Трансфинитные числа

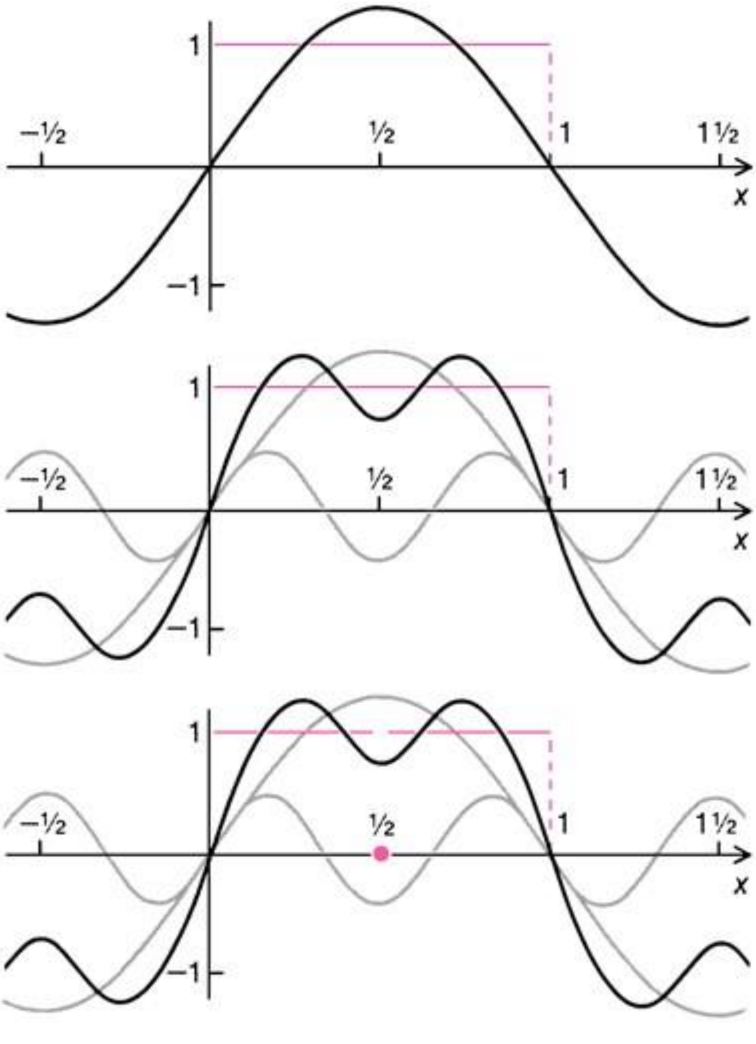
Насколько велико бесконечное множество? Кантор доказал существование иерархии бесконечностей, каждая из которых «больше» предшествующей. Его теория множеств — один из краеугольных камней математики.

Природа бесконечности всегда была предметом спора. О том, что она интересовала ещё древних мыслителей, свидетельствуют знаменитые парадоксы Зенона Элейского, который доказывал, что движение мыслить невозможно, поскольку движущийся объект проходит бесконечное число точек в конечное время. Разработанное Ньютоном в XVII в. исчисление бесконечно малых позволило по-новому подойти к описанию движения, однако математически строгая формулировка инфинитезимальных идей была предложена лишь спустя два с лишним столетия. Впоследствии проблемы, связанные с бесконечностью, стали рассматриваться в теории множеств, ставшей по существу фундаментом современной математики. Следует отметить, что в ходе своего развития идея бесконечности имела теологический оттенок, порой игравший определённую роль в решении вопроса о приемлемости математических и философских теорий, связанных с понятием бесконечности. Всё сказанное имеет отношение к жизни и деятельности немецкого математика Георга Кантора.

