

Х·РОДЖЕРС

ТЕОРИЯ  
РЕКУРСИВНЫХ  
ФУНКЦИЙ  
И  
ЭФФЕКТИВНАЯ  
ВЫЧИСЛИМОСТЬ

THEORY  
OF RECURSIVE  
FUNCTIONS  
AND  
EFFECTIVE  
COMPUTABILITY

Hartley Rogers, Jr.

Massachusetts Institute of Technology

McGraw-Hill Book Company  
New York • St. Louis • San Francisco  
Toronto • London • Sydney

1967

Х. Роджерс

ТЕОРИЯ  
РЕКУРСИВНЫХ  
ФУНКЦИЙ  
И  
ЭФФЕКТИВНАЯ  
ВЫЧИСЛИМОСТЬ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

В. А. Душского  
М. И. Кановича  
Е. Ю. Ногиной

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

В. А. Успенского

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1972

## ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга содержит изложение современного состояния теории рекурсивных функций и обзор основных приложений этой теории. В ней прослежено развитие теории рекурсивных функций, начиная с ее зарождения в тридцатых годах и кончая результатами исследований самых последних лет.

Не предлагающая в основной своей части никаких предварительных знаний, кроме знакомства с теоретико-множественной терминологией, книга Роджерса написана хорошим, ясным языком; при этом формальному изложению предпосылаются содержательные рассуждения, разъясняющие природу вводимых понятий или идей построений и доказательств; в ней содержится очень много упражнений.

Книга рассчитана на читателей, интересующихся современными проблемами математической логики и теории алгоритмов. Она доступна аспирантам и студентам старших курсов университетов и пединститутов.

Х. Роджерс

**ТЕОРИЯ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ И ЭФФЕКТИВНАЯ  
ВЫЧИСЛИМОСТЬ**

Редакторы И. А. Маховская, Г. М. Цукерман. Художник Г. Д. Коняхина  
Художественный редактор В. И. Шаповалов Технический редактор Т. А. Максимова  
Сдано в набор 27/VI 1972 г. Подписано к печати 4/XI 1972 г. Бумага кн. журн.  
60×90<sup>1/16</sup>=19,5 бум. л. 39 печ. л. 41,48. Изд. № 1/5265. Цена 3 р. 46 к.  
Зак. 0506

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР», Москва, 1-й Рижский пер., 2  
Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции»  
«Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
г. Москва, К-4, Трехпрудный пер., 9

*Редакция литературы по математическим наукам*

В этой книге систематически излагается общая теория рекурсивных функций, т. е. функций, вычислимых посредством алгоритмов. Изложение опирается на интуитивное представление о вычислимых функциях — подобно тому, как обычные изложения теории функций действительного переменного опираются на интуитивные представления о функциях и множествах. Почти ничего не говорится о способах задания вычислимых функций при помощи тех или иных вычислительных схем или абстрактных автоматов — а потому за пределами изложения остается и вся связанная с такими способами задания тематика: сюда относятся прежде всего вопросы сложности задания и вычисления функций посредством схем и автоматов и возникающие на этой основе классификации (даже понятие примитивнорекурсивной функции, которое нередко кладут в основу теории, едва упоминается в книге). Более неожиданным кажется сознательное исключение из рассмотрения проблематики теории нумераций — теории, одним из пионеров которой был сам автор <sup>1)</sup> и которая весьма близка по стилю ко всему излагаемому материалу; интересующегося этой проблематикой читателя можно отослать к монографиям А. И. Мальцева и Ю. Л. Ершова <sup>2)</sup>.

Зато все остальные разделы общей теории вычислимых функций изложены с энциклопедической полнотой. По широте и полноте охвата книга Роджерса не имеет равных в мировой литературе по вычислимым функциям. Значительная часть теории впервые подана здесь в систематическом виде; изложение сводит в единое целое результаты, имевшиеся лишь в журнальной литературе,

<sup>1)</sup> Rogers H. (Jr.), Gödel numberings of partial recursive functions, *Journ. Symb. Log.*, 1958 (23), 331—341.

<sup>2)</sup> Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, „Наука”, М., 1965 (нумерациям посвящена гл. IV); Ершов Ю. Л., Теория нумераций, часть I, Новосибирск, 1969.

в том числе результаты, полученные непосредственно перед выходом книги в свет.

Вместе с тем для чтения книги — в основной ее части — не требуется никаких специальных знаний. Книга написана с большим педагогическим тактом. Формальному изложению часто предпосылаются содержательные рассуждения, разъясняющие природу вводимых понятий и проводимых построений. Трудность нарастает постепенно — от почти популярных первых шести глав, посвященных основным понятиям, до достаточно тяжелых последних четырех, посвященных иерархиям множеств и функций.

Книга Х. Роджерса может иметь много аспектов использования — это и научная монография, и справочник, и учебник, и задачник (содержащий около 700 упражнений самой различной степени трудности). Она необходима каждому, серьезно интересующемуся теорией вычислимых функций.

B. Успенский

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Э. Пост следующими словами заключил статью, представленную в 1944 г. Американскому математическому обществу: „Если понятие общерекурсивной функции действительно является формальным эквивалентом эффективной вычислимости, то формулировка этого понятия может сыграть в истории дискретной математики роль, уступающую по значению лишь формулировке понятия натурального числа”<sup>1)</sup>.

Эта книга может рассматриваться как своего рода обзор успехов, достигнутых в связи с идеями и надеждами, выраженными в упомянутой статье Поста. Рекурсивные функции изучались целым рядом исследователей и до 1944 г. В частности, важный вклад в этой области был сделан Чёрчем, Клини, Тьюрингом и самим Постом. Хотя статья Поста и затрагивает лишь часть более широкой теории, она составила в данной области эпоху, не только представленными в ней конкретными методами и результатами, но и подчеркиванием естественности исходных концепций.

Высказывание Поста, цитированное выше, носит полемический характер; правомерен вопрос о практической ценности того рода вычислимости, который соответствует общерекурсивным функциям (это обсуждается далее в гл. 1). Тем не менее мы надеемся, что предлагаемая книга является некоторым обоснованием позиции Поста.

Изложение ведется на полуформальном уровне; мы убеждены, что такой подход уместен и плодотворен. Использование полуформальных процедур в теории рекурсивных функций аналогично использованию неполностью формализованных теоретико-множественных методов в других разделах математики. Для ведения исследований в данной области достаточно иметь ясное ощущение

<sup>1)</sup> Post E. L., Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50 (1944), 284—316.

простых первоначальных идей, равно как школьной элементарной алгебры достаточно для исследований в теории чисел.

С 1944 и, в особенности, с 1950 г. благодаря усилиям многочисленных исследователей теория рекурсивных функций бурно развивалась. Разумеется, эта книга не претендует на то, чтобы изложить данную теорию исчерпывающим и окончательным образом. Принятый в ней неформальный и интуитивный подход в ряде случаев оказывается ограничительным. Некоторые важные разделы теории (например, изучение различных собственных подклассов общерекурсивных функций) и некоторые интересные приложения (например, выявление рекурсивно неразрешимых проблем в других областях математики) по своей природе требуют развитого и детального формализма. Существует ряд монографий, восполняющих этот недостаток, и читателю рекомендуется обращаться к ним в случае, когда он заинтересован в более формальном изложении. К числу таких монографий относятся К 1 е е - п е S. C., „Introduction to metamathematics”, D. Van Nostrand Company, Princeton, N.J., 1952. (Русский перевод: К л и - н и С. К., „Введение в метаматематику”, ИЛ, М., 1957. — Перев.) и Davis M., „Computability and unsolvability”, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958. Эти книги могут служить ценным дополнением к нашему изложению; вместе с тем предварительное знакомство с ними не является необходимым.

Книга состоит из 16 глав. В гл. 1 и 2 приводится понятие частичнорекурсивной функции и простые примеры неразрешимых проблем. Главы 3 и 4 содержат краткий обзор идей и методов излагаемой в дальнейшем теории. В гл. 5 вводится целый ряд основных понятий. Главы с 6-й по 10-ю содержат результаты о сводимостях и степенях неразрешимости (Пост в статье 1944 г. придавал особое значение этим понятиям). В гл. 11 излагается теорема о рекурсии, являющаяся одним из основных „инструментов” нашей теории. Главы с 12-й по 16-ю посвящены областям, в которых в настоящее время наиболее интенсивно ведутся исследования. Более детальный обзор книги приведен в гл. 3.

Большинство глав завершается упражнениями. Порядок, в котором следуют упражнения, отвечает последовательности изложения материала в соответствующей главе. Упражнения распадаются на три группы: непомеченные, помеченные светлым

треугольником ( $\Delta$ ) и (изредка) помеченные зачерненным треугольником ( $\blacktriangle$ ). При решении упражнений первой группы достаточно лишь ясного понимания текста. Упражнения второй группы несколько труднее. Что касается упражнений третьей группы, то они либо еще более трудны, либо требуют для своего решения привлечения не излагавшихся еще результатов и методов. Многие упражнения сопровождаются указаниями (светлые и зачерненные треугольники отнесены к упражнениям без указаний). Ряд упражнений, помеченных зачерненным треугольником, обсуждается в последующих разделах книги. Часть материала, дополняющая основное изложение, вынесена в упражнения, на них (хотя и не часто) возможны ссылки.

Мы рекомендуем читателю попытаться проделать все непомеченные или помеченные треугольниками упражнения. Упражнения, к которым имеются указания, следует пытаться решать до ознакомления с этими указаниями. Полезно также (во всех случаях, когда это возможно) самостоятельно доказывать приводимые нами теоремы. Как и в других областях математики, не существует лучшего способа развития интуиции, исследовательских навыков и способности улавливать различие между новыми плодотворными идеями, с одной стороны, и простой, хотя, быть может, и интересной, разработкой старых идей — с другой.

Число исследований по теории рекурсивных функций за последние годы резко увеличилось. Приводимая в этой книге литература далеко не является исчерпывающей. Мы почти не делаем ссылок на работы, выполненные начиная с 1965 г., хотя и излагаем полученные в этот период результаты.

Некоторая часть этой книги составила первоначально предмет курсов и семинаров Массачусетского технологического института. Я в особенности признателен Бертону Дребену и Ноаму Хомскому за постоянную поддержку, а также всем остальным участникам этих курсов и семинаров за разностороннюю помощь и советы. Я также признателен Энн Синглтери, Джеймсу Гейсеру и Лесли Тарпу за помощь при подготовке рукописи и Патрику Фишеру, Карлу Джокушу, Дональду Крейдеру и Уоррену Тейтельману за тщательное прочтение отдельных частей текста.

Неоценимую помощь мне также оказали советы и замечания И. Бар-Хиллела, Д. Боброва, М. Блюма, Ван Хао, Дж. Дентона,

К. Ейтса, К. Кента, Дж. Конгера, В. Куайна, Д. Лакхема, А. Леви, Дж. Лукаса, Т. Мак-Интайра, Т. Мак-Лохлина, Д. Мартина, М. Минского, Я. Московакиса, Д. Натсона, Р. Париха, Д. Парка, Х. Патнама, М. Рабина, Дж. Райса, У. Риттера, Дж. Розенталя, Г. Сакса, К. Спектора, Дж. Стилвелла, Р. Фридберга, Л. Хоудза, К. Шеннона, Дж. Шёнфильда, Дж. Эддисона, Г. Эндерттона, Дж. Юллиана, П. Янга. Целый ряд других моих коллег и студентов оказали мне большую помощь. Все эти лица, как названные, так и неназванные, высказали много идей, но не имели возможности высказать свои критические замечания по поводу окончательного текста.

Я нахожусь в неоплатном научном долгу перед Джеймсом Деккером, Джоном Майхиллом и Норманом Шапиро. Шапиро привлек мое внимание к теории рекурсивных функций. Методы и установки Деккера и Майхилла оказали большое влияние на настоящий труд.

Часть материала данной книги в несколько ином виде была опубликована на mimeографе Массачусетским технологическим институтом в 1957 г. под названием „Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость”, т. I.

X. Роджерс мл.

## ВВЕДЕНИЕ: ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СОГЛАШЕНИЯ ОБ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

Эта книга предназначается для студентов старших курсов и аспирантов первого года обучения. Предполагается знакомство с основной теоретико-множественной терминологией и техникой на уровне университетского курса современной алгебры. В большей части книги не предполагается знакомства читателя с логикой, но оно было бы полезным. Ниже приводятся некоторые обозначения из элементарной логики, используемые нами.

К сожалению, в литературе по теории рекурсивных функций еще не выработаны единые общеупотребительные обозначения и терминология. В данном введении мы предлагаем свой выбор основных обозначений и терминологии.

Крайне необходимо при первом чтении обратить на эту часть особое внимание, а затем уже возвращаться к ней по мере необходимости. Этот труд читателя будет, надеемся, вознагражден ясностью и легкостью в основном тексте.

Большой частью мы будем иметь дело с неотрицательными целыми числами, множествами неотрицательных целых чисел и отображениями неотрицательных целых чисел в неотрицательные целые числа. Если только не оговорено противное, мы используем термин „натуральное число” или просто „число” (number, integer) для обозначения неотрицательного целого числа;  $N$  — множество всех чисел;  $A, B, C, \dots$  (первые прописные буквы латинского алфавита) обозначают подмножества множества  $N$ . Символом  $\emptyset$  обозначаем пустое множество;  $x, y, z, \dots$  (последние строчные буквы латинского алфавита) обозначают элементы множества  $N$ , т. е. числа.

Мы используем следующие теоретико-множественные обозначения:  $A = B$  означает, что  $A$  и  $B$  одинаковы как множества, т. е. состоят из одних и тех же элементов;  $x \in A$  означает, что  $x$  — элемент множества  $A$ . Обозначение  $\{ \mid \}$  указывает на образование множества:  $\{x \mid \dots x \dots \}$  — это множество всех таких  $x$ , что выражение  $\dots x \dots$  верно, когда „ $x$ ” интерпретируется как целое число  $x$ . Тип объектов, из которых формируется множество, указывается видом символа, стоящего перед вертикальной чертой. Так,  $\{x \mid \dots \}$  должно быть множеством чисел.

$A \cup B$  — объединение множеств  $A$  и  $B$ , т. е.  $\{x \mid x \in A \text{ или } x \in B \text{ или и то и другое одновременно}\}$ ;  $A \cap B$  — пересечение множеств  $A$  и  $B$ , т. е.  $\{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ ;  $\bar{A}$  — дополнение к  $A$ , т. е.  $\{x \mid \text{не верно, что } x \in A\}$ ;  $A \subset B$  означает, что  $A$  — подмноже-

ство множества  $B$ , другими словами, для всех  $x$ , если  $x \in A$ , то  $x \in B$ ;  $A \supset B$  означает, что  $B \subset A$ . Множество  $A$  — *собственное подмножество* множества  $B$ , если  $A \subset B$  и не верно, что  $A = B$ . (Так, из  $A \subset B$  и  $B \subset A$  вытекает, что  $A = B$ .)

Иногда будем обозначать конечное множество набором его элементов в любом порядке, заключенным в фигурные скобки. Например,  $\{2, 5, 3\}$  — множество, состоящее из первых трех простых чисел. Иногда и некоторые бесконечные множества мы будем задавать „перечислением” в фигурных скобках. Например,  $\{0, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}$  — множество четных чисел.

Пусть даны  $x$  и  $y$ , тогда  $\langle x, y \rangle$  — *упорядоченная пара*, состоящая из  $x$  и  $y$ , взятых именно в этом порядке. Аналогично,  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  — *упорядоченная  $n$ -ка* (или *кортеж* длины  $n$ ), состоящая из  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , и именно в этом порядке. Через  $A \times B$  обозначим *декартово произведение* множеств  $A$  и  $B$ , т. е.  $\{\langle x, y \rangle \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$ . Аналогично,

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n &= \\ &= \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \text{ и } \dots x_n \in A_n\}. \end{aligned}$$

Декартово произведение множества  $A$  на себя  $n$  раз обозначим через  $A^n$ ;  $P, Q, R$  (прописные латинские буквы из второй половины алфавита) обозначают *отношения* на  $N$ , т. е. подмножества множества  $N^n$  при некотором  $n > 0$ . Если  $R \subset N^n$ , то  $R$  называется  *$n$ -арным*, или  *$n$ -местным, отношением*.

Пусть  $R$  есть  $k$ -местное отношение. Будем говорить, что  $R$  однозначно, если для любого кортежа  $\langle x_1, \dots, x_{k-1} \rangle$  существует не более одного элемента  $z$ , такого, что  $\langle x_1, \dots, x_{k-1}, z \rangle \in R$ . Если  $R$  однозначно, то его *областью определения* назовем  $\{\langle x_1, \dots, x_{k-1} \rangle \mid \text{существует } z, \text{ такое, что } \langle x_1, \dots, x_{k-1}, z \rangle \in R\}$  и обозначим ее через  $\text{Arg } R$ . Очевидно, что однозначное  $k$ -местное отношение можно рассматривать как отображение его области определения в  $N$ .

По этой причине, вместо того чтобы говорить, что  $R$  — однозначное  $k$ -местное отношение, мы будем говорить, что  $R$  — *функция от  $k - 1$  аргументов* или, иногда, что  $R$  — *частичная функция* (здесь слово „частичная” показывает, что область определения функции  $R$  может не совпадать с  $N^{k-1}$ ). Будем использовать  $\varphi, \psi, \dots$  (последние строчные буквы греческого алфавита) для обозначения функций, при этом будем часто использовать обычные функциональные обозначения с этими символами; так,  $\varphi(x, y) = z$  будет означать, что  $\langle x, y, z \rangle \in \varphi$ . Но читатель непременно должен помнить, что функция воспринимается как отношение. (Таким образом, мы отождествляем функцию с ее „графиком“.) Наиболее часто мы будем иметь дело со случаем  $k = 2$ , т. е. функциями одного аргумента, и под *функцией* будем понимать функцию

одного аргумента, если не оговорено противное. Функциональная система обозначений может привести к двусмысленности. Например, высказывание: не верно, что  $\varphi(x) = y$ , можно понимать так: не верно, что  $\langle x, y \rangle \in \varphi$ , а можно понимать так: существует  $z$ , такое, что  $\langle x, z \rangle \in \varphi$ , и не верно, что  $z = y$ . В дальнейшем в таких ситуациях будет всегда ясно, какую из этих возможностей мы имеем в виду. Если  $\varphi$  — функция, то мы скажем, что  $\varphi$  *определенна* (или *сходится*) на  $x$  (иногда мы для краткости будем говорить, что  $\varphi(x)$  *сходится*), если  $x \in \text{Arg } \varphi$ ; в противном случае  $\varphi$  *не определена* (или *расходится*) на  $x$ . (Аналогично для функций от более чем одного аргумента.)

В том случае, когда область определения функции  $k$  аргументов совпадает с  $N^k$ , назовем такую функцию *всюду определенной* (*total*) *функцией*. Мы используем  $f, g, h, \dots$  (строчные латинские буквы ближе к середине алфавита) для обозначения *всюду определенных* функций. Как и раньше,  $f(x) = y$  будет означать, что  $\langle x, y \rangle \in f$ .

Множества подмножества  $N$  либо множества отношений на  $N$  обозначаются через  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$  (первые прописные рукописные буквы).

*Область значений*, или *множество значений*, функции  $\varphi$  от  $k$  аргументов — это множество  $\{z \mid \text{существуют } x_1, \dots, x_k, \text{ такие, что } \langle x_1, \dots, x_k, z \rangle \in \varphi\}$ . Обозначим это множество через  $\text{Val } \varphi$ . Элементы из  $\text{Val } \varphi$  называются *значениями* функции  $\varphi$ . Если  $\varphi(x_1, \dots, x_k) = y$ , то  $y$  называется *значением* функции  $\varphi$ , соответствующим аргументу  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ . Функция есть отображение на  $N$ , если ее область значений совпадает с  $N$ . Функция *взаимно однозначна* (*одно-однозначна*), если для любого  $y$  существует не более одного набора  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ , такого, что  $\varphi(x_1, \dots, x_k) = y$ . Символ  $c_A$  обозначает *характеристическую функцию* множества  $A$ ; следовательно,  $c_A(x) = 1$ , если  $x \in A$ , и  $c_A(x) = 0$ , если не верно, что  $x \in A$ . Иногда множество  $A$  представляется с помощью (неединственной) функции  $f$ , такой, что  $A = \{x \mid f(x) = 0\}$ . Такая функция называется *представляющей функцией* для  $A$ .

Пусть  $[\_\_x\_\_]$  — такое выражение, что при подстановке любого числа вместо „ $x$ ” оно принимает не более одного значения. (Например, выражение „ $x^2 + x$ ” имеет значение для любого числа, в то время как выражение „наименьший простой собственный делитель  $x$ ” имеет значение для чисел, которые не прости и отличны от 1.) Тогда  $\lambda x [\_\_x\_\_]$  обозначает функцию  $\{\langle x, y \rangle \mid [\_\_x\_\_] \text{ имеет значение } y, \text{ когда } „x“ \text{ интерпретируется как число } x\}$ . Это ламбда-обозначения Чёрча для определения функций. Например, пусть даны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , тогда  $\lambda x [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]$  — функция  $\varphi$ , такая, что  $\text{Arg } \varphi = \text{Arg } \varphi_1 \cap \text{Arg } \varphi_2$  и  $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$  для всех  $x$ , принадлежащих  $\text{Arg } \varphi$ . Мы также используем

ламбда-обозначения для функций от  $k$  аргументов, выписывая  $\lambda x_1 x_2 \dots x_k$  вместо  $\lambda x$ .

Если  $\varphi$  и  $\psi$  — две функции, то символом  $\varphi\psi$  обозначается их композиция, т. е. функция  $\{\langle x, y \rangle \mid \text{существует } z, \text{ что } \langle x, z \rangle \in \varphi \text{ и } \langle z, y \rangle \in \psi\}$ . (Обращаем внимание на обратный порядок  $\varphi$  и  $\psi$ , благодаря которому  $\varphi\psi(x)$  можно записать как  $\psi(\varphi(x))$ .) Другие принятые обозначения:  $\psi^{-1} = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in \psi\}$ ;  $\psi(A) = \{y \mid \text{существует } x, \text{ такое, что } x \in A \text{ и } \psi(x) = y\}$ ;  $\psi^{-1}(A) = \{x \mid \text{существует } y, \text{ такое, что } y \in A \text{ и } \psi(x) = y\}$ .

Для бинарных (т. е. 2-арных) отношений термины *транзитивный*, *рефлексивный*, *эквивалентный*, *линейное упорядочение*, *частичное упорядочение* употребляются в обычном смысле (мы их не определяем). Частичное упорядочение иногда будет строгим ( $<$ ), а иногда — нестрогим ( $\leqslant$ ).

Мы используем обычные обозначения и соглашения элементарной логики: „и” будем иногда записывать как „ $\&$ ”; „или” будет использоваться в неразделительном (и/или) смысле и будет иногда записываться как „ $\vee$ ”; „ $\Rightarrow$ ” — сокращенная запись „если, то”; „ $\Leftrightarrow$ ” — сокращенная запись „тогда и только тогда”; „ $\neg$ ” — сокращение для „не” и будет помещаться перед предложением, которое отрицается. Иногда знак „ $\neg$ ” будет комбинироваться с „ $\epsilon$ ” или с „ $=$ ”, в результате чего получаются знаки „ $\notin$ ” или „ $\neq$ ”. Квадратные скобки будут использоваться для группировки предложений со следующими исключениями (вопреки логической, но следуя общематематической практике): „ $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow \dots \Rightarrow (n)$ ” (где  $(1), (2), \dots, (n)$  — предложения) есть сокращенная запись выражения „ $[(1) \Rightarrow (2)] \& [(2) \Rightarrow (3)] \& \dots [((n-1) \Rightarrow (n))]$ ” и „ $(1) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (n)$ ” есть сокращенная запись выражения „ $[(1) \Leftrightarrow (2)] \& [(2) \Leftrightarrow (3)] \& \dots [(n-1) \Leftrightarrow (n))]$ ”. „ $\forall$ ” и „ $\exists$ ” называются соответственно *кванторами общности и существования*: „ $(\forall x)$ ” читается как „для всех  $x$ ”, „ $(\exists x)$ ” читается как „существует  $x$ , такое, что...”. Группы символов, такие, как „ $(\forall x)$ ” и „ $(\exists x)$ ”, называются соответственно *кванторами общности и существования*.

Указанные выше логические символы служат удобными сокращениями обычного математического языка. Например, соотношение  $A \supset B$  можно записать так:  $(\forall x)[x \in B \Rightarrow x \in A]$ ; определение множества  $\text{Arg } \varphi$  можно записать так:  $\{x \mid (\exists y)[\varphi(x) = y]\}$ .  $\aleph_0$  — мощность, или кардинальное число, множества  $N$ ;  $2^N$  — множество всех подмножеств множества  $N$ ; иногда будем обозначать его через  $\mathcal{N}$ ;  $2^{\aleph_0}$  обозначает мощность множества  $2^N$ , т. е. мощность континуума. Через  $\mu x[\dots x\dots]$  обозначается наименьшее число  $x$ , такое, что выражение  $\dots x\dots$  верно, если „ $x$ ” рассматривать как число  $x$ , при условии что такое наименьшее число существует.

Другие общие и специальные обозначения будут вводиться по мере надобности.

Как в логике, так и в теории рекурсивных функций не выработано общей системы обозначений. Наш выбор логических сокращений не является необычным. Выбор обозначений для теории рекурсивных функций наталкивается на некоторые трудности, особенно в исследованиях, охватывающих разнообразные области. В части текущей литературы используются строчные греческие буквы для множеств. Мы не делаем этого, так как почти стандартно их использование для ординалов. Можно отметить, что под *теоретико-числовым предикатом* Клини и другие понимают отношение на  $N$ . Можно также отметить, что некоторые авторы используют  $f, g, \dots$  для обозначения функций вообще, а не только всюду определенных функций и что в значительной части литературы первые строчные буквы греческого алфавита используются для всюду определенных функций.

Формулируя теоремы и леммы, мы будем использовать, если не оговорено противное, обычное математическое соглашение о том, что все свободные переменные (пробегающие числа, множества или отношения) рассматриваются как связанные кванторами общности, стоящими в начале всего выражения.

В процессе доказательства некоторые переменные могут появляться как *универсальные переменные* (universal variables), например: „пусть  $x$  — произвольное число, такое, что...”. Другие переменные могут вводиться как *временные имена* (temporally names), например: „возьмем  $x_0$  — некоторое фиксированное число, большее, чем  $x\dots$ <sup>1</sup>”). Почти всегда мы будем использовать в последнем случае буквы с индексами. (Буквы с индексами могут использоваться и в первом случае, если потребуется достаточно много различных переменных.) Иногда для большей выразительности будут использоваться как временные имена чисел строчные буквы середины латинского алфавита  $i, j, k, m, n, \dots$  с индексами и без индексов. Также для большей выразительности в качестве универсальных переменных для множеств будем использовать последние прописные буквы латинского алфавита  $X, Y, Z$ . В связи с этим мы не всегда будем последовательны, но из контекста всегда ясно, соблюдаем ли мы эти соглашения или отклоняемся от них.

Главы делятся на параграфы. Так, § 7.4 — это четвертый параграф гл. 7. Теоремы нумеруются римскими цифрами, в каждой

<sup>1</sup>) По терминологии элементарной логики *универсальная переменная* — это переменная, вводимая *универсальной спецификацией*, а *временное имя* — это переменная, вводимая *экзистенциональной спецификацией* (см. Саппес [1957]).

главе — своя нумерация. Теорема 7-VI — это шестая теорема в гл. 7. Упражнения нумеруются арабскими цифрами. Упражнение 7-14 — это четырнадцатое упражнение гл. 7.

Если производится ссылка на теорему или упражнение в той же главе, то номер главы может опускаться. Конец доказательства указывается знаком ■.

Ссылки на работы в списке литературы производятся указанием автора и года издания, заключенного в квадратные скобки. Название и выходные данные работы можно найти в списке литературы под фамилией автора и справа от этой даты.

## Глава 1. РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1.1. Неформальное понятие алгоритма	17
§ 1.2. Пример: примитиворекурсивные функции	22
§ 1.3. Экстенсиональность	25
§ 1.4. Диагонализация	27
§ 1.5. Формализация	28
§ 1.6. Основной результат	36
§ 1.7. Тезис Чёрча	38
§ 1.8. Гёдлевы номера, универсальность, $s\text{-}t\text{-}n$ -теорема	39
§ 1.9. Проблема остановки	43
§ 1.10. Рекурсивность	46

### § 1.1. НЕФОРМАЛЬНОЕ ПОНЯТИЕ АЛГОРИТМА

В настоящей главе мы дадим *формальное* (т. е. математически точное) определение *рекурсивной функции*, основного понятия книги. Это один из путей уточнения *неформального* математического понятия функции, вычислимой „с помощью алгоритма“ или „с помощью эффективной процедуры“. Прежде чем приступить к формальному описанию, в этом параграфе мы обсудим некоторые аспекты *неформальных* понятий *алгоритма* и *функции*, *вычислимой посредством алгоритма*, в том виде, как эти понятия встречаются в математике.

Грубо говоря, алгоритм — это детерминированная процедура, которую можно применять к любому элементу некоторого класса символьических *входов* и которая для каждого такого входа дает в конце концов соответствующий символьический *выход*. Примером алгоритма может служить обычная процедура дифференцирования полиномов в элементарном дифференциальном исчислении (термин *исчисление*, несомненно, указывает на алгоритмическую природу этой дисциплины).

В дальнейшем мы ограничимся алгоритмами, которые в качестве выходов выдают натуральные числа в некоторой стандартной записи, например арабскими цифрами, а в качестве входов получают натуральные числа или  $n$ -ки натуральных чисел при фиксированном  $n$  в некоторой стандартной записи. Поэтому для нас алгоритм — это процедура для вычисления *всюду определенной функции*. Как мы увидим, это ограничение (числовыми функциями) при наших задачах не приводит к потере общности. Важно, конечно, отличать понятие *алгоритма*, т. е. процедуры, от понятия *функции, вычислимой алгоритмом*, т. е. отображения, задаваемого процедурой. Одну и ту же функцию можно вычислять с помощью нескольких алгоритмов. Иногда о *всюду определенных функциях, вычислимых алгоритмами*, будем говорить как об *алгоритмических*

всюду определенных функциях<sup>1)</sup>). Вот несколько примеров функций, имеющих общеизвестные алгоритмы (в обычной десятичной системе счисления).

a.  $\lambda x [x\text{-е простое число}]$ . (В качестве алгоритма используется метод решета Эратосфена.) (Используются  $\lambda$ -обозначения Чёрча. Выражение  $f = \lambda x [x\text{-е простое число}]$  означает, что для любого  $x$   $f(x) = [x\text{-е простое число}]$ <sup>2)</sup>.)

b.  $\lambda xy [\text{наибольший общий делитель чисел } x \text{ и } y]$ . (Здесь работает алгоритм Евклида.)

c.  $\lambda x [\text{натуральное число } \leqslant 9, \text{ чья цифровая запись является } x\text{-м десятичным знаком в десятичном разложении числа } \pi = 3,14159\dots]$ . (Любой из ряда общих методов приближений можно взять в качестве алгоритма, например квадратуру единичного круга по правилу Симпсона.)

Разумеется, есть гораздо более простые и известные примеры функций, вычислимых алгоритмами. Вот одна из таких функций.

d.  $\lambda xy [x + y]$ . Такие алгоритмы изучают в элементарной школьной арифметике.

Существенными чертами неформального понятия алгоритма оказываются следующие. Мы опишем их приближенно, на интуитивном уровне.

\*1. Алгоритм задается как набор инструкций конечных размеров. (Любой классический математический алгоритм, например, можно описать конечным набором английских слов.)

\*2. Имеется вычислитель, обычно человек, который умеет обращаться с инструкциями и производить вычисления.

\*3. Имеются возможности для выделения, запоминания и повторения шагов вычисления.

\*4. Пусть  $P$  — набор инструкций (см. \*1),  $L$  — вычислитель из \*2. Тогда  $L$  взаимодействует с  $P$  так, что для любого данного входа вычисление происходит дискретным образом по шагам, без использования аналоговых устройств и соответствующих методов.

\*5.  $L$  взаимодействует с  $P$  так, что вычисление продвигается вперед детерминированно, без обращения к случайным методам или устройствам, например к игральным костям<sup>3)</sup>.

Несмотря на неточную формулировку, практически все математики согласились бы с тем, что определение понятия алгоритма

<sup>1)</sup> Начиная с § 1.5 будет использоваться более широкое понятие *алгоритма*, включающее не всюду определенные процедуры.

<sup>2)</sup> В дальнейшем мы будем без пояснений употреблять понятия и терминологию введения. Дополнительно о  $\lambda$ -обозначениях заметим, что ограничение функций и частичных функций отображениями на неотрицательные числа важно для гл. 1.

<sup>3)</sup> При более точном обсуждении специалист в области философии науки мог бы утверждать, что \*4 влечет за собой \*5. В самом деле, он может спросить, есть ли действительно какое-нибудь различие между \*4 и \*5.

включает пункты \*1—\*5. Читатель заметит аналогию с цифровыми вычислительными машинами: \*1 соответствует *программе машины*, \*2 — ее *логическим элементам* и *вычислительному устройству*, \*3 — ее *памяти*, \*4 — ее *цифровой природе*, \*5 — ее *механической природе*.

Непосредственный подход к определению *формального* аналога понятия алгоритма состоит в том, чтобы, во-первых, определить символические выражения, которые будут приняты в качестве наборов инструкций, входов и выходов (это можно назвать *P-символизмом*), и, во-вторых, определить единым образом, как любые инструкции и вход определяют последующее вычисление и как должен опознаваться выход этого вычисления (это можно назвать *L-P-уточнением*).

Когда мы начинаем поиск полезных *P-символизмов* и *L-P-уточнений*, то признаки \*1—\*5 служат полезным интуитивным руководством. Однако имеются некоторые черты неформального понятия алгоритма, которые менее очевидны, чем \*1—\*5, и по поводу которых не достигнуто окончательного соглашения. Мы кратко обсудим здесь эти черты, формулируя их в виде вопросов и ответов. Позже, после того как мы примем некоторое формальное описание, мы вернемся и посмотрим, как согласуются наши ответы с выбранным формальным описанием. Имеется пять вопросов. Будет видно, что они тесно связаны и касаются роли произвольно больших размеров и произвольно длительных промежутков времени. Первые три вопроса таковы:

\*6. Следует ли фиксировать конечную границу для размера входов?

\*7. Следует ли фиксировать конечную границу для размера набора инструкций?

\*8. Следует ли фиксировать конечную границу для объема „памяти”? (В любом из вопросов \*6, \*7 и \*8 размер можно было бы измерять количеством используемых элементарных символов (или английских слов).)

Большинство математиков согласилось бы с ответом „нет” на вопрос \*6. Они утверждали бы, что общая теория алгоритмов должна изучать вычисления, возможные *в принципе*, не считаясь с практическими ограничениями. По той же причине они согласились бы с ответом „нет” и на вопрос \*7. Однако этот вопрос выдвигает проблему, которая подразумевалась уже в \*6, а именно: какого рода „умственные способности” требуем мы от  $L$ ? Если инструкции будут неограниченными в размере, то не потребуется ли неограниченного „умения” какого-либо рода со стороны  $L$ , чтобы он мог понимать и следовать им? Мы рассмотрим это позже в вопросе \*9.

Вопрос \*8 интересен тем, что у физически существующих вычислительных машин объем памяти ограничен. Сначала можно

предположить, что отрицательные ответы на \*6 и \*7 дают отрицательный ответ на \*8, так как произвольно большие входы и наборы инструкций потребуют для самих себя произвольно большого объема памяти. Однако мы можем считать, что \*8 относится только к той памяти, которая необходима сверх памяти, используемой для запоминания инструкций, входа и выхода. При такой интерпретации вопрос \*8 становится интересным независимо от наших ответов на вопросы \*6 и \*7. Можно представить себе, например, обычную вычислительную машину фиксированных конечных размеров и с фиксированной конечной памятью, у которой инструкции  $P$  размещены на конечной печатной ленте, вводимой в машину, вход подается на второй ленте, которая (в отличие от ленты инструкций) движется только в одном направлении, а выход печатается, цифра за цифрой, на третьей ленте, которая движется тоже в одном направлении. Нетрудно видеть, что ряд простых функций, включая  $\lambda x[2x]$ , можно вычислять на устройстве такого рода<sup>1)</sup>. Однако можно привести довольно убедительное и простое доказательство, что функцию  $\lambda x[x^2]$  нельзя вычислить ни на каком таком устройстве; по мере возрастания входа  $x$  требуется все больше и больше места для „вспомогательной“ работы.

Учитывая это обстоятельство, большинство математиков отвечают „нет“ на любую форму вопроса \*8. Поэтому мы также будем считать „нет“ своим ответом на вопросы \*6, \*7 и \*8.

Комментарии к вопросу \*7 приводят к четвертому вопросу о неформальном понятии алгоритма.

\*9. Следует ли ограничить в каком-нибудь смысле способности или возможности вычислителя  $L$ ?

Представим себе следующую картину: читатель снабжен неограниченным количеством обыкновенной бумаги и карандашем, ему дали две ленты, на каждой из которых написано число, в запись которого входит миллион цифр; требуется применить алгоритм Евклида к этим числам, а результат написать на третьей ленте. После некоторого размышления читатель признает возможным разработку такой системы счета и отсылок, с помощью которой он сможет следить за своей работой и отмечать свое положение на различных стадиях вычисления и с помощью которой он успешно закончит вычисление, располагая достаточным временем. Разумеется, читатель в состоянии создать единую систему, которая будет работать для входов любого размера. С помощью такой системы читатель заменит чрезмерные требования к своим умственным способностям как вычислителя  $L$  дополнительными

<sup>1)</sup> Такие функции называют иногда функциями, вычислимими конечными автоматами (какие именно функции являются вычислимими таким способом, зависит, в частности, от выбора символизма для входов и выходов). См. упр. 2-14.

требованиями к (неограниченной) бумажно-карандашной памяти. Для набора инструкций  $P$  большого размера подобную систему счета можно ввести при условии достаточно разумного устройства и детальности этих инструкций. Такая система должна служить „для запоминания местонахождения“  $L$  в  $P$  во входах, выходах и в вычислениях. Более того, если  $P$ -символизм достаточно гибок, то следует ожидать, что система счета будет в каком-то смысле частью самого  $P$ . Поэтому мы отвечаем „да“ на вопрос \*9.

Позже, когда мы представим и обсудим нашу формализацию, мы увидим, что эти расплывчатые аргументы можно конкретизировать (см. § 1.8). Разумеется, если  $P$ -символизм и вычислительный символизм достаточно подробно описаны, то  $L$  можно ограничить следующим образом (без ограничения общности самого понятия алгоритма): имеются (а) несколько простых канцелярских операций, включая операции написания символов, операции перемещения (за один шаг) вдоль вычисления на один символ  $k$  или от ранее написанных символов, операции перемещения (опять-таки за один шаг) вдоль  $P$  на один символ  $k$  или от ранее рассмотренных символов и операции написания выхода; (б) конечная оперативная память фиксированных размеров, в каждой ячейке которой сохраняются символы, написанные или рассмотренные на предыдущих шагах; (с) фиксированный конечный набор простых правил, согласно которым выбирается следующая операция и однозначно определяется состояние оперативной памяти на следующем шаге в зависимости от теперешнего ее состояния и символа, написанного или исследованного последним. (Это место прояснится после § 1.5 и 1.8.)

Обратимся к последнему и в чем-то более глубокому вопросу, связанному с неформальным понятием алгоритма. Это вопрос, по которому могут быть различные мнения.

\*10. Следует ли каким-либо образом ограничивать число шагов вычисления? В частности, должны ли мы требовать, чтобы число шагов данного вычисления было не больше, чем некоторое число, „легко вычисляемое“ по входу и набору инструкций  $P$ ? Менее формально, следует ли требовать, чтобы мы „заранее“ знали оценку числа шагов, которое потребуется для вычисления?

Вопрос туманный. Тот, кто дает положительный ответ, должен аккуратно определить понятие „легко вычисляемое“. Тем не менее для многих математиков интересен именно такой ответ.

Мы, однако, придерживаемся другой точки зрения, считая, что проще и естественнее накладывать подобные ограничения только в том случае, если они являются следствиями других наших допущений. Таким образом, мы требуем, чтобы вычисление заканчивалось после некоторого конечного числа шагов, но не настаиваем на априорной возможности оценить это число. Как мы увидим, такая позиция в вопросе \*10 окажется согласованной с выбранными нами формализациями. Насколько читатель

может уточнить \*10 и дать утвердительный ответ, не вытекающий из нашей формализации, настолько более узкое, чем у нас, понятие у него получится.

Как мы увидим (теорема XI в § 1.10), наша позиция по отношению к вопросу \*10 существенна. Отсутствие подобных априорных приведенных ограничений является характерной чертой дисциплины, изучаемой в книге.

## § 1.2. ПРИМЕР: ПРИМИТИВНОРЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Наш метод описания класса функций состоит в отборе функций, получаемых *рекурсивными определениями* некоторого рода. Рекурсивное определение функции — это, грубо говоря, определение, в котором значения функции для данных аргументов непосредственно определяются значениями той же функции для „более простых“ аргументов или значениями „более простых“ функций. Понятие „более простой“ следует уточнять выбором формализации — простейшими, как правило, являются все функции-константы. Такой метод формализации удобен для наших целей, так как рекурсивные определения можно рассматривать как алгоритмы.

Рекурсивные определения знакомы математику. Например, функция  $f$ , определяемая соотношениями

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(1) &= 1, \\ f(x+2) &= f(x) + f(x+1), \end{aligned}$$

дает ряд Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (Исследование разностных уравнений связано с проблемой перехода от рекурсивного определения к алгебраическому выражению. Ряд Фибоначчи описывается таким алгебраическим выражением:

$$f(x) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{x+1} - \frac{\sqrt{5}}{5} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{x+1}.$$

*Примитивнорекурсивные функции* — это пример широкого и интересного класса всюду определенных функций, который можно получить подобной формализацией.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Класс *примитивнорекурсивных функций* — это наименьший класс  $\mathcal{C}$  (т. е. пересечение всех классов  $\mathcal{C}$ ) всюду определенных функций, такой, что

- (i) Все функции-константы  $\lambda x_1 x_2 \dots x_k [m]$  содержатся в  $\mathcal{C}$ ,  $1 \leq k, 0 \leq m$ .
- (ii) Функция следования  $\lambda x [x+1]$  содержится в  $\mathcal{C}$ .
- (iii) Все функции выбора  $\lambda x_1 \dots x_k [x_i]$  принадлежат  $\mathcal{C}$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

(iv) Если  $f$  — функция  $k$  переменных из  $\mathcal{C}$  и  $g_1, g_2, \dots, g_k$  — функции  $m$  переменных из  $\mathcal{C}$ , то функция  $\lambda x_1 \dots x_m [f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_k(x_1, \dots, x_m))]$  принадлежит  $\mathcal{C}$ ,  $1 \leq k, m$ .

