# Число Эйлера

Что же это было: шутка гения
Или простое совпадение.
Конечно, я не буквоед,
Но в «Euler» первой буквой – «E»!
***Лука Умищев.***

Число Эйлера – «*e*» равно 2,7182818284590452353602875…
Что же это за магическое число? Чем оно интересно? Почему множество математиков пыталось найти формулу для его вычисления?
Впервые константа, которую мы сейчас называем «число *e*» была упомянута в 1618 году в работе Джона Непера, хотя и не в явном виде: в работе содержится только таблица натуральных логарифмов, сама же константа не определена. Однако никто не понял, что это логарифмы по основанию е, так как в понятие логарифма того времени такая вещь как основание не входила. Тем не менее, число *е* иногда называют *константой Непера*.

Вывел эту константу в явном виде работавший в Петербургской Академии Наук швейцарский математик Якоб Бернулли в ходе решения задачи о предельной величине процентного дохода. Представим себе, что мы кладем в банк $1 под 100% годовых. Если проценты начисляются раз в год, то итоговая сумма будет $2. Если те же самые проценты начислять два раза в год, то $1 умножается на 1.5 дважды, получая $\$1.00\times1.5^2 = \$2.25$. Но если начислять проценты раз в месяц, то есть каждый месяц добавлять к имеющейся сумме одну двенадцатую часть, то через год в результате двенадцатикратного применения этой операции мы умножим нашу исходную сумму на $(1+1/12)^{12}$=2,613035…., что уже получше. Понятно, что чем чаще начислять проценты, тем больше мы в итоге получим. Число е обозначает предел той суммы, которую можно получить, положив в банк единичную сумму под 100% годовых, если последние начислять очень часто.
Математически это записывается так:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Первое известное использование этой константы, где она обозначалась буквой $b$, встречается в письмах Лейбница Гюйгенсу в их переписке в конце XVII века. Букву $e$ для обозначения этой важной математической константы ввел в «математический обиход» Леонард Эйлер в 1727 году. Именно поэтому число *e* чаще всего называют *числом Эйлера*.  Кажется смешным утверждение, что он использовал букву e из-за того, что это первая буква его имени. Вероятно, это даже не потому, что e взято от слова “exponential”, а просто это следующая гласная за “a”, а Эйлер уже использовал обозначение “a” в своей работе.

Число e может быть определено несколькими способами.

- Через второй замечательный предел:

  $$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

- Как сумма ряда:

  $$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

- Как единственное число $a$, для которого выполняется

  $$\int_{1}^{a}\frac{dt}{t} = 1$$

- Как единственное положительное число $a$, для которого верно

  $$\frac{da^{t}}{dt} = a^{t}$$

Число e обладает рядом замечательных свойств.

- $\frac{de^{x}}{dx} = e^{x}$. Геометрический смысл этого свойства заключается в том, что тангенс угла наклона функции $e^{x}$в каждой её точке совпадает со значением самой функции.
- Число e иррационально и даже трансцендентно. Его трансцендентность была доказана только в 1873 году Шарлем Эрмитом.
- $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ (Формула Эйлера). В частности
  - $e^{i\pi} + 1 = 0$;
  - $e = \cos i - i\sin i$.
- Число e является вычислимым числом.
- Число e разлагается в бесконечную цепную дробь следующим образом:
  - $e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}}}}}$,

- Или эквивалентным ему:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{\ldots}}}}}.$$

- Представление Каталана

$$e = 2 * \sqrt{\frac{4}{3}} * \sqrt[4]{\frac{6*8}{5*7}} * \sqrt[8]{\frac{10*12*14*16}{9*11*13*15}} * \ldots$$

Стоит отметить, что в настоящее время существуют так называемые открытые (до сих пор нерешенные) математические проблемы, связанные с числом e. Например, ни для одного из чисел $\pi + e, \pi - e, \pi * e, \frac{\pi}{e}, \pi^e, e^{\pi^2}, 2^e, e^e, e^{e^e}$ не известно даже, является ли оно рациональным числом, алгебраическим иррациональным или трансцендентным числом. Также неизвестно, является ли целым число $\underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}}_{n}$ при каком-либо положительном целом n