Сущность трудов Кантора хорошо известна: разработав то, что он назвал арифметикой трансфинитных чисел, он придал математическое содержание идее актуальной бесконечности. При этом он заложил основы теории абстрактных множеств и внёс существенный вклад в основание анализа и в изучение континуума вещественных чисел. Самое замечательное достижение Кантора состояло в доказательстве того, что не все бесконечные множества количественно эквивалентны, т.е. имеют одинаковую мощность, а потому их можно сравнивать друг с другом. Например, множество точек прямой и множество всех рациональных чисел являются бесконечными. Кантор сумел доказать, что мощность первого множества превосходит мощность второго. Идеи Кантора оказались столь неожиданными и противоречащими интуиции, что знаменитый французский математик Анри Пуанкаре назвал теорию трансфинитных чисел «болезнью», от которой математика должна когда-нибудь излечиться. Леопольд Кронекер — учитель Кантора и один из самых авторитетных математиков Германии — даже нападал на Кантора лично, называя его «шарлатаном», «ренегатом» и «растлителем молодежи».

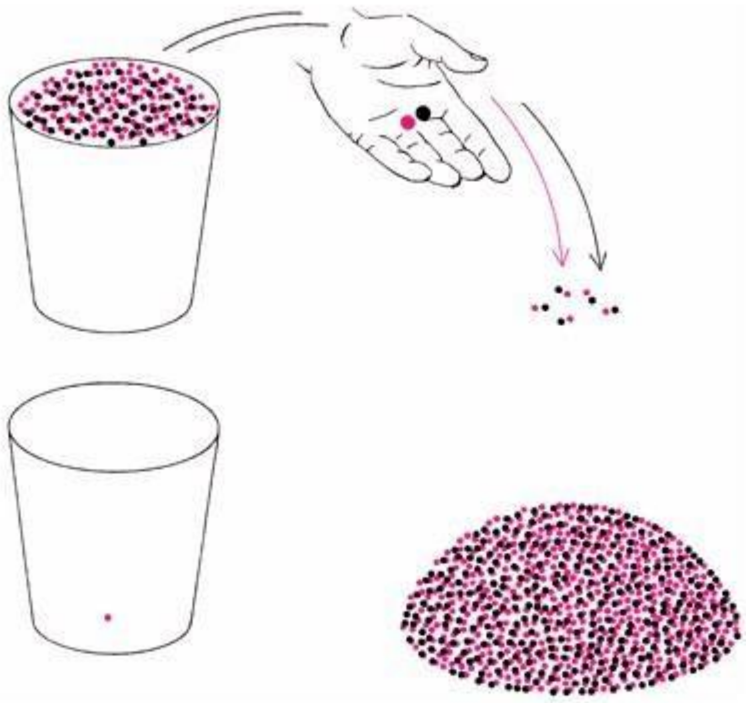
Известно также, что Кантор был подвержен «нервным заболеваниям», участившимся с возрастом и всё более ослаблявшим его. Эти расстройства были, по-видимому, симптомами болезни мозга. Недавнее исследование английского историка математики Айвора ГраттанаГинеса, опиравшегося на анализ истории болезни Кантора, хранящейся в психиатрической лечебнице в Галле (ГДР), говорит о том, что Кантор страдал маниакально-депрессивным психозом. Тем не менее для ранних биографов Кантора характерно стремление представить учёного, пытавшегося защитить свою сложную теорию, но всё более подверженного длительным нервным расстройствам, несчастной жертвой гонений со стороны современников.

Такие представления искажают истину, сводя к тривиальности действительные интеллектуальные устремления непредвзято мыслящих противников канторовской теории. Они также умаляют силу и широту защиты Кантором своих идей. Сначала он воздерживался от введения трансфинитных чисел, считая, что идею актуальной бесконечности нельзя сформулировать непротиворечиво, а потому ей не место в строгой математике. Однако, по его собственному свидетельству, он вскоре преодолел своё «предубеждение» в отношении трансфинитных чисел, ибо понял, что без них нельзя построить теорию бесконечных множеств. Собственные первоначальные сомнения позволили Кантору предвосхитить оппозицию с разных сторон и вооружиться как философскими и теологическими, так и математическими аргументами. Более того, отстаивая свою теорию, он сумел придать идеям, лежащим в её основе, значительную силу. В 1870 г. Кантор доказал, что если функция непрерывна всюду на интервале, то её представление тригонометрическим рядом единственно. Его следующий шаг состоял в ослаблении требования непрерывности функции всюду на интервале. Предположим, например, что график аппроксимируемой функции представляет собой прямую, параллельную оси *x*, за исключением точки *x* = ½, в которой функция принимает значение 0 вместо 1. Кантор показал, что если условие сходимости в точке *x* = ½ и нарушается, то всё равно существует единственный тригонометрический ряд, который сходится к этой функции в остальных точках. То есть другого тригонометрического ряда, который мог бы аппроксимировать эту функцию, не существует. Далее Кантор легко распространил свой результат на функции, имеющие любое конечное число точек разрыва, которые он назвал исключительными точками.