(v) Если  $h$  — функция  $k+1$  переменных из  $\mathcal{C}$ , а  $g$  — функция  $k-1$  переменных из  $\mathcal{C}$ , то единственная функция  $f$  от  $k$  переменных, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} f(0, x_2, \dots, x_k) &= g(x_2, \dots, x_k), \\ f(y+1, x_2, \dots, x_k) &= h(y, f(y, x_2, \dots, x_k), x_2, \dots, x_k), \end{aligned}$$

принадлежит  $\mathcal{C}$ ,  $1 \leq k$ . (В пункте (v) „функция нуля переменных из  $\mathcal{C}$ “ означает фиксированное натуральное число.)

Непосредственно из определения следует, что произвольная всюду определенная функция  $f$  примитивнорекурсивна тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , такая, что  $f_n = f$  и что для любого  $j \leq n$  или  $f_j$  принадлежит  $\mathcal{C}$  в силу свойств (i), (ii) или (iii), или  $f_j$  получена из некоторых  $f_i$ ,  $i < j$ , согласно пунктам (iv) или (v). (Чтобы доказать это, рассмотрим класс  $\mathcal{D}$  всех функций  $f$ , для которых существуют такие последовательности  $f_1, \dots, f_n$ . Он, очевидно, содержится в любом классе  $\mathcal{C}$ , обладающем свойствами (i) — (v); кроме того,  $\mathcal{D}$  сам обладает свойствами (i) — (v). Следовательно,  $\mathcal{D}$  совпадает с пересечением всех таких  $\mathcal{C}$ .) Если дана такая последовательность для  $f$  вместе с точным описанием, как получена каждая функция  $f_j$  для  $j \leq n$ , то скажем, что дана *схема примитивнорекурсивной функции*  $f$ .

Например, рассмотрим функцию  $f$ , заданную схемой

$f_1 = \lambda x [x]$	по (iii) (функция 1 переменной)
$f_2 = \lambda x [x+1]$	по (ii) (1 переменная)
$f_3 = \lambda x_1 x_2 x_3 [x_2]$	по (iii) (3 переменные)
$f_4 = f_2 f_3$	по (iv) (3 переменные)

$f_5$  удовлетворяет условиям

$f_5(0, x_2) = f_1(x_2)$	
$f_5(y+1, x_2) = f_4(y, f_5(y, x_2), x_2)$	по (v) (2 переменные)
$f = f_6 = f_5(f_1, f_2)$	по (iii) (1 переменная)

Легко проверить, что  $f_6$  — функция  $\lambda x [2x]$  (кстати,  $f_5$  — это  $\lambda xy[x+y]$ ). Поэтому можно заключить, что функция  $\lambda x [2x]$  примитивнорекурсивна.

Схему можно записывать в какой-нибудь стандартной символической форме. Запись схемы можно рассматривать как набор инструкций для эффективного вычисления определяемой функции  $f$ . Например, для подсчета  $f(2)$  в предыдущем примере схема

дает следующее вычисление:

$$\begin{aligned}
 f(2) &= f_6(2) = \\
 &= f_5(f_4(2), f_4(2)) = \\
 &= f_5(2, f_4(2)) = \\
 &= f_5(2, 2) = \\
 &= f_4(1, f_5(1, 2), 2) = \\
 &= f_4(1, f_4(0, f_5(0, 2), 2), 2) = \\
 &= f_4(1, f_4(0, f_4(2, 2), 2)) = \\
 &= f_4(1, f_4(0, 2, 2)) = \\
 &= f_4(1, f_2(f_3(0, 2, 2)), 2) = \\
 &= f_4(1, f_2(2), 2) = \\
 &= f_4(1, 3, 2) = \\
 &= f_2(f_3(1, 3, 2)) = \\
 &= f_2(3) = \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

Поэтому мы рассматриваем точное понятие примитивнорекурсивной функции как частный случай неформального понятия *всюду определенной функции, вычислимой алгоритмом*. Как это согласуется с § 1.1? Вычислитель — это человек (и тем самым определяется *неформально*); тем не менее вычисление определяется схемой настолько просто и однозначно и осуществляется такими явно механическими шагами, что, очевидно, выполняются условия \*1—\*5. Можно выбрать стандартный *P*-символизм для записи схем, а *L-P*-уточнение — это простые правила подстановки, по которым схема и вход определяют вычисление. Заметим мимоходом, что для примитивнорекурсивных функций вопросы \*6—\*8 получают тот же ответ, что и в § 1.1. Так как вычислитель определен неформально, то вопрос \*9 остается неясным. На вопрос \*10, как мы сейчас покажем, можно дать положительный ответ.

Насколько богат класс примитивнорекурсивных функций? Быть может, он включает все алгоритмы и, следовательно, дает точный формальный аналог неформального понятия *всюду определенной функции, вычислимой алгоритмом*? Хотя на первый взгляд правила для построения примитивнорекурсивных функций кажутся ограниченными, можно представить убедительные свидетельства в пользу этого предположения. Можно показать, что практически все *всюду определенные* функции обычной математики примитивнорекурсивны. (Все примеры, пока что упоминавшиеся в этой главе, примитивнорекурсивны.) В книге Петер [1951,

стр. 1—67] имеется много фактов, иллюстрирующих широту понятия примитивной рекурсивности.

К сожалению, можно построить и всюду определенные функции с очевидными алгоритмами, которые не являются примитивнорекурсивными. Одна из них — это функция Аккермана, т. е. функция трех переменных, такая, что

$$f(0, x, y) = y + x,$$

$$f(1, x, y) = y \cdot x,$$

$$f(2, x, y) = y^x,$$

.....

$$\begin{aligned}
 f(z+1, x, y) &= \text{[результат применения к } y \\
 &\quad x - 1 \text{ раз операции } z\text{-го уровня} \\
 &\quad \lambda u v [f(z, u, v)]].
 \end{aligned}$$

Более формальное (и „рекурсивное“) определение для этой функции задается так:

$$f(0, 0, y) = y,$$

$$f(0, x+1, y) = f(0, x, y) + 1,$$

$$f(1, 0, y) = 0,$$

$$f(z+2, 0, y) = 1,$$

$$f(z+1, x+1, y) = f(z, f(z+1, x, y), y).$$

Для этой функции не существует примитивнорекурсивной схемы (Петер [1951, стр. 68]). Более того, как показала Петер, функцию, подобную *f*, можно использовать для получения положительного ответа на вопрос \*10 для примитивнорекурсивных функций (если считать, что „легко вычисляемое“ означает наличие простых определяющих соотношений, подобных написанным выше для *f*).

Так как почти каждый признает, что функция Аккермана — это *всюду определенная функция, вычислимая алгоритмом*, и так как она не примитивнорекурсивна, то мы должны отказаться от мысли, что понятие примитивнорекурсивной функции является точным формальным аналогом неформального понятия *всюду определенной алгоритмической функции*<sup>1)</sup>.

### § 1.3. ЭКСТЕНСИОНАЛЬНОСТЬ

Как отмечалось в § 1.1, необходимо делать различие между понятием *алгоритма* и понятием *алгоритмической функции*<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Возникает естественный вопрос: существует ли *всюду определенная алгоритмическая функция одной переменной, не являющаяся примитивнорекурсивной?* Можно показать, что  $\lambda x [f(x, x, x)]$ , где *f* — функция Аккермана, — такая функция. Другой пример мы построим в § 1.4.

<sup>2)</sup> Заметим, что одна и та же примитивнорекурсивная функция может иметь бесконечно много различных схем, т. е. алгоритмов. Тривиальный способ получения таких схем состоит во введении дополнительных вхождений  $\lambda x [x]$  в данную схему.

Приведем несколько примеров, чтобы подчеркнуть это различие. В частности, определим такую функцию  $g$ , для которой мы можем доказать существование некоторого алгоритма, но не знаем, как построить конкретный алгоритм. Рассмотрим функции  $f$  и  $g$ , определяемые так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если в десятичном разложении } \pi \text{ имеется} \\ & \text{точно } x \text{ цифр } 5, \text{ идущих подряд;} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если в десятичном разложении } \pi \text{ имеется} \\ & \text{по крайней мере } x \text{ цифр } 5, \text{ идущих подряд;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В настоящее время не известно алгоритма для вычисления  $f$ . Более того, может оказаться, что такого алгоритма нет. (Как только будет дана формализация, станет точным понятие *функции, не имеющей алгоритма*. Мы увидим, что такие функции существуют.) В отличие от положения с функцией  $f$  мы знаем, что  $g$  примитивнорекурсивна. Действительно, или  $g$  должна быть константой  $\lambda x [1]$ , или найдется такое  $k$ , что

$$g(x) = 1 \quad \text{для } x \leq k;$$

$$g(x) = 0 \quad \text{для } k < x.$$

В обоих случаях существует примитивнорекурсивная схема (см. упр. 2-1), но никто не знает в настоящее время, как выявить верную схему.

Для построения более простого примера возьмем проблему, не решенную математиками, например проблему Гольдбаха о том, что всякое четное число, большее двух, есть сумма двух простых чисел, и определим функцию  $h$  так:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если проблема решается положительно,} \\ 0, & \text{если проблема решается отрицательно.} \end{cases}$$

Очевидно, что  $h$  постоянна. Следовательно, она примитивнорекурсивна, хотя мы не знаем, как построить верную схему<sup>1)</sup>.

Мы будем иметь дело как с функциями, так и с алгоритмами. Основное внимание будет уделено функциям. По традиционной

<sup>1)</sup> В доказательстве примитивной рекурсивности функций  $g$  и  $h$  используется логический принцип *исключенного третьего*. Подобные неконструктивные методы ограничиваются или отвергаются в различных конструктивных переформулировках математики, подобных тем, которые принадлежат *интуиционалистам*. В этой книге мы допускаем неконструктивные методы; мы используем правила и соглашения классической двузначной логики (как это практикуется в других частях математики); мы говорим, что объект существует, если его существование можно доказать в стандартной теории множеств. Аксиома выбора включается как закон теории множеств.

логической терминологии наше рассмотрение будет экстенсиональным, т. е. мы будем чаще иметь дело с *именуемыми объектами* (таковы функции), чем с объектами, *выступающими как имена* (таковы алгоритмы).

#### § 1.4. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ

В § 1.2 мы указали пример всюду определенной (интуитивно) алгоритмической функции, которая не примитивнорекурсивна. Теперь изложим метод, который применяется для многих формализованных классов алгоритмических функций и который в каждом случае дает алгоритмическую функцию, не попадающую в данный формализованный класс. Мы назовем этот метод *диагонализацией* и продемонстрируем его на примере примитивнорекурсивных функций.

Рассмотрим всевозможные примитивнорекурсивные функции. Нетрудно ввести точный формальный символизм для схем, используя лишь конечное число основных символов. Среди этих символов должны быть функциональный символ, несколько символов для переменных, цифры для индексов, цифры для обычных чисел, скобки, запятая, плюс и знак равенства, несколько специальных символов для констант, функций следования и выбора и специальный символ, чтобы отмечать конец строчки. Любую схему можно представить как конечную цепочку основных символов. Кроме того, существует эффективный (т. е. алгоритмический) тест, который по данной цепочке основных символов определяет, представляет ли она примитивнорекурсивную схему. Таким образом, мы можем последовательно перечислять всевозможные примитивнорекурсивные схемы, исследуя сначала все цепочки длины 1, затем — длины 2 и т. д. Разумеется, можно дать определенную (неформальную) алгоритмическую процедуру перечисления. (Перечисление бесконечно, но каждая схема появляется в некоторый конечный момент.) После этого можно устроить алгоритмическую процедуру, которая будет перечислять только схемы для примитивнорекурсивных функций одной переменной. Пусть  $Q_x$  — это  $(x+1)$ -я схема в таком перечислении. Пусть  $g_x$  — функция, определяемая схемой  $Q_x$ . Определим  $h$  так:

$$h(x) = g_x(x) + 1.$$

Очевидно, что имеется алгоритм для вычисления  $h$ , а именно: для того чтобы получить  $h(x)$  для данного  $x$ , следует порождать список схем до тех пор, пока не получится  $Q_x$ , затем использовать  $Q_x$ , чтобы вычислить  $g_x(x)$ , затем прибавить 1. С другой стороны,  $h$  не может быть примитивнорекурсивной. Если бы это было так, то мы имели бы, что  $h = g_{x_0}$  для некоторого  $x_0$ . Но тогда  $g_{x_0}(x_0) = h(x_0) = g_{x_0}(x_0) + 1$  — противоречие. (Читатель заметит ана-

логию с *диагональным доказательством* Кантора несчетности действительных чисел в классической теории множеств.)

Очевидно, что метод диагонализации применим в любом случае, когда можно эффективно (т. е. алгоритмически) перечислить все наборы инструкций *P*-символизма. На первый взгляд трудно представить себе, как может быть полезной формализация, не допускающая такого эффективного перечисления. Кажется, что метод диагонализации делает сомнительной возможность отыскания формализации понятия алгоритма. Складывается впечатление, что не может существовать одного формализованного класса алгоритмических функций, соответствующего неформальному понятию алгоритмической функции. Быть может, вообще, какие бы *P*-символизм и *L-P*-уточнение мы ни выбирали, можно так дополнить этот символизм до более сильного символизма и это уточнение более сложными „эффективными“ операциями, что получатся новые функции. Даже если мы используем весь английский язык как *P*-символизм, может оказаться, что имеются более сложные операции, которые требуют новых названий. Быть может, наконец, алгоритмические функции образуют несчетный класс и существует целый спектр алгоритмических вычислимостей, покрывающий все функции.

Таковы некоторые из тех проблем (высказанных неточно и неформально), которые предстояло решить на пути поисков удовлетворительной формализации понятий алгоритма и алгоритмической функции. С этими проблемами и столкнулись математики, первыми взявшиеся за эти поиски в 30-х годах, математики, вдохновлявшиеся в своей работе успехами формальной логики и ее методов.

## § 1.5. ФОРМАЛИЗАЦИЯ

Чтобы избежать трудностей, связанных с диагонализацией, мы будем рассматривать наравне с наборами инструкций для всюду определенных функций наборы инструкций и для функций не всюду определенных. Разумеется, может возникнуть ситуация, когда мы будем не в состоянии определять, дает ли набор инструкций всюду определенную функцию или нет. Предположим, например, что мы можем строить такое выражение *P*-символизма, которое содержит инструкцию: „Для того чтобы вычислить  $f(x)$ , просматривайте десятичное разложение числа  $\pi$ , пока не встретите по крайней мере  $x$  подряд идущих цифр 5; если такой ряд цифр встретился, то в качестве выхода выдайте номер места, занимаемого первой цифрой этого ряда“. Или в качестве более простого примера возьмем такой: „Чтобы вычислить  $g(x)$ , перебирайте четные числа, большие двух, пока не появится такое, которое не есть сумма двух простых чисел; если такое число нашлось, то выдайте выход  $g(x) = 0$ “. В этих примерах в отличие от примеров § 1.3,

где использовались неконструктивные определения для специальных функций (но не алгоритмов), мы определяем конкретные вычислительные процессы, но не знаем, дают ли эти процессы всюду определенные функции, т. е. всегда ли они обрываются, давая выход. Единственное, что мы можем утверждать, — это то, что такие процессы дают функции (*частичные функции*). Может случиться, что в разложении числа  $\pi$  имеется восемь подряд идущих цифр 5 и не больше, тогда первый пример даст набор инструкций для частичной функции, область определения которой состоит из первых девяти натуральных чисел. Если проблема Гольдбаха решается положительно, то второй пример дает нигде не определенную функцию; если эта проблема решается отрицательно, то второй пример дает постоянную функцию  $\lambda x [0]$ . В любом случае в каждом примере задаются конкретные вычислительные инструкции, определяющие конкретные функции.

При формализации класса *частичных функций* не возникает осложнений, связанных с диагонализацией. Пусть  $\Psi_x$  — функция, определяемая  $(x + 1)$ -м набором инструкций  $Q_x$ , а  $x_0$  выбрано так, что  $\Psi_{x_0}$  есть функция  $\varphi$ , определяемая такими инструкциями: чтобы вычислить  $\varphi(x)$ , найдите  $Q_x$ , вычисляйте  $\Psi_x(x)$  и, если  $\Psi_x(x)$  вычислится, возьмите  $\Psi_x(x) + 1$  в качестве значения  $\varphi(x)$ . Равенство  $\Psi_{x_0}(x_0) = \varphi(x_0) = \Psi_{x_0}(x_0) + 1$  не дает противоречия, так как  $\varphi(x_0)$  не обязано быть определенным. Остается коварная надежда, что все же удастся провести диагонализацию с помощью эффективного отбора только тех наборов инструкций, которые дают всюду определенные функции; однако, как мы уже отмечали, возможность такого эффективного отбора далеко не очевидна. Более того, если мы хотим избежать диагонализационных неприятностей, то следует добиваться, чтобы алгоритм для такой процедуры отбора был невозможен. (Эти замечания имеют отношение к фундаментальным *теоремам о неполноте* математической логики. Подобный вопрос будет обсуждаться в гл. 2.)

Такой подход с использованием частичных функций был по существу разработан Клини [1936], Чёрчем [1936], Тьюрингом [1936] и другими в 30-х годах. Каждый из них получил формализацию широкого класса функций. Формализации отличались как в основных пунктах, так и в деталях. Однако имелось и общее: *во-первых*, определялся (через *P*-символизм) формальный аналог понятия *алгоритма* (для функций) и, *во-вторых*, как следствие (через *L-P*-уточнение) определялся аналог понятия *функции (частичной функции)*, *вычислимой алгоритмом*<sup>1</sup>), <sup>2</sup>).

<sup>1</sup>) Практически все определения и терминологию § 1.1 и 1.3 можно применять *mutatis mutandis* к проблеме формализации понятия алгоритма для *частичной функции* и *частичной функции*, вычислимой алгоритмом.

<sup>2</sup>) Исторически в некоторых случаях исследователь, например Клини, не занимался в явном виде рассмотрением частичных функций, а сразу пред-

## Формализация Тьюринга

Рассмотрим сначала формализацию Тьюринга (как она описана в книге Дэвиса [1958]). Формализация Тьюринга будет избрана в качестве основной для нашей книги. Удобно и поучительно предлагать некоторую физическую картину, хотя окончательная формализация совершенно математична.

Рассмотрим конечное механическое устройство, которое связано с бумажной лентой, бесконечной в обе стороны. Лента разделена по всей длине на клетки равного размера. Будем называть эти клетки *ячейками*.

Устройство таково, что лента может двигаться сквозь него, при этом точно одна ячейка находится внутри. О ячейке, находящейся внутри устройства, мы будем говорить как о ячейке, *обозреваемой* устройством. Направления вдоль ленты назовем соответственно *правым* и *левым*. Устройство способно производить одну из четырех основных операций: (1) оно может записать „1” в обозреваемую ячейку, если только там уже не написана „1”; (2) оно может стереть написанное в обозреваемой ячейке и сделать ее, таким образом, пустой, если только она уже не была пустой; (3) оно может перенести свое внимание на одну ячейку вправо (сдвинув ленту на одну ячейку влево); (4) оно может перенести свое внимание на одну ячейку влево (сдвинув ленту на одну ячейку вправо). Устройство в активном состоянии производит основные операции со скоростью одной операции в единицу времени. Иногда в том случае, когда устройство совершило одну операцию, мы будем говорить, что сделан *шаг* работы устройства. По завершении каждого шага устройство само по себе (как нечто, отличное от ленты) обладает одной из фиксированного конечного множества возможных внутренних (механических) структур. Такие структуры мы будем называть *внутренними состояниями*. Для обозначения различных внутренних состояний будем использовать символы  $q_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Наконец, устройство сконструировано так, что его поведение описывается конечным списком детерминированных правил. Эти правила определяют по текущему внутреннему состоянию и записи в обозреваемой ячейке, какая операция должна производиться следующей и каким должно быть следую-

---

лагал отдельную, более сложную формализацию всюду определенных функций, вычислимых алгоритмом. В ретроспективе любую из этих более сложных формализаций можно разбить на два этапа: во-первых, формализовалось понятие алгоритмической (частичной) функции, во-вторых, алгоритмически всюду определенными функциями объявлялись те алгоритмические функции, которые оказывались всюду определенными. Ниже при изучении формализации Клини мы произведем такую ретроспективную модификацию, хотя она и будет отходить в некотором отношении, не существенном для наших целей, от простоты первоначальной формулировки Клини.

щее внутреннее состояние (в конце этой следующей операции)<sup>1)</sup>.

Пусть  $1$  и  $B$  означают возможные записи в любой ячейке ( $B$  соответствует *пустой* ячейке). Пусть  $1$ ,  $B$ ,  $R$  и  $L$  обозначают основные операции (1), (2), (3) и (4) соответственно. (Операция (1) не производит изменений на ленте, если в обозреваемой ячейке уже имеется „1”, а операция  $B$  не производит изменений на ленте, если обозреваемая ячейка пуста.) Тогда набор правил, определяющих поведение устройства, можно записать в виде набора *четверок*. Каждая четверка состоит из символов (по порядку) для (i) внутреннего состояния, (ii) возможной записи в ячейке, (iii) операции, (iv) внутреннего состояния. Четверка (i, ii, iii, iv) выражает такое правило: при наличии (i) и (ii) устройство производит (iii) и переходит в (iv). Будем предполагать, что любой набор таких четверок есть набор правил для некоторого устройства, вводя только единственное ограничение, что любые две различные четверки должны отличаться в (i) или в (ii). Назовем это ограничение *условием совместности*; при этом условии набор правил не может требовать двух или более различных действий в одно и то же время. Однако мы не предполагаем, что в наборе правил предусматривается любая комбинация (i) и (ii); таким образом, мы допускаем, что при некоторых обстоятельствах устройство не сможет проделать *никакой* операции. В таких случаях будем говорить, что устройство *остановилось*.

В качестве примера рассмотрим устройство с состояниями  $q_0$  и  $q_2$ , поведение которого определяется двумя четверками  $q_01Bq_2$  и  $q_2Bq_0$ . Если такое устройство получает ленту с конечной последовательностью подряд идущих единиц и начинает работу в состоянии  $q_0$  на самой левой ячейке этой последовательности, то оно сотрет все единицы и остановится. Если такое устройство начинает работу на ленте, сплошь заполненной единицами, то оно никогда не остановится.

Устройство общего вида, описанное выше, называют *машиной Тьюринга*. Для наших целей удобно отождествлять машину Тьюринга с набором четверок, определяющим ее поведение. Любой набор четверок, использующий любое (конечное) число внутренних состояний при наличии условия совместности, образует машину Тьюринга.

Легко определить машину Тьюринга на более общепринятом математическом языке. Пусть  $T = \{0, 1\}$  и  $S = \{0, 1, 2, 3\}$ . Тогда машину Тьюринга можно определить как отображение конечного подмножества множества  $N \times T$  в  $S \times N$ . Здесь  $T$  представляет

---

<sup>1)</sup> Предполагается, что устройство способно „читать” запись в ячейке, находящейся внутри него.

запись в ячейке,  $S$  — операции, которые следует производить, а  $N$  дает возможные номера внутренних состояний.

Если даны машина Тьюринга, лента, ячейка на этой ленте и начальное внутреннее состояние, то машина Тьюринга выполнит детерминированную последовательность операций, которая может оборваться за конечное число шагов, а может и не оборваться. Каждой машине Тьюринга поставим в соответствие функцию, определяемую следующим образом. Чтобы изобразить входное число  $x$ , разместим на ленте  $x + 1$  единиц подряд. Установим машину в состоянии  $q_0$  на самой левой ячейке, содержащей 1. В качестве выходного числа возьмем общее количество единиц, имеющихся на ленте, когда машина остановилась (если остановка произошла). При таких соглашениях о входах, выходах и начальных условиях каждая машина Тьюринга задает частичную функцию<sup>1)</sup>. Например, следующая машина, как легко может проверить читатель, задает функцию  $\lambda x[2x]$ .

$q_01Bq_1$   
 $q_1BRq_2$   
 $q_21Bq_3$   
 $q_3BRq_4$   
 $q_41Rq_4$   
 $q_4BRq_5$   
 $q_51Rq_5$   
 $q_5B1q_6$   
 $q_61Rq_6$   
 $q_6B1q_7$   
 $q_71Lq_7$   
 $q_7BLq_8$   
 $q_81Lq_1$   
 $q_11Lq_1$

Эта машина заканчивает работу или в состоянии  $q_2$  (для входа 0), или в состоянии  $q_8$  (для входов, отличных от 0). Читатель может вручную произвести вычисления, например, для входа 2, т. е. для ленты ... $B111B...$  Он увидит, что четверки можно сгрупп-

<sup>1)</sup> Если  $q_0$  отсутствует в наборе четверок, то машина не работает и определяемая ею частичная функция — это  $\lambda x[x + 1]$ . Хотя соглашения о входах, выходах и начальных условиях могут быть произвольными, тем не менее мы увидим, что для широкого многообразия таких соглашений получается один и тот же класс функций.

пировать в различные подпрограммы для (a) стирания цифры входа, (b) движения вправо к цифрам выхода, (c) прибавления двух новых цифр выхода, (d) движения влево к оставшимся цифрам входа и т. д.

Можно также каждой машине Тьюринга сопоставить частичную функцию  $k$  переменных, записывая вход  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  на ленте в виде строки из групп подряд идущих  $x_1 + 1$  единиц,  $x_2 + 1$  единиц, ...,  $x_k + 1$  единиц, разделенных с помощью  $B$ , и, как и прежде, устанавливая машину в состоянии  $q_0$  на самой левой ячейке, содержащей 1. Читатель легко проверит, что конкретная машина, описанная в предыдущем абзаце, задает функцию

$$\lambda x_1 \dots x_k [2x_1 + x_2 + \dots + x_k + k - 1].$$

Каждую стадию в работе машины Тьюринга можно описать, указав (i) состояние ленты, (ii) внутреннее состояние машины Тьюринга и (iii) положение обозреваемой ячейки. Будем говорить, что вся эта информация определяет *конфигурацию*. Эту информацию можно выразить в такой форме:

$\dots q_i \dots$ ,

где ... ... — это цепочка смежных единиц и символов  $B$  куска ленты, содержащего все непустые ячейки,  $q_i$  — текущее состояние, „ $q_i$ ” вставляется сразу слева от символа, записанного в обозреваемой в текущий момент ячейке.

Например, если построенная ранее машина для  $\lambda x[2x]$  применяется к входу, изображающему 2, то первые несколько шагов вычисления описываются следующими конфигурациями:

$q_0111$   
 $q_1B11$   
 $q_211$   
 $q_3B1$   
 $q_41$   
 $1q_4B$   
 $\dots \dots$

На первый взгляд может показаться, что класс алгоритических частичных функций, задаваемых машинами Тьюринга, будет довольно ограниченным. Тем не менее это определение снабжает нас *P*-символизмом и *L*-*P*-уточнением. Любой набор четверок, определяющий машину, можно рассматривать как набор инструкций *P*. В качестве основных символов для нашего *P*-символизма мы используем только  $q$ , 1,  $B$ ,  $R$ ,  $L$  и цифры для числовых индексов. В качестве вычислителя *L* можно взять человека. *L*-*P*-уточ-

нение — это простые правила, согласно которым по начальной ленте и по  $P$  определяется последовательность машинно-ленточных структур. Позже в § 1.6 и 1.8 мы рассмотрим отношение между определением машины Тьюринга и обсуждениями из § 1.1.

### Формализация Клини

Следующей рассмотрим формализацию Клини. Рассмотрим рекурсивные соотношения общего типа, введенные в § 1.2, чтобы определить функцию Аккермана. Набор инструкций  $P$  будет состоять из системы таких «рекурсивных равенств». Вывод (сопротивление) — это конечная последовательность равенств, начинающаяся с  $P$ , где каждое равенство после  $P$  получено из предыдущих или подстановкой численного выражения вместо символа переменной в равенстве, или заменой, используя одно равенство, «равных на равные» в другом равенстве, или вычислением значения функции следования  $\lambda x[x + 1]$ .

В  $P$  помимо главных функциональных символов, вычислением которых мы интересуемся, вводятся вспомогательные функциональные символы. Так, система равенств

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ g(x) &= f(x) + 1, \\ f(x + 1) &= g(x) + 1, \end{aligned}$$

где  $g$  — вспомогательный функциональный символ,  $f$  — главный символ, определяет, как легко проверить, функцию  $\lambda x[2x]$ .

С понятием вывода связаны следующие три проблемы: (1) направление вывода не определяется однозначно входом и инструкциями  $P$ ; (2) имеется возможность получения двух различных выходов при одном и том же входе (различными выводами); (3) имеется возможность, что из данного входа вообще не получится никакого выхода<sup>1)</sup>,<sup>2)</sup>.

Мы обойдем трудности (1) и (2) следующим образом. Скажем, что равенство выводимо из данного  $P$ , если оно получено в конце некоторого вывода из  $P$ . Можно описать единообразный процесс, согласно которому, имея произвольное  $P$ , мы сможем эффективно перечислять все равенства, выводимые из  $P$ . (Процесс на самом деле дает исчерзывающий пересчет всевозможных выводов и подо-

<sup>1)</sup> В первоначальной формулировке Клини возможность (1) допускалась и алгоритмические функции формально определялись как функции, полученные из наборов инструкций, для которых не произошло ни (2), ни (3). Тот факт, что нельзя простым способом выделить такие инструкции, был платой за избавление от забот, связанных с диагонализацией.

<sup>2)</sup> Если в формализации Тьюринга опустить условие совместимости, то так модифицированная формализация Тьюринга столкнется с проблемой, подобной (2).

бен процессу § 1.4 для перечисления всевозможных примитивно-рекурсивных схем.) Формальные детали такой процедуры сложны, и мы их опускаем. При данных  $P$  и входе назовем **главным выходом** для этого входа первый выход в стандартном перечислении выводимых равенств, полученных из  $P$ . Каждый выход дает самое большое один главный выход; следовательно, соотношение выходов и главных выходов определяет функцию. Поэтому каждой системе равенств  $P$  можно сопоставить функцию, и мы получаем формализацию класса алгоритмических функций.

Опишем  $P$ -символизм в этом случае более подробно. В качестве базисных символов возьмем  $f$ ,  $g$ ,  $x$ ,  $+$ ,  $=$ , скобки, запятую, цифры для обычных чисел, цифры для числовых индексов (использующиеся с  $g$  и  $x$ ).

$x, x_0, x_1, \dots$  назовем **переменными**,  
 $f, g, g_0, g_1, \dots$  назовем **функциональными символами**,  $f$  — **главный функциональный символ**.

Термы определяются по индукции:

переменная есть терм;  
обычное натуральное число есть терм;  
если  $\tau$  — терм, то результат присоединения справа „+1” к  $\tau$  есть терм;  
пусть  $\sigma$  состоит из функционального символа<sup>1)</sup> и последующих скобок, содержащих строку термов, разделенных запятыми; тогда  $\sigma$  есть терм<sup>1)</sup>.

Выражение, образующееся при размещении „=” между двумя термами, назовем **равенством**. Любая конечная система таких равенств образует набор инструкций  $P$ .

$L\text{-}P$ -уточнение описывает, как следует единым образом получать перечисление всех выводимых (из данного  $P$ ) равенств. Мы опускаем детали.

Кстати заметим, что любая примитивнорекурсивная схема очевидным образом выражима в  $P$ -символизме. Схема для  $\lambda x[2x]$  в § 1.2 будет системой равенств, начинающейся так:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x, \\ g_2(x) &= x + 1, \\ g_3(x_1, x_2, x_3) &= x_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Легко показать, что функция, определяемая этими равенствами в новом формализме, совпадает с функцией, определяемой, согласно процедуре из § 1.2, первоначальной примитивнорекурсивной схемой.

<sup>1)</sup> Выражение вида „ $x + 2$ ” можно на самом деле использовать как терм, но оно должно быть записано так: „ $x + 1 + 1$ ”.

## § 1.6. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В § 1.1 мы поднимали вопрос, можно ли найти формализацию, которая даст удовлетворительный формальный аналог неформального понятия алгоритма и алгоритмической функции. В § 1.4 мы указали проблемы, с которыми сталкивается любая такая формализация; в частности, мы отметили (§ 1.4) возможность того, что не существует единого максимального формально описанного класса алгоритмических функций. В § 1.5 приведены формализации Тьюринга и Клини. В 30-х годах и позже Чёрчем [1936], Постом [1936], Марковым [1951] и другими были предложены иные формализации. Эти формализации были весьма разнообразны по форме; однако каждую из них можно представить как выбор определенного *P*-символизма и определенного *L-P*-уточнения.

Насколько удовлетворительны эти формализации? Как связаны друг с другом? Насколько успешно преодолеваются в них проблемы, отмечавшиеся § 1.4? С этими вопросами связана обширная литература. Мы суммируем проделанную работу в следующем Основном результате, играющем фундаментальную роль для всей книги.

### Основной результат.

**Основной результат, часть I.** С помощью детальных комбинаторных рассмотрений (см., например, работы Тьюринга [1937] и Клини [1936а]) было показано, что формализации, предложенные Тьюрингом и Клини, а также Чёрчем, Постом, Марковым и другими, эквивалентны, т. е. в каждом случае получается один и тот же класс функций (и, следовательно, всюду определенных функций).

**Определение.** Всюду определенные функции, попадающие в этот класс, назовем *общерекурсивными функциями*. Частичные функции этого класса будем называть *частичнерекурсивными функциями*. Можно обобщить доказательство эквивалентности этих формализаций и убедиться, что для очень широкой совокупности расширений этих формализаций класс функций сохраняется. (Например, можно ввести более одной ленты или другие символы помимо 1 и *B* в определении машины Тьюринга; получаемые функции будут все равно частичнерекурсивными функциями; см. работу Тьюринга [1936]. Исследования, основанные на технике программирования, см. в работах Шепердсона и Стругиса [1963].) На самом деле, если наложить на *P*-символизм и *L-P*-уточнение некоторое общее (и естественное) формальное ограничение, то можно показать, что класс получаемых функций будет всегда подклассом „максимального“ класса всех частичнерекурсивных функций.

**Основной результат, часть II.** Изучалось обширное многообразие конкретных функций, интуитивно алгоритмических. Все они оказались частичнерекурсивными функциями, т. е. были найдены наборы инструкций для них в какой-нибудь стандартной формализации. Для таких доказательств было развито много полезных принципов и приемов. (Части I и II дают сильное эмпирическое свидетельство в пользу того, что формализации достаточно полны.)

**Основной результат, часть III.** Доказательства результатов части I обладают следующей общей структурой. В каждом случае тот факт, что один формализованный класс функций содержится в другом, доказывается путем предъявления и обоснования единообразной процедуры, согласно которой для любого набора инструкций *P* одной формализации указывается набор инструкций *P* другой формализации, приводящий к той же самой функции. Хотя она и не оперирует с натуральными числами, эта единообразная процедура оказывается в каждом случае алгоритмической (в неформальном смысле этого слова без ограничения числовыми выходами и выходами).

**Замечание.** Части I и II экстенсиональны, т. е. скорее определяется класс алгоритмических функций, чем класс „алгоритмов“. Части I и II показывают, что в некотором смысле каждая стандартная формализация содержит все возможные алгоритмические функции.

Часть III совместно с частью I показывает, что в некотором смысле каждая стандартная формализация содержит все возможные алгоритмы (для этих функций). Действительно, если дана формализация типа упомянутых в конце части I, то можно единственным эффективным способом „переводить“ произвольный набор инструкций этой формализации (т. е. алгоритм) в набор инструкций одной из стандартных формализаций. (Мы это обсудим позже, в § 1.7; см. также упр. 2-11.)

Подробные рассуждения, на которые опирается Основной результат, можно найти в книгах Дэвиса [1958] и Клини [1952]. (Там же излагаются принципы и приемы того же рода, что и упомянутые в части II Основного результата.) При использовании Основного результата особенно полезно в качестве стандартного определения, к которому сводится другая формализация, использовать определение Тьюринга.

С математической точки зрения формализации § 1.5 неинвариантны, т. е. они зависят от произвольного выбора. Это же справедливо для всех известных формализаций. Основной результат показывает, что тем не менее формализации дают естественный

и важный класс функций. Отметим, что этот класс — одно из немногих *абсолютных* математических понятий, возникших в работах по основаниям математики<sup>1)</sup>.

### § 1.7. ТЕЗИС ЧЁРЧА

Нельзя доказать гипотезу о том, что какая-либо стандартная формализация дает удовлетворительные аналоги неформального понятия *алгоритма* и *алгоритмической функции*. Такая гипотеза должна приниматься или отвергаться в значительной степени эмпирически. (То, что гипотеза для одной формализации эквивалентна гипотезе для другой, следует из частей I и III Основного результата.) Основной результат дает убедительное свидетельство в пользу того, что определяемый класс функций естествен (часть I) и достаточно полон (части I и II). Формализация Тьюринга показывает, что любая функция этого класса вычислима процедурой, являющейся в интуитивном смысле „механической“. (В § 1.10 мы обсудим вопрос о том, что наш формальный класс может оказаться слишком обширным; см. вопрос \*10 в § 1.1.) Основываясь на этом, многие математики принимают гипотезу о том, что стандартные формализации дают удовлетворительную формализацию, или „разумную переделку“ (неизбежно расплывчатых) неформальных понятий. Эту гипотезу часто называют *тезисом Чёрча*. Тезис Чёрча нужно рассматривать скорее как *предложение*, чем как гипотезу, предложение, чтобы мы согласились с этих пор придавать некоторым интуитивным понятиям (например, понятию „функция, вычислимая алгоритмом“) точные значения.

В современных исследованиях выражению „тезис Чёрча“ придается несколько более широкий смысл. В частях II и III Основного результата мы указываем, что был развит ряд сильных методов для доказательства частичной рекурсивности функций с неформальными алгоритмами и для преобразования неформального набора инструкций в формальный набор инструкций. Развитие этих методов привело к тому, что (a) математик может узнать, дает ли предложенный неформальный алгоритм частично рекурсивную функцию, так же легко, как в других областях математики он определяет, верно ли предложенное неформальное доказательство, (b) логик может переходить от неформального определения алгоритма к формальному так же легко, как в других областях математики он переходит от неформального к формальному доказательству.

<sup>1)</sup> Здесь *абсолютный* означает „существующий помимо и в большой степени независимо от символических формулировок“. Понятие *доказуемости* в исчислении предикатов (для классической двузначной логики) дает другой пример подобного рода.

Предмет теории рекурсивных функций точно описан — это класс функций, определенный в § 1.5. Однако исследования в этой области используют неформальные методы с возрастающей смелостью. Эта книга будет существенно опираться на такие методы, что позволит избежать громоздких деталей и выделить ключевые математические идеи на фоне утомительных манипуляций. Мы увидим, что таким образом можно обсудить и доказать многие очень глубокие математические результаты. Однако мы продолжаем претендовать на то, что наши результаты имеют статус конкретных математических результатов, относящихся к классу функций, формализованному в § 1.5. Разумеется, любой исследователь, который использует неформальные методы и делает подобное заявление, должен быть готов по первому требованию выдать формальные детали.

В пользу доказательств, опирающихся на неформальные методы, имеются все те же доводы, что и в пользу тезиса Чёрча. Такие доказательства назовем *доказательствами по тезису Чёрча*.

Мы встретимся с неформальными методами в оставшихся частях этой главы. Почти все доказательства в книге будут использовать в некоторой степени тезис Чёрча. Поучительна аналогия с неформальными методами доказательств в других областях математики. В обоих случаях уровень неформальности используемых методов непостоянен. Степень формализации доказательства обычно зависит от сложности и абстрактности рассуждения. Подобным же образом степень формальности деталей в этой книге будет меняться от случая к случаю.

Начинающего читателя, которому тезис Чёрча кажется сомнительным, могут обесспокоить такие рассуждения. Чтобы в какой-то мере развеять его сомнения, мы предлагаем ему воспользоваться книгами Дэвиса и Клини, где он найдет все средства, необходимые для полной формализации наших доказательств.

### § 1.8. ГЁДЕЛЕВЫ НОМЕРА, УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ, $s\text{-}m\text{-}n$ -ТЕОРЕМА

В качестве основной мы принимаем формализацию Тьюринга.

Из § 1.5 видно, что набор инструкций — это набор четверок, удовлетворяющих условию совместности. Аналогично процессу перечисления всех примитивнорекурсивных схем в § 1.4 можно устроить процесс перечисления всех наборов инструкций. Этот процесс алгоритмичен (в самом первом, неограниченном, неформальном смысле этого слова). Имеются процедуры, сопоставляющие каждому числу  $x$  набор инструкций, стоящий на  $(x+1)$ -м месте в перечислении всех наборов инструкций. Предположим, что мы выбрали одну такую перечисляющую процедуру. Фиксируем ее до конца книги. Мы опускаем формальные подробности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $P_x$  — это набор инструкций, сопоставленный числу  $x$  в фиксированном перечислении всех наборов инструкций. Назовем  $x$  *индексом* или *гёделевым номером* набора  $P_x$ .

Пусть  $\varphi_x^{(k)}$  — это функция  $k$  переменных, определяемая набором  $P_x$ . Будем называть  $x$  также *индексом* или *гёделевым номером* частичной функции  $\varphi_x^{(k)}$ . (Будем опускать верхний индекс  $^{(k)}$ , когда его значение ясно из контекста или  $k = 1$ . Чаще всего мы будем иметь дело с функциями одной переменной<sup>1)</sup>.)

Ясно, что процесс перечисления дает как (а) алгоритм для перехода от произвольного  $x$  к соответствующему  $P_x$ , так и (б) алгоритм перехода от произвольного совместимого набора четверок  $P$  к такому числу  $x$ , что  $P$  есть соответствующее  $P_x$ .

Во всей книге используется фиксированная гёделева нумерация. Кажется, что это придает оттенок некоторой неинвариантности нашей теории. Однако мы увидим (гл. 4 и упр. 2-10), что наши результаты инвариантны, т. е. не зависят от этой фиксации. В этом отношении использование конкретной гёделевой нумерации подобно использованию конкретной системы координат для получения геометрических результатов, не зависящих от координат.

Теперь можно сформулировать несколько теорем, неявно содержащихся уже в Основном результате.

**ТЕОРЕМА I.** Существует точно  $\aleph_0$  (счетное количество) частично рекурсивных функций и существует точно  $\aleph_0$  общерекурсивных функций.

**Доказательство.** По тезису Чёрча все функции-константы общерекурсивны. Следовательно, имеется по крайней мере  $\aleph_0$  общерекурсивных функций. Гёделева нумерация показывает, что существует не больше  $\aleph_0$  частично рекурсивных функций. ■

**ТЕОРЕМА II.** Существуют нерекурсивные функции.

**Доказательство.** По теореме Кантора имеется  $2^{\aleph_0}$  (континуальное, следовательно, несчетное количество) функций. Теорема доказана. ■

Кажется, что следующая теорема зависит, насколько можно судить по ее доказательству, от нашей конкретной формализации и гёделевой нумерации.

