В. К. Детловс, Эквивалентность нормальных алгорифмов и рекурсивных функций, *Тр. МИАН СССР*, 1958, том 52, 75–139

В. К. ДЕТЛОВС

# ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НОРМАЛЬНЫХ АЛГОРИФМОВ И РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ



## I. ВВЕДЕНИЕ

### § 1. Краткая история вопроса

Математики давно пользуются понятием *алгорифм*, но это понятие долго оставалось расплывчатым, не имело точного определения. Только в последние десятилетия возникла задача: дать по возможности широкое и в то же время точное определение этого понятия. Было предложено несколько таких определений.

Уточнение понятия алгорифма как исторически, так и логически тесно связано с уточнением понятия *вычислимой арифметической функции*. Логическая связь проявляется прежде всего в том обстоятельстве, что введенный Гёделем способ арифметизации слов позволяет свести точное определение понятия алгорифма к точному определению понятия вычислимой арифметической функции. Исторически первые попытки уточнения понятия алгорифма были предприняты именно в форме уточнения понятия вычислимой функции. С другой стороны, принято считать вычислимой именно такую арифметическую функцию, для нахождения значений которой существует некоторый алгорифм.

В начале 20-х годов Сколем в статье [23]* показал, что основные

* Числа в квадратных скобках означают ссылки на список литературы в конце работы.

понятия арифметики могут быть определены при помощи рекурсии без применения связанных численных переменных с бесконечной областью изменения. С этой работы и начинается развитие рекурсивной арифметики.

Все функции, построенные здесь Сколемом, являются *примитивно-рекурсивными функциями* (ПРФ). Но само понятие примитивно-рекурсивной функции было дано лишь в 1931 г. в основополагающей работе Гёделя [9] (Гёдель эти функции называл рекурсивными). К концу 20-х и началу 30-х годов были построены арифметические функции, значения которых однозначно вычисляются из некоторой системы уравнений, но которые не являются примитивно-рекурсивными [7]. Это побудило искать более общее определение, которое охватывало бы также эти функции. Такое понятие функции, вычислимой в более широком смысле слова, или *обще-рекурсивной функции* (ОРФ), было дано Эрбраном и Гёделем [10].

Позже оказалось, что иногда требуется рассматривать функции, которые определяются так же, как обще-рекурсивные функции, с той лишь разницей, что для некоторых значений своих аргументов они могут быть не определены. Это привело к понятию *частично-рекурсивной функции* (ЧРФ) [16].

В 30-х годах Черчем [8] был выдвинут тезис о том, что понятие обще-рекурсивной функции может служить уточнением понятия вычислимой арифметической функции.

После введения понятия частично-рекурсивной функции оно, как более широкое, заменило понятие ОРФ в формулировке этого тезиса.

В дальнейшем вместо термина „частично-рекурсивная функция" часто будет применяться более короткий термин „рекурсивная функция".

Были выдвинуты и другие уточнения понятия вычислимой арифметической функции.

Здесь прежде всего можно отметить так называемые *λ-определимые функции*, теория которых была разработана Черчем и Клини (см., например, [8, 16]).

Далее Тюринг [24] ввел понятие об автоматической машине, которая печатает на бесконечной бумажной ленте нули и единицы. (Независимо от Тюринга к подобной идее пришел и Пост [21]). Эта бесконечная последовательность, состоящая из нулей и единиц, может трактоваться как арифметическая функция $\tau(n)$, а именно такая, что $\tau(0)$ равно числу единиц до первого нуля в последовательности, $\tau(1)$ равно числу единиц между первым и вторым нулем, и т. д. Таким образом приходим к понятию *вычислимой по Тюрингу арифметической функции*, которое тоже может быть предложено в качестве уточнения понятия вычислимой арифметической функции.

Как ни отличны по своему внешнему виду определения вычислимых по Тюрингу, λ-определимых и обще-рекурсивных функций, оказалось, что по своему объему все три понятия совпадают. Действительно, было доказано, что всякая $\lambda$-определимая функция обще-рекурсивна и наоборот [14], а также установлено, что всякая $\lambda$-определимая функция вычислима по Тьюрингу и наоборот [25].

Таким образом, тезис Черча, который ввиду расплывчатости понятия вычислимой арифметической функции не мог быть доказан, получил некоторое неявное подтверждение, так как разные попытки строго обрисовать и точно определить понятие вычислимой арифметической функции привели к математическим понятиям, эквивалентным обще-рекурсивным функциям.

Все эти уточнения понятия вычислимой арифметической функции означали также уточнения понятия алгорифма, только не непосредственные, а через посредство арифметизации Гёделя.

Первое уточнение общего (а не только арифметического) понятия алгорифма было предложено А. А. Марковым, который определил понятие нормального алгорифма и разработал теорию нормальных алгорифмов [3, 4, 5].

Нормальный алгорифм есть предписание произвести в определенном порядке ряд подстановок в линейной последовательности каких-то символов. Что подобные подстановки — весьма общий способ действий, об этом говорит хотя бы то, что все численные выкладки могут быть облечены в такую форму. Более того, до сих пор в математике неизвестен такой алгорифм в широком смысле слова, для которого нельзя было бы построить эквивалентный нормальный алгорифм. Это приводит к мысли, что понятие нормального алгорифма сформулировано достаточно широко, чтобы охватить все алгорифмы вообще. Об этом говорит принцип нормализации, высказанный А. А. Марковым [3]: „Всякий алгорифм над алфавитом А эквивалентен относительно А некоторому нормальному алгорифму над А“.

Естественно возникает вопрос, как связаны между собой понятия нормального алгорифма, с одной стороны, и частично-рекурсивной функции — с другой. Имеют они одинаковый или разный объем?

Этому вопросу и посвящена настоящая работа (краткое содержание работы, за исключением главы IV, изложено в заметке [1]), которая представляет собой кандидатскую диссертацию автора, выполненную под руководством А. А. Маркова.

Автор приносит глубокую благодарность своему руководителю и рецензентам Н. А. Шанину и А. Г. Лунцу за указание погрешностей и ценные советы.

## § 2. Формулировка основных теорем

В дальнейшем, как правило, не будут приводиться формулировки необходимых нам теорем из теории нормальных алгорифмов, а будут просто делаться ссылки на работу [5]. Предполагается также, что читатель уже знаком с терминологией и обозначениями теории нормальных алгорифмов [5].

Что касается необходимых определений и результатов из теории рекурсивных функций, то они собраны в § 3.

Переходим теперь к формулировке основных теорем.

Прежде всего напоминаем, что в то время как рекурсивная функция определена только для численных аргументов и в качестве значений дает опять числа, нормальный алгорифм может перерабатывать слова в любом алфавите в слова в том же алфавите.

Поэтому для того, чтобы можно было сравнивать оба эти понятия, нужно либо найти способ, позволяющий при помощи рекурсивных функций перерабатывать слова в любом алфавите в слова в том же алфавите, либо рассматривать только такие нормальные алгорифмы, которые перерабатывают системы чисел в числа, т. е. ограничиться *арифметическими* нормальными алгорифмами.

В последнем случае естественно ввести понятия *алгорифмической функции* (АФ) и *вполне алгорифмической функции* (ВАФ).

Под *числом* в дальнейшем всегда понимается натуральное число, т. е. целое положительное или нуль. Договоримся записывать числа, как слова в алфавите

$$Ч = \{ | \},$$

а именно: число $a$ — как слово, состоящее из $a$ вертикальных палочек (нуль при этом равен пустому слову $\Lambda$), и системы чисел — как слова в алфавите

$$С = \{|, *\},$$

а именно: систему чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — как слово

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_n.$$

Числа и арифметические переменные, область изменения которых состоит из натуральных чисел, в дальнейшем будем обозначать строчными латинскими буквами $a, b, c, \ldots, x, y, z$, а в главе III — также буквами $X, Y$.

Слово *функция* всегда означает арифметическую функцию, т. е. функцию, значения аргументов которой — натуральные числа и которая принимает натуральные значения. Функции обозначаются строчными греческими буквами, за исключением некоторых фиксированных функций, обозначаемых через $K, M, N, S, K_1, M_1, S_1, C_n^k, I_n^i$.

Арифметическая функция, вообще говоря, может не быть определена для некоторых значений своих аргументов. Подобным образом арифметический алгорифм может быть не применим к некоторому слову. Если $T_1, T_2$ — выражения, записанные при помощи арифметических функций и алгорифмов, зависящие от некоторых арифметических переменных, то условное равенство

$$T_1 \simeq T_2$$

будет означать, что $T_1$ и $T_2$ определены или не определены одновременно (для одних и тех же значений переменных) и если определены, то выражают одно и то же число.

Алфавиты, слова и алгорифмы будем обозначать прописными буквами, соответственно русскими, латинскими и готическими.

В работе формулы нумерованы парами чисел: первое число означает номер формулы, второе — номер параграфа. Например, (8. 3) означает восьмую формулу третьего параграфа. Определения и теоремы нумерованы парами чисел, в которых первое число — римское. Например, (III. 2) означает третью теорему второго параграфа. При ссылках номер теоремы, определения или формулы заключается в квадратные скобки.

Определим теперь понятия АФ и ВАФ.

**I. 2.** Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется АФ, если существует нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над алфавитом С такой, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathfrak{F}(x_1 * \ldots * x_n). \tag{1.2}$$

**II. 2.** Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется ВАФ, если существует нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ над алфавитом С, применимый к любому слову вида

$$x_1 * \ldots * x_n$$

и такой, что имеет место (1. 2).

З а м е ч а н и е. Здесь (и в аналогичных случаях ниже), применяя выражение

$$\text{„слово вида } x_1 * \ldots * x_n\text{“},$$

мы рассматриваем арифметические переменные $x_1, \ldots, x_n$ как обозначения чисел, а не как графические части того слова, которое имеем в виду.

Каждая ВАФ, очевидно, есть в то же время АФ, а именно АФ, определенная для всех $x_1, \ldots, x_n$, подобно тому, как всякая ОРФ есть ЧРФ, которая определена для всех значений своих аргументов.

Понятия ЧРФ и АФ оказываются одинакового объема, так как могут быть доказаны теоремы:

**III. 2.** *Всякая* ЧРФ *есть* АФ.

**IV. 2.** *Всякая* АФ *есть* ЧРФ.

Совпадают также объемы понятий ОРФ и ВАФ, как это показывают теоремы:

**V. 2.** *Всякая* ОРФ *есть* ВАФ.

**VI. 2.** *Всякая* ВАФ *есть* ОРФ.

Такие результаты получаются относительно понятий алгорифмических и рекурсивных функций.

Другая возможность сравнения может быть осуществлена при помощи некоторой арифметизации слов в данном алфавите.

**VII. 2.** Соответствие $\Gamma$ между словами в алфавите А и числами называется *арифметизацией слов в алфавите* А, если существуют алгорифмы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0$ и $\mathfrak{G}_1$ (в широком смысле слова) такие, что:

1) $\mathfrak{G}$ применим к каждому слову $V$ в А и перерабатывает такое слово в число; это число обозначается $\Gamma(V)$;

2) разные слова в А перерабатываются алгорифмом $\mathfrak{G}$ в разные числа;

3) $\mathfrak{G}_0$ применим ко всем числам и перерабатывает в пустое слово те и только те числа $a$, для которых существует $V$ в А такое, что $\mathfrak{G}(V)=a$;

4) $\mathfrak{G}_1$ применим ко всем числам $a$, для которых $\mathfrak{G}_0(a)=\Lambda$; при этом $\mathfrak{G}_1(a)=V$, если $\mathfrak{G}(V)=a$.

Число $\Gamma(V)$ будем называть гёделевым номером или просто *номером* слова $V$.

Соответствие со свойствами 1—4 называется арифметизацией и в том случае, если $\Gamma(V)$ не число, а система чисел (например, матрица).

**VIII. 2.** Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый алгорифм (или в широком смысле слова, или же нормальный алгорифм). Будем говорить, что *алгорифм* $\mathfrak{A}$ *не выводит из алфавита* А, если $\mathfrak{A}$ есть алгорифм над алфавитом А, и коль скоро $\mathfrak{A}$ применим к слову $V$ в А, то $\mathfrak{A}(V)$ есть слово также в А.

**IX. 2.** Пусть дан алфавит А и построена некоторая арифметизация $\Gamma$ слов в алфавите А. Пусть имеется некоторый алгорифм (в широком смысле слова) $\mathfrak{R}$, не выводящий из алфавита А. Тогда будем говорить, что $\mathfrak{R}$ есть *рекурсивный алгорифм над алфавитом* А, если существует ЧРФ $\varphi$ такая, что

$$\varphi(\Gamma(V)) \simeq \Gamma(\mathfrak{R}(V)) \quad (V \text{ в } A). \tag{2.2}$$

В этом случае будем говорить также, что функция $\varphi$ осуществляет алгорифм $\mathfrak{R}$.

Замечание. Если арифметизация $\Gamma$ такова, что $\Gamma(V)$ представляет собой систему из $n$ чисел, то вместо равенства (2.2) требуется соблюдение соответствующих $n$ равенств.

Ясно, что каждая ЧРФ одного аргумента осуществляет некоторый рекурсивный алгорифм. Тем самым обеспечена возможность перерабатывать при помощи рекурсивных функций слова в любом алфавите в слова в том же алфавите.

Будет доказано, что для некоторой арифметизации $\gamma_1$ (см. § 11) введенные выше рекурсивные алгорифмы эквивалентны нормальным алгорифмам, так как имеют место теоремы:

**X. 2.** *Всякий рекурсивный алгорифм над алфавитом* А *вполне эквивалентен относительно* А *некоторому нормальному алгорифму, не выводящему из* А.

**XI. 2.** *Всякий нормальный алгорифм, не выводящий из алфавита* А, *вполне эквивалентен относительно* А *некоторому рекурсивному алгорифму над алфавитом* А.

Если уточнить определение (VII. 2) посредством требования, чтобы всякая арифметизация осуществлялась нормальными алгорифмами, то теоремы (X. 2) и (XI. 2), конечно, имеют место для всякой такой арифметизации.

Теоремы (III. 2) и (V. 2) будут доказаны в § 6, а теоремы (IV. 2) и (VI. 2) — в § 10. Доказательство теорем (X. 2) и (XI. 2) содержится в § 12.

Теоремы (III. 2) и (V. 2) дают дополнительный довод в пользу принципа нормализации. Действительно, оказывается, что нормальные алгорифмы способны давать все те арифметические функции, которые до сих пор рассматривались как конструктивные.

Теоремы (IV. 2) и (VI. 2) можно рассматривать как подкрепление тезиса Черча о том, что все конструктивные арифметические функции частично-рекурсивны. Ибо еще один весьма широкий класс арифметических функций (все алгорифмические функции) оказался охваченным частично-рекурсивными функциями.

## II. АЛГОРИФМИЧНОСТЬ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

### § 3. Рекурсивные функции

В этом параграфе определены основные понятия и приведены некоторые известные теоремы теории рекурсивных функций.

Согласно договоренности в § 2, числа будут записываться, как слова в алфавите Ч $=\{|\}$. Поэтому, например, утверждение „$X$ есть слово в алфавите Ч“ равносильно утверждению „$X$ есть число“, а выражение „равно нулю“ означает то же, что выражение „равно пустому слову в Ч“. Число, непосредственно следующее за числом $x$, будем обозначать через $x|$.

Для конкретных чисел $\Lambda$, $|$, $||$, ... будем применять также обычные обозначения 0, 1, 2, ...

Приведем определение примитивно-рекурсивной функции.

**I. 3.** Функция называется ПРФ, если она совпадает с одной из исходных функций:

(1. 3) $$S(x)=x|,$$

(2. 3) $$N(x)=0,$$

(3. 3) $$I_n^i(x_1, \ldots, x_n)=x_i \text{ для всех } n\geqslant 1 \ (1\leqslant i\leqslant n),$$

или может быть получена из этих функций путем последовательного применения порождающих схем (II. 3) и (III. 3).

Эти схемы следующие:

**II. 3.** Для любых $m, n \geqslant 1$: если функции $\theta(x_1, \ldots, x_m)$ и $\chi_i(x_1, \ldots, x_n)$ при $1 \leqslant i \leqslant m$ суть ПРФ, то функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \theta(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$$

также есть ПРФ.

**III. 3.** Для любого $n \geqslant 0$: если функции $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\chi(x_1, \ldots, x_{n+2})$ суть ПРФ, то функция $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$, определяемая системой

$$\begin{cases} \varphi(0, x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n), \\ \varphi(y|, x_1, \ldots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

также есть ПРФ; в случае $n = 0$ под $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ следует понимать число.

Схема (II. 3) называется *схемой подстановки*, схема (III. 3) — *схемой примитивной рекурсии.*

Установлено, что можно видоизменить определение (I. 3), не меняя объема понятия ПРФ.

Так, венгерский математик Р. Петер показала [19], что все ПРФ могут быть получены, если придать схеме примитивной рекурсии следующий более простой вид:

**III.′ 3.** Если функции $\psi(x_1)$ и $\chi(x_1, x_2, x_3)$ суть ПРФ, то функция $\varphi(x_1, x_2)$, определяемая системой

$$\begin{cases} \varphi(0, x) = \psi(x), \\ \varphi(y|, x) = \chi(y, \varphi(y, x), x), \end{cases}$$

также есть ПРФ.

Это показывает, что число параметров в схеме примитивной рекурсии может быть сведено к единице.

**I′. 3** будет обозначать определение, получаемое из (I. 3) посредством замены схемы (III. 3) схемой (III′. 3).

Доказано также, что схему примитивной рекурсии можно заменить просто схемой итерации за счет привлечения новых исходных функций [22].

Обозначим через $K$ и $M$ функции

$$K(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — полный квадрат;} \\ 0 \text{ — в противном случае,} \end{cases} \tag{4.3}$$

$$M(x, y) = |x - y|, \tag{5.3}$$

а через (III″. 3) — следующую схему итерации:

**III″. 3.** Если функция $\chi(x_1)$ есть ПРФ, [то функция $\varphi(x_1)$, определяемая системой

$$\begin{cases} \varphi(0)=0, \\ \varphi(y|)=\chi(\varphi(y)), \end{cases}$$

также есть ПРФ.

Тогда с (I. 3) эквивалентно следующее определение:

**I.″3.** Функция есть ПРФ, если она совпадает с одной из исходных функций (1. 3), (2. 3), (4. 3), (5. 3) или может быть получена из этих функций путем последовательного применения схем (II. 3) и (III″. 3).

Таким образом, в качестве определения ПРФ можно использовать любое из определений (I. 3), (I′. 3) и (I″. 3).

Общеизвестно [9,20], что:

**IV. 3.** *Функции: сумма*

$$S_1(x, y)=x+y, \tag{6.3}$$

*произведение*

$$M_1(x, y)=xy, \tag{7.3}$$

*арифметическая разность*

$$x \dot{-} y=\begin{cases} x-y, & \text{если } x \geqslant y \\ 0, & \text{если } x<y, \end{cases} \tag{8.3}$$

*и функции*

$$\delta_2(x)=\left[\frac{x}{2}\right], \tag{9.3}$$

$$\rho(x, y)=\begin{cases} 1, & \text{если } x=y, \\ 0, & \text{если } x \neq y, \end{cases} \tag{10.3}$$

$$\alpha(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x=0, \\ 1, & \text{если } x \neq 0, \end{cases} \tag{11.3}$$

$$\beta(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x=0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0, \end{cases} \tag{12.3}$$

*суть* ПРФ.

Известно далее [20], что

**V. 3.** *Если функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *есть* ПРФ, *то функция*

$$\varphi_1(y, x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i=0}^{y} \varphi(i, x_1, \ldots, x_n)$$

*также есть* ПРФ.

Гёдель ввел [9] понятие о *примитивно-рекурсивном предикате* (ПРП).

Обозначать предикаты будем прописными латинскими буквами $H, P, Q$.

Если $H_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $H_2(x_1, \ldots, x_n)$ — предикаты, то запись

$$H_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv H_2(x_1, \ldots, x_n)$$

будет означать, что выполняются условия:

1) предикаты $H_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $H_2(x_1, \ldots, x_n)$ имеют смысл для всех значений $x_1, \ldots, x_n$;

2) если имеет место $H_1(x_1, \ldots, x_n)$, то имеет место также $H_2(x_1, \ldots, x_n)$;

3) если имеет место $H_2(x_1, \ldots, x_n)$, то имеет место также $H_1(x_1, \ldots, x_n)$.

Понятие ПРП теперь определяется так:

**VI. 3.** Предикат $H(x_1, \ldots, x_n)$ есть ПРП, если существует ПРФ $\chi(x_1, \ldots, x_n)$, принимающая только значения 0 и 1 и такая, что

$$H(x_1, \ldots, x_n) \equiv (\chi(x_1, \ldots, x_n) = 0). \tag{13.3}$$

Функция $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ при этом называется *представляющей функцией* предиката $H(x_1, \ldots, x_n)$.