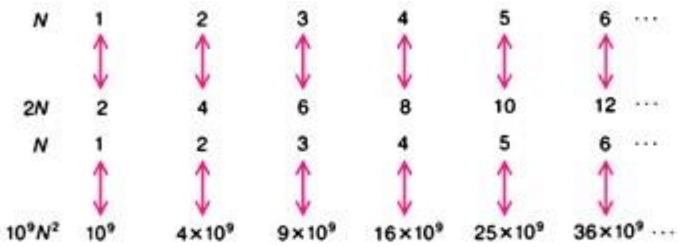


Основную трудность в теории действительных чисел представляют такие числа, как π и √2, не являющиеся рациональными. (Рациональное число — это такое число, которое можно выразить в виде частного двух целых чисел. Ещё в античности было известно, что √2, √3, √5 и многие другие корни являются иррациональными.) Так как правомерность рациональных чисел не вызывала сомнений, Кантор пошёл по пути, указанному Карлом Вейерштрассом, одним из его бывших учителей в Берлинском университете. Кантор предположил, что всякое иррациональное число может быть представлено бесконечной последовательностью рациональных чисел. Например, число √2 можно представить бесконечной последовательностью рациональных чисел 1; 1,4;1,41; ... . В соответствии с этим все иррациональные числа можно понимать как геометрические точки числовой прямой, т.е. так же как и рациональные числа.

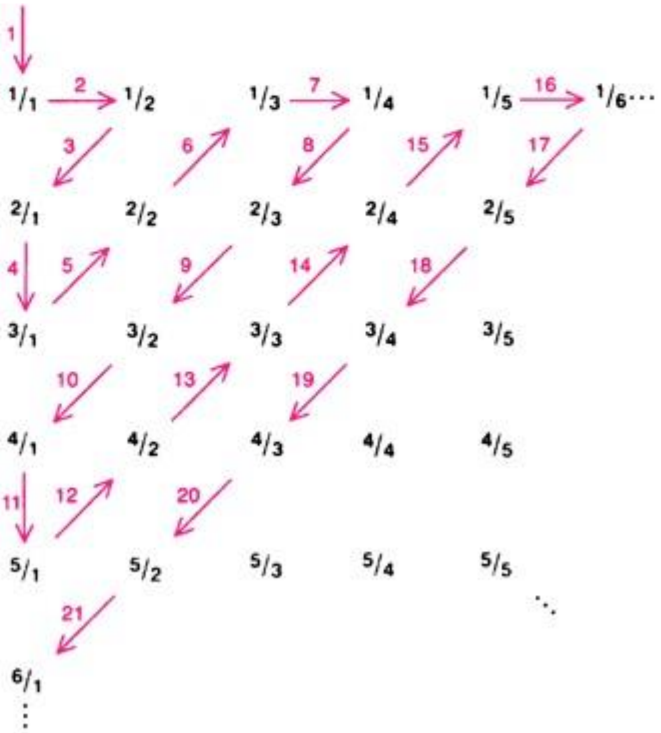
Фактически Кантор воспользовался указанным Галилеем парадоксом и превратил его в средство количественного сравнения бесконечных множеств. Он назвал два множества эквивалентными, если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие. Предположим, у нас имеется ведёрко, заполненное чёрными и цветными шариками. Каким образом можно сравнить количество чёрных и цветных шариков? Простейший способ состоит в извлечении шариков из ведёрка парами, состоящими из чёрного и цветного шариков. Если каждый шарик может быть объединён в пару с шариком другого цвета, то два множества эквивалентны. Если нет, то оставшиеся в ведёрке шарики показывают, каких шариков было больше.



Используя принцип взаимно однозначного соответствия, Кантор показал, что свойство, которое Галилей рассматривал как парадоксальное, фактически является естественным свойством бесконечных множеств. Множество чётных чисел эквивалентно множеству всех целых положительных чисел, чётных и нечётных, вместе взятых, поскольку объединение в пары элементов каждого из этих множеств может быть осуществлено без опущения какихлибо элементов рассматриваемых множеств.