**ТЕОРЕМА III.** Любая частично рекурсивная функция имеет  $\aleph_0$  различных номеров:

<sup>1)</sup> В литературе также фигурирует обозначение  $\{x\}$  (для нашей функции  $\varphi_x$ ). Мы используем  $\varphi_x$  и  $P_x$ , чтобы подчеркнуть различие между сущностью и именем, а именно: между частичной функцией и набором инструкций.

**Доказательство.** Нам нужно показать, что имеется по крайней мере  $\aleph_0$  номеров. Пусть дана частично рекурсивная функция  $\varphi_{x_0}$ . Пусть  $m$  — число, превосходящее числовые индексы всех символов внутренних состояний, входящих в  $P_{x_0}$ . При добавлении к  $P_{x_0}$  четверок  $q_m 11 q_m, q_{m+1} 11 q_{m+1}, \dots, q_{m+k} 11 q_{m+k}$  соответствующая частичная функция не изменится, так как в процессе вычисления не может появиться ни  $q_m, \dots, q_{m+k}$ . Варьируя  $k$ , получим  $\aleph_0$  различных наборов инструкций для  $\varphi_{x_0}$ . ■

Теорема III не является случайным следствием нашего выбора формализации и гёделевой нумерации. Упражнение 2-10 показывает ее инвариантность.

Отметим, что следующий текст определяет, вообще говоря, неформально алгоритм для некоторой функции  $\psi$ : получив вход  $\langle x, y \rangle$ , найдите  $P_x$  (производя стандартное эффективное перечисление всех наборов инструкций, пока не получится  $P_x$ ), затем примените  $P_x$  к входу  $y$ , чтобы вычислить  $\varphi_x(y)$ ; когда  $\varphi_x(y)$  даст выход (если это произойдет), возьмите его как выход для  $\psi(x, y)$ . Имеем

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \varphi_x(y), & \text{если } \varphi_x(y) \text{ сходится;} \\ & \text{расходится, если } \varphi_x(y) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Обращаясь к тезису Чёрча, получаем, что  $\psi$  частично рекурсивна и что  $\psi = \varphi_{x_1}^{(2)}$  для некоторого  $x_1$ . (Формальное описание набора инструкций  $P_{x_1}$  можно найти в книге Дэвиса [1958].) Оформим полученный результат в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА IV.** Существует  $z$ , такое, что для любых  $x$  и  $y$   $\varphi_z(x, y) = \varphi_x(y)$ , если  $\varphi_x(y)$  определено, и  $\varphi_z(x, y)$  не определено, если  $\varphi_x(y)$  не определено.

Функция  $\varphi_z^{(2)}$  теоремы IV называется *универсальной функцией* для частично рекурсивных функций одной переменной.  $P_z$  — это машина Тьюринга, которую можно использовать, чтобы продублировать любую частично рекурсивную функцию одной переменной. Теорема IV, иногда называемая *теоремой о нумерации*, представляет главный результат ранних (и более формальных) работ по теории рекурсивных функций. Очевидно, что теорему IV можно обобщить с тем, чтобы получить для любого  $k \geq 1$  функцию  $k + 1$  переменных, которую можно считать универсальной функцией для функций  $k$  переменных. Теорема IV — это случай  $k = 1$ .

Теорема IV имеет нетривиальное практическое значение. Она показывает, что при вычислении функций одной переменной имеется такая критическая степень „механической сложности“ (сложность набора инструкций  $P_z$ ), что всякая дальнейшая сложность — сверх этой критической — может быть поглощена возрастающим размером программы и памяти. (В упражнении 2-5

мы увидим, что можно ограничиться функциями фиксированного числа переменных.) Назовем  $P_z$  *универсальной машиной*.

Если рассмотреть нашу формализацию с точки зрения вопросов \*6—\*10 из § 1.1, то теорема IV показывает, что вычислителем  $L$  не обязательно должен быть человек, и это уточняет наше заявление в § 1.1, что  $L$  может быть строго ограничен в своих "возможностях". Итак, наша формальная концепция машины Тьюринга совместима с нашими ответами на вопросы \*6—\*9. Она совместима и с нашей позицией в вопросе \*10, поскольку не накладываются никакие ограничения, которые требуются при положительном ответе на \*10. Позже мы рассмотрим вопрос \*10 в теореме XI и упражнении 2-8.

Теорема V, которую мы сейчас приведем, доказывается так же исходя из используемой конкретной формализации и гёделевой нумерации. Однако, подобно теореме III, она инвариантна. В сочетании с тезисом Чёрча она будет основной в дальнейшей работе.

**Теорема V.** Для любых  $m, n \geq 1$  существует общерекурсивная функция  $s_n^m$  от  $m + 1$  переменных, такая, что для всяких  $x, y_1, \dots, y_m$

$$\begin{aligned} \lambda z_1 \dots z_n [\varphi_x^{(m+n)}(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)] &= \\ &= \varphi_{s_n^m(x, y_1, \dots, y_m)}^{(n)}. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай  $m = n = 1$ . (Остальные случаи разбираются аналогично.) Рассмотрим семейство всех функций одной переменной, которые выражаются как  $\lambda z[\varphi_x^{(2)}(y, z)]$  при различных  $x$  и  $y$ . Используя стандартную формализацию для функций двух переменных, мы можем смотреть на эти выражения как на новую формализацию для функций одной переменной. Согласно части III Основного результата, существует единообразная эффективная процедура перехода от наборов инструкций новой формализации к наборам инструкций старой формализации. Следовательно, по тезису Чёрча должна существовать общерекурсивная функция  $f$  двух переменных, такая, что  $\lambda z[\varphi_x^{(2)}(y, z)] = \varphi_{f(x, y)}$ .

Эта функция и есть искомая функция  $s_1^1$ . ■

Неформальное доказательство с обращением к тезису Чёрча и части III Основного результата можно заменить формальным доказательством. (Более того, функции  $s_n^m$  можно выбрать примитивнерекурсивными.) Мы отсылаем читателя к книгам Дэвиса [1958] и Клини [1952]. Теорема V известна как *s-m-n-теорема* и принадлежит Клини. Теорема V (вместе с тезисом Чёрча) — это инструмент с широкой областью применения и большой силы.

Здесь мы дадим один пример такого рода, дальнейшие приложения будут получены в § 1.9.

В последующих главах во многих случаях мы не будем особо оговаривать применение *s-m-n*-теоремы (и тезиса Чёрча).

**Теорема VI.** Существует общерекурсивная функция  $g$  двух переменных, такая, что для любых  $x, y$

$$\varphi_{g(x, y)} = \varphi_x \varphi_y (= \lambda z[\varphi_x(\varphi_y(z))]).$$

**Доказательство.** По тезису Чёрча немедленно получаем, что для любых  $x, y$  функция  $\eta = \varphi_x \varphi_y$  — частичнорекурсивная функция. Осталось указать общерекурсивную функцию  $g$ , т. е. мы должны показать, что гёделев номер  $\eta$  можно найти единственнообразным эффективным способом по  $x$  и  $y$ . Читатель, поразмыслив над Основным результатом, посчитает это очень правдоподобным. Теорема V дает средства для доказательства. Положим

$$\theta(x, y, z) = \varphi_x(\varphi_y(z)) = \varphi_{x_1}(x, \varphi_{x_2}(y, z)),$$

где  $\varphi_{x_1}$  — универсальная функция из теоремы IV. По тезису Чёрча  $\theta$  частичнорекурсивна и имеет номер  $w_0$ . Согласно теореме V, имеем

$$\varphi_x \varphi_y = \lambda z[\varphi_{w_0}(x, y, z)] = \varphi_{s_1^2(w_0, x, y)}$$

и  $\lambda xy[s_1^2(w_0, x, y)]$  есть искомая функция  $g$ . ■

### § 1.9. ПРОБЛЕМА ОСТАНОВКИ

Существует ли эффективная процедура для определения по данным  $x$  и  $y$ , сходится ли  $\varphi_x(y)$  или нет, т. е. дает ли выход набор  $P_x$  в применении к входу  $y$  или нет? Согласно тезису Чёрча, этому вопросу можно придать следующую эквивалентную и точную форму. Существует ли рекурсивная функция  $g$ , такая, что  $g(x, y) = 1$ , если  $\varphi_x(y)$  сходится, и что  $g(x, y) = 0$ , если  $\varphi_x(y)$  расходится? Ответим на этот вопрос следующей теоремой.

**Теорема VII.** Не существует общерекурсивной функции  $g$ , такой, что для любых  $x, y$

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_x(y) \text{ сходится;} \\ 0, & \text{если } \varphi_x(y) \text{ расходится.} \end{cases}$$

**Неформальное доказательство.** Предположим, что есть такая общерекурсивная функция  $g$ . Ее можно использовать, чтобы определить новую частичную функцию  $\psi$ :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } g(x, x) = 0; \\ \text{расходится,} & \text{если } g(x, x) = 1. \end{cases}$$

Так как  $g(x, x)$  должно равняться 0 или 1, то это дает алгоритм и по тезису Чёрча  $\psi$  будет частично рекурсивной функцией. (Когда  $g(x, x) = 1$ , инструкции для  $\psi$  могут использовать некоторое условие, дающее бесконечно повторяющийся цикл, — достаточно взять пару четверок  $q_n 11 q_n, q_n BB q_n$ , — чтобы гарантировать, что  $\psi(x)$  не определено.) Пусть  $y_0$  — гёделев номер функции  $\psi$ . Тогда, согласно определению функции  $\psi$ ,  $\varphi_{y_0}(y_0)$  сходится  $\Leftrightarrow g(y_0, y_0) = 0$ ; но согласно первоначальному предположению о  $g$ ,  $g(y_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{y_0}(y_0)$  расходится. Получили противоречие; следовательно, такой рекурсивной функции  $g$  не существует. ■

Только что проведенное доказательство использует тезис Чёрча в доказательстве от противного. Читателя может заинтересовать, как осуществить формальный аналог использования тезиса Чёрча в таком основанном на гипотезе контексте. Поучительно проследить путь, приводящий к более формальному доказательству.

**Более формальное доказательство.** Определим  $\psi$  следующим образом:

$$\psi(z, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_z^{(2)}(x, x) = 0; \\ \text{расходится,} & \text{если } \varphi_z^{(2)}(x, x) \neq 0 \text{ или} \\ & \varphi_z^{(2)}(x, x) \text{ расходится.} \end{cases}$$

По тезису Чёрча  $\psi$  частично рекурсивна. Согласно теореме V, по  $z$  эффективно находится гёделев номер функции  $\lambda x[\psi(z, x)]$ , т. е. существует общерекурсивная функция  $h$ , такая, что для любого  $z$   $\varphi_{h(z)} = \lambda x[\psi(z, x)]$ . (В качестве  $h$  можно взять  $\lambda z[s_1^1(w_1, z)]$ , где  $w_1$  — гёделев номер  $\psi$ .)

Предположим теперь, что  $g = \varphi_{z_0}$  для некоторого  $z_0$ . Согласно определению  $h$ ,  $\varphi_{h(z_0)}(x)$  сходится  $\Leftrightarrow \varphi_{z_0}(x, x) = 0$ . Подставляя  $h(z_0)$  вместо  $x$ , имеем

$$\varphi_{h(z_0)}(h(z_0)) \text{ сходится} \Leftrightarrow \varphi_{z_0}(h(z_0), h(z_0)) = 0.$$

Но тогда  $\varphi_{z_0}$  не может совпадать с  $g$ , так как для входа  $(h(z_0), h(z_0))$  функция  $\varphi_{z_0}$  или не определена, или дает ошибочную информацию. ■

Мы видим, что никакая частично рекурсивная функция не удовлетворяет условиям для  $g$  и что наше доказательство конструктивно в том смысле, что для любого  $z$  значение  $h(z)$  дает конкретное место, где  $\varphi_z$  отличается от  $g$ . Из теоремы VII немедленно вытекает такое предложение.

**Следствие VII.** *Не существует общерекурсивной функции  $f$ , такой, что*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ сходится;} \\ 0, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ расходится.} \end{cases}$$

**Доказательство.** Следует из доказательства теоремы. ■

Нашу первоначальную проблему (сформулированную в первом абзаце этого параграфа) называют *проблемой остановки*, где слово „остановка” означает „наличие выхода”. Факт, установленный в теореме VII, известен под названием *рекурсивной неразрешимости проблемы остановки*. Он точно формулируется в терминах нашей формализации<sup>1)</sup>.

Основной результат § 1.6 придает этому факту фундаментальное значение. Проблема остановки была первой «естественней» комбинаторной проблемой, оказавшейся рекурсивно неразрешимой. Доказательство существования просто описываемых рекурсивно неразрешимых проблем — это одно из наиболее поразительных достижений математики двадцатого века. До того момента, как оно было получено (в 30-х годах), многие математики не могли представить себе, что могут быть просто описываемые комбинаторные проблемы (такие, как проблема остановки), не имеющие алгоритмического решения. Более общие рассуждения о таких неразрешимых проблемах отложим до гл. 2.

Результаты ранних формальных работ по теории рекурсивных функций (до 1940 года) можно суммировать так: (1) Основной результат (§ 1.6); (2) существование универсальной функции (§ 1.8) и (3) неразрешимость проблемы остановки (§ 1.9). В основной работе Тьюринга [1936] рассматриваются главным образом эти вопросы.

Закончим этот параграф еще одним результатом о неразрешимости. Впервые он был получен Клини [1936] и является естественным следствием наших рассуждений о диагонализации в § 1.4.

**Теорема VIII.** *Не существует эффективной процедуры для определения по любому  $x$ , всюду ли определена функция  $\varphi_x$ . Другими словами, не существует общерекурсивной функции  $f$ , такой, что*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_x \text{ всюду определена;} \\ 0, & \text{если } \varphi_x \text{ не всюду определена.} \end{cases}$$

**Доказательство.** Дадим неформальное доказательство. Переход к более формальному доказательству подобен аналогичному переходу в теореме VII (см. упражнение 2-7).

<sup>1)</sup> „Не существует машины Тьюринга, решающей проблему остановки (для машин Тьюринга). Более того, для любой машины Тьюринга — кандидата на эту роль — можно указать единичный пример проблемы остановки, где этот кандидат терпит неудачу; на самом деле существует одна машина Тьюринга, которая вычисляет по описанию любого кандидата соответствующий контрпример”.

Предположим, что такая функция  $f$  существует. Тогда определим функцию  $g$  так:

$$\begin{aligned} g(0) &= \mu y [f(y) = 1], \\ g(x + 1) &= \mu y [y > g(x) \& f(y) = 1]. \end{aligned}$$

Так как  $f(y) = 1$  для бесконечно многих  $y$  (см. теорему I), то  $g$  всюду определена. По тезису Чёрча  $g$  общерекурсивна. Определим теперь  $h$  следующим образом:

$$h = \lambda x [\varphi_{g(x)}(x) + 1].$$

По предположению о функции  $f$  функция  $h$  всюду определена. По тезису Чёрча  $h$  общерекурсивна. Пусть  $h = \varphi_{z_0}$ . Согласно определению функции  $g$ ,  $g^{-1}(z_0)$  определяется однозначно, обозначим его через  $y_0$ . Тогда  $h(y_0) = \varphi_{g(y_0)}(y_0) + 1$ , согласно нашему определению функции  $h$ , но  $h(y_0) = \varphi_{g(y_0)}(y_0)$  по определению  $y_0$ . Так как  $h$  всюду определена, то мы пришли к противоречию. ■

## § 1.10. РЕКУРСИВНОСТЬ

В § 1.5 был определен формально класс функций, названных *частичнорекурсивными*. В дальнейшем, называя функцию „эффективной”, „вычислимой”, „рекурсивной”, „эффективно вычислимой”, „рекурсивно вычислимой”, „механически вычислимой” или „алгоритмической”, мы будем иметь в виду, что она попадает в этот класс. Свойство принадлежать этому классу будем называть *частичнорекурсивностью*. (Некоторые математики употребляют для этого свойства термин „общерекурсивность”; другие сохраняют термин „общерекурсивность” лишь для всюду определенных функций. В обоих случаях приставка „обще” подчеркивает, что рассматриваются функции из широкого класса § 1.5, а не из более узких классов (таких, как примитивнорекурсивные функции, например).)

В данном параграфе мы обсудим некоторые аспекты частичной рекурсивности. В частности, рассмотрим (1) распространение этого понятия на случай нечисловых входов и выходов (*кодирование*); (2) некоторые структурные свойства частичнорекурсивных функций и связь этих свойств с вопросом \*10 из § 1.1 (*μ-оператор*) и (3) сущность и возможную полезность нашей дальнейшей теории (*заключительные замечания*). Цели и приложения теории более подробно будут рассмотрены в гл. 3.

### Кодирование

Частичнорекурсивные функции осуществляют отображения натуральных чисел в натуральные числа, и их алгоритмы преобразуют записи чисел в записи чисел. Первоначальное неогра-

ченное неформальное понятие алгоритма относилось к процедурам с символическими входами и выходами более общего типа; например, таков алгоритм дифференцирования полиномов. Мы уже использовали такие алгоритмы на промежуточных этапах определения числовых алгоритмических функций (затем использовался тезис Чёрча, чтобы заключить, что исследуемые числовые функции частичнорекурсивны); например, в определении универсальной функции фигурирует алгоритм (с нечисловым выходом), преобразующий число  $x$  в набор инструкций  $P_x$ . Возникает вопрос, можно ли каким-либо образом включить такие широкие нечисловые алгоритмы в нашу формальную теорию. К этой проблеме есть два подхода.

Первый подход состоит в следующем. Для данного класса нечисловых входов и выходов выбирают некоторое фиксированное взаимно однозначное отображение этого класса в натуральные числа. После этого для удобства *отождествляют* каждый символический элемент нечислового класса с соответствующим числовым „индексом”. Такое стандартное отображение называют *кодированием*, а числа, используемые как индексы, называют *кодовыми номерами*. Кодирование выбирается так, чтобы (a) оно задавалось неформальным алгоритмом в неограниченном смысле; (b) оно было *обратимым*, т. е. существовал неформальный алгоритм (в неограниченном смысле) для распознавания кодовых номеров и для обратного „декодирующего“ отображения кодовых номеров в нечисловые элементы. Кроме того, предполагается, что кодирование используется в том случае, когда (c) имеется неформальный алгоритм для распознавания выражений, образующих рассматриваемый нечисловой класс.

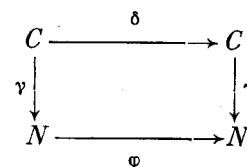
При таком *отождествлении* выражений (нечислового класса) с числами проблема определения алгоритмов (для этого класса) сводится к нашей формальной теории алгоритмов для натуральных чисел<sup>1</sup>).

Пример такого рода уже встречался нам в § 1.8. Фиксированная нами гёделева нумерация частичнорекурсивных функций — это кодирование наборов инструкций натуральными числами. (Кодирования часто так и называют гёделевыми нумерациями, а кодовые номера — гёделевыми номерами<sup>2</sup>.)

<sup>1</sup>) Философски мыслящий читатель может спросить, почему в качестве кодирований берутся отображения в *числа* (математические объекты), а не в *нумерали* (символические изображения чисел), в то время как алгоритмы для частичнорекурсивных функций должны оперировать с некоторой формой нумералов. Верно, что использование нумералов было бы ближе нашему образу мышления, однако для наших целей это различие несущественно. Использование чисел как индексов более удобно в техническом отношении и является общепринятым.

<sup>2</sup>) Впервые кодирование было использовано Гёделем, осуществившим кодирование формул теории чисел натуральными числами; это позволило

Использование кодирований немедленно поднимает вопрос об инвариантности. Если выбрано кодирование, будет ли формальное понятие *частично рекурсивной функции на кодовых номерах* соответствовать неформальному понятию *алгоритмического отображения кодируемых выражений*? Так как последнее понятие эмпирическое, то ответ должен быть частично эмпирическим. Тезис Чёрча предполагает положительный ответ. Пусть  $C$  — не числовой класс (см. диаграмму ниже). Пусть  $\gamma$  — кодирующе отображение класса  $C$  в  $N$ , предположим, что  $\gamma$  отображает на  $N$  (очевидна модификация доказательства на случай, когда не отображает на  $N$ ). Пусть  $\gamma^{-1}$  — декодирующе отображение на  $C$ . Согласно определению кодирования,  $\gamma$  и  $\gamma^{-1}$  (неформально алгоритмичны). Пусть  $\varphi$  — произвольная частично рекурсивная функция. Она (как формально, так и неформально) является алгоритмической. Следовательно, отображение  $\delta = \gamma^{-1}\varphi\gamma$  — это (неформально) алгоритмическое отображение класса  $C$  в  $C$ . Обратно, пусть  $\delta$  — произвольное (неформальное) алгоритмическое отображение класса  $C$  в  $C$ , тогда  $\varphi = \delta\gamma^{-1}$  — это (неформальная) алгоритмическая частичная функция; согласно тезису Чёрча,  $\varphi$  — частично рекурсивная функция. Итак, каждой формальной функции  $\varphi$  соответствует неформальное отображение  $\delta$ , каждому неформальному отображению  $\delta$  соответствует формальная функция  $\varphi$ .



Второй подход к формальному истолкованию нечисловых алгоритмов состоит в следующем. *Формализация* § 1.5 расширяется так, чтобы непосредственно включить в качестве входов и выходов выражения из более широких "нечисловых" классов. Особенно удобны для этого машины Тьюринга<sup>1)</sup>. Требуется только, чтобы выражения из более широких классов изображались конечными словами в фиксированных конечных алфавитах основных символов (отличных от  $B$  и  $1$ ). Основные операции машин Тьюринга обобщаются так, чтобы включить написание и стирание символов нового алфавита. Говорят, что нечисловое отображение *рекурсивно*

ему исследовать формулы и логику доказательств теории чисел внутри самой теории чисел. Попытки обнаружить парадоксы самоприменимости при этом кодировании дают *первую теорему Гёделя о неполноте*. Подобную конструкцию такого рода еще раньше построил Тарский.

<sup>1)</sup> Другие формализации, расширенные с этой целью, изучались Постом [1943] и Шмульяном [1961] (а также А. А. Марковым [1951, 1954]. — Ред.) (см., кроме того, работы Ассера [1960], Карри [1963] и Тьюринга [1936]).

(или *частично рекурсивно*), если существует машина Тьюринга, его реализующая. После такого расширения формализации соответственно модифицируются части I, II и III Основного результата (§ 1.6), чтобы включить это более широкое понятие рекурсивности.

Очевидно, что второй подход более прямой. Мы используем первый подход, чтобы ограничить предмет нашего исследования и подчеркнуть, что это формальная наука об отображениях натуральных чисел. Для результатов, получаемых в книге, безразлично, какой подход используется.

#### μ-оператор

Оператор  $\mu$  определен во введении.

**Теорема IX.** Пусть  $f$  — общерекурсивная функция  $k+1$  переменных, тогда  $\lambda x_1 \dots x_k [\mu y [f(x_1, \dots, x_k, y) = 1]]$  — частично рекурсивная функция  $k$  переменных.

**Доказательство.** Оно следует из тезиса Чёрча. Положим

$$\psi = \lambda x_1 \dots x_k [\mu y [f(x_1, \dots, x_k, y) = 1]].$$

Тогда, чтобы вычислить  $\psi(x_1, \dots, x_k)$ , нужно последовательно вычислять

$$f(x_1, \dots, x_k, 0), f(x_1, \dots, x_k; 1), f(x_1, \dots, x_k, 2), \dots$$

Как только найдется  $y$ , такой, что  $f(x_1, \dots, x_k, y) = 1$  (если это произойдет), мы возьмем его в качестве значения. Подвычисления для  $f$  всегда определены, так как  $f$  — общерекурсивная функция. ■

Теорему IX называют *μ-теоремой*. В упражнении 2-13 мы видим, что теорема IX не всегда верна, если  $f$  заменить на частично рекурсивную функцию  $k+1$  переменных.

Оказывается, что в некотором смысле любую частично рекурсивную функцию можно получить из (всюду определенных) рекурсивных функций однократным применением оператора  $\mu$ . Это следует из теоремы X.

**Теорема X.** Существуют конкретные общерекурсивные функции  $r$  и  $t$  одного и трех переменных соответственно, такие, что для любого  $z$

$$\varphi_z = \lambda x [r(\mu y [t(z, x, y) = 1])].$$

**Доказательство.** Определим функцию  $s$  следующим образом:

$$s(z, x, y, w) = \begin{cases} 1, & \text{если } P_z \text{ на входе } x \text{ дает выход } y \text{ за не более чем } w \text{ шагов;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По тезису Чёрча  $s$  общерекурсивна. Определим  $p$  и  $q$  так:  
 $p = \lambda x [показатель при 3 в разложении x + 1 на простые множители],$   
 $q = \lambda x [показатель при 2 в разложении x + 1 на простые множители].$

Положим

$$t = \lambda zxy[s(z, x, p(y), q(y))].$$

По тезису Чёрча  $p$ ,  $q$  и, следовательно,  $t$  общерекурсивны. Утверждение теоремы вытекает теперь из определения функций  $s$ ,  $p$ ,  $q$  и  $t$ . ■

Теорема X называется *теоремой Клини о нормальной форме*. Теорема IV (теорема о нумерации) получается как ее простое следствие. Можно показать, что как  $p$ , так и  $t$  можно выбрать *примитивнорекурсивными*. Теорему X можно сформулировать и доказать для частичных функций  $k$  переменных,  $k > 1$ , вводя подходящие общерекурсивные функции  $s_k$  и  $t_k$  от  $k + 3$  и  $k + 2$  переменных соответственно.

**Следствие X.** Существуют общерекурсивные функции  $p$  и  $t_k$ , такие, что для любого  $z$

$$\varphi_z^{(k)} = \lambda x_1 \dots x_k [p(\mu y[t_k(z, x_1, \dots, x_k, y) = 1])].$$

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы X. ■

Конечно, доказательство теоремы X может основываться на формализации Клини. После некоторого ряда различных определений можно получить функцию  $\hat{t}$ , аналогичную нашей функции  $t$ . Отношение

$$T = \{\langle x, y, z \rangle \mid \hat{t}(x, y, z) = 1\}$$

называется *предикатом Клини T*, предложение, что  $\langle x, y, z \rangle \in T$ , сокращенно обозначается  $T(x, y, z)$ . Предикат Клини  $T$  часто встречается в литературе.

Возникает естественный вопрос об усилении теоремы X исключением из нее функции  $p$ . Существует ли общерекурсивная функция  $t^*$ , такая, что для любого  $z$

$$\varphi_z = \lambda x[\mu y[t^*(z, x, y) = 1]]?$$

Теорема 2-III покажет, что такой функции  $t^*$  не существует. Более того, мы найдем частичнорекурсивную функцию  $\psi$  одной переменной, такую, что для любой рекурсивной функции  $f$  неверно, что

$$\psi = \lambda x [\mu y[f(x, y) = 1]].$$

μ-теорема показывает, что наша формализация допускает вычисления, состоящие в неограниченных поисках числа, удовлетворяющего некоторому заданному эффективному условию. Эта теорема связана с невозможностью положительного ответа на вопрос \*10 в § 1.1. А priori существовала возможность, что из формализации вытекает некоторый осмыслинный позитивный ответ на вопрос \*10. К сожалению, это не так. Теорема XI и ее доказательство показывают, что при любом разумном положительном ответе можно провести диагонализацию, ведущую к противоречию. Доказывается теорема XI в упражнении 2-8.

**Теорема XI.** Не существует общерекурсивной функции  $f$  двух переменных, такой, что для любых  $x$  и  $z$  [набор инструкций  $P_z$  в применении к  $x$  дает выход]  $\Leftrightarrow$  [ $P_z$  в применении к  $x$  дает выход за не более чем  $f(z, x)$  шагов]<sup>1)</sup>.

Результат о несуществовании в теореме XI подобен результатам о неразрешимости в теоремах VII и VIII. Подобно теоремам VII и VIII, это — следствие широты формального понятия рекурсивности. Из-за таких результатов некоторые математики утверждают, что формальное понятие рекурсивности слишком широко для того, чтобы быть аналогом принятых ими неформальных понятий алгоритмической вычислимости. Даже если это так, рекурсивность выражает некоторое понятие алгоритмической вычислимости и достаточно естественно для того, чтобы заслужить право на дальнейшее развитие.

### Заключительные замечания

Концепция частичной рекурсивности обладает достоинствами (широкота и ясность) и недостатками (неразрешимость), характерными для развиваемой нами теории. Важную роль в этой теории будут играть методы диагонализации, подобные методам теорем VII и VIII. Было бы отнюдь не опрометчиво сказать, что наша теория в большей части — „теория диагонализации”.

В настоящее время эта теория приносит малую практическую пользу. Она рассматривает скорее вопросы существования или несуществования вычислительных методов, чем вопросы их эффективности и хорошей организации. Вопросы последнего рода появляются не в нашей теории, а в более сложных теориях, основывающихся на более узких понятиях, чем рекурсивность. Нашу теорию можно рассматривать как предельный, асимптотический

<sup>1)</sup> Если воспользоваться функцией  $s$  из доказательства теоремы X, то теорему XI можно переформулировать так: не существует рекурсивной функции  $f$ , такой, что для любых  $x, y, z$  [ $(\exists w)[s(x, y, z, w) = 1] \Leftrightarrow s(x, y, z, f(x, y)) = 1$ ].

случай этих более узких и более трудных теорий. В качестве таковой она все-таки имеет определенное практическое значение. Широкое понятие машины Тьюринга, понятие универсальной машины (§ 1.8) и другие комбинаторные результаты и методы данной теории оказались полезными в работах по программированию на вычислительных машинах. Возможно, наиболее прямое практическое приложение получили результаты о несуществовании (т. е. неразрешимости), так как эти результаты переходят и в более узкие теории.

Однако нужно отметить, что в настоящее время основная ценность этой теории состоит в ее связях с чистой математикой. Она дает структуры, обладающие огромной внутренней красотой и естественностью. Эта теория дает новый и часто глубокий взгляд на другие области. Такой подход оказался особенно полезным в математической логике, он все в большей степени используется и в более классических областях.

## Глава 2. НЕРАЗРЕШИМЫЕ ПРОБЛЕМЫ

§ 2.1. Новые примеры неразрешимых проблем	53
§ 2.2. Неразрешимые проблемы в других областях математики	56
§ 2.3. Существование некоторых частично рекурсивных функций	58
§ 2.4. Исторические замечания	60
§ 2.5. Обсуждение	61
§ 2.6. Упражнения	62

### § 2.1. НОВЫЕ ПРИМЕРЫ НЕРАЗРЕШИМЫХ ПРОБЛЕМ

Теорема 1-VII, следствие 1-VII и теорема 1-VIII дают примеры рекурсивной неразрешимости. Каждая связана с „проблемой”, которую можно сформулировать как проблему эффективного распознавания элементов некоторого множества или отношения. Например, для следствия 1-VII таким множеством будет  $\{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\}$ . Каждый из этих трех результатов показывает, что соответствующее множество или отношение не обладает рекурсивной характеристической функцией. Мы объединим эти результаты, говоря, что данные проблемы *рекурсивно неразрешимы*.

Приведем несколько новых примеров рекурсивной неразрешимости. В каждом случае мы покажем, что для соответствующего множества (или отношения) невозможна рекурсивная характеристическая функция. „Проблемы” описанного вида интересны и естественны для самой теории рекурсивных функций. Все они связаны со следующим вопросом: насколько эффективно по набору инструкций для частично рекурсивной функции можно определить ее поведение, т. е. насколько эффективно по номеру  $x$  можно определить поведение функции  $\varphi_x$ ?

Имеется два метода для доказательства рекурсивной неразрешимости. Первый, *прямой* метод состоит в том, чтобы привести доводы, обычно с привкусом диагонализации, показывающие, что разрешимость приведет к противоречию. Второй, *косвенный* метод состоит в том, что берут другую проблему, о которой уже известно, что она неразрешима, и затем показывают, что разрешимость исследуемой проблемы повлечет разрешимость проблемы, о которой известно, что она неразрешима. Последний метод называют методом *сведения*; показывают, что известная проблема *сводится* к исследуемой проблеме (и, следовательно, она была бы разрешима, если бы была разрешимой исследуемая проблема). Метод сведения часто более удобен, чем прямой метод. Теоремы 1-VII и 1-VIII получены прямым методом. В примерах, которые сейчас будут даны, используется косвенный метод. В каждом случае в качестве проблемы, о которой уже известно, что она неразрешима, избирается проблема из следствия 1-VII.

Рассмотрим следующие проблемы:

- (а) Проблема определения по любому  $x$ , является ли функция  $\varphi_x$  постоянной функцией.
- (б) Проблема определения по любым  $x$  и  $y$ , входит ли  $y$  в область значений функции  $\varphi_x$ .
- (с) Проблема определения по любым  $x$ ,  $y$  и  $z$ , выполняется ли  $\varphi_x(y) = z$ .
- (д) Проблема определения по любым  $x$  и  $y$ , выполняется ли  $\varphi_x = \varphi_y$ .
- (е) Проблема определения по любому  $x$ , бесконечно ли множество значений функции  $\varphi_x$ .
- (ф) При фиксированном  $y_0$  проблема определения по любому  $x$ , содержит ли  $y_0$  в области значений функции  $\varphi_x$ .
- (г) При фиксированном  $x_0$  проблема определения по любому  $y$ , содержит ли  $y$  в области значений функции  $\varphi_{x_0}$ .

**Теорема I.** Проблемы (а), (б), (с), (д) и (е) рекурсивно неразрешимы. При любом выборе  $y_0$  проблема (ф) неразрешима. Проблема (г) может оказаться и разрешимой, и неразрешимой, в зависимости от выбора  $x_0$ .

**Доказательство.** (а) Пусть  $g$  — характеристическая функция множества  $\{x \mid \varphi_x \text{ есть постоянная функция}\}$ . Мы хотим показать, что  $g$  нерекурсивна.

Определим  $\psi$ , функцию двух переменных, следующим образом: получив вход  $\langle x, y \rangle$ , найти  $P_x$  и применить  $P_x$  к входу  $R_x$ ; когда процесс сойдется (если это произойдет), выдать выход 0. По тезису Чёрча  $\psi$  частично рекурсивна. Ясно, что  $\psi$  удовлетворяет такому условию:

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ сходится;} \\ & \\ \text{расходится, если } \varphi_x(x) \text{ расходится.} \end{cases}$$

По теореме 1-V ( $s\text{-}m\text{-}n$ -теореме) существует общерекурсивная функция  $h_1$ , такая, что  $\lambda y[\psi(x, y)] = \varphi_{h_1}(x)$  (функция  $h_1$  — это  $\lambda x[s_1^1(z_0, x)]$ , где  $z_0$  — номер  $\psi$ ). Итак,

$$\varphi_{h_1(x)}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ сходится;} \\ & \\ \text{расходится, если } \varphi_x(x) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Следовательно,  $\varphi_{h_1(x)}$  — постоянная функция тогда и только тогда, когда  $\varphi_x(x)$  сходится.

Если функция  $g$  рекурсивна, то  $gh_1 (= \lambda x[g(h_1(x))])$  общерекурсивна и

$$gh_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ сходится;} \\ 0, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Но  $gh_1$  будет характеристической функцией множества  $\{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\}$  вопреки следствию 1-VII. Поэтому функция  $g$  не может быть рекурсивной.

(б) Пусть  $f$  — характеристическая функция отношения  $\{\langle x, y \rangle \mid y \text{ содержится в области значений функции } \varphi_x\}$ . Пусть  $h_1$  — общерекурсивная функция, определенная в доказательстве для (а). Если  $f$  рекурсивна, то  $\lambda x[f(h_1(x), 0)]$  будет рекурсивной характеристической функцией множества  $\{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\}$ , что противоречит следствию 1-VII.

(с) Пусть  $f$  — характеристическая функция отношения  $\{\langle x, y, z \rangle \mid \varphi_y(y) = z\}$ . Если  $f$  рекурсивна, то  $\lambda x[f(h_1(x), 0, 0)]$  будет рекурсивной характеристической функцией множества  $\{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\}$  вопреки следствию 1-VII, где опять  $h_1$  — также, что и в доказательстве для (а).

(д) Пусть  $f$  — характеристическая функция отношения  $\{\langle x, y \rangle \mid \varphi_x = \varphi_y\}$ . Возьмем  $y_0$  — некоторый номер функции  $\lambda x[0]$ , тогда  $\lambda x[f(h_1(x), y_0)]$  будет рекурсивной характеристической функцией множества  $\{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\}$  вопреки следствию 1-VII, где  $h_1$  — такая же, как в доказательстве для (а).

(е) Пусть  $f$  — характеристическая функция множества  $\{x \mid \text{Val } \varphi_x \text{ бесконечна}\}$ . Методом, аналогичным методу доказательства для (а), определим общерекурсивную функцию  $h_2$ , такую, что

$$\varphi_{h_2(x)}(y) = \begin{cases} y, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ сходится;} \\ & \\ \text{расходится, если } \varphi_x(x) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Если  $f$  рекурсивна, то  $\lambda x[f(h_2(x))]$  будет рекурсивной характеристической функцией множества  $\{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\}$  вопреки следствию 1-VII.

(ф) Пусть дано  $y_0$ , и пусть  $f$  — характеристическая функция множества  $\{x \mid y_0 \text{ принадлежит множеству значений функции } \varphi_x\}$ . Тогда если  $f$  рекурсивна, то  $\lambda x[f(h_2(x))]$  будет общерекурсивной характеристической функцией множества  $\{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\}$  вопреки следствию 1-VII, где  $h_2$  — рекурсивная функция, определенная в доказательстве для (е).

(г) Выберем  $x_0$  так, чтобы  $\varphi_{x_0}$  была тождественной функцией, т. е.  $\varphi_{x_0}(y) = y$  для любого  $y$ . Тогда для множества  $\{y \mid y \text{ принадлежит области значений функции } \varphi_{x_0}\}$  в качестве рекурсивной характеристической функции можно взять  $\lambda x[1]$ . В упражнении 2-19 мы увидим, что существуют также такие  $x_0$ , для которых множество  $\{y \mid y \text{ принадлежит области значений функции } \varphi_{x_0}\}$  не обладает рекурсивной характеристической функцией. ■

В каждом из случаев (а) — (ф) для доказательства неразрешимости соответствующей проблемы мы показывали, что проблема

остановки следствия 1-VII сводится к ней, т. е. доказывалось, что если бы мы смогли эффективно решить исследуемую проблему, то мы могли бы воспользоваться этим для получения эффективного метода решения проблемы остановки из следствия 1-VII.

Неразрешимые проблемы пунктов (a)–(f) теоремы I (так же, как теорема 1-VII, теорема 1-VIII) являются частными случаями следующего результата, принадлежащего Райсу [1953]. Пусть  $\mathcal{C}$  — совокупность частично рекурсивных функций одной переменной. Тогда множество  $\{x \mid \varphi_x \in \mathcal{C}\}$  обладает рекурсивной характеристической функцией тогда и только тогда, когда  $\mathcal{C}$  пуста или состоит из всех частично рекурсивных функций одной переменной. Доказательство теоремы Райса дано в упражнении 2-39. Теорема I формулировалась для того, чтобы показать конкретные вводные примеры сводимости и доказательств с помощью сводимости.

## § 2.2. НЕРАЗРЕШИМЫЕ ПРОБЛЕМЫ В ДРУГИХ ОБЛАСТЯХ МАТЕМАТИКИ

Целый ряд классических математических задач касается вопроса существования алгоритмов решения определенных „проблем“. С помощью кодирований, как отмечалось в § 1.10, эти вопросы можно переформулировать как вопросы о существовании рекурсивных функций. В этой последней, более точной, форме целый ряд таких вопросов получил отрицательное решение.

Первые результаты такого рода были обнаружены в математической логике в работах Гёделя, Чёрча и Тьюринга. Результаты Гёделя и Чёрча касались существования алгоритмов („процедур разрешения“) для определения доказуемых формул в конкретных формальных логических системах. Кратко эти результаты будут изложены в § 2.4 и более подробно в последующих главах.

Результаты о неразрешимости были получены в теории чисел и алгебре. Рассмотрим полиномы от любого числа переменных с рациональными коэффициентами. Рассмотрим проблему определения по любому такому полиному, имеет он действительное решение или нет ( $\langle r_1, \dots, r_k \rangle$  — решение полинома  $p(x_1, \dots, x_k)$ , если  $p(r_1, \dots, r_k) = 0$ ). Эта проблема разрешима. Известные методы анализа (включающие, например, теорему Штурма) дают алгоритм решения (см. работу Тарского [1948]). Существует ли он решение в рациональных числах („диофантовы корни“)? „Проблема“, связанная с этим вопросом, известна под названием *десятой проблемы Гильберта*. В настоящее время не известно, является ли эта проблема рекурсивно разрешимой<sup>1)</sup>. Дэвис, Патнам и Дж. Рон

<sup>1)</sup> Как показал Ю. В. Матиасевич [1970], десятая проблема Гильберта не является рекурсивно разрешимой. — Прим. ред.

бинсон [1961] показали, что рекурсивно неразрешима проблема, близкая к диофантовой, а именно проблема определения по любому показательному полиному, имеет ли он решение в неотрицательных целых числах. *Показательный полином* — это форма, подобная полиному с неотрицательными коэффициентами, в которой переменная может быть показателем.

Теория групп дает пример неразрешимости в алгебре. Запись группы — это конечный список образующих и соотношений, определяющих группу. (Мы здесь не определяем эти термины.) Проблема определения по записи любой группы и любому слову из образующих, можно ли преобразовать это слово в единицу согласно соотношениям группы, известна как *проблема тождества* в теории групп. Новиков [1955] и Бун [1957] показали, что эта проблема рекурсивно неразрешима. Более того, каждый из них указал одну конкретную группу, для которой не существует алгоритма для распознавания равенства слов единице. Эти результаты, доказывающие рекурсивную неразрешимость проблемы тождества в теории групп, завершили ряд результатов (этих авторов и других), показывающих рекурсивную неразрешимость проблемы эквивалентности для различных более слабых алгебраических структур<sup>1</sup>). Отметим еще, что проблема определения по записи любой группы, имеет ли данная группа рекурсивно разрешимую проблему тождества, в свою очередь рекурсивно неразрешима (см. аналогичный результат в упражнении 2-29).

Результаты о неразрешимости были получены также в топологии. Проблема определения, когда явно заданы две триангуляции четырехмерных многообразий, гомеоморфны эти многообразия или нет, является рекурсивно неразрешимой (см. работы Маркова [1958]). (Проблема для двумерных многообразий решается хорошо известными методами.)

Для доказательства рекурсивной неразрешимости проблем, лежащих вне теории рекурсивных функций, почти всегда используется метод сведения. Исследуемая проблема связывается с неразрешимой проблемой теории рекурсивных функций — обычно какой-нибудь формой проблемы остановки. Так, для получения результата о неразрешимости для показательных уравнений Дэвис, Патнам и Дж. Робинсон [1961] построили эффективную процедуру, согласно которой для любого  $x$  можно получить такой показательный полином — назовем его  $E_x$ , — что  $E_x$  имеет решение в неотрицательных целых числах тогда и только тогда, когда  $\varphi_x(x)$  сходится.