Большую роль в теории рекурсивных функций играет оператор наименьшего числа $\mu$, который применяется к предикатам и дает функции. Если $H(z, x_1, \ldots, x_n)$ — предикат, то $\mu_z H(z, x_1, \ldots, x_n)$ — функция аргументов $x_1, \ldots, x_n$, процесс вычисления которой определяется следующим образом:

**VII. 3.** Пусть дан предикат $H(z, x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 0)$ и даны значения аргументов: $a_1, \ldots, a_n$. Подставляем вместо переменных $z, x_1, \ldots, x_n$ числа $0, a_1, \ldots, a_n$ и рассматриваем суждение $H(0, a_1, \ldots, a_n)$. Если это суждение истинно, то по определению

$$\mu_z H(z, a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Если это суждение не имеет смысла, то $\mu_z H(z, a_1, \ldots, a_n)$ также не определено. Если же это суждение имеет смысл, но является ложным, то рассматриваем $H(1, a_1, \ldots, a_n)$. В зависимости от того, истинно это суждение или же оно не имеет смысла, по определению

$$\mu_z H(z, a_1, \ldots, a_n) = 1$$

или же $\mu_z H(z, a_1, \ldots, a_n)$ не определено. Если суждение $H(1, a_1, \ldots, a_n)$ имеет смысл, но является ложным, то рассматриваем $H(2, a_1, \ldots, a_n)$, и т. д.

Для краткости записи дальше будут применяться логические символы

$\neg$ — знак отрицания (читается „не“),
$\vee$ — знак дизъюнкции (читается „или“),
$\&$ — знак конъюнкции (читается „и“),
$\supset$ — знак импликации (читается „если...то“),
$\exists$ — квантор существования (читается „существует“),
$\forall$ — квантор общности (читается „для всех“).

При этом будем пользоваться обозначениями

$$\bigvee_{i=1}^{m} H_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv H_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee H_m(x_1, \ldots, x_n)$$

и

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} H_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv H_1(x_1, \ldots, x_n) \& \ldots \& H_m(x_1, \ldots, x_n);$$

в частности

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} H(i, x_1, \ldots, x_n) \equiv H(1, x_1, \ldots, x_n) \& \ldots \& H(m, x_1, \ldots, x_n).$$

Известны [9, 20] следующие теоремы (VIII. 3)—(XII. 3):

**VIII. 3.** *Для любого* $n \geqslant 0$: *если* $H(x_1, \ldots, x_n)$ *есть* ПРП, *то предикат*

$$H_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv \neg H(x_1, \ldots, x_n)$$

*также есть* ПРП.

**IX. 3.** *Для любых* $m > 1$ *и* $n \geqslant 0$: *если* $H_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$ *суть* ПРП, *то предикаты*

$$Q_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{i=1}^{m} H_i(x_1, \ldots, x_n),$$

$$Q_2(x_1, \ldots, x_n) \equiv \bigvee_{i=1}^{m} H_i(x_1, \ldots, x_n)$$

*также суть* ПРП.

**X. 3.** *Для любого* $n \geqslant 0$: *если* $H(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *есть* ПРП, *то предикат*

$$H_1(z, x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{i=1}^{z} H(i, x_1, \ldots, x_n)$$

*также есть* ПРП.

**XI. 3.** *Для любого* $n \geqslant 1$: *если* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ *суть* ПРФ, *то предикаты*

$$H_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv (\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n)),$$

$$H_2(x_1, \ldots, x_n) \equiv (\varphi(x_1, \ldots, x_n) > \psi(x_1, \ldots, x_n))$$

*суть* ПРП.

**XII. 3.** *Для любого* $n \geqslant 0$: *если* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *есть* ПРФ *и* $H(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *есть* ПРП, *то функция*

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \mu_z(z \leqslant \varphi(x_1, \ldots, x_n) \& H(z, x_1, \ldots, x_n))$$

*есть* ПРФ.

Легко убедиться, что справедливо также предложение

**XIII. 3.** *Для любого* $n \geqslant 1$: *если* $H(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *есть* ПРП *и* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *есть* ПРФ, *то предикат*

$$(14.3) \qquad H_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{i=0}^{\varphi(x_1, \ldots, x_n)} H(i, x_1, \ldots, x_n)$$

*есть* ПРП.

Действительно, пусть $\chi(z, x_1, \ldots, x_n)$ — представляющая функция предиката

$$(15.3) \qquad H(z, x_1, \ldots, x_n) \equiv (\chi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0).$$

Так как $\chi(z, x_1, \ldots, x_n)$ есть ПРФ [(VI. 3)], то функция

$$(16.3) \qquad \psi(z, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{z} \chi(i, x_1, \ldots, x_n)$$

есть ПРФ [(V. 3)]; поэтому функция

$$(17.3) \qquad \chi_1(x_1, \ldots, x_n) = \alpha(\psi(\varphi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n))$$

также есть ПРФ. Для доказательства (XIII. 3) теперь достаточно показать, что $\chi_1(x_1, \ldots, x_n)$ есть представляющая функция предиката $H_1(x_1, \ldots, x_n)$, т. е., что

$$(18.3) \qquad H_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv (\chi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0).$$

Пусть имеет место $H_1(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда

$$(19.3) \qquad H(i, x_1, \ldots, x_n) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant \varphi(x_1, \ldots, x_n), \qquad [(14.3)]$$

$$(20.3) \qquad \chi(i, x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant \varphi(x_1, \ldots, x_n), \qquad [(19.3), (15.3)]$$

$$(21.3) \qquad \psi(\varphi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad [(16.3), (20.3)]$$

и получаем

$$\begin{aligned} \chi_1(x_1, \ldots, x_n) &= \alpha(\psi(\varphi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)) && [(17.3)] \\ &= \alpha(0) && [(21.3)] \\ &= 0. && [(11.3)] \end{aligned}$$

Если, наоборот, $\chi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$, то имеет место (21. 3) [(17. 3), (11. 3)], что, ввиду (16. 3), возможно только тогда, когда имеет место (20. 3); но это означает (19. 3) [(15. 3)], откуда следует

$$H_1(x_1, \ldots, x_n).$$

Эквивалентность (18. 3) установлена. Тем самым установлена теорема (XIII. 3).

Фундаментальное понятие обще-рекурсивной функции (ОРФ) принадлежит Эрбрану и Гёделю [10]; определено оно было первоначально при помощи систем уравнений (см. также, например, [13, 17]). Клини было введено также понятие частично-рекурсивной функции (ЧРФ) [16] и дано определение ОРФ и ЧРФ при помощи схемы наименьшего числа [15, 17].

Введем следующие порождающие схемы:

**II′. 3.** Схема субституции (II. 3), в которой „ПРФ“ заменено через „ОРФ“.

**II.″3.** Схема субституции (II. 3), в которой „ПРФ“ заменено через „ЧРФ“.

**XIV. 3.** Для любого $n \geqslant 0$: если $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ есть ОРФ и обладает свойством

(22. 3) $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y (\psi(y, x_1, \ldots, x_n) = 0),$$

то функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mu_z(\psi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0)$$

также есть ОРФ.

**XIV′. 3.** Для любого $n \geqslant 0$: если $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ есть ЧРФ, то функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu_z(\psi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0)$$

также есть ЧРФ.

Теперь определения ОРФ и ЧРФ могут быть формулированы следующим образом.

**XV. 3.** Функция называется ОРФ, если она совпадает с одной из исходных функций (1. 3), (2. 3), (3. 3) или может быть получена из этих функций путем последовательного применения схем (II′. 3), (III. 3) и (XIV. 3).

**XV′. 3.** Функция называется ЧРФ, если она совпадает с одной из исходных функций (1. 3), (2. 3), (3. 3) или может быть получена из этих функций путем последовательного применения схем (II″. 3), (III. 3) и (XIV′.3).

Одним из основных результатов теории рекурсивных функций является теорема Клини о нормальной форме ОРФ и ЧРФ [13, 17].

**XVI. 3.** а) *Для каждой* ЧРФ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *существуют* ПРФ $\chi(x_1)$ *и* $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *такие, что*

(23. 3) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \chi(\mu_z(\psi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0)),$$

*и наоборот: если* $\chi(x_1)$ *и* $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *суть* ПРФ, *то функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, *определяемая условием* (23. 3), *есть* ЧРФ.

б) *Для каждой* ОРФ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *существуют* ПРФ $\chi(x_1)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *такие, что имеют место*

(24. 3) $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists z (\psi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0)$$

*и* (23. 3), *и наоборот: если* $\chi(x_1)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *суть ПРФ и имеет место* (24. 3), *то функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, *определяемая условием* (23. 3), *есть* ОРФ.

## § 4. Алгорифмичность ПРФ

Слово *алгорифм* в дальнейшем (за исключением главы IV) всегда будет означать *нормальный алгорифм*.

Будем пользоваться следующими обозначениями.

*Композиция* алгорифмов $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$ (см. [5], III, § 3.5) обозначается через

$$(\mathfrak{B}_n \circ \ldots \circ \mathfrak{B}_2 \circ \mathfrak{B}_1),$$

так что для любого слова $P$ в объединении алфавитов алгорифмов $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ имеет место

$$(1.4) \qquad (\mathfrak{B}_n \circ \ldots \circ \mathfrak{B}_2 \circ \mathfrak{B}_1)(P) \simeq \mathfrak{B}_n(\ldots(\mathfrak{B}_2(\mathfrak{B}_1(P)))\ldots).$$

*Объединение* алгорифмов $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$ (см. [5], III, § 4.1) обозначим через

$$((\gamma)\,\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\ldots\mathfrak{B}_n),$$

так что

$$(2.4) \qquad ((\gamma)\,\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\ldots\mathfrak{B}_n)(P) \simeq \mathfrak{B}_1(P)\,\gamma\,\mathfrak{B}_2(P)\,\gamma\ldots\gamma\mathfrak{B}_n(P)$$

для любого слова $P$ в алфавите $A\cup\{\gamma\}$, где $A$ — объединение алфавитов алгорифмов $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ и $\gamma$ — произвольная буква.

*Разветвление* алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, управляемое алгорифмом $\mathfrak{C}$ (см. [5], III, § 5.1.1), обозначим через

$$(\mathfrak{C} : \mathfrak{A}, \mathfrak{B}),$$

так что

$$(3.4) \qquad (\mathfrak{C} : \mathfrak{A}, \mathfrak{B})(\mathrm{P}) \simeq \begin{cases} \mathfrak{A}(P), & \text{если } \mathfrak{C}(P) = \Lambda, \\ \mathfrak{B}(P), & \text{если } \mathfrak{C}(P) \neq \Lambda. \end{cases}$$

Напоминаем, что алгорифм $(\mathfrak{C} : \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ применим лишь к тем словам, к которым применим $\mathfrak{C}$.

*Повторение* алгорифма $\mathfrak{A}$, *управляемое алгорифмом* $\mathfrak{C}$ (см. [5], III, § 6. 5. 1), обозначим через

$$(\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}}),$$

так что равенство

$$(4.4) \qquad (\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}})(P) = Q$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 0)$ со свойствами

$$(4'.4) \qquad \begin{array}{lll} 1. & P_0 = P, & \\ 2. & P_n = Q, & \\ 3. & P_{i+1} = \mathfrak{A}(P_i) & (0 \leqslant i < n), \\ 4. & \mathfrak{C}(P_i) \neq \Lambda & (0 \leqslant i < n), \\ 5. & \mathfrak{C}(P_n) = \Lambda. & \end{array}$$

*Повторение* алгорифма $\mathfrak{A}$ *определенное число раз* (см. [5], III, § 6.6.1) обозначим через

$$(\mathfrak{A}^{\text{И}}),$$

так что равенство

$$(\mathfrak{A}^{\text{И}})(n*P)=Q \tag{5.4}$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует ряд слов $P_0, \ldots, P_n$ такой, что

1. $P_0=P$,
2. $P_n=Q$,
3. $P_{i+1}=\mathfrak{A}(P_i)\quad (0\leqslant i<n)$.

В своих (не опубликованных) лекциях по основаниям математики А. А. Марков доказал следующую теорему высечения:

**1.4.** *Для любого* $n\geqslant 1$ и $1\leqslant i\leqslant n$: *если* $\alpha \urcorner\in \mathrm{A}$, *то может быть построен нормальный алгорифм* $\mathfrak{I}_n^i$ *над* $\mathrm{A}\cup\{\alpha\}$ *такой, что* $\mathfrak{I}_n^i$ *применим ко всякому слову вида*

$$V_1\alpha\ V_2\alpha\ \ldots\ \alpha V_n\quad (V_1, \ldots, V_n \text{ в } \mathrm{A})$$

*и*

$$\mathfrak{I}_n^i(V_1\alpha\ \ldots\ \alpha V_n)=V_i. \tag{6.4}$$

Нетрудно задать алгорифм $\mathfrak{I}_n^i$ непосредственно схемой.

Пусть $\alpha$, $\beta_0$, $\beta_1, \ldots, \beta_i$ — различные буквы, не принадлежащие алфавиту $\mathrm{A}=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Тогда равенству (6.4) удовлетворяет нормальный алгорифм $\mathfrak{I}_n^i$ в алфавите $\mathrm{A}\cup\{\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_i\}$ со следующей сокращенно записанной схемой

$$(7.4)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
\beta_0\eta\to\beta_0 & (\eta\in\mathrm{A}\cup\{\alpha\}) & (1\\
\beta_0\ \to\cdot & & (2\\
\beta_j\xi\to\beta_j & (\xi\in\mathrm{A},\ j=1, \ldots, i-1) & (3\\
\beta_j\alpha\to\beta_{j+1} & (j=1, \ldots, i-1) & (4\\
\beta_i\xi\ \to\xi\beta_i & (\xi\in\mathrm{A}) & (5\\
\beta_i\ \to\beta_0 & & (6\\
\quad\ \to\beta_1. & & (7
\end{array}\right.$$

Убедимся, что алгорифм (7.4) обладает свойством (6.4). Пусть $V_1, \ldots, V_n$ — слова в А. Тогда

$$\begin{array}{lr}
\mathfrak{I}_n^i:\ V_1\alpha\ \ldots\alpha V_i\alpha\ \ldots\alpha V_n & \\
\quad\vdash\beta_1V_1\alpha\ \ldots\alpha V_i\alpha\ \ldots\alpha V_n & [(7.4)(7]\\
\quad\models\beta_1\alpha\ \ldots\alpha V_i\alpha\ \ldots\alpha V_n & (3\\
\quad\vdash\beta_2\ \ldots\alpha V_i\alpha\ \ldots\alpha V_n & (4
\end{array}$$

$$\models \beta_{i-1}\alpha V_i\alpha \ \ldots \ \alpha V_n \qquad (3, (4$$

$$\vdash \beta_i V_i\alpha \ \ldots \ \alpha V_n \qquad (4$$

$$\models V_i\beta_i\alpha \ \ldots \ \alpha V_n \qquad (5$$

$$\vdash V_i\beta_0\alpha \ldots \alpha V_n \qquad (6$$

$$\models V_i\beta_0 \qquad (1$$

$$\vdash \cdot V_i, \qquad (2$$

т. е.

$$\mathfrak{J}_n^i : V_1\alpha \ldots \alpha V_i\alpha \ldots \alpha V_n \models \cdot V_i,$$

поэтому

$$\mathfrak{J}_n^i(V_1\alpha \ldots \alpha V_n) = V_i,$$

что и требовалось.

Перейдем теперь к доказательству полной алгорифмичности ПРФ. Для этого, согласно определению (I′.3), достаточно показать, что исходные функции $S(x)$, $N(x)$ и $I_n^i(x_1, \ldots, x_n)$ суть ВАФ, и убедиться, что порождающие схемы (II.3) и (III′.3) приводят от ВАФ к функциям, тоже являющимся ВАФ.

**II.4.** *Функция* $S$ [(1.3)] *есть* ВАФ.

Построим в алфавите $\text{Ч} = \{|\}$ алгорифм $\mathfrak{S}$ со схемой

$$\{ \ \to \cdot | . \tag{8.4}$$

Этот алгорифм, очевидно, применим ко всем числам, причем

$$\mathfrak{S}(x) = x| \tag{9.4}$$

$$= S(x). \qquad [(1.3)]$$

Согласно определению (II.2), это доказывает лемму (II.4).

**III.4.** *Функция* $N$ [(2.3)] *есть* ВАФ.

Действительно, имеем

$$\mathfrak{N}_0(x) = 0$$

$$= N(x), \qquad [(2.3)]$$

если взять в качестве $\mathfrak{N}_0$ алгорифм в Ч со схемой

$$\{ | \to ;$$

алгорифм $\mathfrak{N}_0$ применим ко всякому слову в Ч, так как он сокращающий алгорифм. Поэтому [(II.2)] имеет место (III.4).

**IV.4.** *Для всех* $n \geqslant 1$ и $1 \leqslant i \leqslant n$: *функция* $I_n^i$ [(3.3)] *есть* ВАФ.

Существование и применимость соответствующего алгорифма $\mathfrak{J}_n^i$ над $\text{С} = \{|, *\}$, такого, что

$$\mathfrak{J}_n^i(x_1 * \ldots * x_n) = x_i$$

$$= I_n^i(x_1, \ldots, x_n), \qquad [(3.3)]$$

гарантируется теоремой высечения (I.4).

**V.4.** *Для всех $m$, $n \geqslant 1$: если функции*

$$\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n) \text{ и } \theta(x_1, \ldots, x_m)$$

*суть* ВАФ, *то функция*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \theta(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n)) \tag{10.4}$$

*также есть* ВАФ.

Действительно, пусть $\chi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $\theta(x_1, \ldots, x_m)$ суть ВАФ. Тогда [(II.2)] существуют алгорифмы $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $\mathfrak{D}$ над С такие, что $\mathfrak{H}_i$ применим к любому слову вида $x_1 * \ldots * x_n$, причем

$$\mathfrak{H}_i(x_1 * \ldots * x_n) = \chi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{11.4}$$

и $\mathfrak{D}$ применим к любому слову вида $x_1 * \ldots * x_m$, причем

$$\mathfrak{D}(x_1 * \ldots * x_m) = \theta(x_1, \ldots, x_m). \tag{12.4}$$

Построим алгорифмы

$$\mathfrak{H} = ((*)\, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_m), \tag{13.4}$$

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{D} \circ \mathfrak{H}). \tag{14.4}$$

$\mathfrak{H}$ есть алгорифм над С, как и $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Отсюда и из того, что $\mathfrak{D}$ есть алгорифм над С, следует, что $\mathfrak{F}$ есть алгорифм над С. При этом

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(x_1 * \ldots * x_n) &\simeq \mathfrak{D}(\mathfrak{H}(x_1 * \ldots * x_n)) && [(14.4),\ (1.4)]\\
&\simeq \mathfrak{D}(\mathfrak{H}_1(x_1 * \ldots * x_n) * \ldots * \mathfrak{H}_m(x_1 * \ldots * x_n)) && [(13.4),\ (2.4)]\\
&\simeq \mathfrak{D}(\chi_1(x_1, \ldots, x_n) * \ldots * \chi_m(x_1, \ldots, x_n)) && [(11.4)]\\
&= \theta(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n)) && [(12.4)]\\
&= \varphi(x_1, \ldots, x_n); && [(10.4)]
\end{aligned}$$

таким образом, построен алгорифм $\mathfrak{F}$ над С, применимый ко всем словам вида $x_1 * \ldots * x_n$ и удовлетворяющий равенству

$$\mathfrak{F}(x_1 * \ldots * x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Но это и означает [(II.2)], что функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть ВАФ. Лемма (V.4) доказана.

Совершенно так же, заменяя только $=$ на $\simeq$, доказывается

**V'.4.** *Для всех $m$, $n \geqslant 1$: если функции* $\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\theta(x_1, \ldots, x_m)$ *суть* АФ, *то функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ [(10.4)] *также есть* АФ.

**VI. 4.** *Если функции* $\psi(x_1)$ *и* $\chi(x_1, x_2, x_3)$ *суть* ВАФ, *то функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, *определяемая системой*

$$\begin{cases} \varphi(0, x) = \psi(x) \\ \varphi(y|, x) = \chi(y, \varphi(y, x), x), \end{cases} \tag{15.4}$$

*также есть* ВАФ.