Кантор также предложил оригинальный способ объединения элементов множества всех рациональных чисел в пары с целыми числами [см. нижний рисунок].

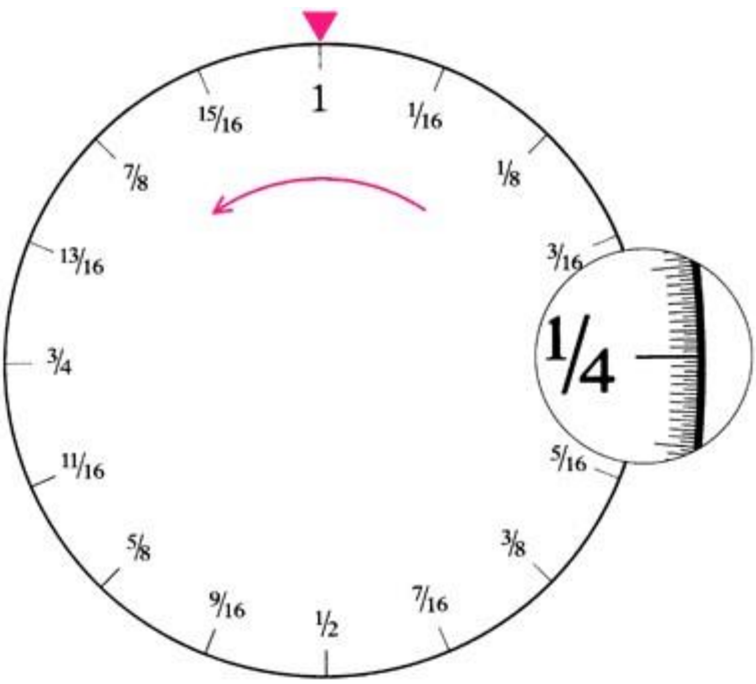


Всякое множество чисел, элементы которого можно расположить один за другим или фактически сосчитать, используя множество целых положительных чисел, Кантор назвал счётным множеством.

При данной плотности рациональных чисел на прямой и относительной «разреженности» целых чисел, может показаться крайне противоречащим интуиции то, что эти два множества оказываются количественно эквивалентными. Однако Кантор пошёл ещё дальше. Он доказал, что взаимно однозначного соответствия между множеством целых чисел и множеством всех точек на прямой, т.е. множеством действительных чисел, быть не может; одним словом, действительные числа образуют несчётное множество. Кантор дал довольно сложное доказательство этого утверждения в своей статье, опубликованной в 1874 г. Я не буду останавливаться на нём, а изложу основную идею гораздо более простого, но более мощного способа доказательства, предложенного им в 1891 г.

1	⟷	$\boxed{.1}$	1	1	1	1	⋯
2	⟷	.3	$\boxed{0}$	1	0	2	⋯
3	⟷	.4	7	$\boxed{7}$	1	2	⋯
4	⟷	.6	0	2	$\boxed{0}$	5	⋯
5	⟷	.6	9	8	9	$\boxed{7}$	⋯
⋮							⋱
		.9	1	1	1	1	⋯

