбрать единственный элемент из каждого множества в X .

История

Континуум-гипотеза стала первой из двадцати трёх математических проблем, о которых Гильберт доложил на II Международном Конгрессе математиков в

Париже в 1900 году. Поэтому континуум-гипотеза известна также как первая проблема Гильберта.

Поскольку континуум-гипотеза связана со многими интересными результатами, дискуссии о том, надо ли ее принять или отвергнуть, ведутся с привлечением “правдоподобных” аргументов, а именно: как соотносится континуум-гипотеза с другими аксиомами теории множеств, а также с различными фактами в теоретико-множественных исследованиях.

В настоящее время ситуация с континуум-гипотезой может быть охарактеризована рядом положений, среди которых интерес для философов представляют следующие. Во-первых, нынешние математики в целом не разделяют убеждения Кантора в правильности континуум-гипотезы. Во-вторых, континуум-гипотеза следует из аксиом Цермело – Френкеля

В-третьих, те, кто не верит в правильность континуум-гипотезы, полагают, что континуум имеет очень большое кардинальное число, большее, чем \aleph_2 – такая оценка высказывалась Геделем.

В этой связи можно упомянуть анекдотичный случай с Н.Н. Лузиным, советским математиком, который на одном из семинаров, после долгих безуспешных попыток решить проблему континуума, заявил, что он, наконец, знает, какова мощность континуума, – это a_7 ! Этот анекдот говорит о том, какой шуточный произвол возможен в суждениях математиков при отсутствии более или менее четкого понимания природы континуума.

В конечном счете все упирается в то, какая философская позиция принимается математиком. С точки зрения платониста, который рассматривает математические объекты как существующие независимо от человеческих ментальных конструкций, континуум-гипотеза либо истинна, либо ложна. Формалист же ограничится результатом независимости континуум-гипотезы, хотя ему придется столкнуться с проблемой интерпретации этого странного результата. Сами математики, будучи по большей части формалистами, предпочитают в “официальных” разговорах не упоминать об “истинности” или “ложности” континуум-гипотезы.

Подобная дискуссия поднимает более общие вопросы о том, имеют ли многие проблемы в математике определенное истинностное значение. Это касается “философской совести” математиков, и, поскольку философские позиции могут варьироваться, ситуация может быть в высшей степени вариативной. Финитист доверяет суждениям только в отношении целых чисел, в то время как платонист доверяет суждениям о трансфинитных числах.

Формалист приверженец формального метода, тот, кто склонен соблюдать внешние формальности в ущерб сути дела

Платонист утверждают, что универсальные понятия существуют независимо от их конкретных воплощений.

Финитизм - философское учение, отрицающее понятие бесконечного и утверждающее, что бесконечность не имеет места ни во вселенной, ни в микромире, ни в человеческом мышлении.

Автор книги “Основания конструктивного анализа” Э.Бишоп сделал в этой связи известное замечание: “Математика принадлежит человеку, а не Богу. Нас не интересуют свойства целых положительных чисел, которые не имеют дескриптивного значения для человека как существа, ограниченного в своих возможностях. Когда человек доказывает существование целого положительного числа, он должен знать, как найти его. Если у Бога есть своя математика, которая требует разработки, оставьте эту задачу Ему”