А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

том I
выпуск 6 Руководитель А.И. Мальцев 1963 г.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАШИН ТЬЮРИНГА (машины Минского)

Я.М. Барздинь

§ I. Введение. Постановка задач

K - ленточными машинами Минского (К-ЛММ) будем называть особый вид машин Тьюринга. Их особенность будет заключаться в следующем. К-ЛММ состоит из управляющего элемента (пусть $q_1, q_2, \dots, q_n$ - его состояния) и из k односторонних лент. Каждой ленте соответствует своя считывающая головка. Предполагается, что на лентах никакие символы не пишутся (ни перед началом работы, ни во время работы). Поэтому ленты можно представить как числовые оси. Пусть в какой-нибудь момент времени управляющий элемент находится в состоянии q_i , j -ая $(j=1,2,\dots,k)$ - считывающая головка - находится на расстоянии x_j от начала ленты. Последовательность вида $\langle q_i, x_1, x_2, \dots, x_k\rangle$ назовем конфигурацией машины в данный момент.

Пусть $\langle q_i', x_1', x_2', \dots, x_k'\rangle$ - конфигурация машины в непосредственно следующий момент. Тогда для машины Минского (ММ) предполагается, что q_i' и разности $x_j - x_j'$ $(j=1,2,\dots,k)$ могут зависеть только от q_i и от того, которые из x_j были равны нулю. Это означает, что считывающие головки ММ "чувствуют" только, находятся ли они в самом начале ленты, или нет. Не ограничивая общности, предположим, что $|x_j - x_j'| \leq 1$. Числа в такой машине кодируются расстоянием считывающих головок до начала соответствующих лент. Будем рассматривать только функции от натурального аргумента, принимающие натуральные значения. При вычислении некоторой такой функции от аргумента x головка первой ленты ставится на расстояние x от начала, а остальные головки - в начале лент. После остановки машины результат вычисления (т.е. значение функции) считывается на заранее выбранной ленте как расстояние считывающей головки до начала ленты. Не ограничивая общности,всегда будем считать, что в момент остановки машины на остальных лентах головки находятся в начале.

Ламбек [I] показал (только в других терминах), что для любой вычислимой функции $f(x)$ можно построить такую машину Минского, которая вычисляет эту функцию. В работе Ламбека оценки для числа лент таких машин не даются.

Минский [2] показал, что при некоторой специальной кодировке значений аргумента и значений функции любую вычислимую функцию можно вычислить уже на 2-ЛММ. Например, если аргумент x закодирован в виде $m(x) = 3^{2^x}$ и $y = f(x)$ – вычислимая функция, то существует такая 2-ЛММ, которая вычисляет $m(y) = 3^{2^y}$. Как заметил Б.А.Трахтенброт, вместо кодировки Минского можно пользоваться более простой кодировкой, например $\tau(x) = 2^x$. Тогда 2-ЛММ будет вычислять $\tau(y) = 2^y$.

Из результата Минского вытекает, что любая вычислимая функция $f(x)$ вычислима на 3-ЛММ.

Работа Минского оставляет открытым следующий вопрос: вычислима ли любая вычислимая функция на 2-ЛММ, если не пользоваться специальными кодировками значений аргумента и значений функции (т.е. кодировками, отличными от кодирования этих значений расстоянием считывающих головок до начала лент).

В настоящей заметке исследуются свойства 2-ЛММ. Из этих свойств вытекает отрицательный ответ на поставленный вопрос.

В § 6 рассматриваются операторы, в которых используются некоторые простые операции. Эти операторы вычисляют такие же функции, как соответствующие машины Минского, но в отличие от этих машин, данные операторы работают только с одним промежуточным результатом.

§ 2. Геометрическая интерпретация. Формулировка теоремы

Для облегчения изложения, следуя Н.В.Белякину, каждой 2-ЛММ сопоставим некоторую координатную систему Oxy. Тогда, если в какой-нибудь момент времени головка на первой ленте находится на расстоянии x от начала и головка на второй ленте на расстоянии y от начала, то будем считать, что в этот момент машина находится в точке $A(x, y)$ данной координатной системы.