Пусть, действительно, $\psi(x_1)$ *и* $\chi(x_1, x_2, x_3)$ суть ВАФ. Тогда [(II. 2)] существуют алгорифмы $\mathfrak{P}$ над Ч и $\mathfrak{H}$ над С такие, что $\mathfrak{P}$ применим к любому числу, а $\mathfrak{H}$ применим к любому слову вида $x_1 * x_2 * x_3$, причем

$$\mathfrak{P}(x) = \psi(x), \tag{16.4}$$

$$\mathfrak{H}(x_1 * x_2 * x_3) = \chi(x_1, x_2, x_3). \tag{17.4}$$

Для доказательства (VI. 4) мы должны построить такой алгорифм $\mathfrak{F}$ над С, что

$$\mathfrak{F}(x_1 * x_2) = \varphi(x_1, x_2). \tag{18.4}$$

На основании теоремы высечения (I. 4) существуют алгорифмы $\mathfrak{J}_2^1$, $\mathfrak{J}_2^2$, $\mathfrak{J}_3^1$, $\mathfrak{J}_3^2$ и $\mathfrak{J}_3^3$ над алфавитом С такие, что

$$\mathfrak{J}_2^1(x_1 * x_2) = x_1, \tag{19.4}$$

$$\mathfrak{J}_2^2(x_1 * x_2) = x_2, \tag{20.4}$$

$$\mathfrak{J}_3^1(x_1 * x_2 * x_3) = x_1, \tag{21.4}$$

$$\mathfrak{J}_3^2(x_1 * x_2 * x_3) = x_2, \tag{22.4}$$

$$\mathfrak{J}_3^3(x_1 * x_2 * x_3) = x_3. \tag{23.4}$$

Зададим, далее, в алфавите С алгорифм $\mathfrak{R}_1$ схемой

$$\begin{cases} | \to \\ * \to; \end{cases} \tag{24.4}$$

тогда, очевидно,

$$\mathfrak{R}_1(V) = \Lambda \quad (V \text{ в С}). \tag{25.4}$$

Построим теперь следующие алгорифмы

$$\mathfrak{P}_0 = (\mathfrak{P} \circ \mathfrak{J}_2^2), \qquad [(16.4), (20.4)] \tag{26.4}$$

$$\mathfrak{P}_1 = ((*)\, \mathfrak{J}_2^1 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{P}_0 \mathfrak{J}_2^2), \quad [(19.4), (24.4), (26.4), (20.4)] \tag{27.4}$$

$$\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{S} \circ \mathfrak{J}_3^1), \qquad [(8.4), (21.4)] \tag{28.4}$$

$$\mathfrak{H}_1 = ((*)\, \mathfrak{S}_1 \mathfrak{H} \mathfrak{J}_3^3), \qquad [(28.4), (17.4), (23.4)] \tag{29.4}$$

$$\mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{H}_1^{\text{И}}). \qquad [(29.4)] \tag{30.4}$$

Покажем, что тогда алгорифм

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{I}_3^2 \circ \mathfrak{D}_1 \circ \mathfrak{P}_0) \qquad [(22.4),\ (30.4),\ (26.4)] \tag{31.4}$$

является искомым, т. е. удовлетворяет (18.4).

Прежде всего убедимся, что

$$\mathfrak{P}_1(y*x) = y**\varphi(0,\ x)*x. \tag{32.4}$$

Действительно,

$$\mathfrak{P}_0(y*x) \simeq \mathfrak{P}(\mathfrak{I}_2^2(y*x)) \qquad [(26.4),\ (1.4)]$$

$$\simeq \mathfrak{P}(x) \qquad [(20.4)]$$

$$= \psi(x) \qquad [(16.4)]$$

$$= \varphi(0,\ x) \qquad [(15.4)] \tag{33.4}$$

$$\mathfrak{P}_1(y*x) \simeq ((*)\,\mathfrak{I}_2^1\mathfrak{R}_1\mathfrak{P}_0\mathfrak{I}_2^2)(y*x) \qquad [(27.4)]$$

$$\simeq \mathfrak{I}_2^1(y*x)*\mathfrak{R}_1(y*x)*\mathfrak{P}_0(y*x)*\mathfrak{I}_2^2(y*x) \qquad [(2.4)]$$

$$= y**\varphi(0,x)*x. \qquad [(19.4),\ (25.4),\ (33.4),\ (20.4)]$$

Докажем дальше, что

$$\mathfrak{H}_1(i*\varphi(i,\ x)*x) = i|*\varphi(i|,\ x)*x. \tag{34.4}$$

В самом деле,

$$\mathfrak{S}_1(x_1*x_2*x_3) \simeq \mathfrak{S}(\mathfrak{I}_3^1(x_1*x_2*x_3)) \qquad [(28.4),\ (1.4)]$$

$$\simeq \mathfrak{S}(x_1) \qquad [(21.4)]$$

$$= x_1|, \qquad [(9.4)] \tag{35.4}$$

$$\mathfrak{H}_1(i*\varphi(i,\ x)*x) \simeq ((*)\,\mathfrak{S}_1\mathfrak{H}\mathfrak{I}_3^3)(i*\varphi(i,\ x)*x) \qquad [(29.4)]$$

$$\simeq \mathfrak{S}_1(i*\varphi(i,x)*x)*\mathfrak{H}(i*\varphi(i,x)*x)*\mathfrak{I}_3^3(i*\varphi(i,\ x)*x) \qquad [(2.4)]$$

$$= i|*\chi(i,\ \varphi(i,\ x),\ x)*x \qquad [(35.4),\ (17.4),\ (23.4)]$$

$$= i|*\varphi(i|,\ x)*x, \qquad [(15.4)]$$

т. е. имеет место (34.4).

Покажем, наконец, что

$$\mathfrak{D}_1(y**\varphi(0,\ x)*x) = y*\varphi(y,\ x)*x. \tag{36.4}$$

Это следует из построения $\mathfrak{D}_1$ [(30.4)] и того факта, что ряд слов $V_0, \ldots, V_y$, где

$$V_i = i*\varphi(i,\ x)*x \quad (0 \leqslant i \leqslant y), \tag{37.4}$$

обладает свойствами

1. $$V_0 = *\varphi(0, x)*x,$$ [(37.4)]

2. $$V_y = y*\varphi(y, x)*x,$$ [(37.4)]

3. $$V_{i+1} = \mathfrak{H}_1(V_i),\ (0 \leqslant i < y).$$ [(37.4), (34.4)]

Действительно, из существования такого ряда, согласно (5.4), получаем (36.4).

Теперь находим

$$\mathfrak{F}(y*x) \simeq (\mathfrak{J}_3^2 \circ \mathfrak{D}_1 \circ \mathfrak{P}_1)(y*x) \qquad [(31.4)]$$

$$\simeq \mathfrak{J}_3^2(\mathfrak{D}_1(\mathfrak{P}_1(y*x))) \qquad [(1.4)]$$

$$\simeq \mathfrak{J}_3^2(\mathfrak{D}_1(y**\varphi(0, x)*x) \qquad [(32.4)]$$

$$\simeq \mathfrak{J}_3^2(y*\varphi(y, x)*x) \qquad [(36.4)]$$

$$= \varphi(y, x), \qquad [(22.4)]$$

т. е. (18.4) и тем самым (VI.4) установлено.

Из (II.4), (III.4), (IV.4), (V.4) и (VI.4) в силу (III'.3) вытекает теорема:

**VII.4.** *Всякая* ПРФ *есть* ВАФ.

Теорема (VII.4) может быть доказана и другим путем.

Можно, например, исходить из определения (I''.3) ПРФ. Тогда следует установить полную алгорифмичность функций $S(x)$, $I_n^i(x_1, \ldots, x_n)$, $M(x, y)$, $K(x)$ и убедиться, что порождающие схемы подстановки (II.3) и итерации (III''.3) не выводят из класса ВАФ.

Такое доказательство, с одной стороны, проще приведенного выше, поскольку схема примитивной рекурсии заменена просто схемой итерации, но зато имеет место и некоторое усложнение, так как добавляется в качестве исходной характеристическая функция квадрата; доказательство полной алгорифмичности этой функции хотя простое, но заметно длиннее доказательств лемм (II.4), (III.4) и (IV.4).

## § 5. Алгорифмичность оператора наименьшего числа

Пусть дана какая-нибудь ВАФ $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$. При помощи оператора наименьшего числа $\mu$ [(VII.3)] можно построить функцию

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu_z(\psi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0).$$

Согласно (VII.3), функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определена для тех и только тех совокупностей значений своих аргументов $x_1, \ldots, x_n$, для которых

(1.5) $$\exists z(\psi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0).$$

Так как, вообще говоря, не все $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют предикату (1.5), то функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ может не быть ВАФ [(II.2)]. Однако имеет место теорема:

**I.5.** *Для каждого* $n \geqslant 1$: *если функция* $\psi(x_1, \ldots x_{n+1})$ *есть* ВАФ, *то функция*

(2.5) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu_z(\psi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0)$$

*есть* АФ.

Доказательство (I.5) составляет содержание этого параграфа.

Фиксируем число $n \geqslant 1$. Через $U$ в этом параграфе обозначим слово вида $y * x_1 * \ldots * x_n$:

(3.5) $$U = y * x_1 * \ldots * x_n,$$

а через $X$ — слово $x_1 * \ldots * x_n$:

(4.5) $$X = x_1 * \ldots * x_n.$$

Через Ц обозначим алфавит $\mathrm{C} \cup \{\diamondsuit\}$:

$$Ц = \{\,|\,, *, \diamondsuit\}.$$

Пусть теперь $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ есть ВАФ. Тогда [(II.2)] существует алгорифм $\mathfrak{P}$, применимый ко всем словам вида $U$ и такой, что

(5.5) $$\mathfrak{P}(y * x_1 * \ldots * x_n) = \psi(y, x_1, \ldots, x_n).$$

Построим в алфавите Ц алгорифмы $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ со следующими схемами:

(6.5) $$\mathfrak{I}\ \{\quad \to \cdot\ ,$$

(7.5) $$\mathfrak{A}_1\ \{\quad \to \cdot *,$$

(8.5) $$\mathfrak{A}_2 \begin{cases} * \mid \ \to\ * & (1 \\ * \ \to & (2 \\ \diamondsuit\ \to\quad , & (3 \end{cases}$$

(9.5) $$\mathfrak{A}_3 \begin{cases} \mid \diamondsuit \ \to\ \diamondsuit & (1 \\ \diamondsuit\diamondsuit\ \to \cdot \mid, & (2 \end{cases}$$

(10.5) $$\mathfrak{C}_1 \begin{cases} \diamondsuit\diamondsuit \mid\ \to\ \diamondsuit\diamondsuit & (1 \\ \diamondsuit\diamondsuit * \to\ \diamondsuit\diamondsuit & (2 \\ \diamondsuit\diamondsuit\ \to\quad , & (3 \end{cases}$$

(11.5) $$\mathfrak{N}_2\ \{\ \mid\ \to\ .$$

Тождественный алгорифм $\mathfrak{I}$, очевидно, удовлетворяет равенству

(12.5) $$\mathfrak{I}(V) = V \quad (V \text{ в Ц}),$$

а алгорифм $\mathfrak{A}_1$ — равенству

$$\mathfrak{A}_1(V) = *V \quad (V \text{ в } Ц). \tag{13.5}$$

Имеет место

$$\mathfrak{A}_2(\Diamond\Diamond y * X) = y. \tag{14.5}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_2 : \Diamond\Diamond y * X &= \Diamond\Diamond y * x_1 * \ldots * x_n & [(4.5)] \\ &\models \Diamond\Diamond y ** \ldots * & [(8.5)](1] \\ &\models \Diamond\Diamond y & (2 \\ &\models y \urcorner, & (3 \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathfrak{A}_2 : \Diamond\Diamond y * X \models y \urcorner,$$

откуда следует (14.5).

Имеет место

$$\mathfrak{A}_3(\Diamond m \Diamond y * X) = y | * X, \tag{15.5}$$

так как

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_3 : \Diamond m \Diamond y * X &\models \Diamond\Diamond y * X & [(9.5)\ (1] \\ &\vdash \cdot\, y | * X. & (2 \end{aligned}$$

**II. 5.** *Алгорифм $\mathfrak{C}_1$ применим ко всякому слову $W$ вида*

$$\Diamond m \Diamond U$$

*и перерабатывает $W$ в пустое слово тогда и только тогда, когда $m = 0$.*

Алгорифм $\mathfrak{C}_1$ — сокращающий, поэтому он применим к слову $W$.

Пусть $m = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} W &= \Diamond\Diamond U \\ &= \Diamond\Diamond y * x_1 * \ldots * x_n & [(3.5)] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 : \Diamond\Diamond y * x_1 * \ldots * x_n & \\ \models \Diamond\Diamond & \quad [(10.5),\ (1,2] \\ \vdash \Lambda \urcorner, & \quad (3 \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathfrak{C}_1(W) = \Lambda.$$

Пусть, наоборот,

(16.5) $$\mathfrak{C}_1(W) = \Lambda.$$

Если тогда число $m$ было бы отлично от нуля, то мы имели бы

$$\mathfrak{C}_1 : \Diamond m \Diamond U \urcorner, \qquad [(10.5)]$$

что давало бы

$$\mathfrak{C}_1(W) = W$$
$$\neq \Lambda,$$

вопреки предположению (16.5). Поэтому $m = 0$, и (II.5) доказано.

**III.5.** *Алгорифм $\mathfrak{N}_2$ применим ко всякому слову $V$ в Ц и перерабатывает его в пустое слово тогда и только тогда, когда $V$ есть число.*

Это следует из (11.5).

Построим теперь алгорифмы $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F}$ следующим образом:

(17.5) $$\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}_1 : \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3); \qquad [(10.5), (8.5), (9.5)]$$

(18.5) $$\mathfrak{B}_0 = ((\Diamond)\, \mathfrak{N}_1 \mathfrak{P} \mathfrak{J}); \qquad [(24.4), (5.5), (6.5)]$$

(19.5) $$\mathfrak{B}_1 = (\mathfrak{C} \circ \mathfrak{B}_0); \qquad [(17.5), (18.5)]$$

(20.5) $$\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_1{}^{\mathfrak{N}_2}); \qquad [(19.5), (11.5)]$$

(21.5) $$\mathfrak{F} = (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}_1). \qquad [(20.5), (7.5)]$$

Покажем, что алгорифм $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условному равенству

(22.5) $$\mathfrak{F}(x_1 * \ldots * x_n) \simeq \varphi(x_1, \ldots, x_n); \qquad [(2.5)]$$

тем самым будет доказано (I.5) [(I.2)].

Убедимся прежде всего, что

(23.5) $$\mathfrak{B}_1(y * X) = \begin{cases} y & , \text{ если } \mathfrak{P}(y * X) = \Lambda, \\ y | * X, & \text{ если } \mathfrak{P}(y * X) \neq \Lambda. \end{cases}$$

Отметим условное равенство

$$\mathfrak{B}_1(U) \simeq \mathfrak{C}(\mathfrak{B}_0(U)) \qquad [(19.5), (1.4)]$$
$$\simeq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_1(U) \Diamond \mathfrak{P}(U) \Diamond \mathfrak{J}(U)) \qquad [(18.5), (2.4)]$$

(24.5) $$\simeq \mathfrak{C}(\Diamond \mathfrak{P}(U) \Diamond U). \qquad [(25.4), (12.5)]$$

Пусть теперь имеет место

(25.5) $$\mathfrak{P}(U) = \Lambda.$$

Тогда

(26.5) $$\mathfrak{C}_1(\Diamond \mathfrak{P}(U) \Diamond U) = \Lambda, \qquad [(II.5), (25.5)]$$

и получаем

$$\mathfrak{B}_1(U) \simeq \mathfrak{C}(\Diamond\mathfrak{P}(U)\Diamond U) \qquad [(24.5)]$$

$$\simeq \mathfrak{A}_2(\Diamond\mathfrak{P}(U)\Diamond U) \qquad [(17.5), (3.4), (26.5)]$$

$$\simeq \mathfrak{A}_2(\Diamond\Diamond y * X) \qquad [(25.5), (3.5), (4.5)]$$

$$= y, \qquad [(14.5)]$$

как и требовалось [(23.5)].

Пусть, наоборот,

(27.5) $$\mathfrak{P}(U) = m \neq 0.$$

Тогда

$$\mathfrak{C}_1(\Diamond\mathfrak{P}(U)\Diamond U) \simeq \mathfrak{C}_1(\Diamond m \Diamond U) \qquad [(27.5)]$$

(28.5) $$\neq \Lambda, \qquad [(\mathrm{II}.5), (27.5)]$$

и получаем

$$\mathfrak{B}_1(U) \simeq \mathfrak{C}(\Diamond\mathfrak{P}(U)\Diamond U) \qquad [(24.5)]$$

$$\simeq \mathfrak{A}_3(\Diamond\mathfrak{P}(U)\Diamond U) \qquad [(17.5), (3.4), (28.5)]$$

$$\simeq \mathfrak{A}_3(\Diamond m \Diamond y * X) \qquad [(27.5)]$$

$$= y \,|\, * X, \qquad [(15.5)]$$

как и требовалось (23.5).

Установим лемму:

**IV.5.** *Если* $x_1, \ldots, x_n$ *таковы, что функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ [(2.5)] *определена, то* $\mathfrak{F}(x_1 * \ldots * x_n)$ [(21.5)] *определено и*

(29.5) $$\mathfrak{F}(x_1 * \ldots * x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Обозначим $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ через $f$:

(30.5) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f.$$

Тогда [(30.5), (2.5), (VII.3)]:

(31.5) $$\psi(y, x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \quad \text{для} \quad y < f,$$

(32.5) $$\psi(y, x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{для} \quad y = f,$$

и

(33.5) $$\mathfrak{P}(y * X) \neq \Lambda \quad \text{для} \quad y < f, \qquad [(5.5), (31.5)]$$

(34.5) $$\mathfrak{P}(y * X) = \Lambda \quad \text{для} \quad y = f. \qquad [(5.5), (32.5)]$$

Докажем, что

(35.5) $$\mathfrak{B}(* X) = f.$$

Рассмотрим ряд слов $P_0$, $P_1$, ..., $P_{f+1}$, где

$$P_i = i * X \quad (0 \leqslant i \leqslant f) \tag{36.5}$$

$$P_{f+1} = f. \tag{37.5}$$

Нетрудно убедиться, что этот ряд слов удовлетворяет условиям 1—5 формулы (4'.4), если взять вместо числа $n$ число $f+1$, слова $P$, $Q$ заменить соответственно словами $*X$, $f$ и алгорифмы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ заменить соответственно алгорифмами $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{N}_2$. Действительно, тогда эти условия будут заключаться в следующем:

I. $P_0 = *X$,

II. $P_{f+1} = f$,

III. $P_{i+1} = \mathfrak{B}_1(P_i) \quad (0 \leqslant i \leqslant f)$,

IV. $\mathfrak{N}_2(P_i) \neq \Lambda \quad (0 \leqslant i \leqslant f)$,

V. $\mathfrak{N}_2(P_{f+1}) = \Lambda$.

Здесь справедливость I и II непосредственно следует из (36.5) и (37.5); IV и V следует из (36.5), (37.5) и (III.5). Кроме того, для $0 \leqslant i < f$ имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1(P_i) &\simeq \mathfrak{B}_1(i * X) && [(36.5)] \\ &= i| * X && [(23.5),\ (33.5)] \\ &= P_{i+1} && [(36.5)] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1(P_f) &\simeq \mathfrak{B}_1(f * X) && [(36.5)] \\ &= f && [(23.5),\ (34.5)] \\ &= P_{f+1}; && (37.5) \end{aligned}$$

таким образом, имеет место также III. Равенство (35.5) теперь следует из (4.4).

Находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(X) &\simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{A}_1(X)) && [(21.5),\ (1.4)] \\ &\simeq \mathfrak{B}(*X) && [(13.5)] \\ &= f && [(35.5)] \\ &= \varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n), && [(30.5)] \end{aligned} \tag{38.5}$$

т. е. $\mathfrak{F}(x_1 * \ldots * x_n)$ определено и имеет место (29.5); (IV.5) доказано.

**V. 5.** *Если* $x_1, \ldots, x_n$ *таковы, что* $\mathfrak{F}(x_1 * \ldots * x_n)$ [(21.5)] *определено, то* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ [(2.5)] *определено и имеет место* (29.5).

Для доказательства (V.5) достаточно показать существование $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$; равенство (29.5) тогда следует из (IV.5).

Пусть $\mathfrak{F}$ применим к слову $X$.

Тогда из (38.5) видим, что $\mathfrak{B}$ применим к слову $*X$, а это означает [(20.5), (4.4)], что для некоторого $k \geqslant 0$ существует ряд слов $W_0, \ldots, W_k$ такой, что

(39.5)
$$\begin{aligned} &\text{a. } W_0 = *X,\\ &\text{b. } W_{i+1} = \mathfrak{B}_1(W_i) \quad (0 \leqslant i < k),\\ &\text{c. } \mathfrak{N}_2(W_i) \neq \Lambda \quad (0 \leqslant i < k),\\ &\text{d. } \mathfrak{N}_2(W_k) = \Lambda. \end{aligned}$$

Индукцией по $i$ докажем

(40.5)
$$W_i = i * X \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i < k.$$

Действительно, при $i = 0$ равенство (40.5) выполнено в силу (39.5) a.