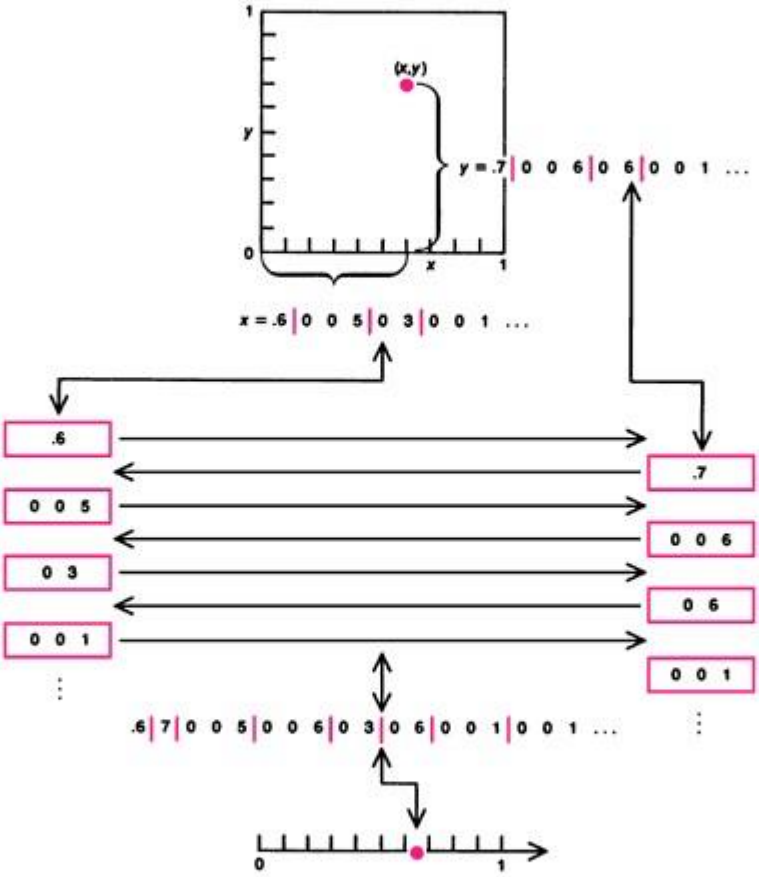
Множество действительных чисел, представленное континуумом точек на прямой, не является счётным. Если бы оно было счётным, то действительные числа, скажем между 0 и 1, можно было бы одно за другим объединить в пары с целыми числами. Всякое действительное число в перечне можно представить бесконечным десятичным разложением (такие бесконечные десятичные дроби, как 0,5000..., представим в виде эквивалентной бесконечной дроби 0,4999...). Каков бы ни был перечень таких десятичных дробей, можно построить новую десятичную дробь, которая определяет некоторое действительное число и не содержится в этом перечне. Для этого на первом месте после запятой пишем 9, если первая цифра десятичного разложения первого действительного числа в перечне равна 1; в противном случае пишем 1. Аналогично изменяем вторую десятичную цифру во втором действительном числе, третью десятичную цифру в третьем и т.д.Построенное десятичное разложение представляет некоторое действительное число, расположенное между 0 и 1, но оно должно отличаться по крайней мере одним десятичным знаком от каждого действительного числа, входящего в перечень. Следовательно, предположение, что действительные числа можно объединить в пары с целыми числами, приводит к противоречию, а потому должно быть отброшено. Это доказательство основано на методе, называемом диагональным.



В августе 1874 г. Кантор женился на Валли Гутман. Супруги провели конец лета в горах Гарца, где они встретились с Дедекиндом. Этот период оказался чрезвычайно плодотворным для Кантора. Несколько раньше в одном из своих писем Дедекинду Кантор писал: «Можно ли сопоставить поверхность (например, квадратную площадку, включая её границы) с отрезком прямой (включающим свои концы) таким образом, чтобы каждой точке поверхности соответствовала одна точка на этом отрезке, и наоборот?» Кантор полагал, что ответ должен быть отрицательным, но это требовало доказательства.

Однако в 1877 г. Кантор сообщает Дедекинду о своём поразительном результате: вопреки мнению, распространённому среди математиков, ему удалось доказать, что взаимно однозначное соответствие между точками прямой и точками плоскости возможно. Доказательство состояло в представлении каждой точки квадрата парой десятичных дробей. Эти десятичные представления «перемешиваются» строго определенным образом, чтобы получить одно десятичное разложение, и эта десятичная дробь сопоставляется с точкой на отрезке прямой. Весь этот процесс обратим [см. рисунок ниже]. Слова Кантора: «Я вижу это, но никак не могу этому поверить!» — говорят о том, насколько этот результат оказался неожиданным для него самого.