При работе машины x и y вообще будут меняться. Согласно нашей интерпретации это означает, что машина будет переходить из одних точек в другие, описывая некоторую "траекторию", лежащую в первом квадранте целочисленной плоскости. При этом начальная точка траектории расположена на оси Ox (ее абсцисса есть значение аргумента), а конечная точка на оси Oy (ее ордината есть значение функции).

Пусть AB - какой-нибудь кусок траектории, где начальная точка A этого куска лежит на одной координатной оси, конечная точка B - на другой оси, а точки между A и B не лежат на координатных осях. Тогда легко видеть, что если точка A достаточно далеко от начала координат, то, начиная с некоторого места этой траектории, состояния машины (под состояниями машины здесь и в дальнейшем будем понимать состояния управляющего элемента) будут периодически повторяться. Также легко видеть, что в течение каждого такого периода повторения состояний машина будет передвигаться на определенное целочисленное расстояние в направлении оси, на которой лежит точка B . Эти свойства в дальнейшем будут неоднократно использованы.

Пусть в какой-нибудь момент времени машина находится в точке $A(x,y)$ и имеет состояние q . Тогда будем говорить, что машина в этот момент находится в конфигурации $\langle q, A(x,y)\rangle$.

Последовательность чисел вида $x, x+\omega, \ldots, x+m\omega, \ldots$ будем называть сеткой с шагом ω . Будем говорить, что функция $f(x)$ линейна на этой сетке, если

$$f(x+m\omega) = f(x) + m\varphi,$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, а φ - постоянная.

Теперь сформулируем основную теорему.

ТЕОРЕМА I. Если функция $f(x)$ принимает бесконечное множество значений и если она вычислима на 2-ЛММ, то существует такая сетка, на которой эта функция линейна.

Доказательство этой теоремы будет дано в § 4.

§ 3. Леммы

Будем говорить, что машина в каком-нибудь процессе вычисления заходит в область $\mathcal{V}$, если в этом процессе появляется такая конфигурация $\langle q, A\rangle$, что $A \in \mathcal{V}$.

Пусть в координатной системе 2-ЛММ дана область $\mathcal{U}$, содержащая только конечное число точек с натуральными координатами. Тогда имеет место следующая лемма.

ЛЕММА I. Если 2-ЛММ вычисляет функцию $f(x)$, принимающую бесконечное множество значений, то существует бесконечно много таких значений аргумента, что при вычислении соответствующих им значений функции машина не заходит в область $\mathcal{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дальнейшее поведение машины полностью определяется конфигурацией $\langle q, A \rangle$, в которой она находится в данный момент. Это означает, что и результат вычисления однозначно определяется конфигурацией $\langle q, A \rangle$. Поскольку различных конфигураций вида $\langle q, A \rangle$, где $A \in \mathcal{U}$, имеется лишь конечное число, а функция $f(x)$ по предположению принимает бесконечное множество значений, то отсюда следует наше утверждение.

Примечание. Легко видеть, что аналогичная лемма справедлива и для произвольной К-ЛММ.

При вычислении $f(x^0)$ машина, начиная с начальной конфигурации, пробегает некоторую последовательность конфигураций так, что каждому моменту времени соответствует своя конфигурация из этой последовательности. Для дальнейшего выделим из всей этой последовательности некоторую специальную подпоследовательность следующим образом:

I-й член этой подпоследовательности - начальная конфигурация $\langle q^0, A(x^0, 0)\rangle$; обозначим ее $\langle q^0, x^0\rangle$,

2-й член - конфигурация $\langle q^1, A(0\, x^1)\rangle$, соответствующая первому прикосновению машины к оси Oy ; обозначим ее $\langle q^1, x^1\rangle$;

3-й член - конфигурация $\langle q^2, A(x^2, 0)\rangle$, соответствующая первому прикосновению машины к оси Ox после конфигурации $\langle q^1, x^1\rangle$; обозначим её $\langle q^2, x^2\rangle$;

4-й член - конфигурация $\langle q^3, A(0, x^3)\rangle$, соответствующая первому прикосновению машины к оси Oy после конфигурации $\langle q^2, x^2\rangle$; обозначим её $\langle q^3, x^3\rangle$;

. . . .

p -ый член-конфигурация $\langle q^p, A(0, x^p)\rangle$, соответствующая остановке машины (вначале мы договорились, что машина будет останавливаться на оси Oy); обозначим её $\langle q^p, x^p\rangle$.