Пусть для некоторого $i < k - 1$ выполнено

(41.5)
$$W_i = i * X;$$

покажем, что тогда

(42.5)
$$W_{i|} = i| * X.$$

Имеет место

$$W_{i|} = \mathfrak{B}_1(W_i) \qquad [(39.5)\,\text{b}]$$

(43.5)
$$\simeq \mathfrak{B}_1(i * X). \qquad [(41.5)]$$

Далее из

(44.5)
$$\mathfrak{P}(i * X) = 0$$

следовало бы

$$W_{i|} = \mathfrak{B}_1(i * X) \qquad [(43.5)]$$

(45.5)
$$= i \qquad [(23.5),\ (44.5)]$$

и

$$\mathfrak{N}_2(W_{i|}) \simeq \mathfrak{N}_2(i) \qquad [(45.5)]$$

$$= \Lambda, \qquad [(\text{III}.5)]$$

вопреки (39.5) c; поэтому

(46.5)
$$\mathfrak{P}(i * X) \neq 0,$$

так как $\mathfrak{P}$ есть арифметический алгорифм, применимый ко всем словам вида $i * X$. Итак,

$$W_{i|} = \mathfrak{B}_1(i * X) \qquad [(43.5)]$$

$$= i| * X, \qquad [(23.5),\ (46.5)]$$

т. е. имеет место (42.5) и тем самым (40.5).

Из

(47.5) $$\mathfrak{P}((k-1) * X) \neq \Lambda$$

следовало бы

$$W_k = \mathfrak{B}_1(W_{k-1}) \qquad [(39.5)\,\mathrm{b}]$$

$$\simeq \mathfrak{B}_1((k-1) * X) \qquad [(40.5)]$$

(48.5) $$= k * X \qquad [(23.5),\ (47.5)]$$

и

$$\mathfrak{R}_2(W_k) \simeq \mathfrak{R}_2(k * X) \qquad [(48.5)]$$

$$\neq \Lambda, \qquad [(\mathrm{III}.5)]$$

вопреки (39.5) d. Поэтому

(49.5) $$\mathfrak{P}((k-1) * X) = \Lambda$$

и

(50.5) $$\psi(k-1,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = 0. \qquad [(5.5),\ (49.5)]$$

По построению (2.5) функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и определению (VII.3) равенство (50.5) означает, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определено. Этим (V.5) доказано.

Из (IV.5) и (V.5) следует условное равенство (22.5). Таким образом, (I. 5) также доказано.

В качестве следствия из (I.5) получаем

**VI.5.** *Для каждого* $n \geqslant 1$*: если функция* $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *есть* ВАФ, *обладающая свойством*

(51.5) $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y (\psi(y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = 0),$$

*то функция*

$$\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \mu_y(\psi(y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = 0)$$

*также есть* ВАФ.

Действительно, из (I.5) в случае полной алгорифмичности функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ следует существование такого алгорифма $\mathfrak{F}$, что

(52.5) $$\mathfrak{F}(x_1 * \ldots * x_n) \simeq \varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n).$$

Но (51.5) влечет [(VII.3)] существование $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $x_1, \ldots, x_n$. Тогда в силу (52.5) алгорифм $\mathfrak{F}$ применим ко всем словам $x_1 * \ldots * x_n$, т. е. [(II.2)] функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть ВАФ.

## § 6. Алгорифмичность ЧРФ

Настоящий параграф содержит доказательство алгорифмичности ЧРФ и полной алгорифмичности ОРФ. Благодаря теореме Клини и результатам двух предыдущих параграфов это доказательство получается весьма коротким.

Пусть дана произвольная ЧРФ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Из теоремы (XV.3) следует существование двух ПРФ $\chi(x)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$, таких, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \chi(\mu_y\ \psi(y, x_1, \ldots, x_n) = 0)). \tag{1.6}$$

В силу (VII. 4) функция $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ есть ВАФ. Но тогда из (I.5) получаем, что функция

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu_y(\psi(y, x_1, \ldots, x_n) = 0)$$

есть АФ. Так как, кроме того, $\chi(x)$ есть ВАФ [(VII. 4)], тем самым АФ, то из (V. 4) заключаем, что функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \chi(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n))$$

также есть АФ.

Таким образом, доказана теорема:

**III. 2.** *Всякая* ЧРФ *есть* АФ.

Из (III. 2) следует теорема:

**V. 2.** *Всякая* ОРФ *есть* ВАФ.

В самом деле, пусть дана некоторая ОРФ $\psi(x_1, \ldots, x_n)$.

Так как тем самым $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ есть ЧРФ, то в силу (III. 2) и (I. 2) существует алгорифм $\mathfrak{P}$ над С такой, что

$$\mathfrak{P}(x_1 * \ldots * x_n) \simeq \psi(x_1, \ldots, x_n). \tag{2.6}$$

Так как функция $\psi(x_1 \ldots, x_n)$, будучи ОРФ, определена для всех $x_1, \ldots, x_n$, то [(2. 6)] алгорифм $\mathfrak{P}$ применим ко всем словам вида $x_1 * \ldots * x_n$. Тем самым [(II. 2), (2. 6)] полная алгорифмичность функции $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ установлена.

Теорему (V. 2) можно доказать также не используя (III. 2), но опираясь на (VII. 4), (VI. 5) и теорему Клини (XVI. 3) 2. Такое доказательство аналогично приведенному выше доказательству теоремы (III. 2).

# III. РЕКУРСИВНОСТЬ АЛГОРИФМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этой главе доказываются теоремы (IV. 2) и (VI. 2)

## § 7. Аппарат арифметизации

В настоящем параграфе при помощи целочисленных положительных унимодулярных матриц второго порядка строится некоторая арифметизация слов в двубуквенном алфавите.

Факты, сообщаемые в этом параграфе, известны, а именно: свойство однозначной разложимости на множители матриц, названных здесь $\omega$-матрицами, доказано в работе [18]. Идея же использовать эти матрицы для арифметизации принадлежит А. А. Маркову [2].

Под *матрицей* всегда будем понимать матрицу второго порядка, элементами которой являются (натуральные) числа. Матрицы будем обозначать полужирными латинскими прописными буквами **A, B, E, L, M, N, V, W, X, Y, Z,** а элементы матриц — строчными латинскими буквами со значками $_1$, $_2$, $_3$, $_4$; например,

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}=\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix},$$

и т. п.

**I. 7.** Матрица $\mathbf{Z}$ называется *высокой*, если

1. $z_1 \geqslant z_3$
2. $z_2 \geqslant z_4$
3. $z_1 \neq z_3$ или $z_2 \neq z_4$.

**II. 7.** Матрица $\mathbf{Z}$ называется *низкой*, если

1. $z_1 \leqslant z_3$
2. $z_2 \leqslant z_4$
3. $z_1 \neq z_3$ или $z_2 \neq z_4$.

Назовем, далее, *элементарными* матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

а *единичной* — матрицу

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Отметим очевидное равенство

$$\mathbf{A}^n=\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

**III. 7.** Матрица $\mathbf{Z}$ называется $\omega$-*матрицей*, если она является произведением элементарных матриц, т. е. если

$$\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_1 \times \ldots \times \mathbf{Z}_z, \tag{4.7}$$

где $\mathbf{Z}_i$ — элементарные матрицы $(1 \leqslant i \leqslant z \geqslant 1)$ и косой крест означает обыкновенное матричное умножение.

(2) Матрица $\mathbf{Z}$ называется *$\omega'$-матрицей*, если она есть $\omega$-матрица или единичная матрица.

Из определения (III. 7) и того обстоятельства, что элементарные матрицы унимодулярны, следует

**IV. 7.** *Всякая $\omega'$-матрица унимодулярна.*

Далее имеет место:

**V. 7.** (1) *Если*

$$z_1+z_2>0, \tag{5.7}$$

*то матрица $\mathbf{A}\times\mathbf{Z}$ высокая.*

(2) *Если*

$$z_3+z_4>0, \tag{6.7}$$

*то матрица $\mathbf{B}\times\mathbf{Z}$ низкая.*

Это очевидно, так как

$$\mathbf{A}\times\mathbf{Z}=\begin{bmatrix} z_3+z_1 & z_4+z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}, \tag{7.7}$$

$$\mathbf{B}\times\mathbf{Z}=\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1+z_3 & z_2+z_4 \end{bmatrix}. \tag{8.7}$$

Из определений (I. 7) и (II. 7) ясно, что ни одна матрица не может быть одновременно высокой и низкой. Но возможно, вообще говоря, что матрица не высокая и не низкая, как например единичная матрица. Тем не менее имеет место:

**VI. 7.** *Каждая $\omega$-матрица либо высокая, либо низкая.*

Это следует из (III. 7), (IV. 7) и (V. 7), так как для унимодулярной матрицы $\mathbf{Z}$ условия (5. 7) и (6. 7) всегда выполнены.

Из III. 7 (2) и (VI. 7) следует:

**VII. 7.** *Если $\mathbf{M}$ есть $\omega'$-матрица, то имеет место один и только один из трех случаев: либо матрица $\mathbf{M}$ высокая, либо матрица $\mathbf{M}$ низкая, либо $\mathbf{M}$ есть единичная матрица.*

**VIII. 7.** *Возьмем любое представление $\omega$-матрицы $\mathbf{Z}$ в виде* (4. 7). *Тогда*

1. *Матрица $\mathbf{Z}_1$ равна $\mathbf{A}$ в том и только том случае, если матрица $\mathbf{Z}$ высокая, и*

2. *Матрица $\mathbf{Z}_1$ равна $\mathbf{B}$ в том и только том случае, если матрица $\mathbf{Z}$ низкая.*

Это следует из (V. 7), так как, согласно (4. 7), всякая $\omega$-матрица может быть записана в виде $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_1\times\mathbf{W}$, где $\mathbf{W}$ — некоторая $\omega'$-матрица.

Из (VI. 7) и (VIII. 7) получаем

**IX. 7.** *В любом представлении $\omega$-матрицы $\mathbf{Z}$ в виде* (4. 7) *матрица $\mathbf{Z}_1$ однозначно определяется матрицей $\mathbf{Z}$.*

Легко проверить, что:

**X. 7.** (1) *Равенство*

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} \times \mathbf{V}$$

*равносильно*

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} z_1 \dot{-} z_3 & z_2 \dot{-} z_4 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}.$$

(2) *Равенство*

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B} \times \mathbf{W}$$

*равносильно*

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 \dot{-} z_1 & z_4 \dot{-} z_2 \end{bmatrix}.$$

Зная в (4.7) матрицы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}_1$, мы можем однозначно найти матрицу $\mathbf{Z}_2 \times \ldots \times \mathbf{Z}_z$ [(X.7)] и применить (IX.7) уже к этой матрице, и т. д.; таким образом, приходим к

**XI.7.** *Представление* $\omega$*-матрицы* $\mathbf{Z}$ *в виде* (4.7) *единственно; если дана* $\omega$*-матрица* $\mathbf{Z}$, *то могут быть найдены матрицы* $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_z$.

Введем теперь следующую терминологию.

**XII.7.** Пусть для $\omega$-матрицы $\mathbf{Z}$ имеет место (4.7).

1. Тогда число $z$ будем называть *длиной* $\omega$-матрицы $\mathbf{Z}$. Кроме того, положим $z = 0$ для единичной матрицы.

2. Будем говорить, что матрица есть *i-й множитель* $\omega$-матрицы $\mathbf{Z}$, если она совпадает с $\mathbf{Z}_i$ для $1 \leqslant i \leqslant z$ (в этом случае $\mathbf{Z}_i$ называется собственным множителем матрицы $\mathbf{Z}$) и равна $\mathbf{E}$ для $i = 0$ и $i > z$. Кроме того, будем называть $i$-м множителем единичной матрицы самую единичную матрицу.

3. Будем называть *i-м остатком* $\omega'$-матрицы $\mathbf{Z}$ [(4.7)] матрицу $\mathbf{Z}_{(i)}$ такую, что

$$\mathbf{Z}_{(i)} = \mathbf{Z}_{i+1} \times \ldots \times \mathbf{Z}_z \text{ для } i < z, \tag{9.7}$$

$$\mathbf{Z}_{(i)} = \mathbf{E} \text{ для } i \geqslant z. \tag{10.7}$$

В дальнейшем символ $\omega'$-матрицы с правым нижним значком всегда означает соответствующий множитель этой матрицы; такая же запись со значком, заключенным в круглые скобки, означает соответствующий остаток этой матрицы.

Пусть $\mathbf{Z}$ есть $\omega'$-матрица и имеет место (4.7). Тогда из (XII.7) следуют равенства

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{E}, \tag{11.7}$$

$$\mathbf{Z}_{(0)} = \mathbf{Z}, \tag{12.7}$$

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{E} \quad (i > z), \tag{13.7}$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{(i)} = \mathbf{E} \quad (i \geqslant 0), \tag{14.7}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \times \ldots \times \mathbf{Z}_i \times \mathbf{Z}_{(i)} \quad (i > 0), \tag{15.7}$$

$$(\mathbf{Z}_{(i)})_1 = \mathbf{Z}_{i+1} \quad (i \geqslant 0), \tag{16.7}$$

$$(\mathbf{Z}_{(i)})_{(1)} = \mathbf{Z}_{(i+1)} \quad (i \geqslant 0). \tag{17.7}$$

Имеет место также:

**XIII. 7.** *Если* $1 \leqslant i \leqslant z$, *то* $\mathbf{Z}_i$ *есть элементарная матрица.*

Переходим к построению арифметизации.

Пусть $\alpha$ — буква, отличная от $|$, $\rightarrow$, $\cdot$. Введем алфавит

$$\text{Б} = \{ |, \alpha \} \tag{18.7}$$

и определим понятие $\gamma$-*соответствия* между словами в алфавите Б и $\omega'$-матрицами.

**XIV. 7.** Обозначим $\omega'$-матрицу, $\gamma$-соответствующую слову $V$ в Б, через

$$\gamma(V)$$

и определим $\gamma$-*соответствие* следующими условиями:

1. $\gamma(\Lambda) = \mathbf{E}$,
2. $\gamma(|) = \mathbf{A}$,
3. $\gamma(\alpha) = \mathbf{B}$,
4. $\gamma(\xi_1 \ldots \xi_k) = \gamma(\xi_1) \times \ldots \times \gamma(\xi_k) \quad (\xi_i \in \text{Б},\ 1 \leqslant i \leqslant k)$.

Легко видеть, что матрица $\gamma(V)$, построенная согласно условиям 1—4, действительно является $\omega'$-матрицей [(III. 7)] для любого слова $V$ в Б. При этом:

**XV. 7.** *Если дано слово* $V$ *в* Б, *то может быть однозначно найдена* $\gamma$-*соответствующая слову* $V$ $\omega'$-*матрица* $\mathbf{V}$.

Это непосредственно следует из (XIV. 7) и однозначности матричного умножения.

**XVI. 7.** *Если дана* $\omega'$-*матрица* $\mathbf{V}$, *то может быть однозначно найдено слово* $V$ *в* Б *такое, что*

$$\gamma(V) = \mathbf{V}. \tag{19.7}$$

Действительно, если $\mathbf{V} \neq \mathbf{E}$, то $\mathbf{V}$ есть $\omega$-матрица [III. 7 (2)]; тогда (XVI. 7) следует из (XI. 7) и XIV. 7 (2, 3, 4).

Если же $\mathbf{V} = \mathbf{E}$, то согласно (XIV. 7) существует единственное слово $V = \Lambda$ в Б такое, что имеет место (19. 7).

Леммы (XV. 7) и (XVI. 7) показывают, что $\gamma$-соответствие является взаимно-однозначным соответствием между словами в алфавите Б и $\omega'$-матрицами.

Поэтому можно пользоваться и записью

$$V=\gamma^{-1}(\mathbf{V}), \tag{20.7}$$

которую мы определяем как равносильную (19.7).

$\gamma$-соответствие является арифметизацией слов в алфавите Б при помощи $\omega'$-матриц в смысле (VII.2).

Отметим, наконец, что для любого числа $Y$

$$\gamma(Y)=\mathbf{A}^{Y}, \tag{21.7}$$

как это вытекает из определения $\gamma$-соответствия [XIV.7(2, 4)].

## § 8. Рекурсивность подстановки

В этом параграфе будет построен ряд вспомогательных ПРФ и ПРП, связанных с $\omega'$-матрицами, и доказана примитивная рекурсивность подстановки слова $W$ вместо первого вхождения слова $V$ в слово $U$[5]. Если $V$ входит в $U$, то через

$$\sum(U,\ V,\ W) \tag{1.8}$$

обозначим результат такой подстановки; если же $V$ не входит в $U$, то положим $\sum(U,\ V,\ W)=U$.

Будем говорить, что слово $V=\eta_1 \ldots \eta_v$ входит в слово $U=\xi_1 \ldots \xi_u$, начиная с $r$-й буквы, если

$$\xi_{r+i}=\eta_{1+i} \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ v-1). \tag{2.8}$$

Кроме того, будем считать, что пустое слово $\Lambda$ входит в любое слово, начиная с нулевой буквы. Ясно, что в случае вхождения $V$ в $U$, начиная с $r$-й буквы, всегда выполнено неравенство

$$r+v-1\leqslant u. \tag{3.8}$$

В доказательствах примитивной рекурсивности дальше, как правило, ссылки на применение схемы подстановки или схемы примитивной рекурсии опущены и приводятся только ссылки на рекурсивность функций, которые используются в этих схемах. При этом примитивная рекурсивность суммы и произведения [(6.3), (7.3)] считается известной без ссылки.

Также будут опущены ссылки на то, что любая постоянная есть ПРФ, точнее — на утверждение: *для любых чисел $k\geqslant 0$ и $n\geqslant 1$ существует* ПРФ $C_n^k(x_1, \ldots, x_n)$, *обладающая свойством* $C_n^k(x_1, \ldots, x_n)=k$.

(Действительно, как нетрудно видеть,

$$C_n^k(x_1,\ \ldots,\ x_n)=S^k(N(I_n^1(x_1,\ \ldots,\ x_n)))$$

[(1.3), (2.3), (3.3)], если через $S^k$ обозначать $k$-кратную итерацию функции $S$).

Будем пользоваться следующими обозначениями.

Если в качестве одного из аргументов некоторой функции фигурирует квадратик $\square$, то такая запись означает матрицу второго порядка, элементы которой равны значениям функции после замены квадратика числами 1, 2, 3, 4 соответственно; например,

$$\varphi(x, \square) = \begin{bmatrix} \varphi(x, 1) & \varphi(x, 2) \\ \varphi(x, 3) & \varphi(x)\ 4) \end{bmatrix}.$$

Если в качестве аргумента функции (или предиката) фигурирует символ матрицы, то этот символ означает последовательно выписанные элементы матрицы с запятой после каждого элемента, кроме последнего. Например,

$$\varphi(\mathbf{M}, z) = \varphi(m_1, m_2, m_3, m_4, z),$$

$$P(x, \mathbf{N}) = P(x, n_1, n_2, n_3, n_4),$$

$$\psi(\varphi(x, \square), y) = \psi(\varphi(x, 1), \varphi(x, 2), \varphi(x, 3), \varphi(x, 4), y).$$

Здесь и в дальнейшем через $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ обозначаются любые $\omega'$-матрицы

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{bmatrix};$$

если эти матрицы являются $\omega$-матрицами, то пусть их разложения на собственные множители имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L}_1 \times \ldots \times \mathbf{L}_l, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_1 \times \ldots \times \mathbf{M}_m, \\ \mathbf{N} &= \mathbf{N}_1 \times \ldots \times \mathbf{N}_n. \end{aligned}$$

Слова в алфавите $Б = \{ |, \alpha\}$, $\gamma$-соответствующие матрицам $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, обозначим соответственно через $L$, $M$, $N$:

$$L = \gamma^{-1}(\mathbf{L}), \ M = \gamma^{-1}(\mathbf{M}), \ N = \gamma^{-1}(\mathbf{N}); \qquad [(20.7)]$$

пусть при этом

$$\begin{aligned} L &= \lambda_1 \ldots \lambda_l \quad (\lambda_i \in Б, \ 1 \leqslant i \leqslant l), \\ M &= \mu_1 \ldots \mu_m \quad (\mu_i \in Б, \ 1 \leqslant i \leqslant m), \\ N &= \nu_1 \ldots \nu_n \quad (\nu_i \in Б, \ 1 \leqslant i \leqslant n). \end{aligned}$$

Ясно [XIV. 7 (4)], что тогда

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda_i) &= \mathbf{L}_i \quad (1 \leqslant i \leqslant l), \\ \gamma(\mu_i) &= \mathbf{M}_i \quad (1 \leqslant i \leqslant m), \\ \gamma(\nu_i) &= \mathbf{N}_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \end{aligned}$$

Нашей ближайшей целью является построение функции $\sigma_0(\mathbf{M}, \mathbf{N})$, дающей ответ на вопрос, входит ли слово $N$ в слово $M$, и если входит, то начиная с какой буквы слова $M$.

Прежде всего построим функцию $\tau_1$:

$$\tau_1(\mathbf{M}, u) = \sum_{i=1}^{4} m_i \rho(u, i). \tag{4.8}$$

**I. 8.** *Функция* $\tau_1$ *есть* ПРФ.

Это следует из (4.8) и (IV.3).