<sup>1)</sup> Для более слабых структур, где не всегда имеется единица, проблему эквивалентности можно сформулировать как проблему определения по любым двум словам, можно ли одно из них преобразовать в другое, согласно соотношениям структуры.

Описание такой процедуры сведения и доказательство того, что она обладает нужными сводящими свойствами, может быть полным только при детальном изучении формализма рекурсивных функций и исследовании более глубоких фактов о конкретных математических объектах (например, показательно-диофантовы уравнений), фигурирующих в данной проблеме. (На самом деле приходится доказывать, что объекты нашей проблемы достаточно гибки, чтобы "выразить" все случаи проблемы остановки.)

Ряд результатов о неразрешимости в логике, теории чисел и алгебре вместе с детальными доказательствами приведен в книге Дэвиса [1958]. Эти результаты представляют собой интересное и жизненное приложение теории рекурсивных функций, однако здесь мы опускаем их подробное изложение. Мы ограничимся только "проблемами" самой теории рекурсивных функций, проблемами, где для доказательства неразрешимости удобно использовать тезис Чёрча.

### § 2.3. СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЧАСТИЧНОРЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

В § 2.1. и 2.2 мы интересовались, существуют ли некоторые рекурсивные характеристические функции. Мы рассмотрим еще несколько вопросов, касающихся существования или несуществования частично рекурсивных функций.

Во-первых, всякую ли частично рекурсивную функцию можно продолжить до всюду определенной рекурсивной функции? Теорема II дает отрицательный ответ на этот вопрос.

**Теорема II.** Существует такая частично рекурсивная функция  $\psi$ , что никакая общерекурсивная функция  $f$  не является продолжением функции  $\psi$ , т. е. не верно, что

$$(\forall x) [\psi(x) \text{ сходится} \Rightarrow \psi(x) = f(x)].$$

**Доказательство.** Используется диагональная процедура. Определим  $\psi$  следующим образом: чтобы вычислить  $\psi(x)$ , надо найти  $P_x$  и применить  $P_x$  к  $x$ ; как только появится выход (если это произойдет), надо взять  $\varphi_x(x) + 1$  в качестве значения  $\psi(x)$ . По тезису Чёрча  $\psi$  частично рекурсивна ( $\psi$  — это  $\lambda x [\varphi_{z_0}(x, x) + 1]$ , где  $\varphi_{z_0}$  — универсальная функция теоремы I-IV). Имеем

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ сходится;} \\ \text{расходится,} & \text{если } \varphi_x(x) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Пусть  $f$  — произвольная общерекурсивная функция, и пусть  $y$  — номер функции  $f$ , т. е.  $f = \varphi_y$ . Так как функция  $f$  всюду определена, то  $f(y) = \varphi_y(y)$  определено. Следовательно,  $\psi(y)$  опре-

делено и

$$\psi(y) = f(y) + 1.$$

Поэтому  $f$  не может быть продолжением функции  $\psi$ . ■

**Замечание.** Пусть  $P_{x_1}$  — набор инструкций для  $\psi$  в предыдущем доказательстве. Поучительно посмотреть, что произойдет, если  $P_{x_1}$  применяется к  $x_1$ , т. е. когда мы пытаемся вычислить  $\psi(x_1)$ . При применении  $P_{x_1}$  к  $x_1$  вычислителю предлагается сначала найти инструкции с номером  $x_1$  и применить их к  $x_1$ . Но последняя ситуация снова приводит к применению  $P_{x_1}$  к  $x_1$ . Таким образом, получается бесконечная последовательность одинаковых ситуаций, в каждой требуется применить  $P_{x_1}$  к  $x_1$  и вычисление не может закончиться. По этой причине  $\psi(x_1)$  не определено.

**Теорема 1-X,** теорема о нормальной форме, предлагает несколько новых вопросов о частично рекурсивных функциях. Можно ли любую частично рекурсивную функцию получить из некоторой общерекурсивной функции однократным применением оператора  $\mu$ ? Можно ли опустить функцию  $r$  в формулировке теоремы о нормальной форме? Теорема III дает отрицательный ответ на оба вопроса.

**Теорема III.** Существует такая частично рекурсивная функция  $\psi$ , что для любой общерекурсивной функции  $f$  не верно, что

$$\psi = \lambda x[\mu y[f(x, y) = 1]].$$

**Доказательство.** Определим частично рекурсивную функцию  $\psi$  следующим образом. Чтобы вычислить  $\psi(x)$ , найдите  $P_x$ , примените  $P_x$  к  $x$ ; как только появится выход (если это произойдет), положите  $\psi(x) = x$ . Очевидно, что  $\psi$  частично рекурсивна. Кроме того,

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ сходится;} \\ \text{расходится,} & \text{если } \varphi_x(x) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Предположим, что существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что для любого  $x$   $\psi(x) = \mu y[f(x, y) = 1]$ . Тогда

$$\varphi_x(x) \text{ сходится} \Rightarrow f(x, x) = 1$$

и

$$\varphi_x(x) \text{ расходится} \Rightarrow (\forall y)[f(x, y) \neq 1] \Rightarrow f(x, x) \neq 1.$$

Определим функцию  $g$  так:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x, x) = 1; \\ 0, & \text{если } f(x, x) \neq 1. \end{cases}$$

Она рекурсивна, так как  $f(x, x)$  определена при любом  $x$ . Но тог<sup>g</sup> — характеристическая функция множества  $\{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\}$  что противоречит следствию 1-VII.

Дальнейшие результаты о частично рекурсивных функциях приводятся в упражнениях 2-13 и 2-30—2-38.

#### § 2.4. ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятие рекурсивной функции играет главную роль в современных исследованиях по математической логике и основаниям математики. Используя это понятие, можно придать прозрачный смысл ряду основных результатов современной логики (XIX и XX веков). Два, быть может, самых главных результата современной логики состоят в следующем: (1) построен точный символический язык, на котором можно сформулировать все теоремы и проводить все доказательства математики и с помощью которого можно дать комбинаторный символический критерий правильности доказательства; (2) доказано несуществование универсальной алгоритмической процедуры определения, верно ли высказывание этого символического языка<sup>1</sup>). Первые результаты появились в начале этого века в работах Фрехе, Рассела, Уайтхеда (которые в свою очередь опирались на работы Буля, Пирса и других математиков XIX века). В *Principia mathematica* Уайтхеда и Рассела [1910] изложили значительную часть математики на таком точном символическом языке. (Исследование этого языка и подобных математических языков является главным предметом *математической логики*.) Затем математики стали искать универсальную алгоритмическую „разрешающую процедуру“ для определения истинности суждений такого языка. В течение 20-х годов целый ряд математиков активно участвовал в этих поисках. Был достигнут частичный прогресс, и некоторые верили, что успех близок. Гёдель в своей эпохальной работе [1931] показал, что невозможен такой алгоритм из довольно широкого класса, который можно было рассматривать как класс подобных разрешающих процедур<sup>2</sup>). За работой Гёделя (*теоремы Гёделя о неполноте*) последо-

<sup>1</sup>) Оба направления предвосхитил в своих работах математик и философ XVII века Лейбниц, который указывал две цели науки и философии: (1) открытие универсального точного символического языка (*characteristica universalis*), в котором можно было бы сформулировать все утверждения науки и благодаря которому можно было бы получать ясное представление о смысле и справедливости этих утверждений; (2) открытие такого метода (*calculus ratiocinator*) преобразований суждений языка, который позволил бы непосредственно разъяснить их смысл и соотношение.

<sup>2</sup>) Такое заключение не формулируется в работе Гёделя. Но очевидно, что методы Гёделя можно применить для доказательства непригодности любого алгоритма из класса, включающего все алгоритмы того типа, которым тогда занимались (см. работы Эрбрана [1931, 1931a], а также Гёделя [1931, стр. 197]). Аргументы в пользу очевидности можно изложить следующим

вало общее изучение рекурсивности. Последующие работы по формализации рекурсивных функций (§ 1.5) и по Основному результату (§ 1.6) показали, что на самом деле широкий класс алгоритмов, к которым применим метод Гёделя, включает все алгоритмы (см. работы Чёрча [1936]) и, следовательно, не существует универсальной разрешающей процедуры. (Как указывалось в работе Клини (см. теорему 1-VII), существование рекурсивно неразрешимых проблем является прямым и почти тривиальным следствием формализации. Основной результат вместе с тезисом Чёрча показывает, что любое доказательство рекурсивной неразрешимости само по себе есть абсолютное доказательство невозможности универсальной разрешающей процедуры.)

Как мы увидим, теория рекурсивных функций обеспечивает значительное развитие способности проникать в природу неразрешимости и в ее связи с математической логикой. В этой книге мы главным образом будем иметь дело с понятиями и структурами, возникающими из-за феномена неразрешимости.

#### § 2.5. ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты и примеры этой главы наводят на мысль, что неразрешимые проблемы можно расклассифицировать по способам и степени сводимости их друг к другу. Как можно уточнить понятие сводимости? В работе Поста [1944] определено несколько различных типов сводимости и начато исследование получающейся классификации. В гл. 6—10 будут изложены результаты этой и более поздних работ.

Включают ли в себя в каком-нибудь смысле все примеры неразрешимости неразрешимость проблемы остановки (теорема и следствие 1-VII)? Другими словами, сводится ли проблема остановки

образом. Гёдель использовал *кодирование* формул (т. е. предложений формализма Уайтхеда и Рассела) теории чисел натуральными числами. Пусть  $A$  — произвольное множество, определимое в теории чисел, т. е. выражимое как  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , где  $\dots, x_1, \dots$  — предложение теории чисел, включающее переменную „ $x$ “. Гёдель предложил метод, согласно которому для любого такого множества  $A$  можно найти формулу  $\theta$  с кодовым номером  $z_0$ , очевидный и непосредственный смысл которой есть  $z_0 \notin A$ . (Этот метод описывается в § 11.6.) Теперь для любого алгоритма (того рода, который изучался математиками, искавшими универсальную разрешающую процедуру), очевидно (с помощью *кодирования*), можно найти множество  $A$ , определимое в элементарной теории чисел, такое, что для любого  $x \in A$  тогда и только тогда, когда  $x$  есть кодовый номер формулы, которую данный алгоритм признает истинной. Применяя метод Гёделя, чтобы получить соответствующие  $\theta$  и  $z_0$ , мы увидим, что или (i) формула  $\theta$  верна, в этом случае  $z_0 \notin A$  и алгоритм скажет, что  $\theta$  ложна, или (ii) формула  $\theta$  ложна, в этом случае  $z_0 \in A$  и алгоритм скажет, что эта ложная формула верна. В обоих случаях алгоритм не дает верного результата. В первоначальной работе Гёделя говорится о непротиворечивости и доказуемости в некоторых формальных теориях. В гл. 7 и 11 мы изложим эти конкретные результаты.

ко всякой неразрешимой проблеме? Верно ли, что неразрешимость любой неразрешимой проблемы можно доказать сведением к не проблеме остановки? Этот вопрос (для интересного класса проблем, названных *рекурсивно перечислимими проблемами*<sup>1)</sup>) является одним из главных вопросов работы Поста [1944]. В ней приводится решение для некоторых видов сводимости. Однако для наименее общего и важного варианта понятия сводимости отсутствует известен вплоть до работ Мучника [1956] и Фридберга [1957] (гл. 10).

## § 2.6. УПРАЖНЕНИЯ<sup>2)</sup>

### § 1.1—1.10]

**Δ2-1.** Покажите, что функция  $g$ , определенная в § 1.3, примитивнорекурсивна. (*Указание.* Пусть  $\hat{h} = \lambda x[\max(0, x - 1)]$ ,  $h = \lambda xy[\max(0, x - y)]$ ,  $f = \lambda x[\min(x, 1)]$ . Покажите, что  $\hat{h}$  и  $h$  примитивнорекурсивны. Используйте  $\hat{h}$  для доказательства примитивнорекурсивности  $h$ . Используйте  $h$  и  $f$  для получения  $g$ .)

**2-2.** Определим  $f$  так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_x(x) = 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рекурсивна ли функция  $f$ ?

**2-3.** Рассмотрим перечисление всех примитивнорекурсивных схем, описанное в § 1.4. Пусть  $f_x$  — примитивнорекурсивная функция, определяемая  $(x + 1)$ -й схемой в этом перечислении,  $x = 0, 1, 2, \dots$ . Положим  $g = \lambda xy[f_x(y)]$ . Рекурсивна ли функция  $g$ ? Примитивнорекурсивна ли она?

**2-4.** Для любого  $k \geq 1$  определите “проблему остановки для частично рекурсивных функций  $k$  переменных”. Покажите, что она рекурсивно неразрешима. (*Указание.* Используйте метод сведения теоремы 1-VII.)

**2-5.** Конфигурацию (см. § 1.5) назовем *конечной*, если все ячейки, за исключением конечного числа, пусты. Каждую конечную конфигурацию можно описать однозначно определяемым минимальным выражением, а именно тем выражением (см. § 1.5), в котором нет лишних символов  $B$ .

(a) Используя эти минимальные выражения, опишите кодирование конечных конфигураций натуральными числами.

(b) Если даны машины Тьюринга и конечная конфигурация, то машину можно установить в этой конфигурации и осуществлять соответствующее вычисление. (Если внутреннее состояние конфигурации отсутствует в четырех ячейках машины, то машина ничего не делает.) Когда вычисление заканчивается

<sup>1)</sup> Проблема называется *рекурсивно перечислимой*, если она относится к множеству или отношению натуральных чисел, которое можно эффективно перечислить, т. е. когда множество или отношение пусто или является областью значений некоторой рекурсивной функции; при этом отношение есть область значений функции при подходящем кодировании ячеек натуральными числами. Все проблемы, о которых идет речь в § 2.2, рекурсивно перечислимые. Проблемы из теоремы 1-VII и следствия 1-VIII из пунктов (b), (c), (f), (g) теоремы I рекурсивно перечислимые. Проблемы из теоремы 1-VIII и пунктов (a), (d) и (e) теоремы I таковыми не являются. Рекурсивная перечислимость будет рассматриваться в гл. V.

<sup>2)</sup> Упражнения группируются по соответствующим параграфам основного текста. В упражнениях к гл. 1 иногда используются методы и понятия гл. 2.

вается (если это происходит), получается заключительная конечная конфигурация. Следовательно, при фиксированном кодировании (a) каждая машина дает функцию одной переменной. Пусть  $\Psi_z$  — функция, определяемая таким способом машиной  $P_z$ . (Машина  $P_z$  — это машина, обычным образом вычисляющая  $\Psi_z$ . Чтобы найти  $\Psi_z(y)$  для данного  $y$ , следует разыскать конфигурацию с кодовым номером  $y$ , установить  $P_z$  в этой конфигурации и, как только она останавливается (если это произойдет), взять кодовый номер заключительной конфигурации в качестве  $\Psi_z(y)$ .) Частично рекурсивна ли  $\Psi_z$  при всяком  $z$ ?

(c) Содержит ли класс  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  все частично рекурсивные функции одной переменной? (*Указание.* Покажите, что при любом  $z$  область определения функции  $\varphi_z$  пуста или бесконечна.)

(d) Существует ли универсальная частично рекурсивная функция для класса  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ ? (Такую функцию можно было бы назвать *общеуниверсальной функцией*, так как ее можно использовать для дублирования результатов любой машины Тьюринга, начинаяющей работу в любой конечной конфигурации.)

(e) Покажите тривиальным сведением к теореме 1-VII, что отношение  $\{(x, y) \mid \varphi_x(y) \text{ сходится}\}$  не обладает рекурсивной характеристической функцией. (Это дает неразрешимость проблемы, которую можно было назвать *общей проблемой остановки* для машин Тьюринга.)

(f) Покажите, что для множества  $\{z \mid \text{Arg } \varphi_z = \emptyset\}$  существует рекурсивная характеристическая функция (сравните с результатом упр. 2-17 (b)).

(Замечание. В частном сообщении Марвин Минский и Хилари Патнам заявили, что  $\{z \mid \varphi_z \text{ всюду определена}\}$  не обладает рекурсивной характеристической функцией (см. также упражнение 2-9).)

**2-6.** Пусть  $\{S_0, S_1, \dots\}$  — бесконечный алфавит символов, имеющихся в распоряжении машин Тьюринга (дополнительно к  $B$  и  $I$ ). Изменим определение машины Тьюринга так, чтобы допускалось использование любого из этих символов (разумеется, любая машина состоит из конечного списка четверок). Изменим определение конечной конфигурации так, чтобы допускалось присутствие этих символов на ленте.

(a) Опишите кодирование этих новых конечных конфигураций.

(b) Покажите, что все результаты упражнения 2-5 полностью переносятся на случай этих новых машин и конфигураций, если нумерацию, задаваемую обозначением  $\langle P_z \rangle$ , заменить на соответствующую нумерацию новых машин.

**2-7.** Дайте более формальное доказательство теоремы 1-VIII, аналогичное более формальному доказательству теоремы 1-VII.

**2-8.** Докажите теорему 1-XI. (*Указание.* Используйте неразрешимость проблемы остановки.)

**2-9.** Пусть  $A = \{x \mid \varphi_x \text{ — всюду определенная функция}\}$ . Докажите, что не существует такой рекурсивной функции  $f$ , что  $\text{val } f = A$ . (*Указание.* См. доказательство теоремы 1-VIII.)

**2-10.** Пусть  $\mathcal{P}$  — класс всех частично рекурсивных функций одной переменной. Пусть  $\pi$  — произвольное отображение множества  $N$  на  $\mathcal{P}$ . Оно называется *нумерацией* частично рекурсивных функций одной переменной. Стандартная гёделева нумерация в § 1.8 дает такую нумерацию; назовем ее  $\pi_0$ . Нумерация  $\pi$  допустима, если можно эффективно переходить от  $\pi$  к  $\pi_0$  и от  $\pi_0$  к  $\pi$ , т. е. если выполняются следующие два условия:

*Условие 1.* Существует общерекурсивная функция  $f$  (не обязательно взаимно однозначная), такая, что  $\pi_0 f = \pi$ . (Для любого  $\pi_0$ -номера можно найти  $\pi$ -номер.)

*Условие 2.* Существует общерекурсивная функция  $g$  (не обязательно взаимно однозначная), такая, что  $\pi g = \pi_0$ . (Для любого  $\pi_0$ -номера можно найти  $\pi$ -номер.)

(a) Покажите, что любое эффективное перечисление всех машин Тьюринга дает допустимую нумерацию.

(b) Покажите, что условие 1 необходимо и достаточно для того, чтобы  $\pi$

обладало частичнорекурсивной универсальной функцией, т. е. чтобы выполнялся соответствующий вариант теоремы 1-IV, теоремы о нумерации.

(с) Покажите, что условие 2 необходимо и достаточно для того, что для  $\pi$  выполнялась  $s\text{-}m\text{-}n$ -теорема, т. е. чтобы выполнялся соответствующий вариант теоремы 1-V. (Предполагается, что нумерация частичнорекурсивных функций более чем одной переменной остается стандартной нумерацией из § 1.8. Это предположение можно опустить, если так обобщить определен нумерации и условие 2, чтобы они применялись и к частичнорекурсивным функциям более чем одной переменной.)

(д) Покажите, что из условия 2 следует, что  $\pi^{-1}(\psi)$  бесконечно для люб частичнорекурсивной функции  $\psi$  одной переменной, т. е. что для  $\pi$  выполняется соответствующий вариант теоремы 1-III. (Указание. Используйте результат упражнения 2-18 (б).)

**Замечание.** Эти результаты указывают на инвариантность понятия допустимой нумерации и теорем 1-III, 1-IV и 1-V (см. обсуждение в § 1.8). В частности, для любой допустимой нумерации выполняются теорема о нумерации и  $s\text{-}m\text{-}n$ -теорема.

По определению всякая нумерация  $\pi$  охватывает все частичнорекурсивные функции одной переменной. Условие 1 можно рассматривать как требование, чтобы нумерация была „алгоритмической”, т. е. чтобы каждый ном давал алгоритм. Условие 2 можно рассматривать как требование, чтобы нумерация была „полней”, т. е. чтобы охватывались все алгоритмы (см. замечание после части III Основного результата в § 1.6 и упражнение 2-11).

△2-11. Предполагается известной терминология упражнения 2-10. Пусть  $g$  — общерекурсивная функция, задающая взаимно однозначное отображение множества  $N \times N$  на  $N$ . (Любое эффективное перечисление множества  $N \times N$  даст такую функцию  $g$ .) Определим  $\pi_1$ , следующим образом. Если дан  $y$ , находим  $x_1$  и  $x_2$ , такие, что  $g(x_1, x_2) = y$ , затем в качестве  $\psi = \pi_1(y)$  берем частичнорекурсивную функцию, удовлетворяющую следующим условиям

$$\begin{aligned}\psi(0) &= \begin{cases} \text{расходится,} & \text{если } x_1 = 0; \\ x_1 - 1, & \text{если } x_1 \neq 0; \end{cases} \\ \psi(z) &= \varphi_{x_2}(z) \quad \text{для всех } z \neq 0.\end{aligned}$$

(а) Покажите, что  $\pi_1$  — нумерация, т. е. что охватываются все частично рекурсивные функции одной переменной.

(б) Покажите, что для  $\pi_1$  выполняется условие 1, но не выполняется условие 2.

**Замечание.** Итак,  $\pi_1$  — нумерация *всех* частичнорекурсивных функций одной переменной, „не охватывающая *все* алгоритмы”. Для нее выполняется теорема о нумерации, но не выполняется  $s\text{-}m\text{-}n$ -теорема.

2-12. Покажите, что для любой общерекурсивной функции  $f$  одной переменной существует такая рекурсивная функция  $g$ , что

$$f = \lambda x [\mu y [g(x, y) = 1]].$$

△2-13. Покажите, что частичнорекурсивные функции не замкнуты относительно оператора  $\mu$ , т. е. что существует частичнорекурсивная функция  $\psi$ , такая, что  $\lambda x [\mu y [\psi(x, y) = 1]]$  не частичнорекурсивна. (Указание. Положите  $\psi(x, y) = 1$ , если  $y = 1$  или если одновременно  $y = 0$  и  $\varphi_x(x)$  расходится.)

2-14. Назовем *конечным автоматом* устройство с двумя лентами, каждая из которых может двигаться только в одном направлении. Входные числа располагаются на одной ленте; выходы печатаются на другой. Устройство имеет конечное число внутренних состояний, и его операции определяются конечным набором механических правил, подобно машине Тьюринга. Операции стирания не используются.

(а) Является ли рекурсивно разрешимой следующая проблема: определить по произвольному конечному автоматау и произвольному входу, заканчивается ли это соответствующее вычисление?

(б) Является ли рекурсивно разрешимой следующая проблема: определить по произвольному конечному автоматау, дает он всюду определенную функцию или нет?

(с) Класс функций, вычислимых такими конечными автоматами, зависит от принятого способа изображения числовых входов и выходов. Пусть  $\mathcal{A}_n$  — класс функций, получающихся, когда числа как входа, так и выхода записываются по основанию  $n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Пусть  $\mathcal{A}_1$  — класс функций, получающейся, когда как входы, так и выходы записываются в виде последовательности единиц, при этом число  $x$  изображается последовательностью из  $x + 1$  единиц. Покажите, что  $\lambda x [2x]$  принадлежит  $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ .

△ (d) Покажите, что  $\lambda x [x^2]$  не содержитя в  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ .

(e) Дайте пример чисел  $n, m \geq 2$ , таких, что  $\mathcal{A}_n \neq \mathcal{A}_m$ . Покажите, что  $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_n$  для любого  $n \geq 2$ . Покажите, что в  $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$  содержатся неотрицательные части всех линейных функций.

(f) Опишите  $\mathcal{A}_1$ . (Ответ: функция принадлежит  $\mathcal{A}_1$ , тогда и только тогда, когда она равна всюду, кроме конечного числа точек, функция, которую можно представить в виде суммы функций типа  $m[x/n] + q$  (линейно-ступенчатой функции неотрицательного наклона) и периодической функции с периодом  $n$ .) Докажите теорему об однозначности разложения.

2-15. Покажите, что существует рекурсивная функция  $h$ , такая, что для любой примитивнорекурсивной функции  $g$

$$(\exists x)(\forall y)[x \leqslant y \Rightarrow g(y) < h(y)].$$

△2-16. Можно ли из следующих предположений, не используя никаких других фактов о числе  $\pi$ , заключить, что  $f$  примитивнорекурсивна: (i)  $f$  — это функция, упомянутая как  $f$  в первом абзаце § 1.5; (ii) функция, описанная в (c) в § 1.1 примитивнорекурсивна; (iii)  $f$  всюду определена? (Указание. Покажите, что существует действительное число  $\rho$ , такое, что  $g = \lambda x [\text{натуральное число} \leqslant 9, \text{ чья цифровая запись находится на } (x+1)\text{-м месте в десятичном разложении числа } \rho]$  примитивнорекурсивна и что  $\hat{f} = \lambda x [\text{место самой левой цифры первой последовательности из } x \text{ или более цифр 5 в разложении } \rho]$  всюду определена, но не примитивнорекурсивна. Возьмите  $t, p, q$  из § 1.10 (можно предполагать, что они примитивнорекурсивны) и, пользуясь функцией  $h$ , построенной в упражнении 2-15, укажите это  $\rho$  так:  $\rho$  состоит только из цифр 0 и 5;  $g$  примитивнорекурсивна (используйте  $p, q$  и  $\lambda xy[t(z_0, x, y)]$ , где  $\Phi_{z_0} = h$ ) и  $(\forall x)[h(x) < \hat{f}(x)]$ . Опыт обращения с примитивнорекурсивными функциями полезен, хотя и не необходим.)

## § 2.1

2-17. Докажите непосредственно (т. е. без обращения к теореме Райса, сформулированной в конце § 2.1), что ни одно из следующих множеств не обладает рекурсивной характеристической функцией:

(a)  $\{x \mid \text{Arg } \varphi_x \text{ бесконечна}\}$ .

(b)  $\{x \mid \text{Arg } \varphi_x \text{ пуста}\}$ .

(c)  $\{(x, y) \mid \text{Arg } \varphi_x = \text{Arg } \varphi_y\}$ .

2-18. Покажите непосредственно, что при любом  $z_0$  ни одно из следующих множеств не обладает рекурсивной характеристической функцией:

(a)  $\{x \mid \text{Arg } \varphi_x = \text{Arg } \varphi_{z_0}\}$ .

(b)  $\{x \mid \varphi_x = \varphi_{z_0}\}$ .

(Указание для (a). Рассмотрите отдельно случаи  $\text{Arg } \varphi_{z_0} = \emptyset$  и  $\text{Arg } \varphi_{z_0} \neq \emptyset$ .)

**2-19.** Завершите доказательство теоремы 2-I (g), показав, что существует такое  $x_0$ , что  $\text{Val } \varphi_{x_0}$  не обладает рекурсивной характеристической функцией. (Указание. См. доказательство теоремы 2-III.)

**2-20.** Покажите, что существуют такие  $x_1$  и  $x_2$ , что  $\text{Arg } \varphi_{x_1}$  обладает рекурсивной характеристической функцией, а  $\text{Arg } \varphi_{x_2}$  не обладает.

**2-21.** Выполните пункты (b) и (c) упр. 2-17 с заменой „val” на „Arg”.

**2-22.** Выполните пункт (a) упражнения 2-18 с „Val” вместо „Arg”.

**2-23.** Покажите, что проблема теоремы 1-VII непосредственно сводится к проблеме следствия 1-VII. (Указание. Используйте конструкцию, подобную использованной в доказательстве теоремы 2-I (e).)

**2-24.** Покажите, что проблема (c) в теореме 2-I сводится к проблеме остановки.

**△2-25.** Покажите что проблемы (b) и (f) теоремы 2-I сводятся к проблеме остановки.

**△2-26.** Покажите, что ни одна из проблем (a), (d) и (e) в теореме 2-I сводится к проблеме остановки.

**△2-27.** Пусть  $f$  и  $g$  — общерекурсивные функции, такие, что для некоторого множества  $A$   $A = \text{Val } f$  и  $\bar{A} = \text{Val } g$ . Обладает ли  $A$  рекурсивной характеристической функцией?

**△2-28.** Изменим определение машины Тьюринга, введя дополнительные  $q_0, q_1, \dots$  специальное внутреннее состояние  $q^*$ . Изменим способ соединения функций с машинами, обусловив, что должны использоваться только выходы, когда машина останавливается в состоянии  $q^*$ . Следовательно при данном входе может не получиться выход по двум причинам: (1) не заканчивается вычисление; (2) вычисление закончилось, но не в состоянии  $q^*$ . Первую ситуацию назовем бесконечной сингулярностью, вторую — блокированной сингулярностью.

(a) Получается ли таким способом любая частичнорекурсивная функция? Если да, то дает ли эффективное перечисление таких модифицированных машин допустимую нумерацию в смысле упражнения 2-10?

(b) Разрешима ли следующая проблема: определить по любой машине и входу, появится или нет бесконечная сингулярность?

(c) Выполнить (b), где слово „бесконечная” заменено на „блокированная”.

(d) Можно ли „заменить” блокированные сингулярности на бесконечные сингулярности, т. е. существует ли эффективная процедура переделки любой машины  $M$  в новую  $M'$ , такую, что  $M$  и  $M'$  определяют одну и ту же частичную функцию и что у  $M'$  бывают только бесконечные сингулярности?

(e) Можно ли „заменить” бесконечные сингулярности на блокированные сингулярности? (Указание. На (d) и (e) ответы „да” и „нет” соответственно.)

## § 2.2

**△ 2-29.** Рассмотрим „метапроблему” определения по любому  $x_0$ , рекурсивно разрешима проблема (g) теоремы 2-I или нет. Покажите, что эта метапроблема рекурсивно неразрешима, т. е. непосредственно докажите, что множество  $\{x \mid \text{Val } \varphi_x \text{ обладает рекурсивной характеристической функцией}\}$  не обладает рекурсивной характеристической функцией.

## § 2.3

**2-30.** Пусть непустые множества  $A$  и  $B$  — области определения двух частичнорекурсивных функций. Предположим, что  $A \cap B = \emptyset$ .

(a) Всегда ли существует такая частичнорекурсивная функция  $\psi$ , что  $\psi(A) = \{0\}$  и  $\psi(B) = \{1\}$ ?

(b) Всегда ли существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что  $f(A) = \{0\}$  и  $f(B) = \{1\}$ ? (Указание. Докажите теорему 2-II (теорему о продолжении) для случая частичных и всюду определенных функций, области значений которых — подмножества множества  $\{0, 1\}$ .)

**2-31.** Частично рекурсивна ли функция  $\lambda x[\mu y[\varphi_x(y) \text{ расходится}]]$ ?

**△ 2-32.** Пусть  $A$  и  $B$  — области определения двух частично рекурсивных функций. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы  $A$  и  $B$  обладали следующим свойством: существует такая частично рекурсивная функция  $\psi$ , что для любого  $x$   $[\text{Arg } \varphi_x = A \Rightarrow \psi(x) = 0]$  и  $[\text{Arg } \varphi_x = B \Rightarrow \psi(x) = 1]$ .

**2-33.** Рассмотрим проблему определения по любому  $x$ , продолжима ли  $\varphi_x$  до общерекурсивной функции или нет. Является ли эта проблема рекурсивно разрешимой?

**△ 2-34.** Пусть  $A$  и  $B$  — множества. Рассмотрим „проблему” определения по любому  $x \in A$ , верно  $x \in B$  или нет. Скажем, что эта проблема относительно разрешима, если существует частично рекурсивная функция  $\psi$ , такая, что  $[x \in A \cap B \Rightarrow \psi(x) = 1]$  и что  $[x \in A \cap \bar{B} \Rightarrow \psi(x) = 0]$ . Исследуйте на относительную разрешимость следующие проблемы.

(a) Проблема определения по любому такому  $x$ , что  $\varphi_x$  всюду определена, является  $\varphi_x$  постоянной функцией или нет. (В этом случае  $A = \{x \mid \varphi_x \text{ всюду определена}\}$  и  $B = \{x \mid \varphi_x \text{ — постоянная функция}\}$ .)

(b) Проблема определения по любому такому  $x$ , что  $\varphi_x$  всюду определена, является  $\varphi_x$  взаимно однозначной или нет.

(c) Проблема определения по любым  $x, y$  и  $z$ , таким, что функция  $\varphi_x$  всюду определена, выполняется равенство  $\varphi_x(y) = z$  или не выполняется.

(d) Проблема определения по любому такому  $x$ , что  $\varphi_x$  всюду определена, бесконечна или нет область значений  $\varphi_x$ .

(Указание. Для доказательства неразрешимости устройте сведение проблемы остановки (следствие 1-VII), связав с каждым  $z$  общерекурсивную функцию, значение которой на произвольном аргументе  $y$  зависит от результата осуществления  $y$  шагов вычисления  $P_z$  в применении к  $z$ .)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если  $\psi$  — частичная функция двух переменных, то  $\mu \psi = \lambda x[\mu y[\psi(x, y) = 0]]$ .

**2-35.** Какие функции попадают в класс  $\{f \mid (\exists \text{ рекурсивная } g) [f = \mu g]\}$ ?

**2-36.** (Успенский [1957].) Если  $\psi$  частично рекурсивна, должна ли  $\mu \psi$  быть частично рекурсивной?

**△ 2-37.** Опишите класс  $\{f \mid f \text{ общерекурсивна} \& (\forall z) (\exists \text{ общерекурсивная } g) [f_z = \mu g]\}$ . (Указание. Рассмотрите функции, которые принимают каждое число в качестве своего значения бесконечно много раз. Связанные с этим понятием результаты см. в работах Маркова [1947] и Кузнецова [1950].)

**△2-38.** Опишите класс  $\{\psi \mid (\exists \text{ общерекурсивная функция } g) [\psi = \mu g]\}$ .

(Указание. Рассмотрите такие функции, которые, как отношение, обладают рекурсивной характеристической функцией. Согласно теореме 2-III, этот класс не охватывает все частично рекурсивные функции. Связанные с этим классом результаты см. в работах Сколема [1944] и Поста [1946].) Упражнения 2-35—2-38 завершают исследование структуры рекурсивных функций, начатое теоремами 1-X и 2-III.

## § 2.5

**2-39. ▲(a)** Докажите теорему Райса, сформулированную в конце § 2.1. (Указание. Покажите, что рекурсивную характеристическую функцию для любого другого случая можно было бы использовать для решения проблемы остановки.)

(b) Выведите как непосредственное следствие этой теоремы, что множество  $\{x \mid \text{Arg } \varphi_x \text{ бесконечна}\}$  не может иметь рекурсивную характеристическую функцию.

(c) Выведите результаты упражнений 2-17, 2-18, 2-29 и 2-33.

- § 3.1. Задачи теории 68
- § 3.2. Направленность этой книги 70
- § 3.3. Обзор содержания 71

## § 3.1. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ

В главах 1 и 2 рассматривались главные черты теории рекурсивных функций в том виде, как она развивалась до 1940 года. Излагались Основной результат, некоторые более технические результаты, такие, как теорема о нумерации (теорема 1-I) и  $s\text{-}t\text{-}n$ -теорема (теорема 1-V), и результаты о рекурсивной неразрешимости конкретных проблем, включая проблему остановки. После 1940 года теория развивалась в самых разнообразных направлениях. Направления и результаты этих более современных исследований можно сгруппировать по шести областям. (1) *неразрешимые проблемы*; (2) *структуры неразрешимости*; (3) *математическая логика и основания математики*; (4) *субрекурсивность*; (5) *рекурсивная структура*; (6) *аналоги классических теорий*. В нашем кратком описании такая группировка не сколько искусственна и игнорирует важные связи между исследуемыми понятиями.

### 1. Неразрешимые проблемы

Эта область рассматривалась в гл. 2. Она содержит результаты о разрешимости и неразрешимости конкретных проблем. После 1940 года были развиты очень тонкие методы доказательства неразрешимости и с их помощью был выяснен вопрос о неразрешимости очень широкого класса проблем. Несколько типичных результатов этого рода сформулированы в § 2.2. Дальнейшие усилия направляются также на исследование разрешимых проблем и выделение разрешимых под случаев более общих неразрешимых проблем.

### 2. Структуры неразрешимости

Эта область включает в себя понятия и структуры, возникающие при более общем анализе феномена неразрешимости, т. е. она включает понятия, оказавшиеся полезными при классификации неразрешимых проблем (например, различные точные варианты понятия *сводимости*, упомянутого в гл. 2), и структуры, появившиеся в результате такой классификации. Работы в этой области

получили широкое применение в других областях. Ее понятия, терминология и результаты широко используются, особенно в математической логике и основаниях математики, где целый ряд главных результатов получает наиболее естественное выражение в этих терминах. Можно изучать также более абстрактные и общие типы классификации, определять и исследовать понятие обобщенной вычислимости. Область (2), иногда называемая теорией *рекурсивной инвариантности*<sup>1)</sup>, включает исследование *иерархий*, в которых классификация по сводимости связывается с классификацией по сложности описания в конкретных формализованных логических системах.

### 3. Математическая логика и основания математики

Широкое и глубокое приложение теории рекурсивных функций в логике дало новые результаты и новый взгляд на вещи. Как указывалось в исторических заметках § 2.4, логика по своей природе имеет дело с алгоритмами. Многие конкретные результаты о неразрешимости из области (1) были получены именно в логике (как правило, эти результаты о неразрешимости касаются проблемы распознавания доказуемости высказываний в формализованных дедуктивных системах). Многие синтаксические и семантические понятия (например, *аксиоматизируемость* и *неполнота*) можно переформулировать в терминах теории рекурсивных функций, при этом обнаруживаются более тонкие различия<sup>2)</sup>. Результаты области (2) можно использовать для исследования относительной силы различных логических методов, систем и средств выражения. В современных работах по основаниям математики основную роль играет понятие *конструктивности*; теория рекурсивных функций оказалась полезной при переформулировке и анализе различных понятий конструктивного доказательства и при выяснении конструктивного смысла известных классических доказательств.

### 4. Субрекурсивность

Исследование обобщенных форм рекурсивности входит в область (2). Область (4) имеет дело с понятиями вычислимости, более ограниченными, чем рекурсивность, она рассматривает, каким образом можно использовать эти понятия для того, чтобы усовер-

<sup>1)</sup> Рекурсивная инвариантность будет определена в гл. 4.

<sup>2)</sup> Синтаксис — это исследование формализованных систем как чистых формализмов, не вникая в их значение. Семантика (в математической логике) — это исследование соотношения формализованных систем и математических объектов (например, действительных чисел), о которых системы говорят (или которые имеют в виду). Различие между синтаксисом и семантикой интуитивно понятно, но его трудно точно определить.

шествовать и разбить по слоям структуры, возникающие при исследовании обычной рекурсивности. Естественные и важные результаты в этом направлении получаются с трудом. Со временем самых ранних работ по теории рекурсивных функций в эту область были направлены значительные усилия<sup>1)</sup>. (Разумеется, примитивность — пример такого более ограниченного понятия.)

### 5. Рекурсивная структура

Эта область рассматривает способы введения рекурсивной структуры на существующих и известных математических объектах для получения новых и более богатых теорий. Использованием такой структуры аналогично использованию топологической структуры групп для получения теории топологических групп.

### 6. Аналоги классических теорий

Подобно области (5), где теория рекурсивных функций используется для анализа существующих математических объектов и результатов, область (6) имеет дело с определением и исследованием новых математических объектов, являющихся в каком-то смысле рекурсивными аналогами более известных (и нерекурсивных) математических объектов. Нерекурсивные объекты могут использовать несчетные множества или обладать другими неконструктивными чертами. В рекурсивных аналогах все основные множества (самое большое) счетны, для всех основных элементов даны числовые кодовые номера, допускаются только те отображения, которые являются частично рекурсивными на кодовых номерах. Наибольшая работа по аналогам классических теорий проделана в сфере теории множеств. В рекурсивноаналоговой форме исследовались кардинальные числа, ординальные числа, топологические пространства и теория функций действительной переменной. Работы по рекурсивным аналогам вызывают неослабевающий интерес как к тем результатам и взглядам, которые в них высказываются, так и к вопросам, которые там ставятся.

### § 3.2. НАПРАВЛЕННОСТЬ ЭТОЙ КНИГИ

Основной материал этой книги относится к области (2) (структуре неразрешимости) и (в меньшей степени) к области (3) (математическая логика и основания математики). Многие дока-

<sup>1)</sup> Ряд методов и результатов предвосхищают определение рекурсивности и могут рассматриваться как часть поисков удовлетворительного общего определения алгоритма.

зательства будут опираться на полуформальные методы, описанные и обоснованные в гл. 1. Мы оставляем в стороне ту часть области (1) (неразрешимые проблемы), которая касается конкретных проблем в других частях математики. Более формальные методы, необходимые для исследования таких проблем, можно найти в книге Дэвиса [1958]. Как уже делалось в гл. 2, мы используем тезис Чёрча, чтобы проводить полуформальное исследование неразрешимых проблем, возникающих в самой теории рекурсивных функций. Будут изложены некоторые результаты из области (6) (аналоги классических теорий). Будет дано также некоторое представление о работах в областях (4) и (5) (субрекурсивность и рекурсивная структура).

### § 3.3. ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ

В главах 1, 2 и 3 вводится понятие рекурсивности. Формулируется Основной результат, описываются различные примеры разрешимости и неразрешимости. Указана сфера действия и полезности полуформальных методов.

В остальных главах 4—16 определяются и рассматриваются некоторые общие концепции, частным случаем которых являются примеры и идеи гл. 2, с другой стороны, мы продолжаем исследовать понятия, выросшие из них. Обсуждается также использование и появление этих идей в математической логике. Таким образом, главы 4—16 попадают в область (2) (структуре неразрешимости), захватывая часть области (3) (математическая логика и основания математики). Приводятся иногда примеры из областей (4), (5) и (6).

Более конкретно главы 4—16 содержат следующий материал. В гл. 4 используется понятие *рекурсивной инвариантности*, чтобы более точно описать предмет области (2). В гл. 5 вводятся основные понятия рекурсивного и рекурсивно перечислимого множества. В главах 6—9 определяются и исследуются основные понятия сводимости. В гл. 10 обсуждается центральная проблема сводимости, которую не удалось решить Посту (см. § 2.5). В гл. 11 доказывается *теорема о рекурсии*. В изложениях теории рекурсивных функций этот основной и полезный инструмент часто помещают в начало. Однако эта теорема не нужна для предыдущего материала. Мы считаем, что такое расположение ее в этой книге дает обучающемуся более правильное и глубокое представление о ее полезности. Глава 11 включает разнообразные приложения теоремы о рекурсии и заканчивается введением в теорию обозначений для ординалов (аналогов структуру из области (6)). В главах 12 и 13 приводятся дальнейшие результаты об основных структурах гл. 5—9; в гл. 12 рекурсивно перечислимые множества рассматриваются как решетка множеств, в то время как в гл. 13

рассматриваются степени неразрешимости (степень — это класс эквивалентности множеств, где отношение эквивалентности — сводимость друг к другу) при частичном упорядочении по сводимости. Глава 14 вводит в теорию арифметической иерархии (классификацию множеств натуральных чисел по минимальной логической сложности описания) и вскрывает связи этой структуры со степенями неразрешимости, исследованными в гл. 13. В гл. 1 арифметическая иерархия распространяется с классификацией множеств чисел на классификацию классов множеств чисел. В гл. 1 также исследуется понятие рекурсивного функционала. Глава 16 вводит в теорию аналитической иерархии классификацию, подобную арифметической иерархии, но более обширную. В гл. 16 рассматриваются также обобщения понятия эффективной вычислимости. На протяжении всей книги излагаются приложения в математической логике.