Эти конфигурации

$$\langle q^0, x^0\rangle, \langle q^1, x^1\rangle, \ldots, \langle q^r, x^r\rangle, \ldots, \langle q^p, x^p\rangle$$

будем называть главными конфигурациями. Из определения видно, что при конфигурации $\langle q^r, x^r\rangle$, где r -четное, машина находится на оси Ox, а при конфигурации $\langle q^r, x^r\rangle$, где r -нечетное, - на оси Oy.

Переход машины из одной главной конфигурации $\langle q, x\rangle$ к непосредственно следующей другой главной конфигурации $\langle q', x'\rangle$ назовем колебанием и обозначим следующим образом:

$$\langle q, x\rangle \longrightarrow \langle q', x'\rangle.$$

Аналогично будем применять обозначение

$$\langle q, x\rangle \xrightarrow{k} \langle q^{(k)}, x^{(k)}\rangle,$$

когда существует последовательность K колебаний

$$\langle q,x\rangle \longrightarrow \langle q^{(1)}, x^{(1)}\rangle \longrightarrow \ldots \longrightarrow \langle q^{(K)}, x^{(K)}\rangle .$$

Для дальнейшего в качестве области U (см.лемму I) выберем ломанную с вершинами $B(0,n)$, $O(0,0)$, $C(n,0)$ (n - число состояний данной 2-ЛММ), содержащую $2n+1$ точку с натуральными координатами. Пусть машина вычисляет функцию $f(x)$, принимающую бесконечное множество значений; тогда, согласно лемме I, существует бесконечное множество D таких значений аргумента, что при вычислении $f(x)$, где $x \in D$, машина не будет заходить в ломаную BOC. В дальнейшем везде под множеством D будем понимать именно это множество.

Пусть $\overset{\circ}{x} \in D$. Рассмотрим первое колебание при вычислении $f(x^\circ)$: $\langle q^\circ, x^\circ\rangle \longrightarrow \langle q^1, x^1\rangle$. В этом колебании наступит такой момент, когда машина последний раз из какой-нибудь точки, например, $A(x_1^\circ, 0)$, покинет ось Ox перед посещением оси Oy. Согласно выбору x° должно быть $x_1^\circ > n$. Поэтому во время колебания состояния начнут периодически повторяться, причем это повторение будет продолжаться до конца данного колебания. Так как машина должна достичь оси Oy, не заходя в ломанную BOC, то в течение каждого такого периода повторения состояний машина будет передвигаться влево и вверх на определенные целочисленные расстояния, которые обозначим соответственно через α и β. Пусть на оси Ox дана сетка:

$$x^\circ, x^\circ+\alpha, x^\circ+2\alpha, \ldots, x^\circ+m\alpha, \ldots$$

Тогда имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 2.

$$\langle q^\circ, x^\circ+m\alpha\rangle \longrightarrow \langle q', x'_1+m\beta\rangle, \quad m=0,1,2,\ldots$$

Доказательство леммы следует из того, что в колебаниях $\langle q^\circ, x^\circ+m\alpha\rangle \longrightarrow \langle q^1, (x^\circ+m\alpha)^1\rangle$ через одинаковое число шагов наступит такой момент, начиная с которого состояния будут периодически повторяться с такими же α и β, как и при колебании

$$\langle q^\circ, x^\circ\rangle \longrightarrow \langle q^1, x^1\rangle .$$

Рассмотрим теперь произвольную главную конфигурацию $\langle q,x\rangle$ и колебание $\langle q,x\rangle \longrightarrow \langle q', x'\rangle$ (без захода в ломанную BOC). Тогда, как и прежде, наступит такой момент, когда состояния начнут периодически повторяться. В течение каждого такого периода:

I) если $\langle q,x\rangle$ на оси Ox, то машина будет передвигаться влево и вверх на определенные расстояния, которые обозначим соответственно через ε_q и δ_q;

2) если $\langle q,x\rangle$ на оси Oy, то машина будет передвигаться вниз и вправо на определенные расстояния, которые также обозначим через ε_q и δ_q.

ε_q и δ_q вообще зависят от состояния q.