Очевидно, имеем:

$$\tau_1(\mathbf{M}, \square) = \mathbf{M}. \tag{5.8}$$ [(4.8), (10.3)]

Через $\alpha_1$, $\beta_1$ и $\varepsilon_1$ обозначим функции

$$\alpha_1(u) = \tau_1(\mathbf{A}, u), \tag{6.8}$$

$$\beta_1(u) = \tau_1(\mathbf{B}, u), \tag{7.8}$$

$$\varepsilon_1(u) = \tau_1(\mathbf{E}, u). \tag{8.8}$$

**II. 8.** *Функции* $\alpha_1$, $\beta_1$, $\varepsilon_1$ *суть* ПРФ.

Это следует из (6.8), (7.8), (8.8) и (I.8).

Имеем:

$$\alpha_1(\square) = \mathbf{A}, \ \beta_1(\square) = \mathbf{B}, \ \varepsilon_1(\square) = \mathbf{E}. \tag{9.8}$$ [(5.8), (6.8), (7,8), (8.8)]

**III. 8.** *Если* $\mathbf{M} = \mathbf{E}$, *то*

$$\tau_1(M, 2) + \tau_1(\mathbf{M}_1, 3) = 0; \tag{10.8}$$

*если* **M** *есть* $\omega$-*матрица, то*

$$\tau_1(\mathbf{M}, 2) + \tau_1(\mathbf{M}, 3) > 0. \tag{11.8}$$

Равенство (10.8) в случае $\mathbf{M} = \mathbf{E}$ следует из (5.8) и (2.7).

Неравенство (11.8) устанавливается индукцией по длине $\omega$-матрицы **M**. Действительно, если матрица **M** элементарная, то справедливость (11.8) следует из (5.8) и (1.7). С другой стороны, если $\omega$-матрица **M** обладает свойством (11.8), то справедливость (11.8) для $\mathbf{A} \times \mathbf{M}$ и $\mathbf{B} \times \mathbf{M}$ следует из (7.7) и (8.7).

Построим далее функцию $\chi_1$

$$(\chi_1(\mathbf{M}) = \alpha((m_1 \dot{-} m_3) + (m_2 \dot{-} m_4)). \tag{12.8}$$

**IV. 8.** *Функция* $\chi_1$ *есть* ПРФ.

Это следует из (IV.3).

Из (I.7), (II.7) и (12.8) усматриваем, что для любой $\omega$-матрицы **M**

$$\chi_1(\mathbf{M}) = \begin{cases} 1, & \text{если матрица } \mathbf{M} \text{ высокая}, \\ 0, & \text{если матрица } \mathbf{M} \text{ низкая}. \end{cases} \tag{13.8}$$

Кроме того,

(14.8) $$\chi_1(\mathbf{E}) = 1.$$ [(2.7), (12.8)]

Построим функцию $\varkappa_1$, дающую первый множитель $\omega'$-матрицы,

(15.8) $$\varkappa_1(\mathbf{M},\ u) = (\chi_1(\mathbf{M})\,\alpha_1(u) + \beta(\chi_1(\mathbf{M}))\,\beta_1(u))\,\alpha(m_2 + m_3) + \\ + \varepsilon_1(u)\,\beta(m_2 + m_3).$$

**V.8.** *Функция* $\varkappa_1$ *есть* ПРФ.

Это следует из (IV.3), (II.8) и (IV.8).

Докажем, что

(16.8) $$\varkappa_1(\mathbf{M},\ \square) = \mathbf{M}_1.$$

1. Пусть $\mathbf{M} \neq \mathbf{E}$.

Тогда [III.7(2)] $\mathbf{M}$ есть $\omega$-матрица и

(17.8) $$m_2 + m_3 > 0.$$ [(11.8)]

Пусть матрица $\mathbf{M}$ высокая. Тогда

(18.8) $$\chi_1(\mathbf{M}) = 1$$ [(13.8)]

и

$$\varkappa_1(\mathbf{M},\ \square) = \chi_1(\mathbf{M})\,\alpha_1(\square) + \beta(\chi_1(\mathbf{M}))\,\beta_1(\square)$$ [(15.8), (17.8), (11.3), (12.3)]

$$= \alpha_1(\square)$$ [(18.8), (11.3), (12.3)]

$$= \mathbf{A}$$ [(9.8)]

$$= \mathbf{M}_1.$$ [VIII.7(1)]

2. Пусть $\mathbf{M} \neq \mathbf{E}$ и матрица $\mathbf{M}$ низкая. Тогда имеют место (17.8) и

(19.8) $$\chi_1(\mathbf{M}) = 0,$$ [(13.8)]

поэтому

$$\varkappa_1(\mathbf{M},\ \square) = \chi_1(\mathbf{M})\,\alpha_1(\square) + \beta(\chi_1(\mathbf{M}))\,\beta_1(\square)$$

$$= \beta_1(\square)$$ [(19.8), (11.3), (12.3)]

$$= \mathbf{B}$$ [(9.8)]

$$= \mathbf{M}_1.$$ [VIII.7(2)]

3. Пусть $\mathbf{M} = \mathbf{E}$.

Тогда

(20.8) $$m_1 + m_2 = 0$$ [(10.8)]

$$\varkappa_1(\mathbf{M},\ \square) = \varepsilon_1(\square)$$ [(15.8), (20.8), (11.3), (12.3)]

$$= \mathbf{E}$$ [(9.8)]

$$= \mathbf{M}_1.$$ [(14.7)]

Этим (16.8) доказано, так как случаи 1, 2, 3 исчерпывают все возможные [(VII.7)].

Построим функцию $\varkappa_2$, дающую первый остаток $\omega'$-матрицы.

(21.8) $$\varkappa_2(\mathbf{M},\ u)=(m_1 \dot{-} m_3\chi_1(\mathbf{M}))\,\rho(u,\ 1)+(m_2 \dot{-} m_4\chi_1(\mathbf{M}))\,\rho(u,\ 2)+$$
$$+(m_3 \dot{-} m_1\beta(\chi_1(\mathbf{M})))\,\rho(u,\ 3)+(m_4 \dot{-} m_2\beta(\chi_1(\mathbf{M})))\,\rho(u,\ 4).$$

**VI.8.** *Функция* $\varkappa_2$ *есть* ПРФ.

Это следует из (IV.3) и (IV.8).

Докажем, что

(22.8) $$\varkappa_2(\mathbf{M},\ \square)=\mathbf{M}_{(1)}.$$

1. Пусть матрица **M** высокая.

Тогда, с одной стороны,

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{A},\qquad [\text{VIII}.7(1)]$$

поэтому

(23.8) $$\mathbf{M}=\mathbf{A}\times\mathbf{M}_{(1)}\qquad [(15.7)]$$

(24.8) $$\mathbf{M}_{(1)}=\begin{bmatrix} m_1 \dot{-} m_3 & m_2 \dot{-} m_4 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}.\qquad [(23.8),\ \text{X}.7(1)]$$

С другой стороны,

(25.8) $$\chi_1(\mathbf{M})=1\qquad [(13.8)]$$

и

$$\varkappa_2(\mathbf{M},\ \square)=\begin{bmatrix} m_1 \dot{-} m_3\chi_1(\mathbf{M}) & m_2 \dot{-} m_4\chi_1(\mathbf{M}) \\ m_3 \dot{-} m_1\beta(\chi_1(\mathbf{M})) & m_4 \dot{-} m_2\beta(\chi_1(\mathbf{M})) \end{bmatrix}\qquad [(21.8)]$$

(26.8) $$=\begin{bmatrix} m_1 \dot{-} m_3 & m_2 \dot{-} m_4 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}.\qquad [(25.8),\ (12.3)]$$

Сравнение (24.8) и (26.8) дает (22.8), что и требовалось.

2. Пусть матрица **M** низкая.

Тогда, с одной стороны,

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{B},\qquad [\text{VIII}.7(2)]$$

поэтому

(27.8) $$\mathbf{M}=\mathbf{B}\times\mathbf{M}_{(1)}\qquad [15.7]$$

и

(28.8) $$\mathbf{M}_{(1)}=\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 \dot{-} m_1 & m_4 \dot{-} m_2 \end{bmatrix}.\qquad [(27.8),\ \text{X}.7(2)]$$

С другой стороны,

(29.8) $$\chi_1(\mathbf{M})=0\qquad [(13.8)]$$

и

$$\varkappa_2(\mathbf{M}, \square) = \begin{bmatrix} m_1 \dot{-} m_3\chi_1(\mathbf{M}) & m_2 \dot{-} m_4\chi_1(\mathbf{M}) \\ m_3 \dot{-} m_1\beta(\chi_1(\mathbf{M})) & m_4 \dot{-} m_2\beta(\chi_1(\mathbf{M})) \end{bmatrix}$$

(30.8) $$= \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 \dot{-} m_1 & m_4 \dot{-} m_2 \end{bmatrix}. \qquad [(29.8),\ (12.3)]$$

Сравнение (28.8) и (30.8) дает (22.8), что и требовалось.

3. Пусть $\mathbf{M} = \mathbf{E}$.

Тогда

$$m_1 = m_4 = 1, \quad m_2 = m_3 = 0, \qquad [(2.7)]$$

поэтому

$$\begin{aligned} \varkappa_2(\mathbf{M}, \square) &= \begin{bmatrix} m_1 \dot{-} m_3\chi_1(\mathbf{M}) & m_2 \dot{-} m_4\chi_1(\mathbf{M}) \\ m_3 \dot{-} m_1\beta(\chi_1(\mathbf{M})) & m_4 \dot{-} m_2\beta(\chi_1(\mathbf{M})) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{E} && [(2.7)] \\ &= \mathbf{M}_1. && [(14.7)] \end{aligned}$$

Этим (22.8) доказано, так как случаи 1, 2, 3 исчерпывают все возможные [(VII. 7)].

Построим функцию $\varkappa_3$, дающую $i$-й остаток $\omega'$-матрицы.

(31.8) $$\begin{cases} \varkappa_3(0, \mathbf{M}, u) = \tau_1(\mathbf{M}, u) \\ \varkappa_3(i|, \mathbf{M}, u) = \varkappa_2(\varkappa_3(i, \mathbf{M}, \square), u). \end{cases}$$

**VII. 8.** *Функция* $\varkappa_3$ *есть* ПРФ.

Это следует из (I. 8) и (VI. 8).

Докажем, что

(32.8) $$\varkappa_3(i, \mathbf{M}, \square) = \mathbf{M}_{(i)}.$$

Имеем, во-первых,

$$\begin{aligned} \varkappa_3(0, \mathbf{M}, \square) &= \tau_1(\mathbf{M}, u) && [(31.8)] \\ &= \mathbf{M} && [(5.8)] \\ &= \mathbf{M}_{(0)}. && [(12.7)] \end{aligned}$$

Во-вторых, если для некоторого $i \geqslant 0$ имеет место

(33.8) $$\varkappa_3(k, \mathbf{M}, \square) = \mathbf{M}_{(k)},$$

то

$$\begin{aligned} \varkappa_3(k|, \mathbf{M}, \square) &= \varkappa_2(\varkappa_3(k, \mathbf{M}, \square), \square) && [(31.8)] \\ &= \varkappa_2(\mathbf{M}_{(k)}, \square) && [(33.8)] \end{aligned}$$

$$=(\mathbf{M}_{(k)})_{(1)} \qquad [(22.8)]$$

$$=\mathbf{M}_{(k+1)}. \qquad [(17.7)]$$

Таким образом, (32.8) доказано индукцией по первому аргументу функции $\varkappa_3$.

Построим функцию $\varkappa_4$, дающую $i$-й множитель $\omega'$-матрицы.

(34.8) $$\varkappa_4(i, \mathbf{M}, u)=\varkappa_1(\varkappa_3(i \dot{-} 1, \mathbf{M}, \square), u)\,\alpha(i)+\varepsilon_1(u)\,\beta(i).$$

**VIII. 8.** *Функция* $\varkappa_4$ *есть* ПРФ.

Это следует из (IV. 3), (II. 8), (V .8) и (VII. 8).

Докажем, что

(35.8) $$\varkappa_4(i, \mathbf{M}, \square)=\mathbf{M}_i.$$

1. Пусть

(36.8) $$i=0.$$

**Тогда**

$$\varkappa_4(i, \mathbf{M}, \square)=\varepsilon_1(\square) \qquad [(34.8), (36.8), (11.3), (12.3)]$$

$$=\mathbf{E} \qquad [(9.8)]$$

$$=\mathbf{M}_i. \qquad [(11.7)]$$

2. Пусть

(37.8) $$i\neq 0.$$

Тогда

$$\varkappa_4(i, \mathbf{M}, \square)=\varkappa_1(\varkappa_3(i-1, \mathbf{M}, \square), \square) \qquad [(34.8), (37.8), (11.3), (12.3)]$$

$$=\varkappa_1(\mathbf{M}_{(i-1)}, \square) \qquad [(32.8)]$$

$$=(\mathbf{M}_{(i-1)})_1 \qquad [(16.8)]$$

$$=\mathbf{M}_i. \qquad [(16.7)]$$

Равенство (35.8) доказано.

Отметим, что:

**IX. 8.** *Если* $\varkappa_4(i, \mathbf{M}, \square)$ *есть элементарная матрица, то* $1\leqslant i\leqslant m$.

Действительно, случаи $i=0$ и $i>m$ невозможны, так как тогда, согласно (35.8), (11.7) и (13.7), матрица $\varkappa_4(i, \mathbf{M}, \square)$ была бы равна единичной матрице, т. е. не элементарна.

Далее построим функцию $\delta$, которая даст длину $\omega'$-матрицы (равную длине $\gamma$-соответствующего слова в Б):

(38.8) $$\delta(\mathbf{M})=\mu_z\left(z\leqslant\sum_{i=1}^{4} m_i \,\&\, (\varkappa_3(z, \mathbf{M}, 2)+\varkappa_3(z, \mathbf{M}, 3)=0)\right).$$

**X. 8.** *Функция* $\delta$ *есть* ПРФ.

Это следует из (XII. 3), (XI. 3) и (VII. 8).

Докажем теперь, что

$$\delta(\mathbf{M}) = m. \tag{39.8}$$

Для этого мы должны, в частности, установить неравенство

$$m \leqslant \sum_{i=1}^{4} m_i. \tag{40.8}$$

Оно, очевидно, имеет место для единичной матрицы, а также для элементарных матриц. Кроме того, если некоторая $\omega$-матрица $\mathbf{M}$ обладает свойством (40. 8), то этим свойством обладают также матрицы

$$\mathbf{A} \times \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_3 & m_2 + m_4 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{B} \times \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 + m_1 & m_4 + m_2 \end{bmatrix};$$

это следует из (40. 8) для матрицы $\mathbf{M}$ и неравенств

$$1 \leqslant m_3 + m_4, \quad 1 \leqslant m_1 + m_2,$$

имеющих место благодаря унимодулярности $\mathbf{M}$. Итак, (40. 8) справедливо для любой $\omega'$-матрицы $\mathbf{M}$.

Из (9. 7) следует, что для $i < m$ $\mathbf{M}_{(i)}$ есть $\omega$-матрица; поэтому в силу (III. 8)

$$\tau_1(\mathbf{M}_{(i)}, 2) + \tau_1(\mathbf{M}_{(i)}, 3) > 0 \quad (i < m). \tag{41.8}$$

Кроме того,

$$\mathbf{M}_{(m)} = \mathbf{E}, \qquad [(10.7)]$$

поэтому

$$\tau_1(\mathbf{M}_{(m)}, 2) + \tau_1(\mathbf{M}_{(m)}, 3) = 0. \qquad [(III.8)] \tag{42.8}$$

Теперь соотношения

$$\varkappa_3(i, \mathbf{M}, 2) + \varkappa_3(i, \mathbf{M}, 3) > 0 \quad (i < m), \qquad [(41.8), (32.8)]$$

$$\varkappa_3(i, \mathbf{M}, 2) + \varkappa_3(i, \mathbf{M}, 3) = 0 \quad (i = m) \qquad [(42.8), (32.8)]$$

вместе с (VII. 3) доказывают (39. 8).

В качестве следствия из (39. 8) отметим, что для любого числа $X$

$$\delta(X) = X. \tag{43.8}$$

Построим предикат $P_1$:

$$P_1(s, \mathbf{M}, t, \mathbf{N}) \equiv (\varkappa_4(s, \mathbf{M}, \square) = \varkappa_4(t, \mathbf{N}, \square)). \tag{44.8}$$

**XI. 8.** *Предикат* $P_1$ *есть* ПРП.

Это следует из (VIII. 8), (XI. 3) и (IX. 3), так как утверждение о равенстве двух матриц равносильно конъюнкции утверждений о равенстве соответствующих элементов этих матриц.

Из (44. 8) и (35. 8) следует, что для $s \leqslant m$ и $t \leqslant n$ имеем

(45. 8) $$P_1(s, \mathbf{M}, t, \mathbf{N}) \equiv (\mathbf{M}_s = \mathbf{N}_t) \equiv (\mu_s = \nu_t),$$

т. е.

$$P_1(s, \mathbf{M}, t, \mathbf{N})$$

утверждает равенство $s$-й буквы слова $M$ и $t$-й буквы слова $N$.

Построим предикат $P_2$:

(46. 8) $$P_2(\mathbf{M}, r, \mathbf{N}) \equiv \mathop{\&}_{i=0}^{\delta(\mathbf{N}) \dot{-} 1} P_1(r+i, \mathbf{M}, i+1, \mathbf{N}).$$

**XII. 8.** *Предикат* $P_2$ *есть* ПРП.

Это следует из (XIII. 3), (X. 8) и (XI. 8).

**XIII. 8.** *Пусть* $N \neq \Lambda$. *В этом случае*

$$P_2(\mathbf{M}, r, \mathbf{N})$$

*тогда и только тогда, когда слово $N$ входит в слово $M$, начиная с $r$-й буквы.*

Докажем достаточность.

Пусть непустое слово $N$ входит в слово $M$, начиная с $r$-й буквы. Это означает, что

(47. 8) $$\mu_{r+i} = \nu_{1+i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \qquad [(2. 8)]$$

и

(48. 8) $$r + n - 1 \leqslant m. \qquad [(3. 8)]$$

Имеем

(49. 8) $$\mathbf{M}_{r+i} = \mathbf{N}_{1+i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad [(47. 8)]$$

(50. 8) $\varkappa_4(r+i, \mathbf{M}, \square) = \varkappa_4(1+i, \mathbf{N}, \square)\ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$, [(49. 8), (35. 8)]

(51. 8) $P_1(r+1, \mathbf{M}, i+1, \mathbf{N})\ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$. [(50. 8), (44. 8)]

Утверждения (51. 8) равносильны утверждению

$$P_2(\mathbf{M}, r, \mathbf{N}), \qquad [(46. 8)]$$

так как

(52. 8) $$\delta(\mathbf{N}) = n. \qquad [(39. 8)]$$

Докажем необходимость.

Пусть $N \neq \Lambda$ и имеет место

(53. 8) $$P_2(\mathbf{M}, r, \mathbf{N}).$$

Тогда получаем (51.8) [(46.8), (52.8)], (50.8) [(51.8), (44.8)], (49.8) [(50.8), (35.8)]. Согласно (XIII.7), матрицы $\mathbf{N}_{1+i}$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$), а поэтому [(49.8)] также и матрицы $\mathbf{M}_{r+i}$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$), элементарны. В силу (35.8) и (IX.8) отсюда следует, что

$$r + i < m \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

т. е. неравенство (48.8) выполнено. Но тогда в силу (49.8) имеет место (47.8), т. е. слово $N$ входит в слово $M$, начиная с $r$-й буквы. Лемма (XIII.8) доказана.

Установим справедливость утверждения

$$P_2(\mathbf{M}, 0, \mathbf{E}). \tag{54.8}$$

Действительно,

$$\delta(\mathbf{E}) = 0, \qquad [(39.8), \text{XII}. 7(1)]$$

поэтому

$$P_2(\mathbf{M}, 0, \mathbf{E}) \equiv P_1(0, \mathbf{M}, 1, \mathbf{E}) \qquad [(46.8)]$$

$$\equiv (\varkappa_4(0, \mathbf{M}, \square) = \varkappa_4(1, \mathbf{E}, \square)); \qquad [(44.8)]$$

это вместе с

$$\varkappa_4(0, \mathbf{M}, \square) = \mathbf{M}_0 \qquad [(35.8)]$$

$$= \mathbf{E}, \qquad [(11.7)]$$

и

$$\varkappa_4(1, \mathbf{E}, \square) = \mathbf{E}_1 \qquad [(35.8)]$$

$$= \mathbf{E} \qquad [(14.7)]$$

доказывает (54.8).

**XIV. 8.** *Из* $N \neq \Lambda$ *следует*

$$\urcorner P_2(\mathbf{M}, 0, \mathbf{N}).$$

В самом деле,

$$P_2(\mathbf{M}, 0, \mathbf{N}) \equiv \underset{i=0}{\overset{n \dot{-} 1}{\&}} (\varkappa_4(i, \mathbf{M}, \square) = \varkappa_4(1 + i, \mathbf{N}, \square)), \qquad [(46.8), (44.8)]$$

но равенство

$$\varkappa_4(i, \mathbf{M}, \square) = \varkappa_4(1 + i, \mathbf{N}, \square)$$

нарушается уже в случае $i = 0$:

$$\varkappa_4(0, \mathbf{M}, \square) = \mathbf{E}, \qquad [(35.8), (11.7)]$$

а

$$\varkappa_4(1, \mathbf{N}, \square) = \mathbf{N}_1 \qquad [(35.8)]$$

$$\neq \mathbf{E},$$

так как матрица $\mathbf{N}$, будучи $\gamma$-соответствующей непустому слову $N$, является $\omega$-матрицей.