Ссылки на литературу не полны. Они делались в том случае, когда был точно известен автор. Иногда встречаются ссылки на работы повышенного уровня, хотя выбор таких ссылок был довольно произвольным.

Примерами работ могут служить: в области (1) работы Дэвиса [1958], Тарского, Мостовского и Робинсон [1953], Рабина и Скотта [1959], Минского [1961] и Дребена [1962]; в области (4) работы Гжегорчика [1953], Фишера [1962], Ричи [1963], Акста [1959] и Фефермана [1961]; в области (5) работы Рабина [1960]; в области (6) работы Деккера и Майхилла [1960], Московакиса [1963] и Кроссли [1965].

## Глава 4. РЕКУРСИВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

§ 4.1. Инвариантность относительно группы	73
§ 4.2. Рекурсивные перестановки	74
§ 4.3. Рекурсивная инвариантность	75
§ 4.4. Сходство	77
§ 4.5. Универсальные функции	77
§ 4.6. Упражнения	79

### § 4.1. ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ

В оставшихся главах книги мы будем иметь дело главным образом с множествами натуральных чисел и с функциями натурального аргумента. Некоторые свойства этих объектов представляют особый интерес. В этой главе мы выделим такие свойства.

Для того чтобы сделать это, мы пойдем по пути Феликса Клейна. Он предлагал определять каждую „ветвь“ математики с помощью *пространства* (т. е. множества) и *группы преобразований*, действующих в этом пространстве. (Группа преобразований пространства — это множество отображений пространства на себя, образующее, алгебраически, группу, если в качестве умножения взять композицию отображений.) Пусть  $\mathcal{X}$  — пространство,  $\mathcal{G}$  — группа. (Например,  $\mathcal{X}$  — двумерное евклидово пространство (множество его точек),  $\mathcal{G}$  — группа всех аффинных преобразований пространства  $\mathcal{X}$  на  $\mathcal{X}$ <sup>1)</sup>.) Будем говорить, что данное свойство подмножеств пространства  $\mathcal{X}$  является  $\mathcal{G}$ -инвариантным, если всякий раз, когда некоторое подмножество обладает этим свойством, этим же свойством обладают и все образы этого подмножества при отображениях из  $\mathcal{G}$ . (В только что упомянутом примере свойство „быть треугольником“  $\mathcal{G}$ -инвариантно; свойство „быть равнобедренным треугольником“ не  $\mathcal{G}$ -инвариантно.) По схеме Клейна ветви математики, определяемая с помощью  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{G}$ , изучает (по определению)  $\mathcal{G}$ -инвариантные свойства. Мы назовем ее  $\mathcal{G}$ -теорией. (Если  $\mathcal{X}$  — евклидова плоскость и  $\mathcal{G}$  — аффинная группа, то  $\mathcal{G}$ -теория будет *аффинной геометрией евклидовой плоскости*, в то время как если  $\mathcal{X}$  — евклидова плоскость и  $\mathcal{G}$  — группа евклидовых преобразований<sup>2)</sup>, эта теория является обычной евклидовой геометрией на плоскости. Понятия аффинной гео-

<sup>1)</sup> Аффинное преобразование плоскости на себя — это отображение, которое переводит прямые в прямые, например сдвиг плоскости. В общем случае оно не сохраняет углы.

<sup>2)</sup> Отображение плоскости на себя евклидово, если его можно представить как композицию преобразований переноса, вращения и отражения.

метрии являются также понятиями евклидовой геометрии, так как евклидова группа — подгруппа аффинной группы.)

Пусть даны  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{G}$ ; пусть  $A$  и  $B$  — подмножества пространства  $\mathcal{X}$ . Положим  $A \equiv_{\mathcal{G}} B$ , если  $B = g(A)$  для некоторого преобразования  $g$  из  $\mathcal{G}$ <sup>1)</sup>. Поскольку  $\mathcal{G}$  — группа, то  $\equiv_{\mathcal{G}}$  является отношением эквивалентности (см. упражнение 4.1). Будем говорить, что  $A$  и  $B$   *$\mathcal{G}$ -изоморфны*, если  $A \equiv_{\mathcal{G}} B$ . Классы эквивалентности будем называть *типами  $\mathcal{G}$ -изоморфизма*. Тогда  *$\mathcal{G}$ -инвариантные свойства* — это свойства (подмножеств пространства  $\mathcal{X}$ ), корректно определенные относительно  *$\mathcal{G}$ -изоморфизма*, т. е. такие, что если какое-нибудь множество  $A$  обладает таким свойством, то все множества,  *$\mathcal{G}$ -изоморфные*  $A$ , обладают этим свойством. В этом смысле типы  *$\mathcal{G}$ -изоморфизма* — основные объекты  *$\mathcal{G}$ -теории*.

Пусть  $\Omega$  — множество  *$\mathcal{G}$ -инвариантных* свойств. Пусть  $\mathcal{J}$  — тип  *$\mathcal{G}$ -изоморфизма*. Если  $\mathcal{J}$  обладает всеми свойствами из  $\Omega$ , то будем называть  $\Omega$  *множеством инвариантов* для  $\mathcal{J}$ . Если, кроме того, никакой другой тип  *$\mathcal{G}$ -изоморфизма* не обладает всеми свойствами из  $\Omega$ , то будем называть  $\Omega$  *полным множеством инвариантов* для  $\mathcal{J}$ .

Понятие  *$\mathcal{G}$ -инвариантности* легко распространить на отношения в  $\mathcal{X}$  (т. е. подмножества множества  $\mathcal{X}^k$ ,  $k > 1$ ); мы сделаем это ниже для тех частных  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{G}$ , с которыми нам предстоит работать.

## § 4.2. РЕКУРСИВНЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ

Рассмотрим следующее множество  $\mathcal{G}^*$  преобразований (т. е. функций) на  $N$  (множестве всех неотрицательных целых чисел).

**Определение.**  $\mathcal{G}^* = \{f \mid f \text{ — общерекурсивная функция, взаимно однозначно отображающая множество } N \text{ на себя}\}$ .

**Теорема 1.**  $\mathcal{G}^*$  — группа преобразований множества  $N$ .

**Доказательство.** Пусть  $f$  и  $g \in \mathcal{G}^*$ . Из того, что  $f$  и  $g$  — отображения множества  $N$  на себя, немедленно получаем, что  $fg$  — отображение  $N$  на себя. Из *взаимной однозначности* функций  $f$  и  $g$  получаем *взаимную однозначность* функции  $fg$ . По теореме 1-VI  $fg$  общерекурсивна. Следовательно,  $fg \in \mathcal{G}^*$ .

Пусть  $f \in \mathcal{G}^*$ . Так как  $f$  взаимно однозначна, то  $f^{-1}$  однозначна, т. е. функция. Так как  $f$  однозначна, то  $f^{-1}$  взаимно однозначна. Так как  $f$  всюду определенная функция, то  $f^{-1}$  — отображение  $N$

<sup>1)</sup> Как указано во введении,  $g(A)$  — сокращение для  $\{y \mid (\exists x)[x \in A \& y = g(x)]\}$ .

на себя. Так как  $f$  — отображение  $N$  на себя, то  $f^{-1}$  — всюду определенная функция. Ее можно вычислять по следующей программе. Чтобы вычислить  $f^{-1}(x)$ , вычисляйте по порядку  $f(0), f(1), f(2), \dots$  до тех пор, пока не найдется  $n$ , такое, что  $f(n) = x$ ; выдайте это  $n$  на выходе. Согласно тезису Чёрча,  $f^{-1}$  общерекурсивна. Следовательно,  $f^{-1} \in \mathcal{G}^*$ .

Так как  $\mathcal{G}^*$  замкнуто относительно композиции и взятия обратного элемента, то это — группа. ■

**Определение.** Функция  $f$  называется *общерекурсивной перестановкой*, если  $f \in \mathcal{G}^*$ . Будем называть  $\mathcal{G}^*$  *группой рекурсивных перестановок*.

Алгебраическая структура группы  $\mathcal{G}^*$  была изучена Кентом [1962]. (Кент рассматривает также различные субрекурсивные подгруппы группы  $\mathcal{G}^*$ .) В упражнениях 4-6 и 4-7 дается несколько отдельных результатов о  $\mathcal{G}^*$ .

## § 4.3. РЕКУРСИВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

**Определение.** Множество  $A$  *рекурсивно изоморфно*  $B$ , если  $A \equiv_{\mathcal{G}^*} B$ , т. е.

$$(\exists f)(f \in \mathcal{G}^* \& f(A) = B).$$

Обозначим это так:

$$A \equiv B.$$

Иногда мы вместо „рекурсивный изоморфизм” будем говорить просто „изоморфизм”.

**Определение.** Совокупность подмножеств из  $N$  назовем *типом рекурсивного изоморфизма*, если оно является типом  *$\mathcal{G}^*$ -изоморфизма*.

**Определение.** Свойство подмножеств множества  $N$  считается *рекурсивно инвариантным*, если оно  *$\mathcal{G}^*$ -инвариантно*.

Почти все понятия в этой книге будут рекурсивно инвариантными. Понятие рекурсивной инвариантности характеризует нашу теорию и служит пробным камнем для определения возможной полезности новых понятий<sup>1)</sup>.

**Примеры.** Рассмотрим следующие свойства:

- (i) *Содержать 7*.
- (ii) *Содержать по крайней мере два элемента*.
- (iii) *Обладать рекурсивной характеристической функцией*.

<sup>1)</sup> Понятия, используемые в исследованиях *субрекурсивности* (разд. 4 § 3.1), могут не быть рекурсивно инвариантными. Подходящие понятия инвариантности в таких случаях можно ввести через подгруппы группы  $\mathcal{G}^*$ .

Свойство (i) не является рекурсивно инвариантным. Свойства (ii) и (iii) рекурсивно инвариантны (см. упражнение 4-9).

Понятие рекурсивной инвариантности следующим образом распространяется на отношения и тем самым на частичные и всюду определенные функции. Пусть  $R \subset N^k$  для некоторого  $k$ . Пусть  $g \in \mathcal{G}^*$ . Положим

$$\begin{aligned} g(R) = & \{\langle y_1, \dots, y_k \rangle \mid (\exists x_1) \dots (\exists x_k) \\ & [\langle x_1, \dots, x_k \rangle \in R \ \& \ y_1 = g(x_1) \dots y_k = g(x_k)]\}. \end{aligned}$$

**Определение.** Пусть  $R \subset N^k$  и  $Q \subset N^k$  для некоторого  $k$ . Тогда  $R$  рекурсивно изоморфно  $Q$ , если

$$(\exists g)(g \in \mathcal{G}^* \ \& \ Q = g(R)).$$

Обозначим это так:  $R \equiv Q$ .

**Определение.** Свойство  $k$ -местных отношений в  $N$  рекурсивно инвариантно, коль скоро выполнено следующее условие: если отношение  $R$  обладает этим свойством, то для любого  $g \in \mathcal{G}^*$  таким же свойством обладает  $g(R)$ .

Особенно интересен случай, когда в качестве отношений рассматриваются функции (и, в частности, всюду определенные функции). Для этого случая специальная формулировка рекурсивного изоморфизма дается теоремой II.

**Теорема II.**  $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow (\exists f)[f \in \mathcal{G}^* \ \& \ \varphi = f^{-1}\psi f]$ .

**Доказательство.** Проиллюстрируем доказательство следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\varphi} & N \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

Если  $\varphi \equiv \psi$ , то  $\psi = f(\varphi)$ <sup>1)</sup> для некоторого  $f \in \mathcal{G}^*$  и

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow f(y) = \psi f(x) \Leftrightarrow y = f^{-1}\psi f(x)$$

и, следовательно,  $\varphi = f^{-1}\psi f$ . Обратно, если  $\varphi = f^{-1}\psi f$ , то

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow y = f^{-1}\psi f(x) \Leftrightarrow f(y) = \psi f(x)$$

и, следовательно,  $\psi = f(\varphi)$ . ■

<sup>1)</sup> Предостережение: символ  $f(\varphi)$  используется в смысле  $f(R)$ ; это не указывает на композицию  $f\varphi$ .

#### § 4.4. СХОДСТВО<sup>1)</sup>

Рекурсивный изоморфизм указывает на подобие в структуре. Более того, с точки зрения теории рекурсивных функций он указывает на тождественность структур. Можно определить более слабое понятие рекурсивного подобия.

**Определение.**  $\varphi$  сходна с  $\psi$ , если существуют рекурсивные перестановки  $f$  и  $g$ , такие, что  $\psi = f^{-1}\varphi g$ .

Легко видеть, что сходство — отношение эквивалентности (см. упр. 4-15)<sup>2)</sup>.

Классы эквивалентности будем называть *типами сходства*. Примеры сходства даны в § 4.5 и в упражнениях. Из изоморфизма, очевидно, следует сходство (см. упр. 4-14, 4-17 и 4-18).

#### § 4.5. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Чтобы проиллюстрировать понятия, введенные выше, мы выясним, является ли понятие *универсальной функции* рекурсивно инвариантным; в § 4.8 было предложено следующее определение универсальной частичной функции.

**Пробное определение.** Универсальная функция — это частично-рекурсивная функция  $\psi$  двух переменных, такая, что  $(\forall x)[\varphi_x = \lambda y[\psi(x, y)]]$ .

Это понятие, рассматриваемое как свойство 3-местных отношений, очевидно, не является рекурсивно инвариантным (см. упражнение 4-19). Поэтому мы дадим новое определение, в котором для простоты заменим функцию двух переменных на функцию одной переменной и которое будет, надеемся, достаточно общим, чтобы быть рекурсивно инвариантным. Согласно этому новому определению,  $\psi$  универсальна, если существует такой способ кодирования упорядоченных пар целых чисел, что применение  $\psi$  к кодовому номеру пары  $\langle x, y \rangle$  дает тот же результат, что и применение  $\varphi_x$  к  $y$ . Более формально получаем следующее

**Определение.** Функция  $\psi$  универсальна, если она частично-рекурсивна и если существует общирекурсивная функция  $f$  двух переменных, такая, что  $(\forall x)[\varphi_x = \lambda y[\psi(f(x, y))]]$ .

Сразу не видно, что это новое понятие рекурсивно инвариантно, так как в определении фигурирует наша фиксированная нумерация частично рекурсивных функций. Однако теорема III показывает

<sup>1)</sup> Отдельные упражнения опираются на § 4.4 и 4.5, но дальнейшие результаты не зависят от § 4.4 и 4.5.

<sup>2)</sup> Для линейных преобразований векторных пространств обычно используются слова *эквивалентен* и *подобен*, что аналогично нашему использованию соответственно *сходства* и *изоморфизма*.

зывает, что оно не только рекурсивно инвариантно, но даже инвариантно относительно сходства<sup>1)</sup>.

**Теорема III.** Если  $\psi$  универсальная и  $g$  и  $h$  — рекурсивные перестановки, то  $\eta = g^{-1}\psi h$  универсальна; т. е. свойство быть универсальной инвариантно относительно сходства.

**Доказательство.** По определению универсальности, существует общерекурсивная функция  $f$  двух переменных, такая, что

$$\varphi_x = \lambda y[\psi f(x, y)].$$

Для любого  $x$   $g\varphi_x$  частично рекурсивна. Более того, у нас есть общерекурсивная функция  $k$ , такая, что

$$\varphi_{k(x)} = g\varphi_x.$$

(Молчаливое использование  $s\text{-}m\text{-}n$ -теоремы.)

Положим  $\hat{f} = \lambda xy[h^{-1}f(k(x), y)]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lambda y[\eta \hat{f}(x, y)] &= \lambda y[g^{-1}\psi h h^{-1}f(k(x), y)] \quad (\text{по определению } \eta \text{ и } \hat{f}) = \\ &= \lambda y[g^{-1}\psi f(k(x), y)] = \\ &= g^{-1}\varphi_{k(x)} \quad (\text{по определению } f) = \\ &= g^{-1}g\varphi_x \quad (\text{по определению } k) = \\ &= \varphi_x. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\eta$  универсальна. ■

**Следствие III(a).** Если функция  $\psi$  универсальна и  $g$  — рекурсивная перестановка, то  $g^{-1}\psi g$  универсальна; т. е. свойство быть универсальной рекурсивно инвариантно.

Из теоремы, между прочим, вытекает, что при рекурсивной перестановке области значений универсальная функция остается универсальной. Итак, имеем

**Следствие III(b).** Если функция  $\psi$  универсальна и  $g$  — рекурсивная перестановка, то  $g\psi$  универсальна.

Составляют ли универсальные функции один тип сходства? В гл. 11 мы покажем в результате более глубоких рассмотрений, что ответ на этот вопрос положителен. На самом деле, мы докажем более сильный результат Блюма, что универсальные функции

<sup>1)</sup> Определение универсальной функции ввел в терминах машин Тьюринга Дэвис [1957]. Ранее Дэвис [1956] определял „универсальную функцию“ как любую частично рекурсивную функцию, к проблеме остановки которой можно свести обычную проблему остановки из теоремы 1-VII. Концепция Дэвиса [1956] отличается от концепции Дэвиса [1957] (этот последний совпадает с нашей). Функция упражнения 4-20, например, универсальна в более раннем смысле, но не в более позднем (см. упр. 2-23).

образуют один тип изоморфизма. Итак, свойство функции быть универсальной является само по себе полным множеством рекурсивных инвариантов.

Какие типы сходства являются также типами изоморфизма? Окончательный ответ на этот вопрос не получен. Единственные известные сейчас случаи — это тип пустой (т. е. нигде не определенной) функции, тип всех функций-констант и тип всех универсальных функций<sup>1)</sup>.

## § 4.6. УПРАЖНЕНИЯ

### § 4.1

**4-1 (a)** Пусть  $\mathcal{G}$  — группа преобразований на  $\mathcal{X}$ , и пусть  $e$  — ее единица. Покажите, что  $e$  как отображение пространства  $\mathcal{X}$  должно быть тождественным отображением.

(b) Покажите, что  $\mathcal{G}$ -изоморфизм — отношение эквивалентности.

### § 4.2

**4-2.** Покажите, что существуют нерекурсивные взаимно однозначные функции, отображающие  $N$  на себя („перестановки“).

**△4-3.** Если  $\psi$  взаимно однозначна и частично рекурсивна, но не всюду определена, обязана ли  $\psi^{-1}$  быть частично рекурсивной?

**4-4.** Верно ли, что существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $(\forall x)(\varphi_x \in \mathcal{G}^* \Rightarrow [\varphi_{f(x)} \in \mathcal{G}^* \& \varphi_{f(x)} = \varphi_x^{-1}])$ ? Если да, то проведите доказательство, подобное доказательству теоремы 1-VI.

**4-5.** Покажите, что множество  $\{x \mid \varphi_x \in \mathcal{G}^*\}$  не обладает общерекурсивной характеристической функцией. Используя упражнение 2-39, проведите доказательство сведением.

**4-6 (a)** Покажите диагональным методом, что не существует эффективной процедуры, согласно которой можно перечислить такое множество гёделевых номеров рекурсивных перестановок, что каждая рекурсивная перестановка имеет по крайней мере один гёделев номер в этом множестве.

(b) Выберите как следствие, что группа рекурсивных перестановок не является конечно порожденной.

**4-7.** Покажите, что существуют рекурсивная перестановка  $g$  и перестановка  $h$ , такие, что  $h^{-1}gh$  не рекурсивна. Выберите как следствие, что  $\mathcal{G}^*$  не является нормальной подгруппой группы всех перестановок. (Указание. Возьмите в качестве  $f$  нерекурсивную перестановку. Положите  $h(x) = x$ , если  $x$  нечетно;  $h(x) = 2f(\frac{1}{2}x)$ , если  $x$  четно. Положите  $g(x) = x + 1$ , если  $x$  четно;  $g(x) = x - 1$ , если  $x$  нечетно.)

**△4-8.** Покажите, что множество  $\{f \mid f \text{ — примитивнорекурсивная перестановка}\}$  не является группой. (Указание. Используйте указание к упражнению 2-16.)

### § 4.3

**4-9.** В примерах, данных в § 4.3, покажите, что свойства (ii) и (iii) являются рекурсивно инвариантными, а свойство (i) — нет.

**1)** Доказательство того, что эти случаи — единственно возможные, привело бы к интересной алгебраической аксиоматизации частично рекурсивных функций.

**4-10.** Рассмотрите следующие свойства множеств:

- (i) Быть пустым.
- (ii) Быть областью значений общерекурсивной функции.
- (iii) Быть областью определения частичнорекурсивной функции.
- (iv) Обладать рекурсивной характеристической функцией.
- (v) Быть бесконечным.
- (vi) Содержать четные числа.
- (vii) Содержать множество, изоморфное множеству всех четных чисел.

Какие свойства рекурсивно инвариантны?

**Δ4-11.** Совпадают ли (v) и (vii) из упр. 4-10 как свойства множеств? (Указание. Очевидно, (vii)  $\Rightarrow$  (v). Если (v)  $\Rightarrow$  (vii), то покажите, как получить соответствующий изоморфизм с четными числами. Если (v)  $\not\Rightarrow$  (vii), то используйте диагональный метод, чтобы получить соответствующий контрпример.)

**4-12.** Рассмотрите следующие свойства функций:

- (i) Обладать бесконечной областью определения.
- (ii) Обладать областью определения, содержащей область значений.
- (iii) Быть общерекурсивной.
- (iv) Быть частичнорекурсивной.
- (v) Обладать областью определения, содержащей четные числа.
- (vi) Обладать областью определения, содержащей множество, изоморфное множеству всех четных чисел.
- (vii) Обладать областью определения, состоящей из семи элементов.

Какие из этих свойств рекурсивно инвариантны?

**Δ4-13.** Покажите, что пересечение (i) и (iv) в 4-12 совпадает с пересечением (vi) и (iv).

**4-14.** Образуют ли рекурсивные перестановки один тип изоморфизма?

#### § 4.4

**4-15.** Покажите, что сходство — отношение эквивалентности.

**4-16.** Какие из свойств из упражнения 4-12 инвариантны относительно сходства?

**4-17.** Постройте примеры: (а) всюду определенной функции, у которой типы сходства и изоморфизма различны; (б) всюду определенной функции, у которой типы сходства и изоморфизма совпадают.

**4-18.** Образуют ли рекурсивные перестановки единственный тип сходства?

#### § 4.5

**4-19.** Покажите, что „пробное определение“ в § 4.5 не является рекурсивно инвариантным. (Указание. Возьмите  $\Phi_{x_1} = \lambda x[x]$  и  $\Phi_{x_2} = \lambda x[x + 1]$ ; используйте такую рекурсивную перестановку  $f$ , что  $f(x_1) = x_2$ .)

**4-20.** Определим частичнорекурсивную функцию  $\iota = \{(x, x)\} \mid \Phi_x(x)$  сходится}. Покажите, что  $\iota$  не универсальна. (Указание. Рассмотрите область значений.)

**4-21.** Покажите, что универсальную функцию нельзя продолжить до общерекурсивной функции. (Указание. Используйте теорему 2-II.)

**▲4-22** (a) Покажите, что универсальные функции образуют единственный тип сходства.

(b) (Блюм). Покажите, что универсальные функции образуют единственный тип изоморфизма.

**4-23.** Пусть  $\psi$  — некоторая универсальная функция, и пусть  $f$  — общерекурсивная функция двух переменных, отображающая  $N \times N$  на  $N$ . Является ли нумерацией в смысле упражнения 2-10 отображение, сопоставляющее каждому  $x$  частичнорекурсивную функцию  $\lambda y[\psi(x, y)]$ ?

## Глава 5. РЕКУРСИВНЫЕ И РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 5.1. Определения	81
§ 5.2. Основная теорема	84
§ 5.3. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые отношения; кодирование $n$ -ок	89
§ 5.4. Теоремы о проекции	92
§ 5.5. Равномерность	95
§ 5.6. Конечные множества	96
§ 5.7. Теорема об однозначности	99
§ 5.8. Упражнения	101

#### § 5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Мы будем изучать свойства множеств натуральных чисел, являющиеся рекурсивно инвариантными, в частности свойства, связанные с разрешимостью и неразрешимостью. Наиболее важным свойством такого рода является свойство множеств обладать рекурсивной характеристической функцией.

**Определение.** Множество *рекурсивно*, если оно обладает общерекурсивной характеристической функцией. (То есть  $A$  рекурсивно тогда и только тогда, когда существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для любого  $x$   $x \in A \Rightarrow f(x) = 1$  и  $x \notin A \Rightarrow f(x) = 0$ .)

На интуитивном уровне,  $A$  рекурсивно, если существует эффективная процедура, позволяющая решить для любого данного  $x$ , принадлежит ли он множеству  $A$  или не принадлежит.

**Примеры.** Следующие множества рекурсивны:

- (i) множество  $\{0, 2, 4, \dots\}$  всех четных чисел;
- (ii)  $N$  и  $\emptyset$ ;
- (iii) произвольное конечное множество;
- (iv) произвольное множество с конечным дополнением.

Множества (iii) и (iv) рекурсивны в силу того, что инструкции для их характеристических функций могут быть получены с использованием соответствующих явным образом выписанных конечных множеств.

Существует  $\aleph_0$  рекурсивных множеств. Из мощностных соображений следует, что должны существовать нерекурсивные множества (поскольку существует  $2^{\aleph_0}$  подмножеств множества  $N$ ). Конкретные примеры нерекурсивных множеств приведены в гл. 1 и 2. Заметим, что из тезиса Чёрча trivialно следует, что если  $A$  рекурсивно, то  $\bar{A}$  рекурсивно.

Тесно связанным с понятием рекурсивности оказывается другое, несколько отличное от рекурсивности, свойство.

**Определение.** Множество  $A$  рекурсивно перечислимо, если или  $A = \emptyset$ , или существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $A$  есть множество значений функции  $f$ .

На интуитивном уровне, множество рекурсивно перечислимо, если существует эффективная процедура для перечисления (возможно, с повторениями) его элементов. Свойства рекурсивности и рекурсивной перечислимости играют центральную роль в дальнейшем рассмотрении. В настоящей главе мы предпримем исследование этих свойств. Непосредственная связь между рекурсивностью и рекурсивной перечислимостью устанавливается следующими теоремами.

**Теорема I.**  $A$  рекурсивно  $\Rightarrow A$  рекурсивно перечислимо.

**Доказательство.** Случай (i).  $A$  пусто. Тогда  $A$  рекурсивно перечислимо по определению.

Случай (ii).  $A$  конечно и  $\neq \emptyset$ . Пусть  $A = \{n_0, n_1, \dots, n_k\}$ . Определим  $f$  следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} n_x & \text{для } x \leq k, \\ n_k & \text{для } k < x. \end{cases}$$

Случай (iii).  $A$  бесконечно. Пусть  $g$  — характеристическая функция множества  $A$ . Определим  $f$  так:

$$\begin{aligned} f(0) &= \mu y[g(y) = 1]; \\ f(x+1) &= \mu y[g(y) = 1 \text{ и } f(x) < y]. \end{aligned}$$

В случаях (ii) и (iii) функция  $f$  общерекурсивна, согласно тезису Чёрча, и  $A = \text{Val } f$ . ■

Приведённое доказательство неконструктивно в том смысле, что, располагая индексом характеристической функции множества  $A$ , мы можем не знать, какой из случаев имеет место (ср. с упр. 2-34 (d)).

**Теорема II.**  $A$  рекурсивно  $\Leftrightarrow$  как  $A$ , так и  $\bar{A}$  рекурсивно перечислимы.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Следует немедленно из теоремы I, так как  $A$  рекурсивно  $\Rightarrow \bar{A}$  рекурсивно.

$\Leftarrow$ . (Фигурировало выше в качестве упр. 2-27.) Если  $A$  или  $\bar{A}$  пусто, рекурсивность множества  $A$  очевидна. Если ни одно из множеств  $A$  и  $\bar{A}$  не пусто, то для некоторых общерекурсивных функций  $f$  и  $g$   $A = \text{Val } f$  и  $\bar{A} = \text{Val } g$ . С привлечением функций  $f$  и  $g$  может быть описана рекурсивная процедура, позволяющая

распознавать принадлежность числа множеству  $A$ : а именно, пусть на принадлежность множеству  $A$  исследуется  $x$ , мы просматриваем по очереди  $f(0), g(0), f(1), g(1), f(2), \dots$ . Если  $x$  оказывается значением функции  $f$ , то  $x \in A$ . Если  $x$  оказывается значением функции  $g$ , то  $x \in \bar{A}$ . Так как  $A \cup \bar{A} = N$ ,  $x$  непременно должно оказаться или значением  $f$ , или значением  $g$ . На более интуитивном уровне эта процедура может быть описана следующим образом: одновременно порождаются списки для множеств  $A$  и  $\bar{A}$ ; в то же самое время осуществляется зигзагообразный поиск  $x$  в двух списках. Когда-то  $x$  должно появиться. Список, в котором появляется  $x$ , определяет, принадлежит ли  $x$  множеству  $A$  или множеству  $\bar{A}$ . ■

Мы увидим в § 5.2, что обращение теоремы I места не имеет и, следовательно, согласно теореме II, возможно рекурсивно перечислимое множество, дополнение которого рекурсивно перечислимым не является.

Существует  $\aleph_0$  рекурсивно перечислимых множеств. Из мощностных соображений следует, что должны существовать множества, не являющиеся рекурсивно перечислимыми; таким будет  $\{x \mid \varphi_x$  общерекурсивна (упр. 2-9, являющееся следствием теоремы 1-VIII, показывает, что  $\{x \mid \varphi_x$  общерекурсивна не рекурсивно перечислимом).

Следующие специальные виды рекурсивной перечислимости приводят к частичному обращению теоремы I.

**Определение.** Множество  $A$  рекурсивно перечислимо в порядке неубывания, если существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $A = \text{Val } f$  и  $f$  — неубывающая функция  $((\forall x)(\forall y)[x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)])$ .

**Определение.** Множество  $A$  рекурсивно перечислимо в порядке возрастания, если существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $A = \text{Val } f$  и  $f$  — возрастающая функция  $((\forall x)(\forall y)[x < y \Rightarrow f(x) < f(y)])$ .

**Теорема III (a).**  $[A$  рекурсивно  $\&$   $A \neq \emptyset] \Leftrightarrow A$  рекурсивно перечислимо в порядке неубывания.

(b).  $[A$  рекурсивно  $\&$   $A$  бесконечно]  $\Leftrightarrow A$  рекурсивно перечислимо в порядке возрастания.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$  для (a) и (b). Легко устанавливается с привлечением функций, построенных в случаях (ii) и (iii) доказательства теоремы I.

$\Leftarrow$  для (a). Рассмотрим следующие два случая:

Случай (i).  $A$  конечно. Тогда  $A$  рекурсивно, поскольку рекурсивно любое конечное множество.

**Случай (ii).**  $A$  бесконечно. Пусть  $f$  пересчитывает  $A$  в порядке неубывания. Чтобы выяснить, принадлежит ли  $x$  множеству  $A$ , порождаем множество значений функции  $f$ , пока не появится число большее, чем  $x$ . Тогда  $x \in A \Leftrightarrow x$  уже появилось в списке. Значит, мы располагаем эффективным способом распознавания принадлежности числа множеству  $A$ ; тем самым  $A$  рекурсивно.

$\Leftarrow$  для (b). Продолжает рассуждение, подобное приводимому в случае (ii) доказательства для (a). (В рассматриваемом случае надлежит порождать лишь  $f(0), f(1), \dots, f(x)$ ). ■

Заметим, что доказательство  $\Leftarrow$  для (a) неконструктивно: мы не знаем, какой из случаев (i) или (ii) имеет место.

Теорема III, не будучи особенно глубокой, тем не менее часто оказывается полезной. Одно из возможных ее применений содержится в теореме IV, другие — в упр. 5-6 и 5-7.

**Теорема IV.** *Всякое бесконечное рекурсивно перечислимое множество обладает бесконечным рекурсивным подмножеством.*

**Доказательство.** Пусть  $A$  бесконечно и рекурсивно перечислимо. Пусть  $f$  общерекурсивна и  $\text{Val } f = A$ . Зададим общерекурсивную функцию  $g$ :

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0), \\ g(x+1) &= f(\mu y [f(y) > g(x)]). \end{aligned}$$

Пусть  $B = \text{Val } g$ . Тогда  $g$  порождает  $B$  в порядке возрастания. Следовательно, по теореме III множество  $B$  бесконечно и рекурсивно. Так как  $B \subset A$ , доказываемое утверждение установлено. ■

Читатель легко может проверить, что понятия, введенные в § 5.1, рекурсивно инвариантны.

## § 5.2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Следующая теорема выявляет еще одну особенность рекурсивной перечислимости. Это простой, но важный результат.

**Теорема V (основная теорема о рекурсивно перечислимых множествах).**  $A$  рекурсивно перечислимо  $\Leftrightarrow A$  есть область определения частичнорекурсивной функции (т. е.  $(\exists x) [A = \text{Arg } \varphi_x]$ ).

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Случай (i).  $A = \emptyset$ . Пусть  $\psi$  есть нигде не определенная частичнорекурсивная функция. Тогда  $A = \text{Arg } \psi$ .

**Случай (ii).**  $A \neq \emptyset$ . Тогда  $A$  есть множество значений некоторой общерекурсивной функции  $f$ . Зададим  $\psi$  следующими инструкциями: чтобы вычислить  $\psi(x)$ , порождайте множество зна-

чений функции  $f$ ; если и как только  $x$  появится во множестве значений  $f$ , тотчас выдайте  $x$  на выход. Очевидно, что  $\psi$  частичнорекурсивна и  $A = \text{Arg } \psi$ .

$\Leftarrow$ . Пусть  $A = \text{Arg } \psi$ , где  $\psi$  — частичнорекурсивная функция. Определим эффективную процедуру, которая будет порождать  $A$ , если  $A$  не пусто. Процедура осуществляется по этапам.

**Этап 1.** Выполните 1 шаг в вычислении  $\psi(0)$ . Если процесс вычисления  $\psi(0)$  завершается на первом шаге, поместите 0 в список для  $A$ .

**Этап  $n+1$ .** Выполните по  $n+1$  шагу в вычислении  $\psi(0), \psi(1), \dots, \psi(n)$ . Те  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , для которых процесс вычисления  $\psi(k)$  завершается на  $(n+1)$ -м шаге или ранее, добавьте в список для  $A$ .

Теперь определим  $\eta$  следующим образом:

$$\eta(0) = \text{первый элемент пересчета};$$

$$\eta(x+1) = \begin{cases} \text{и} y [\text{у было добавлено к списку на этапе } x+1 \text{ и} \\ \quad y \notin \{\eta(0), \eta(1), \dots, \eta(x)\}], \text{ если такое } y \text{ существует;} \\ \eta(0) \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Согласно тезису Чёрча,  $\eta$  есть частичнорекурсивная функция. Если  $A = \emptyset$ , то  $A$  рекурсивно перечислимо по определению. Если  $A \neq \emptyset$ , то по построению  $\eta$  всюду определена и  $\text{Val } \eta = A = \text{Arg } \psi = A$ ; таким образом, множество  $A$  рекурсивно перечислимо. ■

Только что приведенное доказательство проводилось путем „уплотнения” („dovetailing”) вычислений для  $\psi(0), \psi(1), \dots$ . Такого рода конструкция удобна и часто применяется в рассматриваемой теории. В дальнейшем мы будем иногда вместо упоминания этой конструкции отсыпать к теореме V.

Введем теперь в качестве имен рекурсивно перечислимых множеств индексы соответствующих частичнорекурсивных функций.

**Определение.**  $W_x = \text{Arg } \varphi_x$ .

Будем называть  $x$  рекурсивно перечислимым индексом или гёдельевым номером рекурсивно перечислимого множества  $W_x$ . Заметим, что, как это следует из теоремы 1-III, всякое рекурсивно перечислимое множество имеет бесконечно много рекурсивно перечислимых индексов. Мы будем часто писать вместо „рекурсивно перечислимые индексы” „р. п. индексы” или просто „индексы”.

Если иметь в виду процедуру „уплотнения” из теоремы V, то индекс множества интуитивно можно воспринимать как имя процедуры, никогда не завершающейся и порождающей с перерывами (возможно, лишь конечное число раз наступающими) последовательность выходных значений,— эти выходные значения и образуют множество.

Из доказательства теоремы V непосредственно усматривается следствие.

**Следствие V (a).** *A рекурсивно перечислимо  $\Leftrightarrow A$  есть множество значений частичнорекурсивной функции (т. е.  $(\exists x)$   $[A = \text{Val } \varphi_x]$ ).*

**Доказательство следствия.**  $\Rightarrow$ . Случай (i) аналогичен соответствующему случаю в доказательстве теоремы.

Случай (ii). Функция  $\psi$ , построенная при доказательстве теоремы, пригодна и здесь, так как  $A = \text{Arg } \psi = \text{Val } \psi$ .

$\Leftarrow$ . Как и прежде, за тем лишь исключением, что теперь к ранее образованному списку для  $A$  добавляются по этапам *не входы, а выходы*.

Итак,  $A$  есть область определения частичнорекурсивной функции тогда и только тогда, когда  $A$  есть множество значений частичнорекурсивной функции. Приведем следствие, выражающее этот факт в более сильной форме.

**Следствие V (b).** *Существуют общерекурсивные функции  $f$  и  $g$ , такие, что для всех  $x$*

$$\text{Val } \varphi_{f(x)} = \text{Arg } \varphi_x,$$

$$\text{Arg } \varphi_{g(x)} = \text{Val } \varphi_x.$$

**Доказательство следствия.** Установим существование функции  $f$ . Для любого данного  $x$  определим

$$\psi(y) = \begin{cases} y, & \text{если } \varphi_x(y) \text{ сходится;} \\ \text{расходится} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что  $\text{Val } \psi = \text{Arg } \varphi_x$ . Так как инструкции для  $\psi$  зависят от  $x$  равномерно эффективным образом, то  $\psi = \varphi_{f(x)}$  для некоторой общерекурсивной функции  $f$ . (Здесь неявно использована *s-t-n*-теорема.)

Установим существование функции  $g$ . Пусть дан  $x$ , зададим порождающую процедуру, подобную процедуре, описанной при доказательстве теоремы V, но отличающуюся от нее тем, что перечисляются *выходы*, а не *входы*, и еще тем, что роль  $\psi$  теперь играет  $\varphi_x$ . Определим

$$\theta(y) = \begin{cases} y, & \text{если } y \text{ появляется в списке;} \\ \text{расходится} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что  $\text{Arg } \theta = \text{Val } \varphi_x$ . Так как инструкции для  $\theta$  равномерно эффективно зависят от  $x$ , то  $\theta = \varphi_{g(x)}$  для некоторой общерекурсивной функции  $g$ . ■

Легко усматривается и третье следствие, утверждающее, что для *непустых* множеств можно переходить равномерно эффективным образом от инструкций для области определения или множества значений к инструкциям для перечисления *всюду определенной* функцией.

**Следствие V (c).** *Существуют общерекурсивные функции  $f'$  и  $g'$ , такие, что:*

(i)  $\text{Val } \varphi_{f'(x)} = \text{Arg } \varphi_x$  и  $[\text{Arg } \varphi_x \neq \emptyset \Rightarrow \varphi_{f'(x)}$  общерекурсивна];

(ii)  $\text{Val } \varphi_{g'(x)} = \text{Val } \varphi_x$  и  $[\text{Val } \varphi_x \neq \emptyset \Rightarrow \varphi_{g'(x)}$  общерекурсивна].

**Доказательство следствия.** Для доказательства (i) возьмем частичнорекурсивную функцию  $\eta$ , построенную при доказательстве теоремы V, с  $\varphi_x$  вместо  $\psi$ . Тогда инструкции функции  $\eta$  равномерно эффективно зависят от  $x$ , т. е.  $\eta = \varphi_{f'(x)}$  для некоторой общерекурсивной функции  $f'$ .

Для доказательства (ii) положим  $g' = f' \cdot g$ , где  $g$  — функция из следствия V (b). ■

И, наконец, четвертое следствие утверждает, что можно равномерно переходить от инструкций для области определения или множества значений к инструкциям для перечисления без повторения.

**Определение.** Множество  $A$  есть *начальный сегмент* множества  $N$ , если

$$(\forall x)(\forall y)[[y \in A \& x < y] \Rightarrow x \in A].$$

**Следствие V (d).** *Существуют общерекурсивные функции  $f''$  и  $g''$ , такие, что:*

(i)  $\text{Val } \varphi_{f''(x)} = \text{Arg } \varphi_x$ ,  $\varphi_{f''(x)}$  взаимно однозначна и область определения  $\varphi_{f''(x)}$  есть начальный сегмент  $N$ ;

(ii)  $\text{Val } \varphi_{g''(x)} = \text{Val } \varphi_x$ ,  $\varphi_{g''(x)}$  взаимно однозначна и область определения функции  $\varphi_{g''(x)}$  есть начальный сегмент множества  $N$ .

**Доказательство следствия.** Доказательство подобно доказательству следствия V(c) (упр. 5-11). ■

Теорема V дает действенный метод, позволяющий устанавливать рекурсивную перечислимость. С ее использованием может быть показано, что многие из множеств, рассмотренных в гл. 2, рекурсивно перечислимы. Приведем здесь один такой пример:  $\{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\}$ . Дадим сначала этому множеству специальное имя.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $K = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\} = \{x \mid x \in W_x\}$ . (Отыне буква  $K$  будет служить обозначением этого множества.)

**Теорема VI.** Существует рекурсивно перечислимое, но не рекурсивное множество, и  $K$  является таковым.

**Доказательство.** Положим

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ сходится,} \\ & \text{расходится, если } \varphi_x(x) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Очевидно, что функция  $\psi$  частично рекурсивна и  $K = \text{Arg } \psi$ . Следовательно, согласно теореме V, множество  $K$  рекурсивно перечислимо.

Из следствия 1-VII нам известно, что множество  $K$  не рекурсивно. Однако мы теперь в состоянии дать более короткое доказательство этого факта. Предположим, что  $K$  рекурсивно. По теореме II  $\bar{K} = W_m$  для некоторого  $m$ . Тогда  $m \in K \Leftrightarrow m \in W_m$  по определению  $K$ , однако  $m \in \bar{K} \Leftrightarrow m \in W_m$  в силу выбора  $m$ . Полученное противоречие показывает, что  $K$  не может быть рекурсивным.<sup>1)</sup>

Таким образом, в то время как  $K$  рекурсивно перечислимо,  $\bar{K}$  рекурсивно перечислимым не является. Кроме того, согласно теореме III, само множество  $K$  не является рекурсивно перечислимым в порядке возрастания.