Предположим, что на координатной оси, соответствующей конфигурации $\langle q, x \rangle$, даны главные конфигурации следующего вида:

$$\langle q, x \rangle, \langle q, x+\varepsilon_q \rangle, \ldots, \langle q, x+m\varepsilon_q \rangle, \ldots$$

Состояния для всех этих конфигураций одни и те же, а координаты образуют сетку с шагом ε_q.

Теперь легко видеть, что лемму 2 можно обобщить следующим образом.

ЛЕММА 2а.

$$\langle q, x+m\varepsilon_q \rangle \longrightarrow \langle q', x'+m\delta_q \rangle, \quad m=0,1,2,\ldots$$

§ 4. Доказательство теоремы. Следствие

Сначала отметим, что под $\alpha, \beta, \varepsilon$ и δ будем понимать то же самое, что и выше.

Выберем $x^0 \in D$. Пусть $\langle q^0, x^0 \rangle, \langle q', x' \rangle, \ldots, \langle q^p, x^p \rangle$ – последовательность всех главных конфигураций, возникающих при вычислении $f(x^0)$. Покажем, что для любого $r \leq p$ существуют такие ω_r и η_r, что

$$\langle q^0, x^0+m\omega_r \rangle \xrightarrow{r} \langle q^r, x^r+m\eta_r \rangle, \quad m=0,1,2,\ldots \tag{I}$$

Так как q^p -заключительное состояние, то это будет означать, что на сетке $x^0, x^0+\omega_p, x^0+2\omega_p, \ldots, x^0+m\omega_p, \ldots$ функция $f(x)$ линейна, что и утверждается в теореме.

Доказательство проведем индукцией по r.

Пусть $r=1$. Выбирая $\omega_1=\alpha$ и $\eta_1=\beta$, по лемме I, сразу получаем (I).

Предположим, что для $r=k$ имеет место (I), т.е.

$$\langle q^0, x^0+m\omega_k \rangle \xrightarrow{k} \langle q^k, x^k+m\eta_k \rangle, \quad m=0,1,2,\ldots$$

Тогда для $r=k+1$ выберем $\omega_{k+1}=\varepsilon_{q^k}\omega_k$ и проверим, будет ли иметь место (I).

Из индуктивного предположения для $r=k$ вытекает, что

$$\langle q^0, x^0+m\varepsilon_{q^k}\omega_k \rangle \xrightarrow{k} \langle q^k, x^k+m\varepsilon_{q^k}\eta_k \rangle, \quad m=0,1,2,\ldots$$

Применяя лемму 2а к $\langle q^k, x^k+m\varepsilon_{q^k}\eta_k \rangle$, получаем:

$$\langle q^k, x^k+m\varepsilon_{q^k}\eta_k \rangle \longrightarrow \langle q^{k+1}, x^{k+1}+m\eta_k\delta_{q^k} \rangle, \quad m=0,1,2,\ldots$$

Но это означает, что если $\omega_{k+1}=\varepsilon_{q^k}\omega_k$ и $\eta_{k+1}=\delta_{q^k}\eta_k$, то

$$\langle q^0 x^0+m\omega_{k+1} \rangle \xrightarrow{k+1} \langle q^{k+1}; x^0+m\eta_{k+1} \rangle, \quad m=0,1,2,\ldots$$

Этим мы показали, что для $r \leq p$ имеет место (I).

СЛЕДСТВИЕ. С у щ е с т в у ю т в ы ч и с л и м ы е ф у н к ц и и $f(x)$, к о т о р ы е н е в ы ч и с л и м ы н а 2 - Л М М.

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть, например, функцию $f(x)=x^2$, которая вычислима и на любой сетке не является линейной.

§ 5. Теорема о функциях, принимающих только конечное множество значений

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f(x)$ принимает только конечное множество значений и вычислима на 2-ЛММ, которая имеет n состояний, то число различных значений этой функции не больше $(2n+1)n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства теоремы I следует, что если существует хоть один такой x^0, что при вычислении $f(x^0)$ машина не заходит в ломанную BOC, то существует сетка $x^0, x^0+\omega, \ldots, x^0+m\omega, \ldots$, на которой функция линейна. Но это означает, что функция $f(x)$ неограничена. Но так как наша функция ограничена (принимает только конечное множество значений), то для любого x при вычислении $f(x)$ машина должна заходить в BOC. Это означает, что любое значение нашей функции $f(x)$ определяется конфигурацией $\langle q, A\rangle$, где A принадлежит ломанной BOC. Так как различных конфигураций такого вида может быть только $(2n+1)n$, то отсюда следует утверждение теоремы 2.