Построим теперь функцию $\sigma_0$:

(55.8) $$\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N}) = \mu_z \left\{ z \leqslant \delta(\mathbf{M}) + 1 \,\&\, \left[ (P_2(\mathbf{M},\ z \dot{-} 1, \mathbf{N}) \,\&\, (z > 0)) \vee \vee \left( \underset{i=1}{\overset{\delta(\mathbf{M})+1}{\&}} \neg P_2(\mathbf{M},\ i \dot{-} 1,\ \mathbf{N}) \,\&\, (z = 0) \right) \right] \right\}.$$

**XV. 8.** *Функция* $\sigma_0$ *есть* ПРФ.

Это следует из (XII. 3), (X. 8), (IX. 3), (XII. 8), (8. 3), (XI. 3), (14. 3) и (XIII. 3).

**XVI. 8.** (1) $N$ *не входит в* $M$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N}) = 0.$$

(2) $N$ *входит в* $M$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N}) > 0;$$

*при этом, если первое вхождение* $N$ *в* $M$ *начинается с* $r$*-й буквы, то*

(56.8) $$\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N}) = r + 1.$$

Достаточность 1. Пусть

(57.8) $$\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N}) = 0.$$

Тогда из определения (VII. 3) и (55. 8) следует, что

(58.8) $$\neg P_2(\mathbf{M},\ i,\ \mathbf{N}) \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m),$$

в частности

(59.8) $$\neg P_2(\mathbf{M},\ 0,\ \mathbf{N}).$$

Слово $N$ не пустое, так как в противном случае мы имели бы

$$\neg P_2(\mathbf{M},\ 0,\ \mathbf{E}), \qquad [(59.8)]$$

вопреки (54. 8). Итак, $N \neq \Lambda$. Но тогда (58. 8) и означает [(XIII. 8)], что слово $N$ не входит в слово $M$.

Необходимость 1. Пусть слово $N$ не входит в слово $M$. Тогда $N \neq \Lambda$, так как пустое слово входит в любое слово. Поэтому в силу (XIII. 8) для всех $z$ имеем

$$\neg P_2(\mathbf{M},\ z \dot{-} 1,\ \mathbf{N}),$$

и не существует $z$ такого, что

$$z \leqslant \delta(\mathbf{M}) + 1 \,\&\, (P_2(\mathbf{M},\ z \dot{-} 1,\ \mathbf{N}) \,\&\, (z > 0)).$$

Но это означает [(VII′. 3)], что $\sigma_0(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 0$.

Необходимость и достаточность 2 следуют из уже доказанного, так как $\sigma_0(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ либо равно нулю, либо больше нуля, и слово $N$ либо входит в $M$, либо не входит в $M$.

Остается установить (56. 8).

Пусть $N \neq \Lambda$ входит в $M$ и первое вхождение $N$ в $M$ начинается с $r$-й буквы. Тогда

$$P_2(\mathbf{M}, r, \mathbf{N}) \qquad [(\text{XIII}. 8)]$$

и

$$\urcorner P_2(\mathbf{M}, i, \mathbf{N}), \quad (i < r). \qquad [(\text{XIII}. 8)]$$

Отсюда следует

$$\sigma_0(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = r + 1, \qquad [(55. 8), (\text{VII}. 3)]$$

так как имеет место (48. 8), $n \geqslant 1$ и поэтому

$$r + 1 \leqslant m + 1.$$

Пусть $N = \Lambda$. Тогда, с одной стороны, первое вхождение $N$ в $M$ начинается с 0-й буквы. С другой стороны, из

$$P_2(\mathbf{M}, 0, \mathbf{E}), \qquad [(54. 8)]$$

$$1 \leqslant m + 1,$$

(55. 8) и (VII. 3) следует, что в этом случае

$$\sigma_0(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 1.$$

Равенство (56. 8), таким образом, соблюдено. Лемма (XVI. 8) доказана.

Теперь приступим к построению вспомогательных функций, позволяющих строить функцию $\sigma$ со свойством

$$\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{L}, \square) = \gamma(\textstyle\sum(M, N, L)). \tag{60.8}$$

Начнем с построения функции $\pi$, которая дает произведение двух $\omega'$-матриц.

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{M}, \mathbf{N}, u) = (m_1 n_1 + m_2 n_3)\, \rho(u, 1) + \\ + (m_1 n_2 + m_2 n_4)\, \rho(u, 2) + (m_3 n_1 + m_4 n_3)\, \rho(u, 3) + \\ + (m_3 n_2 + m_4 n_4)\, \rho(u, 4). \end{aligned} \tag{61.8}$$

**XVII. 8.** *Функция* $\pi$ *есть* ПРФ.

Это следует из (IV. 3). Имеем, очевидно,

$$\pi(\mathbf{M}, \mathbf{N}, \square) = \mathbf{M} \times \mathbf{N}. \qquad [(61. 8)] \tag{62.8}$$

Построим, далее, функцию $\bar{\sigma}$:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(0, t, \mathbf{M}, u) = \varkappa_4(t, \mathbf{M}, u), \\ \bar{\sigma}(s|, t, \mathbf{M}, u) = \pi(\bar{\sigma}(s, t\ \mathbf{M}, \square), \varkappa_4(t + s|, \mathbf{M}, \square), u). \end{cases} \tag{63.8}$$

**XVIII. 8.** *Функция* $\bar{\sigma}$ *есть* ПРФ.

Это следует из (VIII. 8) и (XVII. 8).

Имеет место равенство

(64.8) $$\bar{\sigma}(s,\ t,\ \mathbf{M},\ \Box)=\mathbf{M}_t\times\ldots\times\mathbf{M}_{t+s}.$$

Докажем это индукцией по первому аргументу. Имеет место, во-первых,

$$\bar{\sigma}(0,\ t,\ \mathbf{M},\ \Box)=\varkappa_4(t,\ \mathbf{M},\ \Box) \qquad [(63.8)]$$
$$=\mathbf{M}_t. \qquad [(35.8)]$$

Во-вторых, если для некоторого $s\geqslant 0$ равенство (64.8) имеет место, то оно имеет место также для $s|$, так как

$$\bar{\sigma}(s|,\ t,\ \mathbf{M},\ \Box)=\pi(\bar{\sigma}(s,\ t,\ \mathbf{M},\ \Box),\ \varkappa_4(t+s|,\ \mathbf{M},\ \Box),\ \Box) \qquad [(63.8)]$$
$$=\pi(\mathbf{M}_t\times\ldots\times\mathbf{M}_{t+s},\ \mathbf{M}_{t+s|},\ \Box) \qquad [(64.8),\ (35.8)]$$
$$=\mathbf{M}_t\times\ldots\times\mathbf{M}_{t+s}\times\mathbf{M}_{t+s|}. \qquad [(62.8)]$$

Построим функции $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ следующим образом:

(65.8) $$\sigma_1(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ u)=\bar{\sigma}(\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N})\dot{-}2,\ 0,\ \mathbf{M},\ u)\,\alpha(\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N})\dot{-}1)+$$
$$+\varepsilon_1(u)\,\beta(\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N})\dot{-}1),$$

(66.8) $$\sigma_2(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ u)=\tau_1(\mathbf{L},\ u)\,\alpha(\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N}))+\varepsilon_1(u)\,\beta(\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N})),$$

(67.8) $$\sigma_3(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ u)=\varkappa_3(\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N})+\delta(\mathbf{N})\,\alpha(\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N}))\dot{-}2,\ \mathbf{M},\ u).$$

**XIX. 8.** *Функции* $\sigma_1$, $\sigma_2$ *и* $\sigma_3$ *суть* ПРФ.

Первое следует из (IV. 3), (XVIII. 8), (XV. 8) и (II. 8), второе — из (IV. 3), (I. 8), (XV. 8) и (II. 8), а третье — из (IV. 3), (VII. 8), (XV. 8) и (X. 8).

Покажем теперь, что свойством (60.8) обладает функция

(68.8) $$\sigma(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ u)=\pi(\sigma_1(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \Box),$$ (перенос!)
$$\pi(\sigma_2(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ \Box),\ \sigma_3(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \Box),\ \Box),\ u).$$

Прежде всего отметим, что

(69.8) $$\sigma(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ \Box)=\sigma_1(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \Box)\times\sigma_2(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ \Box)\times$$
$$\times\sigma_3(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \Box). \qquad [(68.8),\ (62.8)]$$

1. Пусть слово $N\neq\Lambda$ входит в слово $M$ и первое вхождение $N$ в $M$ начинается с $r$-й буквы.

Тогда

$$\sum(M,\ N,\ L)=\mu_1\ldots\mu_{r-1}L\mu_{r+n}\ldots\mu_m,$$

поэтому

(70.8) $$\gamma\left(\sum(M,\ N,\ L)\right)=\mathbf{M}_1\times\ldots\times\mathbf{M}_{r-1}\times\mathbf{L}\times\mathbf{M}_{r+n}\times\ldots\times\mathbf{M}_m.$$

С другой стороны, так как вхождение непустого $N$ в $M$ может начинаться самое меньшее с первой буквы, имеем

(71.8) $$\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N}) \geqslant 2 \qquad [(56.8)]$$

и

$$\sigma_1(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \square) = \sigma(r \dot{-} 1,\ 0,\ \mathbf{M},\ \square) \qquad [(65.8),\ (56.8),\ (71.8),\ (11.3),\ (12.3)]$$

$$= \mathbf{M}_0 \times \mathbf{M}_1 \times \ldots \times \mathbf{M}_{r-1} \qquad [(64.8)]$$

($72_1$.8) $$= \mathbf{M}_1 \times \ldots \times \mathbf{M}_{r-1}, \qquad [(11.7)]$$

$$\sigma_2(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ \square) = \tau_1(\mathbf{L},\ \square) \qquad [(66.8),\ (71.8),\ (11.3),\ (12.3)]$$

($72_2$.8) $$= \mathbf{L}, \qquad [(5.8)]$$

$$\sigma_3(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \square) = \varkappa_3(r + n \dot{-} 1,\ \mathbf{M},\ \square) \qquad [(67.8),\ (56.8),\ (39.8),\ (71.8),\ (11.3)]$$

$$= \mathbf{M}_{(r+n-1)} \qquad [(32.8)]$$

($72_3$.8) $$= \mathbf{M}_{r+n} \times \ldots \times \mathbf{M}_m, \qquad [(9.7)]$$

если $r+n-1 < m$; если же $r+n-1 = m$ (т. е. слово $M$ оканчивается словом $N$ и не содержит других вхождений $N$), то

$$\sigma_3(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \square) = \mathbf{M}_{(r+n-1)}$$

$$= \mathbf{M}_{(m)}$$

($72'_3$.8) $$= \mathbf{E}. \qquad [(10.7)]$$

Из ($72_1$.8), ($72_2$.8), ($72_3$.8) и (69.8) следует

$$\sigma(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ \square) = \mathbf{M}_1 \times \ldots \times \mathbf{M}_{r-1} \times \mathbf{L} \times \mathbf{M}_{r+n} \times \ldots \times \mathbf{M}_m;$$

это вместе с (70.8) дает (60.8), что и требовалось.

Заметим, что в частном случае $r+n-1 = m$ вместо (70.8) будем иметь

(70'.8) $$\gamma(\sum(M,\ N,\ L)) = \mathbf{M}_1 \times \ldots \times \mathbf{M}_{r-1} \times \mathbf{L}$$

и вместо ($72_3$.8) — равенство ($72'_3$.8), что также приводит к (60.8).

2. Пусть $N = \Lambda$.

Тогда

$$\sum(M,\ N,\ L) = LM,$$

поэтому

(73.8) $$\gamma(\sum(M,\ N,\ L)) = \mathbf{L} \times \mathbf{M}.$$

С другой стороны,

(74.8) $$n = 0, \qquad [\text{XII}.7(1)]$$

(75.8) $$\sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N}) = 1 \qquad [(56.8)]$$

и

$$\sigma_1(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \square)=\varepsilon_1(\square) \qquad [(65.8),\ (75.8),\ (11.3),\ (12.3)]$$

$$(76_1.8) \qquad =\mathbf{E}, \qquad [(8.8)]$$

$$\sigma_2(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ \square)=\tau_1(\mathbf{L},\ \square) \qquad [(66.8),\ (75.8),\ (11.3),\ (12.3)]$$

$$(76_2.8) \qquad =\mathbf{L}, \qquad [(5.8)]$$

$$\sigma_3(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \square)=\varkappa_3(1\dot{-}2,\ \mathbf{M},\ \square) \qquad [(67.8),\ (75.8),\ (11.3)\ (12.3)]$$

$$=\mathbf{M}_{(0)} \qquad [(32.8)]$$

$$(76_3.8) \qquad =\mathbf{M}. \qquad [(12.7)]$$

Из $(76_1.8)$, $(76_2.8)$, $(76_3.8)$ и (69.8) следует

$$\sigma(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ \square)=\mathbf{L}\times\mathbf{M};$$

это вместе с (73.8) дает (60.8), что и требовалось.

3. Пусть $N$ не входит в $M$.

Тогда

$$\sum(M,\ N,\ L)=M, \qquad [(1.8)]$$

поэтому

$$(77.8) \qquad \gamma(\sum(M,\ N,\ L))=M.$$

С другой стороны,

$$(78.8) \qquad \sigma_0(\mathbf{M},\ \mathbf{N})=0 \qquad [(XVI.8)\,1]$$

и

$$\sigma_1(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ 0)=\varepsilon_1(\square) \qquad [(65.8),\ (78.8),\ (11.3),\ (12.3)]$$

$$(79_1.8) \qquad =\mathbf{E}, \qquad [(9.8)]$$

$$\sigma_2(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ \square)=\varepsilon_1(\square) \qquad [(66.8),\ (78.8),\ (11.3),\ (12.3)]$$

$$(79_2.8) \qquad =\mathbf{E}, \qquad [(8.8)]$$

$$\sigma_3(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \square)=\varkappa_3(0\dot{-}2,\ \mathbf{M},\ \square) \qquad [(67.8),\ (78.8),\ (11.3)]$$

$$(79_3.8) \qquad =\mathbf{M}. \qquad [(32.8),\ (12.7)]$$

Из $(79_1.8)$, $(79_2.8)$, $(79_3.8)$ и (69.8) следует

$$\sigma(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ \square)=\mathbf{M};$$

это вместе с (77.8) дает (60.8), что и требовалось.

Так как рассмотренные случаи 1, 2, 3 исчерпывают все возможные, то (60.8) доказано. При этом

**XX. 8.** *Функция* $\sigma$ [(68. 8)] *есть* ПРФ.

Это следует из (XVII. 8) и (XIX. 8).

Тем самым установлена теорема:

**XXI. 8.** *Существует* ПРФ $\sigma$ *такая, что*

$$\sigma(\mathbf{M},\ \mathbf{N},\ \mathbf{L},\ \square)=\gamma(\Sigma(M,\ N,\ L)).$$

## § 9. Рекурсивность алгорифмических функций одного аргумента

Цель этого параграфа — установить частичную рекурсивность любой алгорифмической функции одного аргумента.

Для того чтобы в этом доказательстве можно было пользоваться построенным в § 7 аппаратом арифметизации в виде $\omega'$-матриц, мы должны иметь дело с алгорифмом в двубуквенном алфавите.

Между тем алгорифмичность некоторой функции $\varphi$ одного аргумента означает [(I. 2)] существование алгорифма $\mathfrak{F}_1$ *над* алфавитом Ч такого, что

$$\varphi(x)\simeq\mathfrak{F}_1(x); \tag{1.9}$$

число букв алфавита алгорифма $\mathfrak{F}_1$ (т. е. алфавита, в котором работает $\mathfrak{F}_1$) при этом никак не ограничивается.

А. А. Марков доказал теорему приведения [3, 5], позволяющую строить для любого алгорифма над данным алфавитом другой алгорифм, эквивалентный данному и содержащий в своем алфавите только две вспомогательные буквы, не входящие в данный алфавит. Эту теорему усилил Н. М. Нагорный [6], доказав теорему, которая позволяет свести число вспомогательных букв к единице:

Пусть $\alpha$ — буква, не принадлежащая А. Тогда всякий нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ над алфавитом А эквивалентен относительно А некоторому нормальному алгорифму $\mathfrak{B}$ в $\text{А}\cup\{\alpha\}$. Относительно $\mathfrak{B}$ можно утверждать также следующее: всякий раз, когда он применим к слову $P$ в А, $\mathfrak{B}(P)$ также есть слово в А.

Усиленная теорема приведения обеспечивает существование алгорифма $\mathfrak{F}_2$ в двубуквенном алфавите $\text{Ч}\cup\{\alpha\}=\text{Б}$, эквивалентного $\mathfrak{F}_1$ относительно алфавита Ч; при этом алгорифм $\mathfrak{F}_2$ может быть построен так, что он будет перерабатывать все числа, к которым он применим, в числа же.

Поэтому можно писать

$$\mathfrak{F}_2(x)\simeq\mathfrak{F}_1(x). \tag{2.9}$$

Далее, так как известно, что всякий алгорифм вполне эквивалентен относительно своего алфавита своему замыканию [5], то имеем

$$\mathfrak{F}_2(x)\simeq\dot{\mathfrak{F}}_2(x). \tag{3.9}$$

Обозначая для краткости $\mathfrak{F}_2^{\cdot}$ через $\mathfrak{F}$,

$$(4.9) \qquad \mathfrak{F}(x) = \mathfrak{F}_2^{\cdot}(x),$$

получаем

$$(5.9) \qquad \varphi(x) \simeq \mathfrak{F}(x), \qquad [(1.9),\ (2.9),\ (3.9),\ (4.9)]$$

где $\mathfrak{F}$ есть замкнутый алгорифм в алфавите Б.

Для доказательства частичной рекурсивности функции $\varphi(x)$ мы, таким образом, должны показать, что для любого замкнутого алгорифма $\mathfrak{F}$ в алфавите Б, перерабатывающего слова в Ч (если он применим к этим словам) снова в слова в Ч, может быть построена ЧРФ одного аргумента $\psi$ такая, что

$$(6.9) \qquad \psi(x) \simeq \mathfrak{F}(x).$$

Это построение и доказательство того, что построенная функция $\psi(x)$ обладает нужными свойствами, составляет основное содержание настоящего параграфа.

Введем прежде всего некоторые вспомогательные функции.

Построим функцию $\varkappa$:

$$(7.9) \qquad \varkappa(t,\ u) = \rho(u,\ 1) + t\rho(u,\ 2) + \rho(u,\ 4).$$

**I. 9.** *Функция* $\varkappa$ *есть* ПРФ.

Это следует из (IV. 3).

Для любого числа $Y$

$$(8.9) \qquad \varkappa(Y,\ \square) = \gamma(Y). \qquad [(21.7),\ (3.7),\ (7.9),\ (IV.3)]$$

Построим функции $o_1$ и $o_2$:

$$(9.9) \qquad o_1(\mathbf{M}) = m_1 m_4 \dot{-} m_2 m_3,$$

$$(10.9) \qquad o_2(\mathbf{M},\ u) = 2m_1\rho(u,\ 1) + 2m_2\rho(u,\ 2) + m_3\rho(u,\ 3) + m_4\rho(u,\ 4).$$

**II. 9.** *Функции* $o_1$ *и* $o_2$ *суть* ПРФ.

Это следует из (IV. 3).

Имеем

$$(11.9) \qquad o_1(\mathbf{M}) = 1, \qquad [(IV.7),\ (9.9)]$$

$$(12.9) \qquad o_1(o_2(\mathbf{M},\ \square)) = 2.$$

Равенство (12. 9) следует из (IV. 7) и

$$(13.9) \qquad o_2(\mathbf{M},\ \square) = \begin{bmatrix} 2m_1 & 2m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}. \qquad [(10.9)]$$

Пусть теперь схема алгорифма $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$(14.9)\qquad \left\{\begin{array}{l} F_0 \to O_0 G_0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_s \to O_s G_s, \end{array}\right.$$

где $F_i$ и $G_i$ — слова в Б $(i=0, 1, \ldots, s)$, $O_i$ — либо $\cdot$, либо пустое слово. Число $s+1>0$ в этом параграфе всегда будет означать число формул в схеме алгорифма $\mathfrak{F}$; положительность числа формул следует из замкнутости $\mathfrak{F}$.

Будем пользоваться обозначениями

$$\mathbf{F}_i = \gamma(F_i) \quad (i=0, 1, \ldots, s),$$
$$\mathbf{G}_i = \gamma(G_i) \quad (i=0, 1, \ldots, s).$$

Построим некоторые функции, связанные со схемой алгорифма $\mathfrak{F}$, прежде всего функцию $\iota$:

$$(15.9)\qquad \iota(i, u) = \sum_{j=0}^{s} \tau_1(\mathbf{F}_j, u)\,\rho(i, j).$$

**III.9.** *Функция* $\iota$ *есть* ПРФ.

Это следует из (IV.3) и (I.8).