Множество  $K$  будет играть в дальнейшем важную роль. В нем воплощена и сконцентрирована проблема остановки. Оно будет неоднократно использоваться нами при построении контрпримеров. Мы столкнемся с целым рядом других множеств, которые окажутся рекурсивно перечислимими, но не рекурсивными. Дальнейшие важные свойства рекурсивно перечислимых множеств и рекурсивных множеств излагаются в теоремах и упражнениях, следующих ниже.

**Теорема VII.** Если  $\psi$  частично рекурсивна и  $A$  рекурсивно перечислимо, то  $\psi^{-1}(A)$  рекурсивно перечислимо.

**Доказательство.** Чтобы проверить результаты такого рода, лучше всего положиться на интуицию и описать процедуру в общих чертах. Например, в нашем случае: „Перечисляйте элементы  $A$ , в то же самое время производите, уплотня, вычисления для  $\psi$  при всех входных значениях; выделите выходные значения, приводящие к выходам, принадлежащим  $A$ “. Для более формального доказательства, однако, может быть полезна основная тео-

<sup>1)</sup> Обращаем внимание читателя на аналогию с классическим доказательством теоремы Кантора (которая утверждает, что мощность любого множества меньше мощности множества всех его подмножеств).

рема. В нашем случае применим основную теорему к множеству  $A = \text{Arg } \varphi_n$  для некоторого  $n$ . Тогда  $\psi^{-1}(A) = \text{Arg } \varphi_n \psi$  и, вновь согласно основной теореме,  $\psi^{-1}(A)$  рекурсивно перечислимо. ■

### § 5.3. РЕКУРСИВНЫЕ И РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ ОТНОШЕНИЯ; КОДИРОВАНИЕ $n$ -ок

Понятия рекурсивности и рекурсивной перечислимости можно было бы перенести на  $n$ -арные отношения, сказав, что отношение рекурсивно, если оно обладает рекурсивной характеристической функцией, и что отношение рекурсивно перечислимо, если оно есть область определения частично рекурсивной функции<sup>1)</sup>. Мы, однако, не станем поступать таким образом. Мы рассмотрим различные (хотя и эквивалентные) способы, позволяющие переносить на отношения любое рекурсивно инвариантное свойство множеств. В частности, нами будет перенесено „пересчитывающее“ определение рекурсивной перечислимости, рассматривавшееся в § 5.1.

Сначала мы введем некоторое специальное кодирование упорядоченных пар натуральных чисел (натуральными числами); затем используем это кодирование для описания некоторого специального кодирования  $n$ -ок натуральных чисел (натуральными числами) при каждом  $n$ . Мы фиксируем эти способы кодирования и будем прибегать к ним в дальнейшем.

**Определение.**  $\tau(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y)$ .

**Лемма.**  $\tau$  является рекурсивным взаимно однозначным отображением множества  $N \times N$  на  $N$ .

**Доказательство.** Рекурсивность  $\tau$  очевидна. Поставим в соответствие числам  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$  упорядоченные пары  $\langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 2,0 \rangle, \langle 0,3 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \dots$ . Читатель может проверить с помощью известного тождества  $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ , что это соответствие задается посредством  $\tau$ . ■

Хотя нами и было описано некоторое конкретное  $\tau$ , специфический вид его для нас неважен. Существенным является лишь то, что  $\tau$  отображает  $N \times N$  взаимно однозначно на  $N$  и что  $\tau$  рекурсивно. Существует бесконечное семейство функций, каждая из которых могла бы играть роль  $\tau$ . Такие функции мы будем называть функциями пересчета пар<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Для  $n$ -арного отношения функция есть функция  $n$  переменных.

<sup>2)</sup> Этот термин (в оригинале pairing functions.— Перев.) часто употребляется также применительно к функциям, отображающим  $N \times N$  взаимно однозначно в  $N$  и имеющим рекурсивное множество значений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $\pi_1$  и  $\pi_2$  суть функции одной переменной, осуществляющие отображение, обратное отображению  $\tau$ . Иными словами, для всех  $z \in \tau(\pi_1(z), \pi_2(z)) = z$ . Функции  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , очевидно, общерекурсивны.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Мы будем использовать символ  $\langle x, y \rangle$  в качестве сокращения для  $\tau(x, y)$ . Мы определим  $A \times B$  как  $\{\langle x, y \rangle \mid x \in A \& y \in B\}$ , т. е.  $A \times B = \tau(A \times B)$ . Тем самым  $\times$  есть операция, переводящая множества в множества.

Для любого  $n > 0$  кодирование  $\tau^n$ , отображающее  $N^n$  на  $N$ , определяется посредством  $\tau$  следующим индуктивным определением.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**

$$\tau^1 = \lambda x[x],$$

$$\tau^{n+1} = \lambda x_1 \dots x_{n+1}[\tau(\tau^n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})].$$

(В частности,  $\tau^2 = \tau$ .)

$\pi_1^n, \dots, \pi_n^n$  — инверсные функции для  $\tau^n$ , т. е. для всех  $z \in \tau^n(\pi_1^n(z), \dots, \pi_n^n(z)) = z$ , (В частности,  $\pi_1^2 = \pi_1$  и  $\pi_2^2 = \pi_2$ .)

Все эти функции, очевидно, общерекурсивны. Мы будем обозначать  $\tau^n(x_1, \dots, x_n)$  через  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .

**Пример 1.**  $\langle 2, 1, 0 \rangle = \langle \langle 2, 1 \rangle, 0 \rangle = \langle 8, 0 \rangle = 44$ .

**Пример 2.**  $\tau^4(A^4) = ((A \times A) \times A) \times A$ .

В случае, когда обозначение  $\times$  употребляется без скобок, мы будем предполагать связность слева. Например,  $A \times B \times C$  означает  $(A \times B) \times C$ .

Посредством  $\tau^n$  мы можем перейти от любого  $n$ -арного отношения и, в частности, от любой функции к соответствующему „кодовому” множеству натуральных чисел. Любое свойство множеств распространяется на свойства  $n$ -арных отношений, если условиться, что отношение обладает данным свойством тогда и только тогда, когда его кодовое множество обладает этим свойством.

**Соглашение.** Пусть  $P$  — свойство множеств. Будем говорить, что  $n$ -арное отношение  $R$  обладает свойством  $P$ , если  $\tau^n(R)$  обладает свойством  $P$ .

Тем самым понятия рекурсивности и рекурсивной перечислимости, определенные в § 5.1, оказываются теперь перенесенными на отношения. Таким же образом могут быть перенесены многие важные результаты. Например, из теоремы II мы получаем, что  $R$  рекурсивно  $\Leftrightarrow R$  и  $\bar{R}$  рекурсивно перечислимы (здесь  $\bar{R} = N^n - R$ ).

Эквивалентны ли эти определения рекурсивности и рекурсивной перечислимости отношений определениям, предложенным

в первой фразе § 5.3? Их эквивалентность немедленно следует из теоремы V (основной теоремы) и следующей теоремы.

**Теорема VIII (а).** Пусть  $\phi$  — частичнорекурсивная функция одной переменной; тогда

$$\psi^{(n)} = \lambda x_1 \dots x_n[\phi(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)]$$

есть частичнорекурсивная функция  $n$  переменных.

(б) Пусть  $\psi^{(n)}$  — частичнорекурсивная функция  $n$  переменных; тогда

$$\phi = \lambda z[\psi^{(n)}(\pi_1^n(z), \dots, \pi_n^n(z))]$$

есть частичнорекурсивная функция одной переменной.

**Доказательство.** Следует из тезиса Чёрча. Заметим, что всюду определенные функции соответствуют всюду определенным функциям и соответствие, устанавливаемое в (а), обратно соответствию, устанавливаемому в (б) <sup>1)</sup>. ■

Чтобы проиллюстрировать определения рекурсивности и рекурсивной перечислимости отношений, приведем следующую теорему. Доказательство оставим в качестве упражнения (см. упр. 5-17).

**Теорема IX (а).** Пусть  $f$  — всюду определенная функция; тогда  $f$  есть общерекурсивная функция  $\Leftrightarrow f$  как бинарное отношение рекурсивна  $\Leftrightarrow f$  как бинарное отношение рекурсивно перечислима.

(б) Пусть  $\psi$  — функция; тогда  $\psi$  есть частичнорекурсивная функция  $\Leftrightarrow \psi$  как бинарное отношение рекурсивно перечислима.

Разумеется, в (б) отношение  $\psi$  может быть рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно;  $\psi = \{\langle x, x \rangle \mid x \in K\}$  представляет собой такой пример. (Это одна из причин, по которой мы называем основные объекты нашей теории „частичнорекурсивными функциями”, а не „рекурсивными частичными функциями“.) В ряде разделов теории (так же как и в рассматриваемом случае) термин „частично-рекурсивная“ часто связывается с рекурсивной перечислимостью (см., например, § 9.2).

**Замечание о рекурсивной инвариантности.** Посредством кодирования  $\tau^n$  отношения могут быть (в различных целях) идентифицированы с множествами. Конкретные отображения  $\tau^n$  не являются сами по себе рекурсивно инвариантными объектами, равно как и соотношение  $A = \tau^n(R)$  между множеством  $A$  и отношением  $R$  не есть рекурсивно инвариантное

<sup>1)</sup> Теорема VIII показывает, что размерность не играет в теории рекурсивных функций роли, аналогичной той, какую она играет в теории непрерывных функций действительной переменной (где аналог теоремы VIII места не имеет).

## 92. ГЛ. 5. РЕКУРСИВНЫЕ И РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА

соотношение. Можно показать, однако, что всякое рекурсивно инвариантное *свойство* множеств, перенесенное на отношения в соответствии с принятым соглашением, превращается в рекурсивно инвариантное *свойство* отношений, т. е. можно показать, что  $R \equiv Q \Rightarrow \tau^n(R) \equiv \tau^n(Q)$  для  $n$ -арных отношений  $R$  и  $Q$  (упр. 5-19). Обратное, однако, места не имеет. Свойство, являющееся рекурсивно инвариантным для  $n$ -арных отношений, не всегда превращается в рекурсивно инвариантное свойство соответствующих множеств, т. е.  $\tau^n(R) \equiv \tau^n(Q)$ , вообще говоря, не влечет за собой  $R \equiv Q$  для  $n$ -арных отношений  $R$  и  $Q$ . Такого рода пример содержится в упр. 5-20.

## § 5.4. ТЕОРЕМЫ О ПРОЕКЦИИ

В § 5.1 была определена рекурсивная перечислимость. В § 5.2 (основная теорема) она была охарактеризована иным способом. В настоящем разделе мы приведем еще одно ее описание — с помощью проекций рекурсивных отношений.

Мы употребляем следующее сокращение, являющееся общепринятым в метаматематических работах: вместо  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in R$  пишем  $R(x_1, \dots, x_n)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество

$$\{\langle x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \rangle \mid (\exists x_j)R(x_1, \dots, x_n)\}$$

называется *проекцией* отношения  $R$  *вдоль*  $j$ -й координаты. (Геометрический смысл этого термина ясен.)

**ТЕОРЕМА X.** Если отношение  $R$  рекурсивно перечислимо, то существует рекурсивное отношение  $S$ , такое, что  $R$  есть проекция  $S$ . Более точно, если  $R$  есть  $n$ -арное, рекурсивно перечислимое отношение, то существует  $(n + 1)$ -арное рекурсивное отношение  $S$ , такое, что

$$R = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid (\exists x_{n+1})S(x_1, \dots, x_{n+1})\}.$$

**ТЕОРЕМА XI.** Если отношение  $R$  рекурсивно перечислимо, то всякая его проекция рекурсивно перечислена. В частности, если  $R$   $n$ -арно и рекурсивно перечислимо, то отношение

$$\{\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle \mid (\exists x_n)R(x_1, \dots, x_n)\}$$

рекурсивно перечислимо.

Немедленно получаем такое следствие.

**Следствие XI.**  $R$  рекурсивно перечислимо  $\Leftrightarrow R$  есть проекция некоторого рекурсивного отношения  $S$ .

Мы будем ссылаться на эти теоремы как на *теоремы о проекции* или как на *теоремы о кванторе существования* (ввиду той роли, которую играет символ  $\exists$  при определении проекции). Эти теоремы часто используются при доказательстве рекурсивной перечислимости. Прежде чем доказывать эти теоремы, проиллюстрируем их применение.

При мер. Рассмотрим  $A = \{x \mid 7 \in \text{Val } \varphi_x\}$ . Чтобы показать, что множество  $A$  рекурсивно перечислимо, мы представим  $A$  в виде проекции:

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid (\exists y)[\varphi_x(y) = 7]\} = \\ &= \{x \mid (\exists y)(\exists z) [ \text{в процессе вычисления, соответствующего } P_x, \text{ при входе } y \text{ получаем } 7 \text{ в качестве выхода менее чем за } z \text{ шагов!} ]\}, \end{aligned}$$

т. е.

$$A = \{x \mid (\exists y)(\exists z) S(x, y, z)\},$$

где  $S$  — рекурсивное отношение. Дважды применив теорему XI, получаем, что множество  $A$  рекурсивно перечислимо.

**Доказательство теоремы X.** Пусть  $\hat{R} = \tau^n(R)$ . Тогда  $\hat{R}$  есть рекурсивно перечислимое множество. Согласно теореме V, существует частично рекурсивная функция  $\psi$ , такая, что  $\hat{R} = \text{Arg } \psi$ . Пусть  $m$  — фиксированный индекс функции  $\psi$  и  $P_m$  — соответствующее множество инструкций для  $\psi$ . Тогда  $R(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \hat{R} \Leftrightarrow \psi(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$  сходится  $\Leftrightarrow (\exists x_{n+1})$  [процесс вычисления, соответствующий  $P_m$ , при входе  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  завершается менее чем за  $x_{n+1}$  шагов]. Согласно тезису Чёрча, словосочетание, стоящее в квадратных скобках, определяет рекурсивное отношение на  $N^{n+1}$ , и теорема доказана. ■

**Доказательство теоремы XI.** Достаточно показать справедливость утверждения теоремы для проекции отношения  $R$  вдоль  $n$ -й координаты. Пусть дано рекурсивно перечислимое отношение  $R$ . По теореме X мы можем найти рекурсивное отношение  $S$ , такое, что  $R(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow (\exists x_{n+1})S(x_1, \dots, x_{n+1})$ . Пусть  $Q$  — заданная проекция отношения  $R$ . Тогда  $Q(x_1, \dots, x_{n-1}) \Leftrightarrow (\exists x_n)R(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow (\exists x_n)(\exists x_{n+1})S(x_1, \dots, x_{n+1})$ . Определим теперь частично рекурсивную функцию  $\psi$  следующим образом. Чтобы вычислить  $\psi(\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle)$ , проверяйте по очереди, выполнено ли  $S(x_1, \dots, x_{n-1}, \pi_1(z), \pi_2(z))$  при  $z = 0, 1, 2, \dots$ , пока не получите утвердительный ответ. Если и как только это произойдет, выдайте на выход 1. Тогда  $Q(x_1, \dots, x_{n-1}) \Leftrightarrow \psi(\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle)$  сходится  $\Leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle \in \text{Arg } \psi$ . Следовательно, согласно теореме V,  $Q$  рекурсивно перечислимо. ■

Теоремы о проекции дают действенный способ, позволяющий установить рекурсивную перечислимость, хотя часто рекурсивную перечислимость более просто распознать, руководствуясь идеями § 5.1 и 5.2. Например, рассмотрим  $A = \{x \mid W_x \neq \emptyset\}$ . (1) Чтобы показать, что множество  $A$  рекурсивно перечислимо, согласно основному определению (§ 5.1) мы должны перечислять элементы множества  $A$ . Интуитивно ясно, что это может быть достигнуто двойной процедурой „уплотнения“ („одновременно“ перечисляющей  $W_0, W_1, W_2, \dots$ , а затем перечисляющей индексы тех пересчетов, которые оказываются непустыми). (2) Чтобы показать, что множество  $A$  рекурсивно перечислимо, согласно теореме об области определения (теорема V), следует задать функцию  $\psi$ , сходящуюся на  $x$ , если  $W_x \neq \emptyset$ , и применить одноактную процедуру „уплотнения“ к списку  $W_x$ . Тогда  $A = \text{Arg } \psi$  и рекурсивно перечислимо. (3) Чтобы установить рекурсивную перечислимость множества  $A$  с помощью теорем о проекции, переопределим  $A$  как  $\{x \mid (\exists y)(\exists z) [\text{процесс вычисления, соответствующий } P_x, \text{ при входе } y \text{ завершается менее чем за } z \text{ шагов}]\}$  и немедленно получим его рекурсивную перечислимость.

**Определение.** Если  $R$  есть  $n$ -арное отношение и  $k$  фиксировано, отношение

$$\{\langle x_2, \dots, x_n \rangle \mid R(k, x_2, \dots, x_n)\}$$

назовем *сечением отношения  $R$  по  $k$* . Очевидно, что любое сечение рекурсивно перечислимого или рекурсивного отношения является соответственно рекурсивно перечислимым или рекурсивным отношением. Существует ли единственное рекурсивное отношение, из которого все рекурсивно перечислимые множества могут быть получены взятием сечения и проекции? Ответ содержится в неявной форме в предыдущих доказательствах; мы сформулируем его в виде теоремы XII.

**Теорема XII** (о нумерации рекурсивно перечислимых множеств). *Существует рекурсивное тернарное отношение  $R$ , такое, что для всех  $z$*

$$W_z = \{x \mid (\exists w)R(z, x, w)\}.$$

**Доказательство.** Определим  $R$  как  $\{\langle z, x, w \rangle \mid \text{процесс вычисления, соответствующий } P_z, \text{ при входе } x \text{ завершается менее чем за } w \text{ шагов}\}$ . Оно рекурсивно согласно тезису Чёрча. ■

Из второй теоремы о проекции получаем

**Следствие XII.**  $\{\langle z, x \rangle \mid x \in W_z\}$  есть рекурсивно перечислимое множество.

## § 5.5. РАВНОМЕРНОСТЬ

Некоторые доказательства существования, приводимые в этой главе, были неконструктивны в том смысле, что не давалось никакой эффективной процедуры, позволяющей установить, какой из нескольких случаев имел место (см., например, доказательство теоремы III). Займемся выявлением тех доказательств существования, для которых можно найти эффективные процедуры. Будем говорить, что теорема имеет место *равномерно* или *равномерно эффективно*, если такая процедура может быть задана. Точный смысл термина „равномерная эффективность“ обычно будет ясен из контекста. Некоторые ранее доказанные результаты имели место равномерно. Например, следствие V (b) показывает, что мы можем „переходить равномерно“ от области определения к множеству значений и обратно. Следствие V (c) дает аналогичное явное выражение равномерности. Иногда может быть показано, что равномерность места не имеет. Следующие теоремы служат иллюстрацией сказанному.

**Теорема XIII.** Класс рекурсивно перечислимых множеств замкнут относительно операций  $\cup$ ,  $\cap$  и  $\times$  равномерно эффективно.

**Доказательство.** Здесь под „равномерностью“ подразумевается существование общерекурсивных функций  $f$ ,  $g$  и  $h$ , таких, что  $W_{f(x, y)} = W_x \cup W_y$ ,  $W_{g(x, y)} = W_x \cap W_y$  и  $W_{h(x, y)} = W_x \times W_y$ . Мы оставляем доказательство в качестве упражнения (см. упр. 5-23). ■

**Теорема XIV.** Класс рекурсивных множеств замкнут относительно операций  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\times$  и операции взятия дополнения. На уровне р. п. индексов замкнутость относительно  $\cup$ ,  $\cap$  и  $\times$  равномерна, однако замкнутость относительно операции взятия дополнения не может быть равномерной.

**Доказательство.** Мы оставим доказательство замкнутости и равномерности в качестве упражнения (упр. 5-24). Покажем, что замкнутость относительно операции взятия дополнения не может быть равномерной, т. е. не существует частично рекурсивной функции  $\psi$ , такой, что для всякого  $x$  множество  $W_x$  рекурсивно  $\Leftrightarrow [\psi(x) \text{ сходится и } W_{\psi(x)} = \bar{W}_x]$ . Предположим, что такая функция  $\psi$  существует. Привлечем множество  $K$ , чтобы получить противоречие. Так как  $K$  рекурсивно перечислимо и, следовательно, может быть эффективно пересчитано, то существует общерекурсивная функция  $g$ , такая, что для всякого  $x$   $\psi_{g(x)}$  всюду определена, если  $x \in K$ , и нигде не определена, если  $x \notin K$ . Итак,

$$W_{g(x)} = \begin{cases} N, & \text{если } x \in K, \\ \emptyset, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Для всякого  $x$   $W_{g(x)}$  есть рекурсивное множество. По предположению функция  $\psi g(x)$  определена на всех  $x$ . Пусть  $f$  есть всюду определенная функция  $\psi g$ . Мы имеем

$$W_{f(x)} = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } x \in K, \\ N, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Таким образом,  $\bar{K} = \{x \mid W_{f(x)} \neq \emptyset\}$ . Но  $\{x \mid W_{f(x)} \neq \emptyset\} = \{x \mid (\exists y)[y=f(x) \& W_y \neq \emptyset]\} = \{x \mid (\exists y)(\exists z)(\exists w)[y=f(x) \text{ и процесс вычисления, соответствующий } P_y, \text{ при входе } z \text{ завершается менее чем за } w \text{ шагов}\}$ . Следовательно, согласно второй теореме о проекции, множество  $\bar{K}$  рекурсивно перечислимо. Но  $\bar{K}$  рекурсивно перечислимо  $\Rightarrow K$  рекурсивно, в противоречие с теоремой VI. ■

**З а м е ч а н и е.** Замкнутость относительно операции взятия дополнения может быть равномерной, если используется иная система имен рекурсивных множеств, например индексы характеристических функций (§ 5.6).

За дальнейшими примерами равномерности и неравномерности мы обратимся к излагавшимся в этой главе теоремам. В теореме III, если мы будем именовать функции обычными гёделевыми номерами, а рекурсивные множества — индексами характеристических функций, то  $\Rightarrow$  равномерно как в случае (а), так и в случае (б), а  $\Leftarrow$  равномерно в случае (б), но не в случае (а) (см. упр. 5-26). Теорема IV имеет место равномерно, даже если рекурсивные подмножества именуются индексами характеристических функций. В теореме V непосредственно говорить о равномерности нельзя, ибо в первоначальном определении рекурсивной перечислимости фигурируют два отдельных случая. Следствия V(b), V(c) и V(d), — разумеется, явно равномерные результаты. В теореме VIII равномерность (от индексов к индексам) имеет место в обеих частях. В теоремах X и XI равномерность налицо существует вне зависимости от того, поименованы ли рекурсивные отношения р. п. индексами или индексами характеристических функций.

**З а к л ю ч и т е л ь н о е з а м е ч а н и е.** В формальных доказательствах равномерности почти всегда используется *s-m-p*-теорема. Так как *s<sup>m</sup>-функции* примитивнорекурсивны, результирующие „функции равномерности” в таких случаях (подобно функциям  $f$  и  $g$  в следствии V(b)) обычно также примитивнорекурсивны.

## § 5.6. КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

*Рекурсивно перечислимое* множество может быть названо посредством указания его р. п. индекса. Подобным образом *рекурсивное* множество может быть названо индексом его характеристи-

ческой функции. Мы назовем такой индекс *характеристическим индексом* рекурсивного множества. Очевидно, можно равномерно переходить от характеристических индексов к р. п. индексам. Равномерный переход в обратном направлении невозможен. Иными словами, не существует частично рекурсивной функции  $\psi$ , такой, что для всякого  $x$  множество  $W_x$  рекурсивно  $\Rightarrow [\psi(x)]$  определено и  $\psi_{\psi(x)}$  есть характеристическая функция  $W_x$ . Это является следствием теоремы XIV: существование такой функции  $\psi$  противоречило бы последней фразе теоремы XIV.

*Конечное* множество может быть задано еще и именем третьего вида, именем, которое явно кодирует список элементов множества.

**Определение.** Пусть  $A$  — непустое конечное множество  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , где  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Тогда число  $2^{x_1} + 2^{x_2} + \dots + 2^{x_n}$  называется *каноническим индексом множества A*. Если  $A$  пусто, *канонический индекс*, приписываемый  $A$ , есть 0.

**Определение.** Обозначим через  $D_x$  конечное множество, каноническим индексом которого является  $x$ .

Очевидно, всякое конечное множество имеет единственный канонический индекс и каждое натуральное число есть канонический индекс некоторого конечного множества. Если  $x$  записано в двоичной системе счисления, элементы множества  $D_x$  задаются расположением единиц; точнее, для всех  $z$   $z$  есть элемент множества  $D_x$ , если 1 появляется в качестве  $(z+1)$ -го знака справа в двоичном разложении  $x$ .

**П р и м е р.** Что такое  $D_{13}$ ? В двоичной системе счисления 13 есть 1101; единицы появляются на *первом*, *третьем* и *четвертом* местах (справа). Следовательно,  $D_{13} = \{0, 2, 3\}$ .

Очевидно, возможен равномерный переход от канонических индексов к характеристическим индексам и, следовательно, к р. п. индексам. Следующая теорема показывает, что равномерный переход от характеристических индексов к каноническим индексам невозможен.

**Теорема XV (а).** Существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для всех  $x$   $f(x)$  есть мощность  $D_x$ .

(b) Не существует частично рекурсивной функции  $\psi$ , такой, что для всякого  $x$ , если  $\psi_x$  есть характеристическая функция конечного множества  $A$ , то  $\psi(x)$  определена и  $\psi(x)$  есть мощность  $A$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** (a) Непосредственно следует из тезиса Чёрча.

(b) Предположим, что такая функция  $\psi$  существует. По всякому  $x$  зададим функцию  $\eta$  так:

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если процесс вычисления, соответствующий } P_x, \text{ при} \\ & \text{входе } x \text{ завершается ровно за } z \text{ шагов;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция  $\eta$ , очевидно, общерекурсивна. Ее гёделев номер может быть найден равномерно по  $x$ ; назовем его  $g(x)$ . Тогда  $\Phi_{g(x)}$  является характеристической функцией множества, имеющего мощность 1, если  $x \in K$ , и мощность 0, если  $x \notin K$ . Следовательно,  $\psi g$  есть общерекурсивная функция, такая, что

$$\psi g(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

Это противоречит нерекурсивности  $K$ . ■

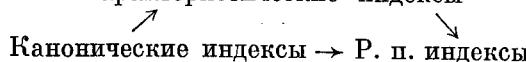
**Следствие XV.** *Невозможен равномерный переход от характеристических индексов к каноническим индексам.*

**Доказательство.** Если бы такой переход был возможен, то из (a) следовало бы существование  $\psi$  для (b) в теореме XV. ■

Так как мы можем переходить равномерно от характеристических индексов к р. п. индексам, из этого следствия немедленно вытекает, что невозможен равномерный переход от р. п. индексов к каноническим индексам. Упражнение 5-29 содержит дальнейшую информацию об индексах конечных множеств и показывает, что невозможен равномерный переход от р. п. индексов конечных множеств к характеристическим индексам конечных множеств

Подытожим полученные результаты: были упомянуты три вида имен конечных множеств. Равномерный переход в направлениях, указанных в следующей диаграмме, осуществим, но переход в обратных направлениях невозможен.

Характеристические индексы



**Кодирование всех  $n$ -ок**

Положим  $N^0 = \{\emptyset\}$ . Определим кодирование  $\tau^*$ , которое отображает  $\bigcup_{n=0}^{\infty} N^n$  взаимно однозначно на  $N$ :

$$\left( \bigcup_{n=0}^{\infty} N^n = \{\emptyset\} \cup N \cup (N \times N) \cup (N \times N \times N) \cup \dots \right).$$

**Определение.**

$$\tau^*(\emptyset) = 0;$$

$$\begin{aligned} \tau^*(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) &= \tau(\tau^n(x_1, \dots, x_n), n - 1) + 1 = \\ &= \langle x_1, \dots, x_n, n - 1 \rangle + 1 \end{aligned}$$

Этим кодированием, являющимся, очевидно, эффективным взаимно однозначным отображением  $na$ , мы воспользуемся в гл. 16.

### § 5.7. ТЕОРЕМА ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ<sup>1)</sup>

**Определение.** Множество  $A$  однозначно, если  $\{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in A\}$  есть однозначное отношение. (Предостережение: как свойство множеств однозначность не есть рекурсивный инвариант.)

Заметим, что  $A$  однозначно тогда и только тогда, когда  $A = \tau(\psi)$  для некоторой функции  $\psi$ . Из теоремы IX следует, что однозначные элементы последовательности  $W_0, W_1, \dots$  порождают (при  $\tau^{-1}$ ) семейство всех частичнорекурсивных функций. К сожалению,  $\{z \mid W_z \text{ однозначно}\}$  не рекурсивно; на самом деле оно даже не рекурсивно перечислимо. Тем не менее мы можем перечислить последовательность р. п. индексов однозначных множеств, которая содержит индексы всех однозначных рекурсивно перечислимых множеств (хотя и не все индексы таких множеств) и, следовательно, получить все частичнорекурсивные функции. Это устанавливается следующей теоремой.

**Определение.**  $\text{Arg } A = \{x \mid (\exists y)[\langle x, y \rangle \in A]\}$ .

**Теорема XVI** (теорема об однозначности). *Существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для всех  $z$*

- (i)  $W_{f(z)}$  однозначно;
- (ii)  $W_{f(z)} \subseteq W_z$ ;
- (iii)  $\text{Arg } W_{f(z)} = \text{Arg } W_z$ ;
- (iv)  $W_z \text{ однозначно} \Rightarrow W_{f(z)} = W_z$ .

**Доказательство.** (iv) немедленно следует из (ii) и (iii). Согласно следствию V (d), процедура для пересчитывания без повторения  $W_z$  может быть найдена эффективно по  $z$ . Пусть дано какое-либо  $z$ . Определим

$$\begin{aligned} A_z &= \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in W_z \text{ и } (\forall y')[y' \neq y \text{ и} \\ &\quad \& \langle x, y' \rangle \in W_z] \Rightarrow \langle x, y' \rangle \text{ предшествует } \langle x, y \rangle \text{ в пересчете } W_z \text{ (задаваемом следствием V (d))}\} \}. \end{aligned}$$

Легко видеть, руководствуясь как интуитивными соображениями, так и формальными доводами, что  $A_z$  рекурсивно перечислимо и что р. п. индекс множества  $A_z$  может быть найден равномерно эффективно по  $z$ . (Например, определим частичнорекурсивную функцию с  $A_z$  в качестве области определения.) Следовательно,

<sup>1)</sup> За исключением § 16.5, никакие последующие результаты не зависят от § 5.7.

существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для всякого  $z$ ,  $W_{f(z)} = A_z$ . Из определения  $A_z$  следует, что  $f$  обладает свойствами, требуемыми в (i), (ii) и (iii). ■<sup>1)</sup>

(Используя функцию  $f$  из этой теоремы, мы могли бы определить  $\psi_z = \tau^{-1}(W_{f(z)})$ . Тем самым мы бы имели новую нумерацию класса всех частичнорекурсивных функций. Нетрудно показать, что эта нумерация была бы *допустима* в смысле упр. 2-10.)

Теорема об однозначности интересна в двух отношениях. Во-первых, эта теорема хотя и не обогащает нашей интуиции (по сравнению с тем, что в этом направлении сделано основной теоремой), может тем не менее служить формальным изящным способом применения основной теоремы. Следующая теорема является тому примером.

**Теорема XVII** (принцип редукции). *Каковы бы ни были два рекурсивно перечислимые множества  $A$  и  $B$ , найдутся рекурсивно перечислимые множества  $A'$  и  $B'$ , такие, что  $A' \subset A$ ,  $B' \subset B$ ,  $A \cup B = A' \cup B'$  и  $A' \cap B' = \emptyset$ .*

**Доказательство.** Определим  $C = (A \times \{0\}) \cup \cup (B \times \{1\})$ . Согласно теореме XIII, множество  $C$  рекурсивно перечислимо. Пусть  $C = W_n$ , и пусть далее  $C' = W_{f(n)}$ , где функция  $f$  — такая же, как в теореме XVI. Тогда  $\tau^{-1}(C')$  есть частично-рекурсивная функция  $\psi$ . Положим  $A' = \psi^{-1}(0)$  и  $B' = \psi^{-1}(1)$ . ■

Второй, более важный аспект, в котором интересна теорема об однозначности, связан с изучением обобщенной вычислимости. Объектами такого изучения служат множества, являющиеся обобщениями рекурсивно перечислимых множеств, и функции, являющиеся обобщениями частичнорекурсивных функций. В отличие от рекурсивного случая при таком изучении оказывается более удобным *сначала* определить обобщение рекурсивно перечислимого множества (определенного „через проекцию”), *затем* доказать теорему, аналогичную теореме об однозначности, и, *наконец* использовать этот результат об однозначности для определения обобщения частичнорекурсивной функции. (При переходе от определения через проекцию к теореме об однозначности возникает потребность в некотором аналоге основной теоремы. В такого рода аналоге обычные пересчеты нашей основной теоремы, как правило, заменяются трансфинитными вполне упорядоченными „пересчетами“). Коль скоро получено обобщение частичнорекурсивной

<sup>1)</sup> Теорема XVI может быть также названа *теоремой об униформизации*. (Будем говорить, что множество  $W_{f(z)}$  получено „униформизацией“ множества  $W_z$ . — *Перев.*) В теоретико-множественной топологии говорят, что множество  $A$  на плоскости *униформизирует* множество  $B$  на плоскости, если: (i)  $(\forall x)(\exists y)$  самое большее один  $y$   $(x, y) \in A$ ; (ii)  $A \subset B$  и (iii)  $\{x \mid (\exists y)(x, y) \in A\} = \{x \mid (\exists y)(x, y) \in B\}$  (см. Куратовский [1950]).

функции, дальнейшая теория может развиваться параллельно обычной теории рекурсивных функций<sup>1)</sup>. Мы развиваем такую обобщенную теорию в § 16.5.

Продемонстрируем еще одно применение теоремы об однозначности. Докажем, что по всякому эффективному пересчету рекурсивно перечислимых множеств мы можем эффективно найти непустое множество, встречающееся в пересчете, если такое множество существует. Для рекурсивно перечислимых множеств это следует из основной теоремы. Настоящее доказательство, использующее теорему об однозначности, может быть перенесено в обобщенную теорию § 16.5.

**Теорема XVIII** (теорема выбора). *Существует частичнорекурсивная функция  $\psi$ , такая, что для всякого  $z$*

- (i)  $\psi(z)$  сходится  $\Leftrightarrow (\exists w)[w \in W_z \text{ & } W_w \neq \emptyset]$ ;
- (ii)  $\psi(z)$  сходится  $\Rightarrow [\psi(z) \in W_z \text{ & } W_{\psi(z)} \neq \emptyset]$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = \{(z, w) \mid (\exists u)[u \in W_w \text{ & } w \in W_z]\}$ . Очевидно,  $[u \in W_w \text{ & } w \in W_z]$  описывает рекурсивно перечислимое отношение; отсюда, переходя к проекции, получаем, что множество  $A$  рекурсивно перечислимо. Пусть  $A'$  есть  $f(A)$ , где  $f$  — функция теоремы XVI; полагая  $\psi = \tau^{-1}(A')$ , получаем искомую функцию  $\psi$ . ■

Упражнение 5-36 показывает, что с помощью теоремы выбора может быть получена более общая форма принципа редукции.

Заметим, что теорема выбора является иным выражением принципа „уплотнения“ основной теоремы. Этот принцип состоит в том, что по любой данной бесконечной эффективной последовательности вычислений мы можем эффективно найти завершающееся вычисление, если таковое существует.

## § 5.8. УПРАЖНЕНИЯ

### § 5.1

**5-1.** Покажите, что свойство множеств быть рекурсивно перечислимыми рекурсивно инвариантно.

**5-2.** Множество  $A$  рекурсивно перечислимо без повторений, если оно есть множество значений некоторой общерекурсивной взаимно однозначной функции  $f$ . Докажите, что  $A$  бесконечно и рекурсивно перечислимо  $\Leftrightarrow A$  рекурсивно перечислимо без повторений.

**5-3.** (а) Пусть  $A$  и  $B$  — бесконечные рекурсивные множества с бесконечными дополнениями. Покажите, что  $A \equiv B$ . Сколько таких множеств существует?

<sup>1)</sup> Если только такое семейство обобщенных частичнорекурсивных функций обладает свойствами замкнутости, столь же „естественными“, как и свойства замкнутости (семейства частичнорекурсивных функций), вытекающие из тезиса Чёрча (см., например, теорему 1-IX).

**5-4.** Покажите, что если функция  $f$  общерекурсивна, функция  $g$  общерекурсивна и взаимно однозначна, множество значений функции  $g$  рекурсивно и  $(\forall x)[f(x) \geq g(x)]$ , то множество значений функции  $f$  рекурсивно.

**5-5.** Пусть  $f$  — общерекурсивная функция. Пусть множество  $A$  рекурсивно и  $B$  рекурсивно перечислимо. Что можно заключить о рекурсивности или рекурсивной перечислимости четырех множеств  $f(A)$ ,  $f^{-1}(A)$ ,  $f(B)$  и  $f^{-1}(B)$ ?

**Δ5-6.** Класс  $\mathcal{C}$  рекурсивно перечислимых множеств называется *рекурсивно перечислимым классом*, если существует рекурсивно перечислимое множество  $A$ , такое, что  $(\forall B)[B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (\exists y)[y \in A \wedge W_y = B]]$ , т. е. если существует эффективная процедура, порождающая по крайней мере один р. п. индекс для каждого элемента класса  $\mathcal{C}$ . (Определение обозначения  $W_x$  см. в § 5.2.) Покажите, что класс всех рекурсивных множеств рекурсивно перечислим. (*Указание.* Воспользуйтесь теоремой III и методом теоремы IV.) (Для этого упражнения нужна теорема V и ее следствия из § 5.2.)

**Δ5-7.** Пусть  $R$  — линейное упорядочение натуральных чисел, которое, рассматриваемое как отношение, рекурсивно перечислимо. Покажите, что существует рекурсивное отношение, которое является линейным упорядочением того же самого порядкового типа, т. е. которое изоморфно  $R$  в обычном алгебраическом смысле. (*Указание.* Воспользуйтесь теоремой III (а).) (Рекурсивность и рекурсивная перечислимость отношений определена в § 5.3.)

**Δ5-8.** Покажите, что существуют бесконечные множества, не обладающие бесконечным рекурсивно перечислимым подмножеством. (*Указание.* Воспользуйтесь неконструктивным диагональным методом.) Такие множества рассматриваются ниже, в гл. 8.

### § 5.2

**5-9.** Там, где это возможно, квалифицируйте следующие множества как (а) рекурсивные множества, (в) рекурсивно перечислимые множества, (с) множества, обладающие рекурсивно перечислимым дополнением:

(i)  $\{x \mid x \text{ просто}\}$ ;

(ii)  $\{x \mid \text{по крайней мере } x \text{ семерок подряд встречается в разложении числа } \pi\}$ ;

(iii)  $\{x \mid \text{ровно } x \text{ семерок подряд встречается в разложении числа } \pi\}$ ;

(iv)  $\{x \mid W_x = \emptyset\}$ ;

△(v)  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$ .

(*Указание.* Покажите, что рекурсивная перечислимость этого множества приводила бы к рекурсивной перечислимости множества  $\{x \mid \varphi_x \text{ входит в определение}\}$ , в противоречие с упр. 2-9. Покажите, что из рекурсивной перечислимости  $\{x \mid W_x \text{ конечно}\}$  следовала бы разрешимость проблемы остановки).

(vi)  $\{x \mid \varphi_x \text{ общерекурсивна}\}$ ;

(vii)  $\{x \mid W_x = W_n\}$  для фиксированного  $n$ ;

△(viii)  $\{x \mid W_x \text{ рекурсивно}\}$ .

**5-10.** Говорят, что  $A$  *перечислимо частично рекурсивной функцией в порядке возрастания*, если существует частично рекурсивная функция  $\psi$ , такая, что  $A = \text{Val } \psi$  и  $(\forall x)(\forall y)[[x < y \text{ и } \psi(x) \text{ определена и } \psi(y) \text{ определена}] \Rightarrow \psi(x) < \psi(y)]$ . Опишите класс всех множеств, таким образом перечислимых.

**5-11.** (а) Доказать следствие V (d).

(б) Пусть  $V_z = \{y \mid (\exists x)[\varphi_z(x) = y \wedge (\forall w)[w \leq x \Rightarrow \varphi_z(w) \text{ определено}]\}$ . Покажите, что множество  $A$  рекурсивно перечислимо  $\Leftrightarrow (\exists z)[A = V_z]$ , и докажите аналог следствия V(b).

**5-12.** Покажите, что существует  $n_0$  множеств, рекурсивно перечислимых, но не рекурсивных.

**△5-13.** Всякое ли нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество изоморфно множеству  $K$ ?

### § 5.3

**5-14.** (а) Ассоциативна ли операция  $\times$ ? Коммутативна ли она? Дистрибутивна ли она относительно объединения?

(б) Покажите, что операция  $\times$  корректно определена относительно типов изоморфизма, т. е. что  $A \equiv A' \wedge B \equiv B' \Rightarrow A \times B \equiv A' \times B'$ . Покажите, что результатирующая операция на изоморфных типах коммутативна, ассоциативна и обладает нулем. Покажите, что она, однако, не обладает единицей и что  $A \times B \equiv A \times C$  не влечет  $B \equiv C$ .

**5-15.** Пусть  $\tau'$  отображает  $N \times N$  взаимно однозначно в  $N$  и  $\tau'$  рекурсивно. (Например,  $\tau'(x, y) = 2^x \cdot 3^y$ . Клини использует именно эту функцию пересчета пар.) Покажите, что если  $z$  пробегает все  $N$ , среди

$$\psi_z = \lambda xy[\varphi_z(\tau'(x, y))]$$

оказываются все частично рекурсивные функции двух переменных.

**5-16.** Пусть  $B$  рекурсивно. Как рекурсивность или рекурсивная перечислимость следующих множеств зависит от рекурсивности или рекурсивной перечислимости множества  $A$ :  $A \times N$ ,  $A \times \emptyset$ ,  $A \times B$ ?

**5-17.** Докажите теорему IX.

**5-18.** Пусть  $R$  и  $S$  суть бинарные отношения. *Композиция*  $R \mid S$  отношения определяется так:  $\{(x, z) \mid (\exists y)[R(x, y) \& S(y, z)]\}$ . Покажите, что  $R$  и  $S$  рекурсивно перечислимы  $\Rightarrow R \mid S$  рекурсивно перечислимо.

**5-19.** Проверьте, что  $R \equiv Q \Rightarrow \tau^n(R) \equiv \tau^n(Q)$  для произвольных  $n$ -арных отношений  $R$  и  $Q$ .

**5-20.** Покажите, что  $\tau^n(R) \equiv \tau^n(Q)$  не влечет за собой, вообще говоря,  $R \equiv Q$ . (*Указание.* Возьмите  $R = \{1\} \times N$ ,  $Q = N \times \{1\}$ .)