§ 6. О вычислимости с одним промежуточным результатом

На К-ЛММ в общем случае проводятся вычисления с k промежуточными результатами только при помощи операций "прибавить I" и "отнять I". Теперь увеличим запас применяемых операций и рассмотрим проблему вычисления с одним промежуточным результатом. С этой целью определим некоторый оператор (будем его называть M-оператором), который работает с одним промежуточным результатом.

M-оператор - это конечный пронумерованный список команд следующих 5 типов:

а) $\boxed{+C \mid i}$,

что означает: к результату применения предыдущей команды (предыдущей не по нумерации, а по применению) прибавить C (C здесь и в дальнейшем - фиксированное натуральное число для каждой команды), а потом перейти к команде i;

б) $\boxed{\times C \mid i}$

со значением, аналогичным предыдущей команде, только вместо "прибавить C " здесь - "умножить на C ";

в) | $-C$ | i | j |,

что означает: от результата применения предыдущей команды отнять C, если это возможно в области натуральных чисел, и перейти к команде i ; если отнять C невозможно, то перейти к команде j (результатом применения этой команды тогда будет результат применения предыдущей команды);

г) | $:C$ | i | j |,

что означает: результат применения предыдущей команды делить на C, если это возможно в области натуральных чисел, и перейти к команде i ; если деление невозможно, - перейти к команде j (результатом применения этой команды тогда будет результат применения предыдущей команды);

д) | стоп |,

что означает: остановить вычисление (результатом применения этой команды будет результат применения предыдущей команды).

Номера команд, которые содержатся в определении команд, т.е. i и j , будем называть указаниями.

Будем считать, что M -оператор начинает вычислять, сперва применяя I-ую команду согласно начальной нумерации команд. Под результатом применения предыдущей команды в данном случае будем понимать сам аргумент x .

Вычисления заканчиваются, когда достигается команда "стоп". Под результатом применения M - оператора к x будем понимать результат применения последней команды, т.е. "стоп".

ТЕОРЕМА 3. *Для того, чтобы функция $f(x)$ была вычислима на 2-ЛММ, необходимо и достаточно, чтобы она была вычислима некоторым M -оператором.*

Так как достаточность условий теоремы является почти очевидной, то на её доказательстве не будем останавливаться.

Дадим общий план доказательства необходимости.

Предположим, что данная 2-ЛММ вычисляет функцию $f(x)$.

Введем понятие квазиглавных конфигураций. Под квазиглавными конфигурациями будем понимать все конфигурации [x] как вида $\langle q, A(\xi, 0)\rangle$, так и вида $\langle q, A(0, \xi)\rangle$, для которых характерно то, что при них машина находится или на оси Ox или на оси Oy . Квазиглавные конфигурации первого вида будем обозначать

---

[x] А не только те из них, которые раньше были названы главными конфигурациями (см. § 3).

следующим образом: $\langle q, \xi\ \theta_1 \rangle$, квазиглавные конфигурации второго вида - $\langle q, \xi, \theta_2 \rangle$.

Каждой квазиглавной конфигурации вида $\langle q_i, \xi\ , \theta \rangle$, где q_i -фиксирован, ξ - произвольный и θ - фиксирован $(\theta \in \{\theta_1, \theta_2\})$, сопоставим теперь некоторый M - оператор,который обозначим через $M q_i \theta$.