Имеет место

$$(16.9)\qquad \iota(i, \square) = \mathbf{F}_i \quad (0 \leqslant i \leqslant s). \qquad [(15.9), (5.8), (10.3)]$$

Построим далее функцию $\varsigma$:

$$(17.9)\qquad \varsigma(\mathbf{M}) = \mu_z(z \leqslant s \,\&\, \sigma_0(\mathbf{M}, \iota(z, \square)) > 0).$$

**IV.9.** *Функция* $\varsigma$ *есть* ПРФ.

Это следует из (XII.3), (XI.3), (XV.8) и (III.9).

Согласно (16.9), функция $\varsigma$ может быть записана и так:

$$(18.9)\qquad \varsigma(\mathbf{M}) = \mu_z(z \leqslant s \,\&\, \sigma_0(\mathbf{M}, \mathbf{F}_z) > 0).$$

Теперь построим $s+1$ функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_s$ следующим образом:

$$(19.9)\qquad \varphi_i(\mathbf{M}, u) = \begin{cases} \sigma(\mathbf{M}, \mathbf{F}_i, \mathbf{G}_i, u), & \text{если } i\text{-я формула схемы } \mathfrak{F} \text{ простая,} \\ o_2(\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{F}_i, \mathbf{G}_i, \square), u), & \text{если } i\text{-я формула схемы } \mathfrak{F} \text{ заключительная.} \end{cases}$$

**V.9.** *Функции* $\varphi_i (i=0, 1, \ldots, s)$ *суть* ПРФ.

Это следует из (XX.8) и (II.9).

Построим функцию $\Phi$:

(20.9) $$\Phi(i,\ \mathbf{M},\ u) = \sum_{j=0}^{s} \varphi_j(\mathbf{M},\ u)\, \rho(i,\ j).$$

**VI.9.** *Функция* $\Phi$ *есть* ПРФ.

Это следует из (IV.3) и (V.9).

Отметим, что при $0 \leqslant i \leqslant s$ имеет место

(21.9) $$\Phi(i,\ \mathbf{M},\ u) = \varphi_i(\mathbf{M},\ u). \qquad [(20.9),\ (10.3)]$$

Построим теперь функцию $\Psi$:

(22.9) $$\begin{cases} \Psi(0,\ \mathbf{M},\ u) = \tau_1(\mathbf{M},\ u) \\ \Psi(t|,\ \mathbf{M},\ u) = \Phi(\varsigma(\Psi(t,\ \mathbf{M},\ \square)),\ \Psi(t,\ \mathbf{M},\ \square),\ u). \end{cases}$$

**VII.9.** *Функция* $\Psi$ *есть* ПРФ.

Это следует из (I.8), (VI.9) и (IV.9).

Построим, наконец, функции $\omega$, $\delta$ и $\psi$ следующим образом:

(23.9) $$\omega(\mathbf{M}) = \mu_z(o_1(\Psi(z,\ \mathbf{M},\ \square)) = 2),$$

(24.9) $$\delta(\mathbf{M}) = \delta_2(\Psi(\omega(\mathbf{M}),\ \mathbf{M},\ 2)),$$

(25.9) $$\psi(X) = \delta(\varkappa(X,\ \square)).$$

**VIII.9.** *Функции* $\omega$, $\delta$ *и* $\psi$ *суть* ЧРФ.

Первое следует из (VII.3) ввиду (II.9) и (VII.9). Второе и третье следуют из первого, (9.3) и (I.9).

Покажем теперь, что построенная [(25.9)] ЧРФ $\psi$ является искомой, т. е. удовлетворяет условному равенству (6.9).

1. Пусть алгорифм $\mathfrak{F}$ применим к числу $X$ и перерабатывает его в число $Y$:

(26.9) $$\mathfrak{F}(X) = Y.$$

Мы должны показать, что тогда $\psi(X)$ определено и

(27.9) $$\psi(X) = Y.$$

Алгорифм $\mathfrak{F}$ замкнут, поэтому [5] равенство (26.9) означает существование ряда слов

$$X^{(0)},\ X^{(1)},\ \ldots,\ X^{(k)} \quad (X^{(i)} \text{ в Б},\ 0 \leqslant i \leqslant k > 0)$$

со свойствами

(28.9)
$$\begin{aligned} &1.\ X^{(0)} = X, \\ &2.\ X^{(k)} = Y, \\ &3.\ \mathfrak{F} : X^{(i-1)} \vdash X^{(i)} \quad (0 < i < k), \\ &4.\ \mathfrak{F} : X^{(k-1)} \vdash \cdot\, X^{(k)}. \end{aligned}$$

Будем пользоваться обозначениями

(29.9) $\mathbf{X}=\gamma(X),\ \mathbf{Y}=\gamma(Y),\ \mathbf{X}^{(i)}=\gamma(X^{(i)}),\quad (0\leqslant i\leqslant k).$

Тогда имеем

(30.9) $\mathbf{X}^{(0)}=\mathbf{X},\ \mathbf{X}^{(k)}=\mathbf{Y}.$ [(28.9) 1, 2]

Докажем, что функция $\Psi$ обладает свойствами

(31.9) $\Psi(t,\ \mathbf{X},\ \square)=\mathbf{X}^{(t)}\quad (0\leqslant t<k)$

и

(32.9) $\Psi(k,\ \mathbf{X},\ \square)=\begin{bmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix};$

здесь и дальше в этом параграфе $k$ есть число из (28.9).

Равенство (31.9) докажем индукцией по $t$.

Имеет место прежде всего

$$\Psi(0,\ \mathbf{X},\ \square)=\mathbf{X}^{(0)},$$

так как

$$\Psi(0,\ X,\ \square)=\tau_1(\mathbf{X},\ \square) \qquad [(22.9)]$$
$$=\mathbf{X} \qquad [(5.8)]$$
$$=\mathbf{X}^{(0)}. \qquad [(30.9)]$$

Кроме того, если для некоторого $t\,(0\leqslant t<k-1)$ предположить (31.9), то имеет место

(33.9) $\Psi(t|,\ \mathbf{X},\ \square)=\mathbf{X}^{(t|)}.$

Действительно, из (28.9) 3 следует, что тогда $\mathbf{X}^{(t|)}$ получается из $X^{(t)}$ применением некоторой простой формулы схемы (14.9). Обозначим через $i\,(0\leqslant i\leqslant s)$ номер этой формулы. Тогда

$$X^{(t|)}=\Sigma(X^{(t)},\ F_i,\ G_i), \qquad [(1.8)]$$

поэтому

(34.9) $\mathbf{X}^{(t|)}=\sigma(\mathbf{X}^{(t)},\ \mathbf{F}_i,\ \mathbf{G}_i,\ \square).$ [(XXI.8), (29.9)]

Далее, слово $F_i$ входит в $X^{(t)}$, но $F_m$ не входит в $X^{(t)}$ при $0\leqslant m<i$. Поэтому

(35.9) $\sigma_0(\mathbf{X}^{(t)},\ \mathbf{F}_m)=0\quad (m=0,\ \ldots,\ i-1),$ [XVI.8 (1)]

(36.9) $\sigma_0(\mathbf{X}^{(t)},\ \mathbf{F}_i)>0,$ [XVI.8 (2)]

(37.9) $\varsigma(\mathbf{X}^{(t)})=i.$ [(18.9), (35.9), (36.9), (VII.3)]

Кроме того, так как $i$-я формула в схеме (14.9) простая, имеем

(38.9) $\varphi_i(\mathbf{M},\ u)=\sigma(\mathbf{M},\ \mathbf{F}_i,\ \mathbf{G}_i,\ u).$ [(19.9)]

Для доказательства (33.9) находим

$$\begin{aligned}
\Psi(t|,\ \mathbf{X},\ \square) &= \Phi(\varsigma(\Psi(t,\ \mathbf{X},\ \square)),\ \Psi(t,\ \mathbf{X},\ \square),\ \square) && [(22.9)]\\
&= \Phi(\varsigma(\mathbf{X}^{(t)}),\ \mathbf{X}^{(t)},\ \square) && [(31.9)]\\
&= \Phi(i,\ \mathbf{X}^{(t)},\ \square) && [(37.9)]\\
&= \varphi_i(\mathbf{X}^{(t)},\ \square) && [(21.9)]\\
&= \sigma(\mathbf{X}^{(t)},\ \mathbf{F}_i,\ \mathbf{G}_i,\ \square) && [(38.9)]\\
&= \mathbf{X}^{(t|)}. && [(34.9)]
\end{aligned}$$

Тем самым (31.9) установлено.

Докажем теперь (32.9).

Согласно (28.9) 4, слово $X^{(k)}$ получается из $X^{(k-1)}$ применением некоторой заключительной формулы схемы (14.9); обозначим через $i$ $(0 \leqslant i \leqslant s)$ номер этой формулы. Тогда

(39.9) $$X^{(k)} = \sum(X^{(k-1)},\ F_i,\ G_i),$$

поэтому

(40.9) $$\mathbf{X}^{(k)} = \sigma(\mathbf{X}^{(k-1)},\ \mathbf{F}_i,\ \mathbf{G}_i,\ \square). \qquad [(\text{XXI}.8),\ (29.9)]$$

Как и в доказательстве (31.9), имеют место (35.9), (36.9) и (37.9).

Так как $i$-я формула в схеме (14.9) заключительная, имеем

(41.9) $$\varphi_i(\mathbf{M},\ u) = o_2(\sigma(\mathbf{M},\ \mathbf{F}_i,\ \mathbf{G}_i,\ \square),\ u) \qquad [(19.9)]$$

и находим

(42.9) $$\begin{aligned}
\Psi(k,\ \mathbf{X},\ \square) &= \varphi_i(\mathbf{X}^{(k-1)},\ \square) && [(22.9),\ (31.9),\ (37.9),\ (21.9)]\\
&= o_2(\sigma(\mathbf{X}^{(k-1)},\ \mathbf{F}_i,\ \mathbf{G}_i,\ \square),\ \square) && [(41.9)]\\
&= o_2(\mathbf{X}^{(k)},\ \square) && [(40.9)]\\
&= o_2(\mathbf{Y},\ \square) && [(30.9)]\\
&= \begin{bmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}, && [(13.9)]
\end{aligned}$$

т. е. имеет место (32.9).

Каждая матрица

$$\mathbf{X}^{(i)} \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k),$$

будучи $\gamma$-соответствующей слову $X^{(i)}$ в Б, является $\omega'$-матрицей. Поэтому

(43.9) $$o_1(\Psi(t,\ \mathbf{X},\ \square)) = 1 \text{ для } t = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1 \qquad [(31,9),\ (11.9)]$$

и

(44.9) $$o_1(\Psi(t,\ \mathbf{X},\ \square)) = 2 \text{ для } t = k. \qquad [(42.9),\ (12.9)]$$

Теперь из (23.9), (VII.3) и (44.9) следует, что $\omega(\mathbf{X})$ определено; тем самым определены также $\delta(\mathbf{X})$ и $\psi(X)$ [(24.9), (25.9)]. При этом

$$\omega(\mathbf{X})=k. \tag{45.9}$$ [(23.9), (43.9), (44.9)]

Имеем, кроме того,

$$Y=y_2, \tag{46.9}$$

так как

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \gamma(Y) && [(29.9)] \\ &= \mathbf{A}^Y && [(21.7)] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. && [(3.7)] \end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned} \psi(X) &= \delta(\varkappa(X, \square)) && [(25.9)] \\ &= \delta(\mathbf{X}) && [(8.9), (29.9)] \\ &= \delta_2(\Psi(\omega(\mathbf{X}), \mathbf{X}, 2)) && [(24.9)] \\ &= \delta_2(\Psi(k, \mathbf{X}, 2)) && [(45.9)] \\ &= \delta_2(2y_2) && [(32.9)] \\ &= y_2 && [(9.3)] \\ &= Y, && [(46.9)] \end{aligned}$$

т. е. (27.9) установлено.

2. Пусть $\psi(X)$ определено и имеет место (28.9).

Мы должны доказать, что тогда алгорифм $\mathfrak{F}$ применим к слову $X$ (равенство (26.9) уже будет следовать из этой применимости и доказанного в 1).

Если определено $\psi(X)$, то, согласно (25.9) и (8.9), определено также $\delta(\mathbf{X})$. Но это означает [(24.9)], что определено $\omega(\mathbf{X})$. Обозначим число $\omega(\mathbf{X})$ через $k$; тогда

$$k=\mu_z(o_1(\Psi(z, \mathbf{X}, \square))=2),$$ [(23.9)]

откуда

$$o_1(\Psi(k, \mathbf{X}, \square))=2. \tag{47.9}$$ [(VII.3)]

Алгорифм $\mathfrak{F}$ замкнут, поэтому он любое слово в Б либо просто переводит, либо заключительно переводит в некоторое слово в Б. Обозначим слово, в которое $\mathfrak{F}$ переводит $X^{(0)}=X$, через $X^{(1)}$; слово, в которое $\mathfrak{F}$ переводит $X^{(1)}$, через $X^{(2)}$, и т. д.

Предположение, что среди первых $k$ шагов работы $\mathfrak{F}$ не имеется заключительного шага, ведет к противоречию.

Действительно, такое предположение означало бы, что существует ряд слов в Б

$$X^{(0)},\ X^{(1)},\ \ldots,\ X^{(k)}$$

такой, что

$$\mathfrak{F}: X^{(0)} \vdash X^{(1)} \vdash \ldots \vdash X^{(k)}.$$

Тогда мы могли бы доказать точно так же, как было доказано (31.9), что

$$\Psi(t,\ \mathbf{X},\ \square) = \mathbf{X}^{(t)} \quad (t = 0,\ 1,\ \ldots,\ k),$$

в частности

$$\Psi(k,\ \mathbf{X},\ \square) = \mathbf{X}^{(k)}. \tag{48.9}$$

Но $X^{(k)}$ есть слово в Б, поэтому матрица

$$\mathbf{X}^{(k)} = \gamma(X^{(k)})$$

есть $\omega'$-матрица и, следовательно, унимодулярна:

$$o_1(\Psi(k,\ \mathbf{X},\ \square)) = o_1(\mathbf{X}^{(k)}) \qquad [(48.9)]$$

$$= 1, \qquad [(11.9)]$$

что противоречит (47.9).

Полученное противоречие показывает, что среди первых $k$ шагов имеется заключительный; но это означает применимость $\mathfrak{F}$ к слову $X$, что и требовалось доказать.

1 и 2 доказывают условное равенство (6.9). Тем самым доказана теорема:

**IX.9.** *Всякая* АФ *одного аргумента есть* ЧРФ.

## § 10. Рекурсивность алгорифмических функций $n$ аргументов

В этом параграфе доказываются теоремы (IV.2) и (VI.2). Теорема (IV.2) сводится к (IX.9) при помощи нумерации систем чисел.

Известны разные способы установления взаимно-однозначного соответствия между парами чисел и числами или, как тоже будем говорить, разные нумерации пар чисел.

Один такой способ приводится в [12]. Обозначим через $\pi^2$ функцию двух аргументов, дающую номер пары чисел, и через $\pi_1^2$ и $\pi_2^2$ „обратные“ функции одного аргумента, т. е. такие, что

$$\pi_1^2(\pi^2(x_1,\ x_2)) = x_1,\quad \pi_2^2(\pi^2(x_1,\ x_2)) = x_2,$$

$$\pi_2(\pi_1^2(x),\ \pi_2^2(x)) = x.$$

(В [12] эти функции обозначаются через $\sigma$, $\sigma_1$ и $\sigma_2$).

Исходя из нумерации пар чисел, легко индуктивно построить нумерацию систем $n$ чисел для любого $n > 2$. Это может быть сделано, например, так.

Пусть определена нумерация систем $n$ чисел ($n \geqslant 2$), и пусть эта нумерация осуществляется при помощи функций $\pi_1^n, \ldots, \pi_n^n, \pi^n$, т. е. пусть имеют место равенства

$$(1.10) \qquad \begin{cases} \pi_i^n(\pi^n(x_1, \ldots, x_n)) = x_i & (i=1, \ldots, n), \\ \pi^n(\pi_1^n(x), \ldots, \pi_n^n(x)) = x. \end{cases}$$

Построим функции $\pi^{n+1}, \pi_1^{n+1}, \ldots, \pi_{n+1}^{n+1}$ следующим образом:

$$(2.10) \qquad \begin{cases} \pi^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \pi^2(\pi^n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}), \\ \pi_i^{n+1}(x) = \pi_i^n(\pi_1^2(x)) \quad (i=1, \ldots, n), \\ \pi_{n+1}^{n+1}(x) = \pi_2^2(x). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что тогда функции $\pi^{n+1}, \pi_1^{n+1}, \ldots, \pi_{n+1}^{n+1}$ осуществляют нумерацию систем $n+1$ чисел.

В [12] показано, что функции $\pi^2$, $\pi_1^2$ и $\pi_2^2$ суть ПРФ. Из (2.10) видим, что тогда $\pi^n, \pi_1^n, \ldots, \pi_n^n$ суть ПРФ при любом $n \geqslant 2$. Ввиду теоремы (VII.4) это означает, что функции $\pi^n, \pi_1^n, \ldots, \pi_n^n$ суть ВАФ. Таким образом, имеет место лемма:

**I.10.** *Для любого* $n \geqslant 2$ *существуют* ВАФ $\pi^n, \pi_1^n, \ldots, \pi_n^n$ *со свойствами* (1.10).

Теперь легко устанавливается теорема:

**IV.2.** *Всякая* АФ *есть* ЧРФ.

Действительно, пусть дана некоторая АФ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Из алгорифмичности функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и функций $\pi_1^n, \ldots, \pi_n^n$ [(I.10)] следует [(V'.4)] алгорифмичность функции

$$(3.10) \qquad \varphi_1(x) \simeq \varphi(\pi_1^n(x), \ldots, \pi_n^n(x)).$$

Будучи функцией одного аргумента, $\varphi_1(x)$ есть ЧРФ [(IX.9)]. Но тогда функция

$$(4.10) \qquad \bar{\varphi}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_1(\pi^n(x_1, \ldots, x_n))$$

также есть ЧРФ. С другой стороны,

$$\bar{\varphi}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

так как

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) &\simeq \varphi_1(\pi^n(x_1, \ldots, x_n)) && [(4.10)] \\ &\simeq \varphi(\pi_1^n(\pi^n(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, \pi_n^n(\pi^n(x_1, \ldots, x_n))) && [(3.10)] \\ &\simeq \varphi(x_1, \ldots, x_n). && [(1.10)] \end{aligned}$$

Теорема (IV. 2) доказана. В качестве следствия получаем:

**VI. 2.** *Всякая* ВАФ *есть* ОРФ.

Действительно, всякая ВАФ есть в то же время АФ, поэтому [(IV. 2)] ЧРФ, а именно ЧРФ, определенная для всех совокупностей значений своих аргументов. Но такая ЧРФ есть не что иное, как ОРФ. Поэтому имеет место (VI. 2).

Возможны и другие варианты доказательства теорем (IV. 2) и (VI. 2). Так, вместо арифметизации при помощи $\omega'$-матриц может быть использована другая арифметизация. В частности, можно пользоваться гёделевой арифметизацией [9]. В этом случае отпадает надобность в теореме приведения, так как одинаково легко арифметизировать слова в любом алфавите, состоящем из конечного числа букв. Но зато тогда приходится пользоваться примитивными рекурсивными функциями, более сложными, чем функции, примененные нами в §§ 8 и 9; это относится, например, к доказательству примитивной рекурсивности подстановки.

## IV. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НОРМАЛЬНЫХ И РЕКУРСИВНЫХ АЛГОРИФМОВ

В этой главе доказываются теоремы (X. 2) и (XI. 2).

### § 11. Нормальная алгорифмичность арифметизации

В этом параграфе построена некоторая арифметизация и показывается, что она может быть осуществлена при помощи нормальных алгорифмов.

Пусть дан некоторый алфавит А. Обозначим число букв в этом алфавите через $m$ и занумеруем буквы алфавита:

$$(1.11) \qquad \mathrm{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\};$$

предположим, что А не содержит букв $\alpha$, $\beta$, $\Diamond$, $|$.

Произвольное непустое слово $V$ в А запишем в виде

$$(2.11) \qquad V = \alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\ldots, \alpha_{k_v} \quad (1 \leqslant k_i \leqslant m \text{ для } i = 1, 2, \ldots, v).$$

Построим арифметизацию $\gamma_1$ слов в А, сопоставляющую каждому слову в А число, запись которого в системе счисления с основанием $m$ получается заменой каждой буквы слова ее номером в алфавите А, т. е.

$$(3.11) \qquad \gamma_1(V) = \sum_{i=1}^{v} k_i m^{v-i},$$

$$(4.11) \qquad \gamma(\Lambda) = 0.$$

Ясно, что это сопоставление действительно является арифметизацией, т. е. удовлетворяет условиям 1—4 из VII. 2. Соответствие здесь даже взаимно-однозначное, так как каждое число является номером некоторого слова в A.