**5-21.** (а) Определите  $K_0 = \{(x, y) \mid x \in W_y\}$ . Покажите, что множество  $K_0$  рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно.

△(б) Покажите, что  $K_0 \equiv K$ .

**Δ5-22.** Введем еще одно определение универсальной функции:  $\psi$  „универсальная“, если существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для всякого  $m$   $\Phi_m = \lambda y[\psi(f(m), y)]$ . Покажите, что это определение не является  $\Phi_m = \lambda y[\psi(f(m), y)]$ . Покажите, что это определение не является рекурсивно инвариантным. (*Указание.* Определите  $\Psi = \lambda z[\Phi_{\pi_1(z)}(\pi_2(z))]$ , рекурсивно инвариантным.  $\psi$  не является „универсальной“, замечив, что для всякого  $\theta$ ,  $\theta$  „универсальная“  $\Rightarrow [\lambda y[\theta(m, y)]$  является константой при некотором  $m$ , в то время как  $\lambda x[\theta(x, n)]$  не является константой ни при каком  $n$ ).

### § 5.5

**5-23.** Докажите теорему XIII.

**5-24.** Установите замкнутость и равномерность, утверждаемые теоремой XIV.

**5-25.** Покажите, что  $[A \text{ рекурсивно перечислимо и } f \text{ рекурсивна}] \Rightarrow f^{-1}(A)$  рекурсивно перечислимо равномерно по индексам функции  $f$  и множества  $A$ .

**5-26.** Покажите, что невозможно решить эффективным образом по индексам неубывающих функций, будут ли множества значений таких функций конечными.

**5-27.** (а) Из случаев (ii) и (iii) в доказательстве теоремы I следует, что  $\{W_x \text{ рекурсивно и } W_x \neq \emptyset\} \Rightarrow W_x$  есть множество значений некоторой неубывающей общерекурсивной функции, которая или строго возрастает, или строго возрастает до некоторого места и постоянна начиная с этого места. Справедлив ли этот результат равномерно?

△(б) Может ли следствие V (c) быть усилено добавлением „и  $[\text{Arg } \varphi_x \text{ бесконечна} \Rightarrow \varphi_{f(x)} \text{ взаимно однозначна}]$ “ к части (i)?

## § 5.6

5-28. (Фишер, Лакхам, Риттер). Пусть множество  $A$  рекурсивно перечислимо и  $B$  рекурсивно.

(а) Покажите, что множество  $\bigcup_{x \in A} W_x$  рекурсивно перечислимо (рекурсивно перечислимые множества замкнуты относительно рекурсивно перечислимого объединения).

$\Delta$  (б) Покажите, что множество  $\bigcup_{x \in B} D_x$  может не быть рекурсивным. (Указание. Воспользуйтесь последовательностью начальных сегментов в эффективном пересчете  $K$ ; выберите подходящую подпоследовательность.)

$\Delta$  (с) Покажите, что множество  $\bigcap_{x \in B} W_x$  может не быть рекурсивно перечислимым и не иметь рекурсивно перечислимого дополнения. (Указание. Покажите, что множество  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$  может быть получено как такое пересечение, см. упр. 5-9).

$\Delta$  (д) Пусть множество  $B$  рекурсивно, и пусть  $(\forall x)[x \in B \Rightarrow W_x \text{ рекурсивно}]$ . Покажите, что  $\bigcap_{x \in B} W_x$  может не быть рекурсивно перечислимым и не иметь рекурсивно перечислимого дополнения. (Указание. Возьмите последовательность множеств, таких, что  $n$ -е множество есть  $\{n, n+1, \dots\} \cup \bigcup \{x \mid W_x \text{ имеет по крайней мере } n \text{ элементов}\}$ .

$\Delta$  (е) Если  $\varphi_x$  есть характеристическая функция, обозначим через  $C_x$  множество, определяемое функцией  $\varphi_x$ . Пусть  $B$  рекурсивно и  $(\forall x)[x \in B \Rightarrow \varphi_x \text{ есть характеристическая функция}]$ . Покажите, что  $\bigcap_{x \in B} C_x$  может не быть рекурсивно перечислимым, но должно иметь рекурсивно перечислимое дополнение.

5-29. Если  $\varphi_x$  — характеристическая функция, обозначим через  $C_x$  множество, определяемое функцией  $\varphi_x$ .

(а) Покажите, что невозможен равномерный переход от рекурсивно перечислимых индексов конечных множеств к характеристическим индексам конечных множеств, т.е. что не существует частично-рекурсивной функции  $\psi$ , такой, что  $(\forall x)[W_x \text{ конечно} \Rightarrow \psi(x) \text{ определено} \& W_x = C_{\psi(x)}]$ .

(б) (Райс). Класс  $\mathcal{C}$  конечных множеств *канонически перечислим*, если существует рекурсивно перечислимое множество  $A$ , такое, что  $(\forall B)[B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (\exists y)[y \in A \& D_y = B]]$ .

Класс  $\mathcal{C}$  конечных множеств *характеристически перечислим*, если существует рекурсивно перечислимое множество  $A$ , такое, что  $(\forall x)[x \in A \Rightarrow \varphi_x \text{ есть характеристическая функция}]$  и  $(\forall B)[B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (\exists y)[y \in A \& C_y = B]]$ .

Класс  $\mathcal{C}$  конечных множеств *рекурсивно перечислим*, если существует рекурсивно перечислимое множество  $A$ , такое, что  $(\forall B)[B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (\exists y)[y \in A \& W_y = B]]$ .

(i) Покажите, что возможен рекурсивно перечислимый класс конечных множеств, не являющийся характеристически перечислимым. (Указание. Возьмите  $\mathcal{C} = \{D \mid (\exists x)[x \notin K \& D = \{x\}] \text{ или } (\exists x)[x \in K \& D = \{x, x+1\}]\}$ .)

(ii) Покажите, что возможен характеристически перечислимый класс конечных множеств, не являющийся канонически перечислимым. (Указание. Возьмите  $\mathcal{C} = \{D \mid (\exists x)[D = \{x\} \& x \notin K] \text{ или } (\exists x)(\exists y)[D = \{x, x+y+1\} \& \text{процесс вычисления, соответствующий } P_x, \text{ при входе } x \text{ завершается ровно за } y \text{ шагов}\}$ .)

(iii) Второе и третье определения, приведенные выше, могут быть распространены без каких-либо изменений на классы бесконечных множеств. Упражнение 5-6 показывает, что класс всех рекурсивных множеств рекур-

сивно перечислим. Покажите диагональным методом, что этот класс не является характеристически перечислимым.

5-30. Дайте явную формулу для обращения  $\tau^*$  с помощью  $\pi_i^n$ -функций.

## § 5.7

5-31. Покажите, что  $\{x \mid W_x \text{ однозначно}\}$  не является рекурсивно перечислимым. (Указание. Покажите, что в противном случае могла бы быть получена общерекурсивная характеристическая функция множества  $K$ ). Является ли класс всех однозначных рекурсивно перечислимых множеств рекурсивно перечислимым в смысле упр. 5-6?

5-32. Пусть  $f$  — функция, существование которой устанавливается теоремой об однозначности (теорема XVI). Определим  $\Psi_x = \tau^{-1}(W_{f(x)})$ . Покажите, что  $\Psi_0, \Psi_1, \dots$  задает нумерацию частично-рекурсивных функций, допустимую в смысле упр. 2-10.

5-33. Класс  $\mathcal{C}$  множеств удовлетворяет *принципу отделимости*, если  $(\forall A)(\forall B)[[A \text{ и } B \text{ из } \mathcal{C} \text{ и } A \cap B = \emptyset] \Rightarrow (\exists C)[A \subset C \& B \subset \bar{C} \& C \in \mathcal{C} \& \& \bar{C} \in \mathcal{C}]]$ . Покажите, пользуясь теоремой XVII, что *принцип отделимости* имеет место для класса  $\mathcal{C}$  множеств, дополнения которых рекурсивно перечислимые.

5-34. Покажите, что *принцип отделимости* упр. 5-33 не имеет места для класса  $\mathcal{C}$  всех рекурсивно перечислимых множеств. (Указание. См. упр. 2-30.)

5-35. Класс  $\mathcal{C}$  множеств удовлетворяет *принципу редукции*, если  $(\forall A)(\forall B)[[A \in \mathcal{C} \& B \in \mathcal{C}] \Rightarrow (\exists A')[A' \in \mathcal{C} \& B' \in \mathcal{C} \& A' \cap B' = \emptyset \& A' \subset A \& B' \subset B \& A' \cup B' = A \cup B]]$ . Покажите с использованием упр. 5-34, что *принцип редукции* места не имеет для класса  $\mathcal{C}$  всех множеств с рекурсивно перечислимыми дополнениями.

5-36. Обобщите теорему XVII (принцип редукции) с двух рекурсивно перечислимых множеств  $A$  и  $B$  до бесконечного семейства рекурсивно перечислимых множеств  $W_{f(0)}, W_{f(1)}, \dots$ , задаваемого общерекурсивной функцией  $f$ . (Указание. Для доказательства воспользуйтесь теоремой выбора (теоремой XVIII).)

▲5-37 (а) Докажите следующую теорему, частными случаями которой являются результаты упр. 5-9 и 5-31.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $\mathcal{C}$  — класс рекурсивно перечислимых множеств. Пусть  $P_{\mathcal{C}} = \{x \mid W_x \in \mathcal{C}\}$ . Класс  $\mathcal{C}$  *вполне рекурсивно перечислим*, если  $P_{\mathcal{C}}$  — рекурсивно перечислимое множество.

**ТЕОРЕМА** (Райс, Шапиро, Мак-Нотн, Майхилл; см. Райс [1956]). Класс  $\mathcal{C}$  *вполне рекурсивно перечислим* тогда и только тогда, когда существует канонически перечислимый класс  $\mathcal{D}$  конечных множеств (см. определение упр. 5-29), такой, что  $(\forall A)[A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow [A \text{ рекурсивно перечислимо} \& \& (\exists D)[D \in \mathcal{D} \& D \subset A]]]$ <sup>1</sup>.

(б) Выведите как непосредственное следствие этой теоремы, что множество  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$  не является рекурсивно перечислимым и не имеет рекурсивно перечислимого дополнения.

<sup>1</sup>) Такой класс  $\mathcal{D}$  иногда называют *ключевым оставом* класса  $\mathcal{C}$ .

§ 6.1. Общее введение 106  
§ 6.2. Упражнения 109

### § 6.1. ОБЩЕЕ ВВЕДЕНИЕ

В гл. 2 мы рассматривали разрешимые и неразрешимые проблемы. Любая такая проблема представима (посредством кодирования) множеством натуральных чисел. Проблема разрешима, если соответствующее множество натуральных чисел рекурсивно. Мы рассмотрели также — очень бегло и на неформальном уровне — понятие *сводимости* и установили с его помощью неразрешимость некоторых проблем. Согласно нашему неформальному определению, одна проблема *сводима* к другой, если метод решения второй проблемы дает метод решения первой. Хотя смысл термина „*сводимость*” при каждом его конкретном употреблении в гл. 2 и был ясен, точное содержание этого неформального определения выявить непросто. В гл. 6—9 сводимость будет основным объектом нашего рассмотрения. Поскольку проблемы представимы множествами, сводимость будет определяться и исследоваться нами как отношение между множествами натуральных чисел. Начнем с двух примеров.

**Пример 1.** Рассмотрим два множества  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$  и  $\{x \mid \varphi_x \text{ общерекурсивна}\}$ . В некотором естественном смысле каждое из них сводимо к другому. В самом деле, пусть мы умеем выяснить для любого  $x$ , является ли частично рекурсивная функция  $\varphi_x$  *всюду определенной*. Тогда, чтобы узнать, бесконечно ли  $W_{x_0}$  для данного  $x_0$ , мы, исходя из  $x_0$ , находим  $x_1$ , такое, что  $\varphi_{x_1}$  пересчитывает элементы множества  $W_{x_0}$  без повторения, причем  $\varphi_{x_1}$  всюду определена, если множество  $W_{x_0}$  бесконечно (см. следствие 5-V (d)), и смотрим, будет ли  $\varphi_{x_1}$  всюду определенной. Аналогично, пусть мы умеем определять для любого  $x$ , является ли множество  $W_x$  *бесконечным*. Тогда, чтобы выяснить для данного  $y_0$ , является ли частично рекурсивная функция  $\varphi_{y_0}$  *всюду определенной*, мы, исходя из  $y_0$ , получаем такое  $y_1$ , что

$$\varphi_{y_1}(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_{y_0}(w) \text{ сходится на} \\ & \text{всех } w \leq z; \\ & \text{расходится в противном случае,} \end{cases}$$

и смотрим, будет ли  $W_{y_1}$  бесконечным.

**Пример 2.** Рассмотрим два множества:  $K$ , равное  $\{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\}$ , и  $\{x \mid W_x \text{ конечно}\}$ . Здесь первое множество сводимо ко второму. Действительно, чтобы узнать, принадлежит ли  $x_0$  множеству  $K$ , мы по  $x_0$  находим  $x_1$ , такое, что

$$\varphi_{x_1}(z) = \begin{cases} 1, & \text{если процесс вычисления, соответствующий} \\ & P_{x_0}, \text{при входе } x_0 \text{ завершается менее чем за} \\ & z \text{ шагов;} \\ & \text{расходится в противном случае,} \end{cases}$$

и смотрим, будет ли  $W_{x_1}$  конечным. Пример 1, равно как и наша интуиция, дает основания предполагать, что второе множество также сводимо к первому. Впоследствии мы увидим, что это предположение неверно. (Упражнение 6-5 ниже устанавливает однобочность этого предположения для некоторого вида сводимости.)

Известно несколько различных понятий сводимости. Они излагаются в гл. 7—9. В настоящей главе мы рассмотрим некоторые общие черты, присущие всем этим понятиям, и введем используемую в дальнейшем терминологию, относящуюся к этому кругу вопросов.

Сокращением для „ $A$  сводимо к  $B$ ” будет служить „ $A \leqslant B$ ”. Во всех исследуемых в дальнейшем случаях это отношение будет рефлексивным и транзитивным, т. е.  $A \leqslant A$  для всех  $A$  и  $[A \leqslant B \& B \leqslant C] \Rightarrow A \leqslant C$  для всех  $A, B, C$ . Пусть  $A \equiv B$  обозначает, что  $A \leqslant B$  и  $B \leqslant A$ . Из рефлексивности и транзитивности отношения  $\leqslant$  непосредственно следует, что  $\equiv$  есть отношение эквивалентности. Более того,  $\leqslant$  порождает частичное упорядочение классов эквивалентности относительно  $\equiv$ . Мы скажем, что один класс эквивалентности *предшествует* другому, если элементы первого класса сводимы к элементам второго, но не обратно.

Во всех случаях отношение  $\leqslant$  будет рекурсивно инвариантно<sup>1)</sup>. Отсюда любое из отношений  $\leqslant$  и  $\equiv$  может быть использовано для классификации множеств с точки зрения рекурсивной структуры и оценки (в некотором смысле) их подобия или различия. Классы эквивалентности относительно  $\equiv$  называются *степенями неразрешимости относительно  $\leqslant$* . Частичное упорядочение этих классов эквивалентности называется *упорядочением по сводимости  $\leqslant$* . (Может показаться естественным называть классы, содержащие рекурсивные множества, „степенями разрешимости”; принято, однако, говорить для единства „степени неразрешимости“). Таким образом, в примере 2  $\{x \mid W_x \text{ конечно}\}$  — множество более высокой степени неразрешимости, чем  $K$  ( $K$  в свою очередь очевидно, более высокой степени неразрешимости, чем любое рекурсивное множество).

<sup>1)</sup> Иными словами,  $A \equiv B \Rightarrow A \equiv_r B$  для всех  $A, B$  (см. упр. 6-8).

При последующем изучении сводимостей мы будем особое внимание уделять структуре *рекурсивно перечислимых множеств*, упорядоченных по некоторым видам сводимости. Это обусловлено тем, что (1) рекурсивно перечислимые множества по определению в значительной степени конструктивны и (2) наши приложения к логике будут в большой мере относиться к формализованным логическим системам, в которых множество доказуемых утверждений является (при простом кодировании) рекурсивно перечислимым. Даже если ограничиться рекурсивно перечислимими множествами, упорядочения по сводимости имеют, как мы увидим, сложную и не вполне еще изученную структуру.

В заключение дадим предварительное представление о понятии, которое будет использоваться нами при изучении сводимостей над рекурсивно перечислимими множествами. Это понятие было введено Постом. Назовем  $A$  *полным относительно*  $\leq_r$ , если (i)  $A$  рекурсивно перечислимо, (ii)  $(\forall B)$  [ $B$  рекурсивно перечислимо  $\Rightarrow B \leq_r A$ ]<sup>1)</sup>. Таким образом, полное множество (если такое существует) оказывается множеством максимальной степени неразрешимости среди всех рекурсивно перечислимых множеств. Нетрудно видеть, что полные множества (для нашего пока еще неформального понятия сводимости) существуют. Например, пусть  $K_0 = \{\langle x, y \rangle \mid x \in W_y\}$ . Множество  $K_0$  рекурсивно перечислимо (см. упр. 5-21 (а)). Пусть дано некоторое рекурсивно перечислимое множество  $B$ . Тогда  $B = W_{y_0}$  для некоторого  $y_0$ . Следовательно, чтобы выяснить, содержит ли  $B$  элемент  $x$ , мы должны узнать лишь, принадлежит ли  $\langle x, y_0 \rangle$  множеству  $K_0$ . Тем самым  $B$  сводимо к  $K_0$ . Следовательно,  $K_0$  полно.

Множество  $K$  также полно (см. упр. 6-3). Таким образом,  $K$  и  $K_0$  — множества одной и той же степени неразрешимости. Мы увидим в гл. 7, что на самом деле  $K = K_0$ . Множество  $K$  (или  $K_0$ ) представляет проблему остановки. До сих пор все наши доказательства неразрешимости проводились, по существу, следующим образом: мы показывали, что к рассматриваемой проблеме сводится проблема остановки. Мы можем заключить теперь, что любая проблема, неразрешимость которой доказывается *таким способом*, должна иметь степень неразрешимости, по крайней мере столь же высокую, как и максимальная степень неразрешимости для рекурсивно перечислимых множеств. (Эти утверждения были сделаны относительно нашего неформального понятия сводимости. Мы увидим, что они имеют место для всех тех видов сводимости, которые получат далее точные формулировки.)

<sup>1)</sup>  $A$  называется *универсальным относительно*  $\leq_r$ , если существует  $B$ , такое, что  $B \leq_r A$  и  $B$  полно относительно  $\leq_r$ .

## § 6.2. УПРАЖНЕНИЯ

В пределах этого параграфа примем следующее определение понятия сводимости:  $A \leq_r B$ , если существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B]$ .

6-1. Проверьте, что  $\{x \mid W_x$  бесконечно}  $\equiv_r \{x \mid \Phi_x$  всюду определена}.

6-2. Проверьте, что  $K \leq_r \{x \mid W_x$  конечно}.

6-3. Покажите, что  $K_0 \leq_r K$ ; отсюда выведите, что  $K$  полно относительно  $\leq_r$ .

6-4. Покажите, что  $\{x \mid W_x \neq \emptyset\}$  полно относительно  $\leq_r$ .

6-5. (а) Покажите, что  $K \leq_r \{x \mid W_x$  конечно}.

Δ(b) Покажите, что  $\{x \mid W_x$  конечно} не  $\leq_r K$ . (Указание. Проверьте на рекурсивную перечислимость рассматриваемые множества.) (По существу это упр. 2-26.)

Δ6-6. Определим  $A$  rel  $B$ , если  $A \leq_r \bar{B}$ . Покажите, что rel не может быть принято в качестве отношения сводимости в смысле общего подхода § 6.1.

Δ6-7. Предложите несколько иных, возможно, неэквивалентных, формулировок неформального понятия сводимости, введенного в гл. 2.

6-8. Пусть  $\leq_{r'}$  — рефлексивное и транзитивное отношение сводимости.

Назовем  $\leq_{r'}$  *рекурсивно инвариантным*, если  $[(A_1 \equiv B_1 \& A_2 \equiv B_2 \& A_1 \leq_{r'} A_2) \Rightarrow B_1 \leq_{r'} B_2]$ . Покажите, что  $\leq_{r'}$  рекурсивно инвариантно тогда и только тогда, когда  $[A \equiv B \Rightarrow A \equiv_{r'} B]$ .

# Глава 7. ОДНО-ОДНОСВОДИМОСТЬ; МНОГО-ОДНОСВОДИМОСТЬ; ТВОРЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА

§ 7.1. Одно-односводимость и много-односводимость	110
§ 7.2. Полные множества	113
§ 7.3. Творческие (креативные) множества	114
§ 7.4. Одно-одноэквивалентность и рекурсивный изоморфизм	116
§ 7.5. Одно-однополнота и много-однополнота	118
§ 7.6. Цилиндры	121
§ 7.7. Продуктивность	122
§ 7.8. Логика	127
§ 7.9. Упражнения	133

## § 7.1. ОДНО-ОДНОСВОДИМОСТЬ И МНОГО-ОДНОСВОДИМОСТЬ

Рассмотрим две формулировки понятия сводимости, которые непосредственно подсказываются неформальными примерами сводимости, приведенными в предшествующих главах.

**Определение.**  $A$  одно-односводимо к  $B$  (обозначение:  $A \leqslant_1 B$ ), если существует взаимно однозначная (одно-однозначная) общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B]$ .

Будем иногда вместо „одно-односводимость“ употреблять термин „1-сводимость“.

**Определение.**  $A$  много-односводимо к  $B$  (обозначение:  $A \leqslant_m B$ ), если существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B]$ .

Будем иногда много-односводимость сокращенно называть  $m$ -сводимостью.

В каждом из приведенных выше определений условие  $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B]$  может быть выражено в любой из следующих эквивалентных форм:  $A = f^{-1}(B)$ ;  $f(A) \subset B \& f(\bar{A}) \subset \bar{B}$ ;  $c_A = c_B \cdot f$ , где  $c_A$  и  $c_B$  суть характеристические функции множеств  $A$  и  $B$  соответственно. Если  $A = f^{-1}(B)$ , скажем, что  $A$  сводимо к  $B$  посредством функции  $f$  (и будем иногда называть эту функцию сводящей  $A$  к  $B$ ). Следующая теорема сообщает некоторые простые, но важные сведения об  $\leqslant_1$  и  $\leqslant_m$ .

**Теорема I.** (а) Отношения  $\leqslant_1$  и  $\leqslant_m$  рефлексивны и транзитивны.

$$(b) A \leqslant_1 B \Rightarrow A \leqslant_m B.$$

$$(c) A \leqslant_1 B \Rightarrow \bar{A} \leqslant_1 \bar{B}.$$

$$(d) A \leqslant_m B \Rightarrow \bar{A} \leqslant_m \bar{B}.$$

$$(e) [A \leqslant_m B \& B \text{ рекурсивно}] \Rightarrow A \text{ рекурсивно}.$$

$$(f) [A \leqslant_m B \& B \text{ рекурсивно перечислимо}] \Rightarrow A \text{ рекурсивно перечислимо}.$$

**Доказательство.** Пункты (a), (b), (c) и (d) очевидны.

(e) Пусть  $A \leqslant_m B$  посредством  $f$ , тогда  $c_A = c_B \cdot f$ , следовательно, если  $c_B$  общерекурсивна, то и  $c_A$  общерекурсивна.

(f) Пусть  $A \leqslant_m B$  посредством  $f$ , тогда  $A = f^{-1}(B)$ ; отсюда по теореме 5-VII из рекурсивной перечислимости множества  $B$  следует рекурсивная перечислимость множества  $A$ . ■

**Следствие I.**  $[A \leqslant_1 B \& B \text{ рекурсивно}] \Rightarrow A \text{ рекурсивно}; [A \leqslant_1 B \& B \text{ рекурсивно перечислимо}] \Rightarrow A \text{ рекурсивно перечислимо}.$

**Доказательство** непосредственно следует из (b), (e) и (f). ■

**Определение.**

$$A \equiv_1 B, \text{ если } A \leqslant_1 B \& B \leqslant_1 A;$$

$$A \equiv_m B, \text{ если } A \leqslant_m B \& B \leqslant_m A.$$

Согласно теореме I (a), эти отношения являются отношениями эквивалентности. Их классы эквивалентности называются соответственно степенями неразрешимости относительно одно-односводимости и степенями неразрешимости относительно много-односводимости. Первые будем называть одно-одностепенями или 1-степенями, последние — много-одностепенями или  $m$ -степенями.

Из теоремы I (e) и следствия I вытекает, что любая степень, содержащая рекурсивное множество, целиком состоит из рекурсивных множеств. Из теоремы I (f) и следствия I вытекает, что любая степень, содержащая рекурсивно перечислимое множество, целиком состоит из рекурсивно перечислимых множеств. Мы можем, таким образом, говорить о *рекурсивных степенях* и *рекурсивно перечислимых степенях* при упорядочении по каждому из этих видов сводимости. Теорема I (f) показывает далее, что свойство быть рекурсивно перечислимым множеством наследуемо вниз при каждом из указанных видов упорядочения, т. е. любая степень, предшествующая рекурсивно перечислимой, является рекурсивно перечислимой. С использованием теоремы I (f) могут быть получены решения упр. 2-26 и 6-5. Так как существуют рекурсивно перечислимые множества, не являющиеся рекурсивными, то при каждом упорядочении среди рекурсивно перечислимых степеней наряду с рекурсивными должны существовать также нерекурсивные степени. Следующая теорема содержит информацию, относящуюся к существованию и свойствам несравнимых степеней при упорядочении по этим видам сводимости.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $A \oplus B = \{y \mid [y = 2x \& x \in A] \text{ или } [y = 2x + 1 \& x \in B]\}$ . Операцию  $\oplus$  назовем сочленением.

**Теорема II.** (a) Существуют два нерекурсивных множества, несравнимых относительно  $\leq_m$  (и, следовательно, относительно  $\leq_1$ ).

(b) Упорядочение по  $m$ -сводимости приводит к верхней полурешетке: любые две степени имеют единственную наименьшую верхнюю грань. Более того, наименьшая верхняя грань двух рекурсивно перечислимых степеней рекурсивно перечислима.

**Доказательство.** (a) ( $N$  и  $\emptyset$  — несравнимые множества; однако они рекурсивны.) Рассмотрим множества  $K$  и  $\bar{K}$ . Множество  $K$  рекурсивно перечислимо,  $\bar{K}$  таковым не является (теорема 5-VI). По теореме I (f)  $\bar{K}$  не  $\leq_m K$ . Из теоремы I (d) следует, что  $K$  не  $\leq_m \bar{K}$ .

(b) Пусть для всякого множества  $X$   $d(X)$  есть  $m$ -степень  $X$ . Пусть даны  $A$  и  $B$ . Тогда  $d(A \oplus B)$  — искомая наименьшая верхняя грань степеней  $d(A)$  и  $d(B)$  при упорядочении по  $m$ -сводимости. В самом деле,  $A \leq_m A \oplus B$  посредством  $\lambda x[2x]$ ;  $B \leq_m A \oplus B$  посредством  $\lambda x[2x + 1]$ ; для любого  $C$ , если  $A \leq_m C$  посредством  $f$  и  $B \leq_m C$  посредством  $g$ , то и  $A \oplus B \leq_m C$  посредством  $h$ , где  $h$  определяется равенствами:

$$h(2x) = f(x),$$

$$h(2x + 1) = g(x). \blacksquare$$

Из пункта (a) нашего доказательства выведем

**Следствие II.**  $A \leq_m B$ , вообще говоря, не влечет  $A \leq_m \bar{B}$ .

Очевидно, несравнимые множества порождают несравнимые степени. Существуют ли нерекурсивные рекурсивно перечислимые  $m$ -степени, являющиеся несравнимыми? Мы ответим на этот вопрос утвердительно в гл. 10. Образует ли упорядочение по  $m$ -сводимости решетку (т. е. существует ли наибольшая нижняя грань)? В упр. 13-55 мы увидим, что это не так. Образует ли упорядочение по  $1$ -сводимости верхнюю полурешетку? В гл. 10 мы дадим отрицательный ответ и на этот вопрос.

Как правило, в случаях, представляющих основной интерес,  $\leq_m$  и  $\leq_1$  совпадают. Обычно коль скоро показано, что имеет место  $\leq_m$ , оказывается возможным показать, что и  $\leq_1$  имеет место. По этой причине  $\leq_1$  и  $\leq_m$  иногда группируют вместе как сильные сводимости.

Целый ряд фактов о сводимостях  $\leq_1$  и  $\leq_m$  будет сообщен в оставшейся части этой главы и в упр. из § 7.9 (см., в частности, с этой точки зрения, упр. 7-6—7-8).

Теорема об общей структуре, относящаяся к  $\leq_1$  и  $\leq_m$ , приведена в § 7.6.

## § 7.2. ПОЛНЫЕ МНОЖЕСТВА

Существует ли максимальная степень среди рекурсивно перечислимых степеней для  $\leq_m$  или  $\leq_1$ ? Мы повторим определение, данное в гл. 6.

**Определения.** Множество  $A$  полно относительно  $\leq_1$  (а „1-полно”), если

- (i)  $A$  рекурсивно перечислимо,
- (ii)  $(\forall B)$  [ $B$  рекурсивно перечислимо  $\Rightarrow B \leq_1 A$ ].

Множество  $A$  полно относительно  $\leq_m$  ( $A$  „ $m$ -полно”), если

- (i)  $A$  рекурсивно перечислимо
- (ii)  $(\forall B)$  [ $B$  рекурсивно перечислимо  $\Rightarrow B \leq_m A$ ].

Пусть  $K_0 = \{\langle x, y \rangle \mid x \in W_y\}$ . Следующая теорема, намеченная еще в гл. 6, показывает, что множество  $K_0$  1-полно и, следовательно,  $m$ -полно.

**Теорема III.** Множество  $K_0$  является 1-полным.

**Доказательство.**  $K_0 = \{\langle x, y \rangle \mid (\exists z) [\text{процесс вычисления, соответствующий набору инструкций } P_y, \text{ при входе } x \text{ сходится менее чем за } z \text{ шагов}]\}$  и, следовательно, рекурсивно перечислимо, согласно второй теореме о проекции.

Пусть  $B$  — произвольное рекурсивно перечислимое множество. Тогда  $B = W_{y_0}$  для некоторого  $y_0$ . Отсюда  $(\forall x)[x \in B \Leftrightarrow \langle x, y_0 \rangle \in K_0 \text{ и } B \leq_1 K_0 \text{ посредством } \lambda x[\langle x, y_0 \rangle]. \blacksquare$

**Теорема IV.** Множество  $K$  является 1-полным.

**Доказательство.** Достаточно показать, что  $K_0 \leq_1 K$ .

Покажем сначала, что  $K_0 \leq_m K$ . Известным методом<sup>1)</sup> найдем функцию  $f$ , такую, что

$$\Phi_{f(x)}(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi_{\pi_z(x)}(\pi_1(x)) \text{ сходится;} \\ & \text{расходится в противном случае.} \end{cases}$$

(Поведение функции  $\Phi_{f(x)}$  тем самым не зависит от входа  $z$ .) Тогда  $x \in K_0 \Leftrightarrow f(x) \in K$ . Отсюда  $K_0 \leq_m K$ .

Покажем теперь, что, если функция  $f$  не является взаимно однозначной, она может быть заменена функцией  $f^*$ , такой, что  $K_0 \leq_1 K$  посредством  $f^*$ . Сделаем это методом „многословия“ („padding“) при помощи конструирования одного за другим все больших ёдёллевых номеров одной и той же частично рекурсивной функции. Определим, следуя методу теоремы 1-III, общерекурсивную функцию  $t'$ , такую, что

- (i)  $\Phi_{t'(x, y)} = \Phi_x$ ;
- (ii)  $y_1 \neq y_2 \Rightarrow t'(x, y_1) \neq t'(x, y_2)$ .

<sup>1)</sup> Который должен был бы при более формальном доказательстве использовать  $s$ - $m$ - $n$ -теорему.

Затем зададим общерекурсивную функцию  $t$  посредством следующего индуктивного определения:  $t(0, 0) = t'(0, 0)$ ; если  $t(x', y')$  определено для всех  $\langle x', y' \rangle$ , таких, что  $\langle x', y' \rangle < \langle x, y \rangle$ , то положим  $t(x, y) = t'(x, z)$ , где  $z = \mu w[t'(x, w) \neq t(x', y')]$  для всех  $\langle x', y' \rangle$ , удовлетворяющих условию  $\langle x', y' \rangle < \langle x, y \rangle$ .

Таким образом,

- (i)  $\Phi_{t(x, y)} = \Phi_x$ ;
  - (ii)  $[x_1 \neq x_2 \text{ или } y_1 \neq y_2] \Rightarrow t(x_1, y_1) \neq t(x_2, y_2)$ .
- (Фактически, для любого  $k$   $\Phi_{t(x, y)}^{(k)} = \Phi_x^{(k)}$ .)

Теперь определим функцию  $f^*$  формулой

$$f^* = \lambda x[t(f(x), x)].$$

Очевидно,  $f^*$  взаимно однозначна и  $K_0 \leqslant_1 K$  посредством  $f^*$ . ■

Конструкция, приведенная выше, принадлежит Дэвису. В дальнейшем мы будем иногда использовать функцию  $t$  при переходе от  $\leqslant_m$  к  $\leqslant_1$ . Теорема о структуре из § 7.6 содержит дополнительную информацию о соотношении между  $\leqslant_m$  и  $\leqslant_1$ .

Следствие IV.  $K \equiv_1 K_0$ .

Доказательство. Непосредственно из теорем III и IV. ■

Очевидно, 1-полнота влечет за собой  $m$ -полноту. Вернувшись к рассмотренным ранее примерам нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств, мы можем воспользоваться техникой теоремы IV, чтобы показать в каждом случае, что  $K$  не только  $m$ -свободно, но и 1-свободно к рассматриваемым множествам. Возникают следующие вопросы.

1. Совпадают ли понятия  $m$ -полноты и 1-полноты? Мы ответим на этот вопрос утвердительно в § 7.5.

2. Всякое ли нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество  $m$ -полно?

3. Совпадают ли  $\leqslant_m$  и  $\leqslant_1$  на нерекурсивных рекурсивно перечислимых множествах? (Упр. 7-5 и 7-6 показывают, что на рекурсивных множествах они отличаются друг от друга.) Мы дадим в гл. 8 отрицательные ответы на вопросы 2 и 3.

**Замечание.** Мы будем в целом ряде случаев прибегать к конкретным множествам  $K$  и  $K_0$  для доказательства неразрешимости и построения контрпримеров.

### § 7.3. ТВОРЧЕСКИЕ (КРЕАТИВНЫЕ) МНОЖЕСТВА

То обстоятельство, что множество  $\bar{K}$  не является рекурсивно перечислимым, может быть выражено в более сильной и конструктивной форме; именно, по индексу любого рекурсивно перечислимого подмножества множества  $\bar{K}$  мы можем найти натуральное

число из  $\bar{K}$ , но вне этого подмножества. Более точно, мы имеем (по определению  $\bar{K}$ ), что  $W_x \subset \bar{K} \Rightarrow x \in \bar{K} - W_x$ . Это свойство множества  $\bar{K}$  допускает рекурсивно инвариантную формулировку.

**Определение.** Множество  $A$  *продуктивно*, если существует частично-рекурсивная функция  $\psi$ , такая, что  $(\forall x)[W_x \subset A \Rightarrow [\psi(x) \text{ определено} \& \psi(x) \in A - W_x]]$ . Функция  $\psi$  называется *продуктивной функцией* для  $A$ . (Термин „продуктивный” принадлежит Деккеру.)

Особый интерес представляют для нас рекурсивно перечислимые множества с продуктивными дополнениями. Такие множества называются по Посту *творческими* (или *креативными*) (см. ниже замечание, следующее за доказательством теоремы XI).

**Определение.**  $A$  — *творческое* (или *креативное*) множество, если

- (i)  $A$  рекурсивно перечислимо;

- (ii)  $\bar{A}$  продуктивно.

**Пример 1.**  $K$  — творческое множество, так как  $K$  рекурсивно перечислимо и  $\bar{K}$  продуктивно (с тождественной функцией  $\lambda x[x]$  в качестве продуктивной функции).

**Пример 2.**  $\{x \mid \Phi_x \text{ общерекурсивна}\}$  — продуктивное множество, здесь продуктивная функция может быть задана с помощью диагональной конструкции § 1.4. Более конкретно, пусть дано  $W_x$ . Возьмем функцию  $\Phi_{f'(x)}$ , как в следствии 5-V (c), т. е. множество значений функции  $\Phi_{f'(x)}$  есть  $W_x$ , и  $\Phi_{f'(x)}$  всюду определена, если множество  $W_x$  непусто. Определим

$$\Phi_g(x)(z) = \begin{cases} 0, & \text{если процесс вычислений, соответствующий } P_{f'(x)}, \text{ при входе 0 не завершается за } z \text{ или менее шагов;} \\ \Phi_{f'(x)}(z-z_0)(z) + 1 & \text{в противном случае; здесь } z_0 \text{ есть точное число шагов, требуемых для того, чтобы процесс вычислений, соответствующий набору инструкций } P_{f'(x)}, \text{ при входе 0 завершился} \end{cases}$$

Тогда  $g$  — искомая продуктивная функция (см. упр. 7-17).

Следующая теорема устанавливает некоторые основные свойства продуктивности.

**Теорема V** (a)  $A$  продуктивно  $\Rightarrow A$  не рекурсивно перечислимо.  
(b)  $[A$  продуктивно  $\& A \leqslant_m B] \Rightarrow B$  продуктивно.

**Доказательство.** (a) Непосредственно следует из определения.

(b) Пусть  $\psi$  является продуктивной функцией для  $A$ . Пусть  $A \leq_m B$  посредством функции  $f$ . Существует общерекурсивная функция  $g$ , такая, что  $W_{g(x)} = f^{-1}(W_x)$  (см. упр. 5-25). Тогда  $f\psi g$  есть продуктивная функция для  $B$ . Действительно

$$\begin{aligned} W_x \subset B &\Rightarrow W_{g(x)} \subset A \Rightarrow \\ \Rightarrow [\psi g(x) \text{ определено} \& \& \psi g(x) \in A - W_{g(x)}] \Rightarrow \\ \Rightarrow [f\psi g(x) \text{ определено} \& \& f\psi g(x) \in B - W_x]. \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема V (b) показывает, что свойство продуктивности наследуемо вверх при упорядочении по сильной сводимости. Теорема V (b) дает также способ доказательства продуктивности множества  $\{x \mid \varphi_x \text{ общерекурсивна}\}$ , более удобный, нежели прямая диагонализация, используемая в примере 2 выше. Именно, показываем, что  $\bar{K} \leq_m \{x \mid \varphi_x \text{ общерекурсивна}\}$ ; отсюда, согласно теореме V (b), непосредственно следует продуктивность множества  $\{x \mid \varphi_x \text{ общерекурсивна}\}$ .

Следствие V. (a)  $A$  творческое  $\Rightarrow A$  не рекурсивно;

(b)  $[A$  творческое  $\& A \leq_m B] \Rightarrow \bar{B}$  продуктивно;

(c)  $A$   $m$ -полно  $\Rightarrow A$  творческое.

Доказательство очевидно. ■

Всякое ли нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество является творческим? В гл. 8 содержится отрицательный ответ на этот вопрос (из него следует отрицательный ответ на вопрос 2 конца § 7.2). Имеет ли место обращение следствия V (c), т. е. всякое ли творческое множество  $m$ -полнo? Утвердительный ответ на этот вопрос дается в гл. 11.

Мы исследуем продуктивные множества в § 7.7. Целый ряд аспектов продуктивности рассмотрен Деккером в [1955].

#### § 7.4. ОДНО-ОДНОЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И РЕКУРСИВНЫЙ ИЗОМОРФИЗМ

Понятия одно-одноэквивалентности и рекурсивного изоморфизма совпадают. Этот результат принадлежит Майхиллу [1955]. По содержанию и доказательству этот результат тесно примыкает к теореме Кантора — Шрёдера — Бернштейна в теории кардинальных чисел.

Теорема VI (Майхилл).  $A \equiv B \Leftrightarrow A \equiv_1 B$ .

Доказательство.  $\Rightarrow$ . Очевидно.

$\Leftarrow$ . Введем следующее определение. Конечная последовательность упорядоченных пар  $\langle\langle x_1, y_1\rangle, \dots, \langle x_n, y_n\rangle\rangle$  называется

конечным соответствием между  $A$  и  $B$ , если (i)  $i \neq j \Rightarrow \Rightarrow [x_i \neq x_j \& y_i \neq y_j]$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $i \leq j \leq n$ , и (ii)  $x_i \in A \Leftrightarrow \Leftrightarrow y_i \in B$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Докажем лемму.

Лемма. Предположим, что  $C \leq_1 D$ . Тогда существует эффективная процедура, которая по любому конечному соответствию  $\langle\langle x_1, y_1\rangle, \dots, \langle x_n, y_n\rangle\rangle$  между  $C$  и  $D$  и любому  $x' \notin \{x_1, \dots, x_n\}$  находит  $y'$ , такое, что

$$\langle\langle x_1, y_1\rangle, \dots, \langle x_n, y_n\rangle, \langle x', y'\rangle\rangle$$

есть конечное соответствие между  $C$  и  $D$ .

Доказательство леммы. Предположим, что  $C \leq_1 \leq_1 D$  посредством функции  $f$ . Вычислите  $f(x')$ . Проверьте, будет ли  $f(x') \neq y_i$  для всех  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Если это так, положите  $y' = f(x')$ . Если нет и  $f(x') = y_{i_1}$ , вычислите  $f(x_{i_1})$  и проверьте, будет ли  $f(x_{i_1}) \neq y_i$  для всех  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Если это так, положите  $y' = f(x_{i_1})$ . Если нет и  $f(x_{i_1}) = y_{i_2}$ , вычислите  $f(x_{i_2})$  и проверьте, будет ли... Из взаимной однозначности функции  $f$  и взаимной однозначности данного конечного соответствия немедленно следует, что эта процедура должна завершиться некоторым  $y'$ , таким, что  $y' \neq y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Более того, из условий, накладываемых сводимостью как на  $f$ , так и на данное конечное соответствие, получаем, что  $x' \in C \Leftrightarrow y' \in D$ . Это доказывает лемму.

Вернемся к доказательству теоремы. Так как  $A \equiv_1 B$ , лемма может быть применена или с  $A$  и  $B$  вместо  $C$  и  $D$ , или с  $B$  и  $A$  вместо  $C$  и  $D$ . Мы воспользуемся этим обстоятельством для установления изоморфизма. Опишем эффективную процедуру перечисления пар натуральных чисел. Эта конструкция будет устроена так, что на каждом этапе перечисления уже перечисленные упорядоченные пары составляют конечное соответствие и, кроме того, так, что всякое натуральное число встречается рано или поздно в качестве первой компоненты некоторой упорядоченной пары в пересчете и всякое натуральное число встречается рано или поздно в качестве второй компоненты упорядоченной пары в пересчете. Полная совокупность упорядоченных пар, перечисленных таким образом, образует рекурсивную перестановку, устанавливающую рекурсивную изоморфность множеств  $A$  и  $B$ .