Кантор сразу же подготовил рукопись с описанием своего нового открытия, и послал её в журнал Крелле. Работа эта послужила первым поводом для открытых столкновений между её автором и Кронекером. Будучи редактором журнала, Кронекер имел право отказать в публикации любой статьи, работа же Кантора настолько шокировала его, что он не преминул этим правом воспользоваться. Несмотря на то что Кантор представил свою рукопись 12 июля, для подготовки её к публикации ничего не делалось, и она не появилась в журнале в 1877 г. Подозревая вмешательство Кронекера, Кантор пишет Дедекинду письмо, сетуя на неблагоприятное отношение к его рукописи. В письме он говорит также о своём желании забрать её из редакции. Однако Дедекинд, рассказав Кантору о собственном опыте в подобных делах, убедил его подождать, и оказался прав — статья наконец появилась в томе за 1878 г. Однако Кантор был настолько огорчён этим инцидентом, что отказался впредь публиковаться в журнале Крелле.

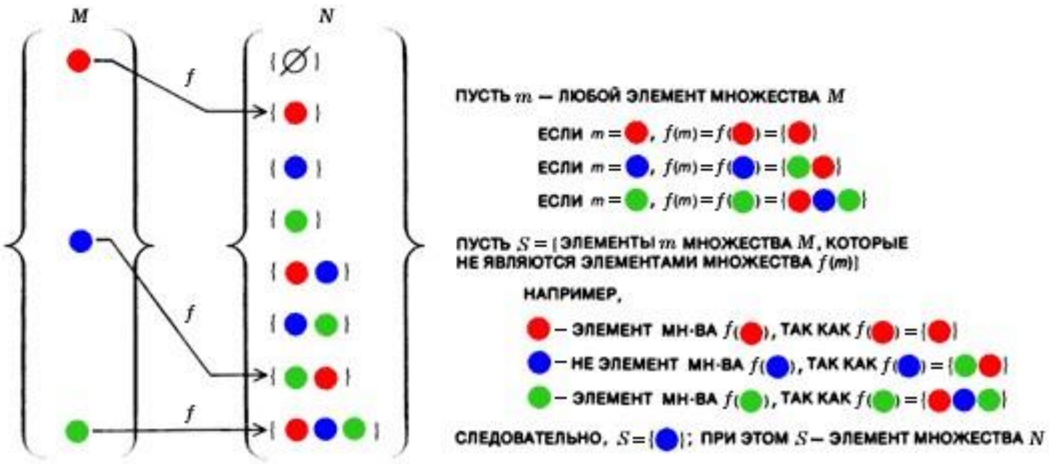


Между точками плоскости и точками прямой можно установить взаимно однозначное соответствие. Каждая точка плоскости представляется парой бесконечных десятичных дробей и эти бесконечные дроби разбиваются на группы. Каждая цифра десятичного разложения, кроме нуля, начинает новую группу. Затем эти группы комбинируются и превращаются в одну бесконечную десятичную дробь, представляющую точку на плоскости. Вся процедура обратима. Аналогичное рассуждение показывает, что число точек любого конечномерного пространства эквивалентно числу точек на линии.

Каким образом можно провести различие, скажем, между ординальными числами ω и ω+1. Различие определяется порядком элементов в множествах, которым соответствуют ω и ω+1. Например, множество натуральных чисел в их известной последовательности (1, 2, 3, ...) имеет ординальное число ω, представляющее всю последовательность натуральных чисел в её обычном порядке. Однако множество всех натуральных чисел в перестроенной последовательности (2, 3, 4, ..., 1) или же множество всех натуральных чисел в последовательности (10, 30, 40, ..., 20) имеет ординальное число ω+1. Другими словами, это различие зависит от порядка следования элементов в последовательности и от размещения бесконечно длинных пробелов, помеченных многоточием. Если в конце последовательности находится одно число, то ординальным числом новой последовательности будет ω+1. Последовательность (2, 4, 6, ..., 1, 3, 5, ...) имеет два бесконечных пробела, и её ординальное число равноω+ω или 2ω. Отметим, что все эти множества имеют одно и то же число элементов, т.е. между самими этими множествами, а также между каждым из этих множеств и множеством целых положительных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие. Поэтому их кардинальные числа одинаковы, хотя их ординальные числа различны.

Определив трансфинитные ординальные числа, Кантор приступил к описанию их арифметических свойств. Между трансфинитными и обычными числами следует провести важное различие в отношении свойства коммутативности для сложения и умножения. Для двух обычных чисел *A* и *B* свойство коммутативности выражает тот факт, что *A*+*B* равно *B*+*A* и *A*×*B* равно *B*×*A*. Однако, что касается трансфинитных чисел, свойство коммутативности уже не может быть гарантировано. Например, ω+2, представляющее последовательность (1, 2, 3, ..., 1, 2), не равно2+ω, представляющему последовательность (1, 2, 1, 2, 3, ...).