Утверждаем, что могут быть построены нормальные алгорифмы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^{-1}$ над алфавитом

$$\text{(5.11)} \qquad A_1 = A \cup \{\alpha, \beta, \diamond, |\}$$

такие, что для любого слова $V$ в A имеют место

$$\text{(6.11)} \qquad \mathfrak{G}(V) = \gamma_1(V),$$

$$\text{(7.11)} \qquad \mathfrak{G}^{-1}(\gamma_1(V)) = V.$$

Для построения $\mathfrak{G}$ построим в алфавите $A_1$ три вспомогательных нормальных алгорифма $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ и $\mathfrak{G}_3$ со схемами

$$\text{(8.11)} \qquad \mathfrak{G}_1 \left\{ \begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} \beta\xi\zeta \to \zeta\beta\xi \\ \alpha\xi \to \alpha\beta\xi \\ \alpha\beta\xi \to \xi\alpha \end{array} \right\} & (\xi, \zeta \in A \cup \{\diamond, |\}) \\ \alpha \to \cdot & \\ \to \alpha\ , & \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} (1 \\ (2 \\ (3 \\ (4 \\ (5 \end{array}$$

$$\text{(9.11)} \qquad \mathfrak{G}_2 \{\alpha_i \to i\diamond \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\text{(10.11)} \qquad \mathfrak{G}_3 \left\{ \begin{array}{l} \diamond| \to m\diamond \\ \diamond \to \quad . \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} (1 \\ (2 \end{array}$$

Имеет место

$$\text{(11.11)} \quad \mathfrak{G}_1(\eta_1 \ldots \eta_v) = \eta_v \ldots \eta_1 \quad (\eta_i \in A \cup \{\diamond, |\}, \ 1 \leqslant i \leqslant v \geqslant 0),$$

т. е. $\mathfrak{G}_1$ является обращающим алгорифмом для алфавита $A \cup \{\diamond, |\}$.

Действительно,

$$\begin{array}{lr} \mathfrak{G}_1 : \eta_1\eta_2 \ldots \eta_{v-1}\eta_v & \\ \vdash \alpha\eta_1\eta_2 \ldots \eta_{v-1}\eta_v & [(8.11)\ (5] \\ \vdash \alpha\beta\eta_1\eta_2 \ldots \eta_{v-1}\eta_v & (2 \\ \models \alpha\eta_2 \ldots \eta_{v-1}\eta_v\beta\eta_1 & (1 \\ \models \alpha\beta\eta_v\beta\eta_{v-1} \cdots \beta\eta_2\beta\eta_1 & (2, 1 \\ \models \eta_v\eta_{v-1} \cdots \eta_2\eta_1\alpha & (3 \\ \vdash \cdot\, \eta_v\eta_{v-1} \cdots \eta_2\eta_1, & (4 \end{array}$$

т. е.

$$\mathfrak{G}_1 : \eta_1 \ldots \eta_v \models \cdot \eta_v \cdots \eta_1,$$

что дает равенство (11. 11).

Кроме того, для любого слова $V$ [(2. 11)] имеем

$$(12.11) \qquad \mathfrak{G}_2(V) = k_1 \diamondsuit k_2 \diamondsuit \ldots k_v \diamondsuit \qquad [(9.11),\ (2.11)]$$

и для любых чисел $k_1, \ldots, k_v \geqslant 0$ $(v > 0)$

$$(13.11) \qquad \mathfrak{G}_3(k_1 \diamondsuit k_2 \diamondsuit \ldots k_v \diamondsuit) = \sum_{i=1}^{v} k_i m^{i-1},$$

так как

$$\mathfrak{G}_3 : k_1 \diamondsuit k_2 \diamondsuit k_3 \diamondsuit \ldots k_v \diamondsuit$$

$$\models (k_1 + k_2 m) \diamondsuit \diamondsuit k_3 \diamondsuit \ldots k_v \diamondsuit \qquad [(10.11)\ (1]$$

$$\models (k_1 + k_2 m + k_3 m^2) \diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit \ldots k_v \diamondsuit \qquad (1$$

$$\models (k_1 + k_2 m + k_3 m^2 + \ldots + k_v m^{v-1}) \diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit \ldots \diamondsuit \qquad (1$$

$$\models (k_1 + k_2 m + k_3 m^2 + \ldots + k_v m^{v-1}) \urcorner, \qquad (2$$

т. е.

$$\mathfrak{G}_3 : k_1 \diamondsuit \ldots k_v \diamondsuit \models \sum_{i=1}^{v} k_i m^{i-1} \urcorner,$$

откуда следует (13. 11).

Наконец, из

$$\mathfrak{G}_1 : \Lambda \vdash \alpha \vdash \cdot \Lambda, \qquad [(8.11)]$$

$$\mathfrak{G}_2 : \Lambda \urcorner, \qquad [(9.11)]$$

$$\mathfrak{G}_3 : \Lambda \urcorner \qquad [(10.11)]$$

следует, что

$$(14.11) \qquad \mathfrak{G}_1(\Lambda) = \mathfrak{G}_2(\Lambda) = \mathfrak{G}_3(\Lambda) = \Lambda.$$

Утверждаем, что нормальный алгорифм

$$(15.11) \qquad \mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_3 \circ \mathfrak{G}_2 \circ \mathfrak{G}_1) \qquad [(8.11),\ (9.11),\ (10.11)]$$

является искомым алгорифмом арифметизации.

Действительно, $\mathfrak{G}$ есть алгорифм над $\mathrm{A}_1$ и $\mathfrak{G}$ удовлетворяет (6. 11), так как для любого непустого слова $V$ в $\mathrm{A}$

$$\mathfrak{G}(V) \simeq \mathfrak{G}(\alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_v}) \qquad [(2.11)]$$

$$\simeq \mathfrak{G}_3(\mathfrak{G}_2(\mathfrak{G}_1(\alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_v}))) \qquad [(15.11),\ (1.4)]$$

$$\simeq \mathfrak{G}_3(\mathfrak{G}_2(\alpha_{k_v} \ldots \alpha_{k_1})) \qquad [(11.11)]$$

$$\simeq \mathfrak{G}_3(k_v \diamondsuit \cdots k_1 \diamondsuit) \qquad [(12.11)]$$

$$= \sum_{i=1}^{v} k_{v-i+1} m^{i-1} \qquad [(13.11)]$$

$$= \sum_{i=1}^{v} k_i m^{v-i}$$

$$= \gamma_1(V) \qquad [(3.11)]$$

и для пустого слова $V = \Lambda$

$$\mathfrak{G}(V) \simeq \mathfrak{G}(\Lambda)$$

$$\simeq \mathfrak{G}_3(\mathfrak{G}_2(\mathfrak{G}_1(\Lambda))) \qquad [(15.11),\ (1.4)]$$

$$= \Lambda \qquad [(14.11)]$$

$$= \gamma_1(\Lambda) \qquad [(4.11)]$$

$$= \gamma_1(V).$$

Для построения $\mathfrak{G}^{-1}$ строим в $\mathrm{A}_1$ вспомогательные нормальные алгорифмы $\mathfrak{G}_4$ и $\mathfrak{G}_5$ со схемами

(16.11)
$$\mathfrak{G}_4 \begin{cases} \diamondsuit m \rightarrow \alpha_m \\ \diamondsuit (m-1) \rightarrow \alpha_{m-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \diamondsuit | \rightarrow \alpha_1 \\ \diamondsuit \rightarrow \quad , \end{cases}$$

(17.11)
$$\mathfrak{G}_5 \begin{cases} \beta m \rightarrow |\beta & (1 \\ \alpha m \rightarrow \alpha\beta m & (2 \\ \beta \rightarrow \diamondsuit & (3 \\ \alpha \rightarrow \cdot \diamondsuit & (4 \\ \rightarrow \alpha\quad . & (5 \end{cases}$$

Пусть $k_1, \ldots, k_v$ $(v > 0)$ — числа, меньшие $m$: $0 \leqslant k_i < m$ $(1 \leqslant i \leqslant v)$, и не все равные нулю. Обозначим через $V$ слово, номером которого в арифметизации $\gamma_1$ является число

(18.11)
$$t = \sum_{i=1}^{v} k_i m^{v-i}.$$

Слово $V$ непустое и удовлетворяет (2.11) и (3.11).

Тогда, как легко видеть,

(19.11)
$$\mathfrak{G}_4(\diamondsuit k_1 \diamondsuit k_2 \ldots \diamondsuit k_v) = V. \qquad [(16.11)]$$

Докажем, что, кроме того,

(20.11) $$\mathfrak{S}_5(t) = \diamond k_1 \diamond k_2 \dots \diamond k_v.$$

Действительно, если ввести обозначения

(21.11) $$d_j = \sum_{i=1}^{v-j} k_i m^{v-j-i} \quad (j = 0,\ 1, \dots, v-1),$$

(22.11) $$D_j = \alpha d_j \beta k_{v-j+1} \beta k_{v-j+2} \dots \beta k_{v-j+j} \quad (j = 1, \dots, v-1),$$

то

(23.11) $$d_0 = t, \qquad [(21.11),\ (18.11)]$$

(24.11) $$d_{v-1} = k_1 \qquad [(21.11),\ (18.11)]$$

и

(25.11) $$d_j = m d_{j+1} + k_{v-j} \quad (j = 0,\ 1, \dots, v-2). \qquad [(21.11)]$$

Кроме того,

(26.11) $$\mathfrak{S}_5 : t \models D_1,$$

(27.11) $$\mathfrak{S}_5 : D_1 \models D_{v-1},$$

(28.11) $$\mathfrak{S}_5 : D_{v-1} \models \cdot \diamond k_1 \diamond k_2 \dots \diamond k_v.$$

Докажем последние три формулы, имея в виду, что

(29.11) $$d_j \geqslant m \quad (j = 0, \dots, v-2) \qquad [(21.11),\ (18.11)]$$

(30.11) $$k_j < m \quad (j = 1, \dots, v).$$

Находим

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_5 :\ & t \\
& = d_0 && [(23.11)] \\
& \vdash \alpha d_0 && [(17.11)\ (5] \\
& \vdash \alpha\beta d_0 && [(17.11)\ (2] \\
& \models \alpha d_1 \beta k_v && [(17.11)\ (1,\ (25.11),\ (29.11)] \\
& = D_1, && [(22.11)]
\end{aligned}$$

т. е. имеет место (26.11).

Пусть $1 \leqslant j < v-1$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_5 :\ & D_j \\
& = \alpha d_j \beta k_{v-j+1} \beta \dots \beta k_v && [(22.11)] \\
& \vdash \alpha\beta d_j \beta k_{v-j+1} \beta \dots \beta k_v && [(17.11)\ (2,\ (29.11),\ (30.11)]
\end{aligned}$$

$$\models \alpha d_{j+1} \beta k_{v-j} \beta k_{v-j+1} \beta \ldots \beta k_v \qquad [(17.11)\ (1,\ (29.11),\ (30.11),\ (25.11)]$$
$$= D_{j+1}, \qquad [(22.11)]$$

т. е.

(31.11) $\mathfrak{G}_5 : D_j \models D_{j+1} \ (j = 1, \ldots, v-2).$

Теперь $(v-1)$-кратным применением (31.11) убеждаемся, что имеет место (27.11).

Наконец,

$$\mathfrak{G}_5 : D_{v-1}$$
$$= \alpha d_{v-1} \beta k_2 \ldots \beta k_v \qquad [(22.11)]$$
$$= \alpha k_1 \beta k_2 \ldots \beta k_v \qquad [(24.11)]$$
$$\models \alpha k_1 \diamondsuit k_2 \ldots \diamondsuit k_v \qquad [(17.11)\ (3]$$
$$\vdash \cdot \diamondsuit k_1 \diamondsuit k_2 \ldots \diamondsuit k_v, \qquad (4$$

т. е. имеет место (28.11).

Из (26.11), (27.11) и (28.11) следует

$$\mathfrak{G}_5 : t \models \cdot \diamondsuit k_1 \diamondsuit k_2 \ldots \diamondsuit k_v,$$

что и дает равенство (20.11).

Утверждаем, что искомым является нормальный алгорифм

(32.11) $\mathfrak{G}^{-1} = (\mathfrak{G}_4 \circ \mathfrak{G}_5).$ [(16.11), (17.11)]

Действительно, во-первых $\mathfrak{G}^{-1}$ есть алгорифм над А. Во-вторых, если

(33.11) $\gamma_1(V) = t > 0$ ($V$ в А)

и для числа $t$ имеет место (18.11), то

$$\mathfrak{G}^{-1}(\gamma_1(V)) \simeq \mathfrak{G}^{-1}(t) \qquad [(33.11)]$$
$$\simeq \mathfrak{G}_4(\mathfrak{G}_5(t)) \qquad [(32.11),\ (1.4)]$$
$$\simeq \mathfrak{G}_4(\diamondsuit k_1 \diamondsuit k_2 \ldots \diamondsuit k_v) \qquad [(20.11)$$
$$= V, \qquad [(19.11)$$

т. е. $\mathfrak{G}^{-1}$ [(32.11)] удовлетворяет (7.11).

Если же

$$\gamma_1(V) = \Lambda,$$

то

$$\mathfrak{G}^{-1}(\gamma_1(V)) \simeq \mathfrak{G}^{-1}(\Lambda)$$
$$\simeq \mathfrak{G}_4(\mathfrak{G}_5(\Lambda))$$

$$\simeq \mathfrak{S}_4(\Diamond) \qquad [(17.11)]$$

$$= \Lambda \qquad [(16.11)]$$

и равенство (7. 11) снова удовлетворено.

## § 12. Эквивалентность нормальных и рекурсивных алгорифмов

Приступим теперь к доказательству теоремы (X. 2).

Пусть дан алфавит А [(1. 11)] и арифметизация $\gamma_1$ (§ 11) слов в А. Пусть дан некоторый рекурсивный алгорифм $\mathfrak{R}$ над алфавитом А. Тогда [(IX. 2)] существует ЧРФ $\rho_1$ такая, что для слов $V$ в А

$$\rho_1(\gamma_1(V)) \simeq \gamma_1(\mathfrak{R}(V)). \qquad [(2.2)] \tag{1.12}$$

В силу теоремы (III. 2) существует нормальный алгорифм $\mathfrak{M}_1$ над алфавитом $A_1$ такой, что

$$\mathfrak{M}_1(x) \simeq \rho_1(x). \tag{2.12}$$

Построим нормальный алгорифм

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{S}^{-1} \circ \mathfrak{M}_1 \circ \mathfrak{S}). \qquad [(7.11),\ (35.11),\ (6.11)] \tag{3.12}$$

Теорема (X. 2) будет доказана, если мы докажем условное равенство

$$\mathfrak{R}(V) \simeq \mathfrak{M}(V) \qquad (V \text{ в } A). \tag{4.12}$$

Но это равенство следует из

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(V) &\simeq \mathfrak{S}^{-1}(\mathfrak{M}_1(\mathfrak{S}(V)) && [(36.11),\ (1.4)] \\ &\simeq \mathfrak{S}^{-1}(\mathfrak{M}_1(\gamma_1(V))) && [(6.11)] \\ &\simeq \mathfrak{S}^{-1}(\rho_1(\gamma_1(V))) && [(35.11)] \\ &\simeq \mathfrak{S}^{-1}(\gamma_1(\mathfrak{R}(V))) && (34.11)] \\ &\simeq \mathfrak{R}(V). && [(7.11)] \end{aligned}$$

Докажем теорему (XI. 2).

Пусть дан некоторый нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_1$ над алфавитом А [(1. 11)], не выводящий из алфавита А.

Построим нормальный алгорифм

$$\mathfrak{A}_2 = (\mathfrak{S} \circ \mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{S}^{-1}). \qquad [(6.11),\ (7.11)] \tag{5.12}$$

Алгорифм $\mathfrak{A}_2$ есть нормальный алгорифм над алфавитом чисел Ч, так как $\mathfrak{S}$ есть алгорифм над алфавитом $A_1$ [(5. 11)]. Легко видеть, что $\mathfrak{A}_2$ является нормальным арифметическим алгорифмом, т. е. если он применим к числу, то он перерабатывает число в число же. Другими словами, он осуществляет некоторую алгорифмическую функцию. Но тогда в силу теоремы (IV. 2) существует ЧРФ $\alpha_2(x)$ такая, что

$$\alpha_2(x) \simeq \mathfrak{A}_2(x). \tag{6.12}$$

Обозначим, с другой стороны, через $\mathfrak{R}_2$ рекурсивный алгорифм над алфавитом А, осуществляемый функцией $\alpha_2(x)$, т. е. [(IX. 2)] такой, что

$$\alpha_2(\gamma_1(V)) \simeq \gamma_1(\mathfrak{R}_2(V)) \quad (V \text{ в } \mathrm{A}). \tag{7.12}$$

Теорема (XI. 2) будет доказана, если мы докажем условное равенство

$$\mathfrak{R}_2(V) \simeq \mathfrak{A}_1(V) \ (V \text{ в } \mathrm{A}).$$

Имеем для $V$ в А:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\mathfrak{R}_2(V)) &\simeq \alpha_2(\gamma_1(V)) && [(7.12)] \\ &\simeq \mathfrak{A}_2(\gamma_1(V)) && [(6.12)] \\ &\simeq \mathfrak{G}(\mathfrak{A}_1(\mathfrak{G}^{-1}(\gamma_1(V)))) && [(5.12),\ (1.4)] \\ &\simeq \mathfrak{G}(\mathfrak{A}_1(V)) && [(7.11)] \\ &\simeq \gamma_1(\mathfrak{A}_1(V)), && [(6.11)] \end{aligned}$$

а из

$$\gamma_1(\mathfrak{R}_2(V)) \simeq \gamma_1(\mathfrak{A}_1(V))$$

следует в силу VII. 2 (2)

$$\mathfrak{R}_2(V) \simeq \mathfrak{A}_1(V) \quad (V \text{ в } \mathrm{A}),$$

что и требовалось доказать.

Еще раз отметим, что арифметизация $\gamma_1$, для которой доказаны теоремы (X. 2) и (XI. 2), принципиально ничем не выделяется среди других арифметизаций, осуществляемых нормальными алгорифмами.

## Литература


1. Детловс В. К. Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции. ДАН СССР, **90**, 723—725 (1953).
2. Марков А. А. О некоторых неразрешимых проблемах, касающихся матриц. ДАН СССР, **57**, 539—542 (1947).
3. Марков А. А. Теория алгорифмов. Тр. Матем. инст. им В. А. Стеклова, XXXVIII, 176—189 (1951).
4. Марков А. А. О неразрешимых алгорифмических проблемах. Матем. сб., **31**, 34—42 (1952).
5. Марков А. А. Теория алгорифмов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, XLII (1954).

6. Нагорный Н. М. О минимальном алфавите алгорифмов над данным алфавитом. См. настоящий сборник, стр. 66—74.
7. Ackermann W. Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. Math. Ann., **99**, 118—133 (1928).
8. Church A. An unsolvable problem of elementary number theory. Amer. Journ. Math., **58**, 345—363 (1936).
9. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte Math. u.Physik, **38**, 173—198 (1931).
10. Gödel K. On undecidable propositions of formal mathematical systems. Notes of lectures at the Institute for Advanced Study (1934).
11. Herbrand J. Sur la non-contradiction de l'arithmétique, Journ. reine u. angew. Math., **166**, 1—8 (1931).
12. Hilbert D. und P. Bernays. Grundlagen der Mathematik, Bd. 1. Berlin (1934).
13. Kleene S. C. General recursive functions of natural numbers. Math. Ann., **112**, 727—742 (1936).
14. Kleene S. C. λ-definability and recursiveness. Duke Math. Journ., **2**, 340—353 (1936).
15. Kleene S. C. A note on recursive functions. Bull. Amer. Math. Soc., **42**, 544—546 (1936).
16. Kleene S. C. On notation for ordinal numbers. Journ. Symb. Logic, **3**, 150—155 (1938).
17. Kleene S. C. Recursive predicates and quantifiers. Trans. Amer. Math. Soc., **53**, 41—73 (1943).
18. Nielsen J. Die Gruppe der dreidimensionalen Gittertransformationen. Kgl. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd., **5** : 12, 3—29 (1924).
19. Péter R. Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktionen. Math. Ann., **110**, 612—632 (1934).
20. Péter R. Rekursive Funktionen, Akad. Verl., Budapest (1951). Имеется русский перевод: Петер Р. Рекурсивные функции. ИИЛ, М. (1954).
21. Post E. L. Finite combinatory processes — formulation I. Journ. Symb. Logic, **1**, 103—105 (1936).
22. Robinson R. M. Primitive recursive functions. Bull. Amer. Math. Soc., **53**, 925—942 (1947).
23. Skolem Th. Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. Vid. Skr., I, Mat.-Natw. Kl., **6**, 3—38 (1923).
24. Turing A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. Lond. Math. Soc., **42**, 230—265 (1937).
25. Turing A. M. Computability and λ-definability. Journ. Symb. Logic, **2**, 153—163 (1937).