Пусть $\langle q_i', \xi', \theta' \rangle$ - квазиглавная конфигурация, непосредственно следующая за $\langle q_i, \xi, \theta \rangle$. Тогда оператор $M q_i \theta$ будем строить так, чтобы он перерабатывал ξ в ξ', а потом подал указание перейти к оператору $M q_i' \theta'$. Идея построения такого оператора заключается в следующем. Оператор $M q_i \theta$ можно строить как оператор, состоящий из трех более простых операторов, которые обозначим соответственно через $M^1 q_i \theta$, $M^2 q_i \theta$ и $M^3 q_i \theta$. Сначала применяется оператор $M^1 q_i \theta$. Его задача - определить, является ли $\xi > n$ или нет. Если $\xi > n$, то он подает указание перейти к оператору $M^2 q_i \theta$, в противном случае,- к оператору $M^3 q_i \theta$. Оператор $M^1 q_i \theta$ имеет следующий вид:

$\mathcal{I}_1)$ $\boxed{-(n+1)}\boxed{\mathcal{I}_2}\boxed{\ \ r\ \ }$ r - номер первой команды оператора $M^3 q_i \theta$;

$\mathcal{I}_2)$ $\boxed{+(n+1)}\boxed{\ \ell\ \ }$ ℓ - номер первой команды оператора $M^2 q_i \theta$.

Задача операторов $M^2 q_i \theta$ и $M^3 q_i \theta$ - переработать ξ в ξ' и перейти к оператору $M q_i' \theta'$. В возможности построения таких операторов нетрудно убедиться. Отметим только, что при построении оператора $M^2 q_i \theta$ надо различать два случая: I) $\theta' = \theta$ и 2) $\theta' \neq \theta$.

В первом случае оператор $M^2 q_i \theta$ состоит из одной команды вида:

$$\boxed{+C}\boxed{\ j\ },$$

где j - номер первой команды оператора $M q_i' \theta'$, а $C = \xi' - \xi$ (легко видеть, что C не зависит от ξ , если $\xi > n$).

Во втором случае построение оператора $M^2 q_i \theta$ более сложное. Но так как в данном случае (так как $\xi > n$) при переходе из $\langle q_i, \xi, \theta \rangle$ в $\langle q_i', \xi', \theta' \rangle$ состояния машины, начиная с некоторого момента (не зависимого от ξ), будут периодически повторяться и будут иметь определенные ε_{q_i} и δ_{q_i} (см. пояснение перед леммой 2а), оператор $M^2 q_i \theta$ можно легко построить.

Все операторы $M q_i \theta$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ \theta = \theta_1, \theta_2)$ вместе образуют M -оператор, который вычисляет ту же функцию $f(x)$, что и данная 2-ЛММ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. M' -оператором будем называть любой M - оператор, в котором используются только команды вида δ, r и g .

Из работы Минского 2 вытекает: если $y = f(x)$ - вычислимая функция, то существует такой M' -оператор, который $m(x) = 3^{2^x}$ перерабатывает в $m(y) = 3^{2^y}$.

Из полученных нами результатов легко видеть, что 2-ЛММ (значит, и M -оператор) не может вычислять функцию $m(x) = 3^{2^x}$.

Наконец, определим еще γ -оператор, состоящий из команд следующих типов:

а′) | c^z | i | ,

что означает: вычислить c^z (где c -натуральное число, а z - результат применения предыдущей команды) и перейти к команде i ;

б′) | $\log_c z$ | i | j | ,

что означает: вычислить $\log_c z$ (здесь c и z означает то же, что и в a'), если это возможно в области натуральных чисел, и перейти к команде i , в противном случае, перейти к команде j, и результатом применения этой команды тогда считать результат применения предыдущей команды;

в′) | стоп |

γ - оператор, так же как M -оператор, работает с одним промежуточным результатом.

Учитывая то, что $cx = \log_a [(a^c)^x]$ и $x : c = \log_a [(a^{\frac{1}{c}})^x]$, легко видеть, что все функции, которые может вычислять M' - оператор, может вычислять и γ - оператор.

Но γ - оператор еще может вычислять функции : $m(x) = 3^{2^x}$ и $y = \log_2 \log_3 m$. Отсюда, из вышеупомянутого результата Минского, заключаем, что γ -оператор может вычислять любую вычислимую функцию от одного аргумента.

В заключение автор выражает благодарность Б.А.Трахтенброту и Н.В.Белякину.

Поступила в редакцию 25.XII.1962г.

Литература

1. Lambek Ioachim. How to program an infinite abacus. Canad. Math.Bull., 1961,4, № 3.

2. Minsky, Marvin L.Recursive unsolvability of Post's problem of "Tag" and other topics in theory of Turing machines. Annals of Mathem., 1961,74, № 3.