Последние значительные работы Кантора по теории множеств опубликованы в 1895 и 1897 гг. В докладе, прочтённом на первом заседании Немецкого математического общества в 1891 г., он доказал, что кардинальное число любого множества меньше кардинального числа множества всех его подмножеств. (Один из способов доказательства представлен на следующем рисунке.)



Бесконечная последовательность множеств, каждое из которых больше предшествующего ему в этой последовательности, может быть построена при рассмотрении всех подмножеств любого заданного множества. Канторовский диагональный метод показывает, что, допустив взаимно однозначное соответствие *f* между множеством *M* и множеством *N* всех его подмножеств, мы можем построить подмножество *S*, не включённое в это однозначное соответствие, каковым бы ни было *f*. Чтобы понять это построение, рассмотрим конечное множество *M*, состоящее из красного, голубого и зелёного кружков. Это множество имеет восемь подмножеств (включая пустое множество Ø). Пусть *S* будет определено как множество всех элементов *m* из *M*, не являющихся членами подмножества *f*(*m*), которым соответствует*m*. Например, *S* содержит только голубой кружок. Ввиду того что *S* является подмножеством множества *M*, и так как по предположению *f* определяет взаимно однозначное соответствие, должен существовать некоторый элемент *a* из *M*, которому соответствует *S*, или, другими словами, для которого *f*(*a*) совпадает с *S*. Элемент *a* либо является элементом из *S*, либо нет. Если *a* — элемент *S*, то он должен быть и элементом множества *f*(*a*), так как *f*(*a*) равно *S*; с другой стороны, если *a*является элементом из *S*, то он не может быть элементом множества

$f(a)$ по определению S. Значит, a не может быть элементом из S. Однако, опять-таки по определению S, если a не является элементом из S, то a должен быть элементом из $f(a)$, а так как $f(a)$ равно S, то a должен быть и элементом из S. Поэтому, каково бы ни было a, предположение, что множество M можно поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством всех его подмножеств, приводит к противоречию, а потому это предположение следует отбросить. Также доказывается, что, даже если множество бесконечно, множество его подмножеств больше первоначального множества. Бесконечная последовательность всё больших бесконечных множеств может быть построена путём образования множества N всех подмножествкакого-либо бесконечного множества M, затем образования множества P всех подмножеств множества N и так далее. В этой последовательности нет наибольшего множества.

Имеется в то же время определённая связь между болезнью Кантора и его научным творчеством. Некоторые документы говорят о том, что болезнь давала ему передышку от повседневных дел, которую он использовал для развития своих математических идей в уединении госпиталя или в спокойной обстановке дома. Возможно, болезнь также усиливала его веру, что идея трансфинитных чисел была внушена ему богом. После длительной госпитализации в 1908 г. он послал письмо одному из друзей в Гёттингене — математику Грейс Чисхольм Юнг, англичанке по происхождению. Как он писал, его маниакальная депрессия была побуждающим фактором: «Благодаря обстоятельствам судьбы, не только не сломившим меня, но фактически придавшим мне внутренней силы и сделавшим меня более счастливым и восприимчивым к радостям жизни, чем я был в последние годы, я оказался далеко от дома, можно сказать, далеко от мира... В этой длительной изоляции интерес к математике, в частности к теории трансфинитных чисел, не угасал во мне».

Последующие поколения могли бы отмести эту философию, взять под подозрение его многочисленные ссылки на Фому Аквинского и на отцов церкви, пересмотреть метафизические заявления и полностью упустить из вида глубоко религиозные корни веры Кантора в абсолютную истинность его теории. Однако указанные обстоятельства сыграли свою роль в его решении не отбрасывать трансфинитные числа. Сопротивление, кажется, даже утвердило его решимость. Стойкость и убеждённость Кантора позволили теории трансфинитных множеств пережить годы сомнений и нападок и в конце концов вырасти в грандиозную революционизирующую силу в математике XX столетия.