Процедура состоит в следующем. Пусть  $A \leq_1 B$  посредством  $g$  и  $B \leq_1 A$  посредством  $h$ .

Этап 0. В качестве первой упорядоченной пары берем  $\langle 0, g(0)\rangle$ .

Этап 1. Смотрим, выполняется ли  $g(0) = 0$ . Если выполняется, переходим к этапу 2. Если нет, воспользовавшись леммой ( $C$  в роли  $D$ ,  $B$  в роли  $C$  и  $h$  в роли  $f$ ), записываем новую упоря-

доченную пару, вторая компонента которой есть 0.

Этап  $2k$ . Смотрим, встречается ли  $k$  в качестве первой компоненты какой-нибудь из уже перечисленных пар. Если встречается, переходим к выполнению этапа  $2k + 1$ . Если нет, то, воспользовавшись леммой (с  $A$  в роли  $C$ ,  $B$  в роли  $D$  и  $g$  в роли  $f$ ), выписываем новую упорядоченную пару, первая компонента которой есть  $k$ .

Этап  $2k + 1$ . Смотрим, встречается ли  $k$  в качестве второй компоненты какой-нибудь из уже перечисленных пар. Если встречается, переходим к выполнению этапа  $2k + 2$ . Если нет, воспользовавшись леммой (с  $A$  в роли  $D$ ,  $B$  в роли  $C$  и  $h$  в роли  $f$ ), поменяем в пересчет новую упорядоченную пару, вторая компонента которой есть  $k$ .

Доказательство завершено. ■

Эта теорема показывает, что 1-степени и типы изоморфизма совпадают. Упорядочение по 1-сводимости является, таким образом, упорядочением типов изоморфизма. (Как мы видели в гл. 4, типы изоморфизма являются в сущности основными объектами нашей теории.)

Теорема VI дает быстрый и удобный метод установления рекурсивного изоморфизма. Например, из следствия IV мы можем непосредственно получить такое

Следствие VI.  $K \equiv K_0$ .

В качестве другого примера рассмотрим  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$  и  $\{x \mid \Phi_x \text{ общерекурсивна}\}$ . Воспользовавшись функцией  $t$  из доказательства теоремы IV, можно показать, что  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\} \equiv_1 \{x \mid \Phi_x \text{ общерекурсивна}\}$  (см. упр. 7-13). Тогда, согласно теореме VI, мы имеем, что  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\} \equiv \{x \mid \Phi_x \text{ общерекурсивна}\}$  (и, с точки зрения теории рекурсивных функций, эти два множества идентичны.)

## § 7.5. ОДНО-ОДНОПОЛНОТА И МНОГО-ОДНОПОЛНОТА

Множество  $K$  является как  $m$ -полным, так и 1-полным. Всякое ли  $m$ -полное множество 1-полното? Мы отвечаем на этот вопрос следующей теоремой.

Теорема VII.  $A$   $m$ -полното  $\Leftrightarrow A$  1-полното.

Доказательство. (Более короткое и изящное доказательство может быть найдено в гл. 11; настоящее доказательство представляет интерес само по себе, как мы увидим в § 7.6.)

$\Leftarrow$ . Очевидно.

$\Rightarrow$ . Предположим, что  $A$   $m$ -полното. Тогда  $A$  рекурсивно перечислимо и  $K \leq_m A$  посредством некоторой общерекурсивной функции  $f$ . Мы покажем, что  $K \leq_1 A$ . 1-полнота множества  $A$  будет тогда следовать из 1-полноты  $K$ .

Напомним, что  $D_x$  есть конечное множество с каноническим индексом  $x$  (§ 5.6). Предположим, что следующая лемма уже доказана.

Лемма. Если  $K \leq_m A$ , то существует общерекурсивная функция  $g$ , такая, что для всех  $x$

$$[D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset A] \Rightarrow g(x) \in A - D_x$$

и

$$[D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset \bar{A}] \Rightarrow g(x) \in \bar{A} - D_x.$$

Мы можем теперь продолжить доказательство того факта, что  $K \leq_1 A$ , следующим образом. Зададим функцию  $f'$  такими инструкциями.

Вычисление  $f'(0)$ . Положите  $f'(0) = f(0)$ . (Тем самым  $0 \in K \Leftrightarrow f'(0) \in A$ .)

Вычисление  $f'(n+1)$ . Посмотрите, выполняется ли  $f(n+1) \in \{f'(0), \dots, f'(n)\}$ . Если нет, положите  $f'(n+1) = f(n+1)$ . Если выполняется и  $f(n+1) = f'(m_0)$ , возьмите конечное множество  $D_{x_0} = \{f'(m_0)\}$  и, воспользовавшись функцией  $g$  из леммы, вычислите  $g(x_0)$  ( $x_0$ , конечно, может быть получено по  $f'(m_0)$ ; оно равно  $2^{f'(m_0)}$ ). Посмотрите, выполняется ли  $g(x_0) \in \{f'(0), \dots, f'(n)\}$ . Если нет, положите  $f'(n+1) = g(x_0)$ . Если выполняется и  $g(x_0) = f'(m_1)$ , возьмите конечное множество  $D_{x_1} = \{f'(m_0), f'(m_1)\}$  и вычислите  $g(x_1)$ . (Здесь  $x_1 = 2^{f'(m_0)} + 2^{f'(m_1)}$ .) Посмотрите, будет ли  $g(x_1) \in \{f'(0), \dots, f'(n)\}$  . . . Согласно лемме, эта процедура в конечном итоге дает  $f'(n+1) \in \{f'(0), \dots, f'(n)\}$ .

Далее, согласно лемме,  $n+1 \in K \Leftrightarrow f'(n+1) \in A$ . Отсюда  $K \leq_1 A$  посредством  $f'$ .

Остается доказать лемму. Для этого нам понадобится сублемма, относящаяся к функции  $f$ .

Сублемма. Если  $K \leq_m A$  посредством функции  $f$ , то

- (a)  $B$  рекурсивно  $\Rightarrow f^{-1}(B)$  рекурсивно;
- (b)  $f(K)$  бесконечно.

Доказательство сублеммы. (a) Для всякого  $B$ ,  $f^{-1}(B) \leq_m B$  посредством  $f$ . Отсюда, согласно теореме I (e),  $B$  рекурсивно  $\Rightarrow f^{-1}(B)$  рекурсивно.

(b) Поскольку  $K \leq_m A$  посредством  $f$ ,  $f^{-1}(f(K)) = K$ . Отсюда, согласно части (a), если бы  $f(K)$  было конечным (и, следовательно, рекурсивным),  $K$  было бы рекурсивно. Но  $K$  не рекурсивно.

**Доказательство леммы.** Выберем некоторую эффективную процедуру для пересчитывания  $K$ . Она приводит к эффективной процедуре, пересчитывающей множество  $f(K)$ , которое, согласно сублемме, бесконечно.

Так как  $A$  рекурсивно перечислимо, может быть найдена общерекурсивная функция  $h$ , такая, что

$$W_{h(x)} = \begin{cases} f^{-1}(D_x), & \text{если } D_x \cap A = \emptyset; \\ N, & \text{если } D_x \cap A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Пусть какое-то  $D_x$  дано. Мы вычисляем  $g(x)$  согласно следующим инструкциям.

Если  $fh(x) \notin D_x$ , положим  $g(x) = fh(x)$ . Если  $fh(x) \in D_x$ , положим  $g(x) = [\text{первый в пересчете } f(K) \text{ элемент, не являющийся элементом множества } D_x]$ .

Так как  $f(K)$  бесконечно,  $g(x)$  определено при всяком  $x$ . Остается показать, что функция  $g$  обладает требуемыми свойствами. По определению  $g(x) \notin D_x$ . Более того,

$$\begin{aligned} [D_x \neq \emptyset \& \& D_x \subset A] \Rightarrow W_{h(x)} = N \Rightarrow h(x) \in W_{h(x)} \Rightarrow \\ & \Rightarrow h(x) \in K \Rightarrow g(x) \in A; \\ [D_x \neq \emptyset \& \& D_x \subset \bar{A}] \Rightarrow W_{h(x)} = f^{-1}(D_x) \Rightarrow h(x) \notin f^{-1}(D_x) \quad (\text{иначе} \\ & h(x) \in K \& fh(x) \in A \& fh(x) \in \\ & \in D_x \& D_x \cap A \neq \emptyset) \Rightarrow \\ \Rightarrow [h(x) \notin W_{h(x)} \& fh(x) \notin D_x] \Rightarrow \\ \Rightarrow [h(x) \in \bar{K} \& fh(x) \notin D_x] \Rightarrow g(x) \in \bar{A}. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы и, тем самым, теоремы. ■

Теоремы VI и VII в совокупности показывают, что  $m$ -полные множества составляют один тип изоморфизма. (Свойство  $m$ -полноты, таким образом, само оказывается полным множеством рекурсивных инвариантов.) Как уже было замечено, множество  $K$   $m$ -сводимо к любому из до сих пор рассматривавшихся нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств. Отсюда мы можем заключить на основании теорем VI и VII, что всякое нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество, рассматривавшееся нами, изоморфно множеству  $K$ . (Это верно также и для рекурсивно перечислимых множеств, косвенно упоминавшихся в § 2.2.)

Подведем итог. Свойства множества быть изоморфным множеству  $K$ ,  $1$ -полным,  $m$ -полным совпадают. Каждое из множеств, служивших нам примером нерекурсивного рекурсивно перечислимого множества, обладает этими свойствами. Нами не выяснено, однако, не будет ли креативность более широким свойством и не будет ли еще более широким свойство множества быть рекурсивно перечислимым, но не рекурсивным.

## § 7.6. ЦИЛИНДРЫ

Каковы бы ни были множества  $A$  и  $B$ ,  $A \equiv_1 B \Rightarrow A \equiv_m B$ . Каждая  $m$ -степень может, таким образом, рассматриваться как составленная из одной или более  $1$ -степеней, т. е. типов изоморфизма. Можно ли более точно описать структуру  $m$ -степени в терминах составляющих ее  $1$ -степеней?

**Определение.**  $A$  есть цилиндр, если  $A \equiv B \times N$  для некоторого  $B$ . (Геометрическое происхождение этого термина ясно.) Заметим, что  $\equiv$  употребляется вместо  $=$  для того, чтобы понятие цилиндра было рекурсивно инвариантным.

Интересующая нас информация содержится в следующей элементарной теореме.

**Теорема VIII (a)**  $A \leqslant_1 A \times N$ .

(b)  $A \times N \leqslant_m A$  (и, следовательно,  $A \equiv_m A \times N$ ).

(c)  $A$  — цилиндр  $\Leftrightarrow (\forall B)[B \leqslant_m A \Rightarrow B \leqslant_1 A]$ .

(d)  $A \leqslant_m B \Leftrightarrow A \times N \leqslant_1 B \times N$ .

**Доказательство.** (a)  $A \leqslant_1 A \times N$  посредством  $\lambda x[\langle x, 0 \rangle]$ .

(b)  $A \times N \leqslant_m A$  посредством  $\pi_1$ .

(c)  $\Rightarrow$ . Предположим, что  $A \equiv C \times N$  и  $B \leqslant_m A$ . Тогда  $B \leqslant_m C$  посредством некоторой функции  $f$ . Пусть  $f' = \lambda x[\langle f(x), x \rangle]$ . Тогда  $B \leqslant_1 C \times N$  посредством  $f'$ . Отсюда  $B \leqslant_1 A$ .

$\Leftarrow$ . Предположим, что  $(\forall B)[B \leqslant_m A \Rightarrow B \leqslant_1 A]$ . Рассмотрим  $A \times N$ . В силу (b)  $A \times N \leqslant_m A$ ; отсюда, согласно нашему предположению,  $A \times N \leqslant_1 A$ . В силу (a)  $A \leqslant_1 A \times N$ . Следовательно,  $A \equiv_1 A \times N$ . Отсюда, согласно теореме VII,  $A \equiv A \times N$  и  $A$  — цилиндр.

(d)  $\Rightarrow$ . Предположим,  $A \leqslant_m B$ . Тогда  $A \times N \leqslant_m A \leqslant_m B \leqslant_1 B \times N$ . Отсюда  $A \times N \leqslant_m B \times N$ . Тем самым, согласно (c),  $A \times N \leqslant_1 B \times N$ .

$\Leftarrow$ . Предположим, что  $A \times N \leqslant_1 B \times N$ . Тогда  $A \leqslant_1 A \times N \leqslant_1 B \times N \leqslant_m B$  и, следовательно,  $A \leqslant_m B$ . ■

**Следствие VIII.**  $A$  — цилиндр  $\Leftrightarrow A \times N \leqslant_1 A \Leftrightarrow A \equiv A \times N$ .

**Доказательство очевидно.**

Назовем  $A \times N$  цилиндрификацией множества  $A$ . Из пунктов (a), (b) и (c) предыдущей теоремы следует, что всякая  $m$ -степень содержит максимальную  $1$ -степень; и эта  $1$ -степень может быть получена из любого множества  $m$ -степени цилиндрификацией. Более того, из пункта (d) предыдущей теоремы следует, что структура упорядочения по  $m$ -сводимости отражается в упорядочении по  $1$ -сводимости естественным образом, т. е. существует канонический гомоморфизм из  $m$ -упорядочения в  $1$ -упорядочение.

В доказательстве теоремы VII § 7.5 по существу устанавливается, что  $[K \leqslant_m A \& A \text{ рекурсивно перечислимо}] \Rightarrow A \text{ есть цилиндр}$ . Лемма, фигурирующая в этом доказательстве, дает еще одно описание цилиндра.

**Теорема IX.**  $A - \text{цилиндр} \Leftrightarrow \text{существует общерекурсивная функция } g, \text{ такая, что для всех } x$

$$[D_x \neq \emptyset \& D_x \subset A] \Rightarrow g(x) \in A - D_x$$

и

$$[D_x \neq \emptyset \& D_x \subset \bar{A}] \Rightarrow g(x) \in \bar{A} - D_x.$$

(Таким образом, множество есть цилиндр тогда и только тогда, когда оно обладает некоторым свойством „двойной продуктивности” относительно конечных множеств.) Доказательство теоремы IX дается в виде упр. 7-35. Оно является усиленной модификацией доказательства теоремы VII.

Специальное описание рекурсивно перечислимых цилиндров содержится в упр. 7-37.

## § 7.7. ПРОДУКТИВНОСТЬ

Понятие *продуктивности* является весьма существенным в приложениях теории рекурсивных функций к логике. Мы займемся сейчас его изучением. На некоторые приложения к логике будет указано в § 7.8; другие будут приведены позднее (см. также Деккер [1955]).

Из определения продуктивности следует, что если множество  $A$  продуктивно, то существует эффективная процедура, позволяющая по любому данному рекурсивно перечислимому подмножеству множества  $A$  получить большее рекурсивно перечислимое подмножество множества  $A$ . Рассмотрим способы итерирования этой процедуры. Приходим прежде всего к следующей теореме.

**Теорема X.**  $A \text{ продуктивно} \Rightarrow A \text{ обладает бесконечным рекурсивно перечислимым подмножеством.}$

**Доказательство.** Приведем сначала неформальное доказательство. Пусть  $\psi$  — продуктивная функция для  $A$ . Зададим общерекурсивную функцию  $g$ , множеством значений которой является бесконечное подмножество множества  $A$ . Инструкции для  $g$  индуктивны. Пусть  $z_0$  есть р. п. индекс пустого множества.

Вычисление  $g(0)$ . Положим  $g(0) = \psi(z_0)$ . Так как  $W_{z_0} \subset A$ ,  $\psi(z_0)$  определено и принадлежит множеству  $A$ .

Вычисление  $g(n+1)$ . Пусть  $z_{n+1}$  — р. п. индекс конечного множества  $\{g(0), \dots, g(n)\}$ . Положим  $g(n+1) = \psi(z_{n+1})$ . Поскольку  $W_{z_n} \subset A$ ,  $\psi(z_{n+1})$  определено и принадлежит  $A$ .

Очевидно,  $g$  взаимно однозначна. Это завершает неформальное доказательство.

Тот факт, что функция  $g$  общерекурсивна, делается более ясным из следующей, более формальной версии доказательства. Из теоремы 5-XIII следует существование общерекурсивной функции  $f$  двух переменных, такой, что

$$W_{f(x, y)} = W_x \cup W_y.$$

Согласно тезису Чёрча, существует общерекурсивная функция  $h$ , такая, что

$$W_{h(x)} = \{x\}.$$

Как и прежде, пусть  $z_0$  есть р. п. индекс пустого множества. Определим функцию  $k$  следующим образом:

$$\begin{aligned} k(0) &= z_0; \\ k(n+1) &= f(h\phi k(n), k(n)). \end{aligned}$$

Тогда  $k(n)$  соответствует  $z_n$  в предыдущем неформальном доказательстве. Определим

$$g = \psi k.$$

**Следствие X.**  $A \text{ продуктивно} \Rightarrow A \text{ обладает бесконечным рекурсивным подмножеством.}$

**Доказательство.** Непосредственно вытекает из теоремы 5-IV.

Доказательство теоремы X наводит на мысль о возможности более далеко идущей итерации продуктивной процедуры. Рассмотрим следующие *неформальные* инструкции для пересчета некоторого подмножества множества  $A$ . Инструкции эти привлекают трансфинитную индукцию по ординальным числам. (Мы предполагаем здесь, что читатель знаком с последним понятием. Упражнения с 11-43 по 11-53 содержат некоторые сведения об ординальных числах.)

„Возьмите функцию  $g$  из доказательства теоремы X. Пусть  $x_0, x_1, x_2, \dots$  суть числа  $g(0), g(1), g(2), \dots$ . Пусть  $z_\omega$  — р. п. индекс (полученный из инструкций для  $g$ ) множества  $\{x_0, x_1, \dots\} = \text{Val } g$ . Тогда  $\psi(z_\omega)$  есть новый элемент множества  $A$ . Пусть  $x_\omega$  есть  $\psi(z_\omega)$ . Тогда  $\{x_\omega\} \cup \{x_0, x_1, \dots\}$  само есть рекурсивно перечислимое множество. Пусть  $z_{\omega+1}$  есть р. п. индекс этого множества. Тогда  $x_{\omega+1} = \psi(z_{\omega+1})$  есть новый элемент  $A$ . Таким образом мы можем пересчитать множество  $\{x_0, x_1, \dots\} \cup \{x_\omega, x_{\omega+1}, \dots\}$ . Пусть  $z_{\omega+\omega}$  — р. п. индекс (полученный из этих инструкций) этого последнего множества. Тогда  $x_{\omega+\omega} = \psi(z_{\omega+\omega})$  есть новый элемент множества  $A$ . Таким же образом получаем  $x_{\omega+\omega+\omega}, x_{\omega+\omega+\omega+\omega}$  и т. д. Теперь составьте окончательный пере-

счет (подмножеств  $A$ ) уплотнением всех предшествующих пересчетов".

Казалось бы, эти инструкции пересчитывают подмножества множества  $A$ , в некотором смысле замкнутого относительно продуктивной процедуры. Можно было бы надеяться, что они порождают все  $A$ . Но, согласно теореме V (с),  $A$  не является рекурсивно перечислимым, и, по определению продуктивности, никакое рекурсивно перечислимое подмножество множества  $A$  не может быть замкнуто относительно продуктивной процедуры (любое такое подмножество само должно было бы иметь некоторый р. п. индекс  $\omega$  и  $\psi(\omega)$  было бы в  $A$ , но вне этого подмножества). Таким образом мы приходим к явному парадоксу<sup>1)</sup>.

Противоречие возникло из-за того, что эти неформальные инструкции нельзя сделать вполне точными. Любой из предложенных точных вариантов будет менее емок, чем это подразумевает расплывчатая формулировка неформальных инструкций. Какой бы ни был дан точный аналог, может быть найдена более емкая точная версия. Точные версии основываются на системах обозначений для ординальных чисел. Мы сталкиваемся с ограниченностью нашей способности дать исчерпывающую систему обозначений для ординалов. В более тонких разделах теории рекурсивных функций ординальные обозначения играют фундаментальную роль. Они рассматриваются далее в гл. 11 и, как мы увидим, тесно связаны с теоремами о логической неполноте.

Рассмотренный "парадокс" предостерегает нас от опасности слишком неточных и неформальных рассмотрений в теории рекурсивных функций. Упражнение 7-46 показывает, что точная неконструктивная версия неформальных инструкций может быть найдена, если не требовать, чтобы результатирующее множество было рекурсивно перечислимым.

Обратимся к иным описаниям продуктивности и понятий, с продуктивностью связанных. Некоторые результаты приведены здесь. Дальнейший материал содержится в упр. § 7.9.

Для всякого ли продуктивного множества может быть найдена *всюду определенная* продуктивная функция? В гл. 11 будет приведено короткое и изящное доказательство того, что это так. Мы дадим сейчас более длинное доказательство. Оно вырабатывает ценную для исторически более раннего доказательства гл. 11 интуицию.

**ТЕОРЕМА XI.**  $A$  продуктивно  $\Leftrightarrow$  существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $A$  продуктивно с  $f$  в качестве его продуктивной функции.

<sup>1)</sup> По форме этот парадокс походит на парадокс Бурали-Форти в теории ординальных чисел. (Парадокс Бурали-Форти возникает из трактовки упорядоченной совокупности всех ординалов как нового ординала.) Рассматриваемый парадокс, однако, привлекает лишь счетные ординалы.

**Доказательство.**  $\Leftarrow$  очевидно.

$\Rightarrow$ . Пусть  $A$  продуктивно с продуктивной функцией  $\psi$ . Дадим инструкции для вычисления  $f$ .

Методом, уже знакомым читателю, может быть найдена общерекурсивная функция  $g$ , такая, что

$$W_{g(z, x)} = \begin{cases} W_x, & \text{если } z \in K; \\ \emptyset & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пусть  $k_0, k_1, \dots$  — эффективный пересчет  $\bar{K}$ .

Вычисление  $f(x)$ . Начинайте вычислять  $\psi(x)$ ,  $\psi g(k_0, x)$ ,  $\psi g(k_1, x), \dots$  Возьмите в качестве значения  $f(x)$  то, что вычисляется первым. Покажем, что  $f$  является продуктивной функцией для  $A$ ; поскольку  $x, g(k_0, x), g(k_1, x), \dots$  суть индексы множества  $W_x$ ,  $f(x)$  должна сходиться, если сходится  $\psi(x)$ . Функция  $f$  всюду определена; действительно, предположим, что  $f(x_0)$  расходится в некоторой точке  $x_0$ . Тогда  $\psi g(y, x_0)$  расходится при всех  $y \in K$ . Однако для  $y \in \bar{K}$   $W_{g(y, x_0)} = \emptyset$  и, следовательно, для  $y \in \bar{K}$   $\psi g(y, x_0)$  сходится. Таким образом, мы имели бы  $\bar{K} = \{y \mid \psi g(y, x_0) \text{ сходится}\}$ , и по второй теореме о проекции  $\bar{K}$  было бы рекурсивно перечислимым, в противоречие с нерекурсивностью множества  $K$ . ■

Более сильный вариант теоремы XI приведен в упр. 7-50 и 7-51. (Пост первоначально определил *творческое* множество как рекурсивно перечислимое множество, дополнение которого продуктивно с всюду определенной продуктивной функцией.)

Утверждение о том, что  $A$  не является рекурсивно перечислимым множеством, может быть выражено так:  $(\forall x)[W_x \neq A]$  или, более детально,  $(\forall x)(\exists y)[y \in W_x - A \text{ или } y \in A - W_x]$ . Мы могли бы сказать, что это утверждение имеет место "конструктивно" (или "равномерно"), если существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $(\forall x)[f(x) \in W_x - A \text{ или } f(x) \in A - W_x]$ . Приходим к следующему определению.

**Определение.** Множество  $A$  *вполне продуктивно*, если существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для всех  $x$  или  $f(x) \in W_x - A$ , или  $f(x) \in A - W_x$ . Функцию  $f$  назовем *вполне продуктивной функцией* для  $A$ .

**Пример.**  $\bar{K}$  вполне продуктивно с  $\lambda x[x]$  в качестве вполне продуктивной функции. Действительно,  $x \in W_x \Rightarrow x \notin \bar{K}$  и  $x \notin W_x \Rightarrow x \in \bar{K}$  по определению  $K$ .

Очевидно, что всякое вполне продуктивное множество продуктивно. Имеет ли место обратное? В гл. 11 мы покажем, что это так и что понятия продуктивности и вполне-продуктивности тем самым эквивалентны. Еще одно описание продуктивности приводится

в упр. 11-15, из которого мы узнаем, что  $A$  продуктивно  $\Leftrightarrow \bar{K} \leqslant_s \leqslant_t A \Leftrightarrow \bar{K} \leqslant_m A$ .

В упр. 7-43 мы увидим, что существует  $2^{\aleph_0}$  продуктивных множеств. Верно ли, что всякое множество, не являющееся рекурсивно перечислимым, продуктивно? Из теоремы X и результатов упр. 5-8 следует, что это неверно; существует множество, не являющееся ни продуктивным, ни рекурсивно перечислимым. Мы предпримем изучение таких множеств в гл. 8<sup>1)</sup>. В следующем определении речь идет о существовании продуктивной процедуры для перехода от рекурсивно перечислимых подмножеств к большим рекурсивно перечислимым подмножествам.

**Определение.** Множество  $A$  полупродуктивно, если существует частично рекурсивная функция  $\psi$ , такая, что  $(\forall x)[W_x \subset A \Rightarrow [\psi(x) \text{ сходится} \& W_x \subset W_{\psi(x)} \& W_x \neq W_{\psi(x)} \& W_{\psi(x)} \subset A]]$ .

Очевидно,  $A$  продуктивно  $\Rightarrow A$  полупродуктивно (упр. 7-53). Далее для полупродуктивных множеств имеет место аналог теоремы XI (упр. 7-54). Всякое ли полупродуктивное множество продуктивно? Упражнение 8-42 показывает, что это не так; множество может быть полупродуктивным, не будучи продуктивным. Этот результат принадлежит Шёнфильду (см. упр. 8-42).

### Пары непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств

Аналогично теории рекурсивно перечислимых множеств, может быть развита теория пар непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств. Эта теория оказывается существенной в некоторых приложениях к логике (там, например, где мы интересуемся как множеством доказуемых утверждений, так и множеством недоказуемых утверждений некоторой формальной системы). В этой теории аналогом рекурсивности является следующее понятие.

**Определение.** Множества  $A$  и  $B$  рекурсивно отделены, если существует рекурсивное множество  $C$ , такое, что  $A \subset C$  и  $B \subset \bar{C}$ .  
Аналог креативности:

**Определение.** Множества  $A$  и  $B$  эффективно неотделены, если существует частично рекурсивная функция  $\psi$  двух переменных, такая, что для любых  $u$  и  $v$  имеет место соотношение

$$[A \subset W_u \& B \subset W_v \& W_u \cap W_v = \emptyset] \Rightarrow \\ \Rightarrow [\psi(u, v) \text{ сходится} \& \psi(u, v) \in \overline{W_u \cup W_v}]$$

<sup>1)</sup> Для такого множества  $A$  утверждение  $(\forall x)(\exists y)[y \in W_x - A \text{ или } y \in A - W_x]$  должно иметь место „неконструктивно“ (или „неравномерно“). Утверждение верно, но  $y$  не может быть рекурсивной функцией  $x$ .

Верна следующая

**Теорема XII.** (а) *Каковы бы ни были множества  $A$  и  $B$ , если  $A$  и  $B$  эффективно неотделены, то  $A$  и  $B$  не являются рекурсивно отделенными.*

(б) *Какова бы ни была пара непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств  $A$  и  $B$ , если  $A$  и  $B$  эффективно неотделены, то каждое из множеств  $A$  и  $B$  креативно.*

(с) *Существует эффективно неотделенная пара непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств.*

**Доказательство.** (а) и (б) очевидны (см. упр. 7-56).

(с) Пусть  $A_0 = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\}$  и  $A_1 = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$ ; эти множества, очевидно, суть непересекающиеся рекурсивно перечислимые множества.

Пусть даны  $u$  и  $v$ . Определим  $\eta(y)$  следующим образом.

Чтобы вычислить  $\eta(y)$ , одновременно перечисляем  $W_u$  и  $W_v$ ; если  $y$  появляется сначала в  $W_u$ , положим  $\eta(y) = 1$ ; если  $y$  появляется сначала в  $W_v$ , положим  $\eta(y) = 0$ .

Тогда  $\eta = \varphi_{f(u, v)}$  для некоторой всюду определенной функции  $f$ . Функция  $f$  является искомой „продуктивной функцией“, поскольку если  $A_0 \subset W_u$ ,  $A_1 \subset W_v$  и  $W_u \cap W_v = \emptyset$ , то, например,

$$f(u, v) \in W_u \Rightarrow \eta(f(u, v)) = 1 \Rightarrow \varphi_{f(u, v)}(f(u, v)) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(u, v) \in A_1 \Rightarrow f(u, v) \in W_v,$$

и мы имеем противоречие. ■

Несколько иные формулировки ряда рассматривавшихся понятий содержатся в упр. 2-30. Мы неоднократно будем приводить и другие результаты из теории пар рекурсивно перечислимых множеств. Разработка этой теории и ее применения к логике предпринята в работе Шмульяна [1961]. Распространение результатов для пар множеств на последовательности множеств проведено Клиром в [1961].

## § 7.8. ЛОГИКА

### Терминология

*Правильно построенные формулы* (мы будем для правильно-построенной формулы употреблять сокращение ппф или пп-формула) формализованной логической системы образуют некоторый бесконечный класс конечных цепочек символов некоторого основного конечного алфавита. Пп-формулы выделяются всегда таким образом, что существует эффективная процедура, позволяющая определять, какие цепочки являются пп-формулами, а какие нет. При исследовании логической системы пп-формулы являются

основными объектами изучения. В семантических терминах пп-формулы образуют класс „осмысленных” цепочек. Как правило, в приводимых нами примерах из логики предикатов понятие пп-формулы будет совпадать с тем, что в логике предикатов часто называют *высказываниями системы*<sup>1)</sup>.

Чтобы применять понятия теории рекурсивных функций, следует предпринять кодирование пп-формул натуральными числами. Мы ограничимся рассмотрением кодирований, являющихся отображениями на  $N$ <sup>2)</sup>. Натуральное число, поставленное в соответствие некоторой ппф при некотором кодировании, называется *гёделевым номером* этой ппф (при этом кодировании). (Мы предполагаем, как правило, что операции кодирования и декодирования эффективны.) Обсуждение способов кодирования проводилось в § 1.10.

Пусть задана логическая система. Тогда кодирование ставит в соответствие каждому множеству пп-формул множество натуральных чисел. Пусть задано множество пп-формул. Очевидно, что если множество гёделевых номеров, получаемых при каком-то кодировании, обладает некоторым рекурсивно инвариантным свойством, то им обладает и множество гёделевых номеров, получаемых при любом другом кодировании (см. § 1.10). Рекурсивно инвариантные свойства могут, таким образом, быть поставлены в соответствие непосредственно множествам пп-формул. Мы можем говорить, например, о рекурсивном множестве пп-формул, или рекурсивно перечислимом множестве пп-формул, или о продуктивном множестве пп-формул.

При изучении конкретных логических систем некоторые множества пп-формул обычно выделяются как представляющие особый интерес. Например, может быть выделено множество „доказуемых” пп-формул (при некоторых указанных синтаксических правилах доказательства) или множество „истинных” пп-формул (при некотором — как правило, неконструктивном — определении истинности). Множество пп-формул, выделенных таким образом, называется *теорией*. (Обыкновенно требуется, чтобы „теория”

<sup>1)</sup> Высказывания суть выражения, в которых каждая переменная находится в области действия некоторого квантора. Заметим, кстати, что в логике предикатов термин „пп-формула” обычно применяется и к выражениям, содержащим переменные, не находящиеся в области действия квантора, а не только к высказываниям. Мы не будем при нашем теперешнем общем подходе выделять более одного класса „осмысленных” цепочек данной системы, и мы станем называть этот класс „пп-формулы”, не взирая даже на то, что это в ряде случаев расходится с обычным более емким употреблением термина „пп-формула”.

<sup>2)</sup> На самом деле, нас удовлетворило бы привлечение кодирований, являющихся отображениями на рекурсивное собственное подмножество множества  $N$ . Чтобы рассмотреть такие случаи, нам пришлось бы, при нашем подходе, сделать несколько незначительных модификаций.

была замкнута относительно некоторых выделенных правил вывода. Часто эти правила являются правилами логики предикатов. Это ограничение для наших целей не существенно; временно мы определим теорию просто как произвольное множество пп-формул.)

Пп-формулы теории часто оказываются эффективно перечисляемыми. Как раз такая ситуация возникает, как правило, в тех случаях, когда теория состоит из „доказуемых” пп-формул при некоторых формальных правилах доказательства<sup>1)</sup>. Обычно говорят, что теория, т. е. множество пп-формул, *аксиоматизуема*, если это множество может быть эффективно пересчитано, т. е. если оно рекурсивно перечислимо. Аналогично, теория называется *разрешимой*, если она рекурсивна.

Существование рекурсивно перечислимых, но не рекурсивных множеств (подобных множеству  $K$ ) наводит на мысль о том, что некоторые хорошо известные аксиоматизируемые теории могут не быть разрешимыми. Это и в самом деле так. Теорема Чёрча (Чёрч [1936а]) устанавливает, что доказуемые пп-формулы логики предикатов образуют неразрешимую теорию. Мы увидим ниже, что доказуемые пп-формулы элементарной арифметики (при любой из стандартных аксиоматизаций) также образуют неразрешимую теорию.

### Теорема Гёделя о неполноте

„Феномен неполноты” Гёделя [1931] (см. также Тарский [1932, 1936]) может быть сформулирован целым рядом различных способов. Пожалуй, проще всего он может быть выражен следующими словами: в любой формальной системе, которая обладает некоторой минимальной сложностью и для которой понятие „истинности” пп-формулы может быть определено некоторым естественным образом, множество „истинных” пп-формул продуктивно (и, следовательно, не является рекурсивно перечислимым). Таким образом, „истинные” пп-формулы не образуют аксиоматизируемой теории.

Мы уже сейчас в состоянии показать на неформальном уровне, что это так. Рассмотрим произвольную формальную математическую систему, достаточно гибкую и емкую для того, чтобы образовывать утверждения о машинах Тьюринга и их индексах. Такие высказывания, как „17 есть индекс общерекурсивной функции”, будут тогда выражены в этой теории. Рассмотрим высказывания этого вида, т. е. вида „ $n$  есть индекс общерекурсивной функции”, где  $n$  — номера для натурального числа  $n$ . Мы не можем

<sup>1)</sup> Устраивается пересчет всех доказательств (примерно так, как в § 1.4 пересчитываются схемы всех примитивнорекурсивных функций).

рассчитывать на существование процедуры, которая пересчитывает все истинные высказывания этого вида и ни одного ложного высказывания этого вида, поскольку  $\{x \mid \Phi_x \text{ общерекурсивна}\}$  является, как известно, продуктивным множеством. В самом деле, из инструкций для процедуры, которая пересчитывает только истинные высказывания этого вида, мы можем эффективно получить (в силу продуктивности множества  $\{x \mid \Phi_x \text{ общерекурсивна}\}$ ) новое истинное высказывание этого вида, которое не было перечислено. Аналогично, рассмотрим высказывание вида „процесс вычислений, соответствующий набору инструкций  $P_n$ , при входе  $n$  расходится”, т. е. вида „ $n \notin K$ ”. Мы не можем надеяться перечислить все истинные и ни одного ложного утверждения этого последнего вида, поскольку множество  $\bar{K}$  продуктивно.

### Элементарная арифметика

Мы рассмотрим сейчас конкретную логическую систему. ПП-формулы элементарной арифметики — это такие пп-формулы, которые могут быть построены, исходя из  $+$ ,  $\times$ ,  $=$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $\dots$ , переменных символов для натуральных чисел, кванторов над натуральными числами, связок  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ , и удовлетворяют требованию, что всякая переменная в ппф находится в области действия некоторого квантора. Например,

$$(\forall a)[\neg a = 2 \Rightarrow (\exists b)a = b \times b]$$

есть ппф. (Она выражает ложное утверждение, состоящее в том, что всякое натуральное число, отличное от 2, есть квадрат.)

Можно определить множество „истинных” пп-формул элементарной арифметики в полном соответствии с нашей интуицией<sup>1)</sup>. Мы можем, таким образом, говорить об истинных пп-формулах и ложных пп-формулах. Мы предполагаем, что это определение истинности было дано.

Неожиданно много разнообразных комбинаторных утверждений может быть выражено в элементарной арифметике. В частности (см. упр. 7-64), можно найти выражение  $F$  с одной свободной переменной, такое, что если вместо свободной переменной подставляется нумерал для некоторого натурального числа  $x$ , то получаемая в результате ппф (которую мы отныне будем обозна-

<sup>1)</sup> Эта теория (множество истинных пп-формул) иногда называется элементарной теорией чисел или истинностной элементарной теорией чисел. Термин „элементарная теория чисел” часто применяется для множества всех пп-формул элементарной арифметики.

Определение истинной пп-формулы элементарной арифметики само может быть формализовано. Как показал Тарский, такая формализация, однако, требует средств выражения, более сильных, нежели средства выражения элементарной арифметики (см. упр. 11–45).

чать через  $F_x$ ) выражает, на интуитивном уровне, принадлежность  $x$  множеству  $K$ . Более точно, можно показать, что

$$x \in K \Leftrightarrow [F_x \text{ истинно}]$$

и

$$x \notin K \Leftrightarrow [F_x \text{ ложно}] \Leftrightarrow [(\neg F_x) \text{ истинно}],$$

где  $(\neg F_x)$  есть отрицание  $F_x$ .

Следующая лемма, хотя и является тривиальной, существенна для дальнейших рассмотрений.

Основная лемма.  $[B \text{ рекурсивно} \ \& A \cap B \text{ продуктивно}] \Rightarrow A \text{ продуктивно.}$

Доказательство. См. упр. 7-60. ■

Так как множество пп-формул  $\{F_x \mid x \in N\}$  рекурсивно и  $\{F_x \mid x \notin K\} (= \{F_x \mid F_x \text{ ложно}\})$  продуктивно (см. упр. 7-61), мы можем применить основную лемму. Получаем следующее.

(а) Истинные пп-формулы элементарной арифметики образуют продуктивное (и, следовательно, нерекурсивное) множество.

(б) Ложные пп-формулы элементарной арифметики образуют продуктивное множество.

Таким образом, истинные пп-формулы составляют неразрешимую и неаксиоматизируемую теорию.

В элементарной арифметике существуют различные стандартные способы выделения правил доказательства. Один из таких способов базируется на аксиомах Пеано (включая и те случаи аксиомы индукции Пеано, которые могут быть выражены в элементарной арифметике); получаемая в результате теория, т. е. множество доказуемых пп-формул, часто называется арифметикой Пеано<sup>1)</sup>. Иная теория („доказуемых” пп-формул) может быть получена, если принять в качестве „доказуемых” все те пп-формулы элементарной арифметики, которые доказуемы в стандартной теории множеств (класс пп-формул последней может выходить за пределы пп-формул элементарной арифметики). Мы назовем эту теорию теоретико-множественной арифметикой. Для каждого такого выбора аксиоматизируемой теории нетрудно показать, что  $x \in K \Rightarrow [F_x \text{ доказуема}].$

<sup>1)</sup> Более точно, арифметика Пеано состоит из тех пп-формул элементарной арифметики, которые выводимы внутри элементарной логики предикатов из следующих аксиом:  $(\forall a)(\forall b)[a + 1 = b + 1 \Rightarrow a = b]$ ;  $\forall a[\neg 0 = a + 1]$ ;  $(\forall a)[a + 0 = a]$ ;  $(\forall a)(\forall b)[a + (b + 1) = (a + b) + 1]$ ;  $(\forall a)[a \times 0 = 0]$ ;  $(\forall a)(\forall b)[a \times (b + 1) = [(a \times b) + a]; 0 + 1 = 1$ ; везде пп-формул вида  $(\dots((1 + 1) + 1) \dots + 1) = x$ , где  $x$  — нумерал числа  $x$ , а  $x$  — число единиц, появляющихся слева; и везде пп-формул вида  $[ \dots 0 \dots \& (\forall a)[ \dots a \dots \Rightarrow \dots (a + 1) \dots ]] \Rightarrow (\forall a) \dots a \dots$ .

(В самом деле, „доказательство” формулы  $F_x$  состоит в предъявлении выкладок, устанавливающих, что  $x$  входит в  $K$ .)

Рассмотрим систему, являющуюся или арифметикой Пеано, или теоретико-множественной арифметикой. Сделаем *специальное предположение*, состоящее в том, что никакая ложная ппф элементарной арифметики не доказуема. Тогда

$$x \in K \Leftrightarrow [F_x \text{ доказуема}],$$

и, следовательно,

$$x \notin K \Leftrightarrow [F_x \text{ недоказуема}].$$

Применив нашу основную лемму, получаем:

(с) недоказуемые пп-формулы образуют продуктивное множество.

(д) доказуемые пп-формулы образуют творческое (и, следовательно, нерекурсивное) множество.

Следовательно, доказуемые пп-формулы образуют неразрешимую теорию. Далее, рассмотрим  $\{F_x \mid (\neg F_x) \text{ доказуема}\}$ . Это множество является рекурсивно перечислимым подмножеством недоказуемых пп-формул. Используя продуктивность множества  $\bar{K}$ , получаем

(е) существует  $x_0$ , такое, что ни  $F_{x_0}$ , ни  $(\neg F_{x_0})$  не доказуемо.

Такая формула иногда называется *неразрешимой* ппф. Заметим, что из этих двух пп-формул мы непосредственно имеем, что  $\neg F_{x_0}$  истинна, а  $F_{x_0}$  ложна.

*Специальное предположение* о том, что никакая ложная ппф элементарной арифметики не доказуема, конечно, существенно<sup>1)</sup>. Для случая арифметики Пеано такое предположение само может быть установлено внутри более общей теоретико-множественной математики. Для случая теоретико-множественной арифметики это предположение должно базироваться или на эмпирической основе, или на интуиции, что выходит за пределы теории множеств.

Подытожим на неформальном уровне: никакая аксиоматизация математики не может исчерпывающим образом охватить все истинные утверждения элементарной арифметики; какова бы ни была аксиоматизация, порождающая лишь истинные утверждения элементарной арифметики, может быть образовано новое истинное утверждение, не доказуемое при этой аксиоматизации.

Приведенные факты придают особое значение нашему изучению продуктивности. Пост полагал, что такого рода факты выявляют существенно творческий характер математики. Отсюда термин *творческое множество*.

<sup>1)</sup> Если множество пп-формул таково, что в нем не содержится никакой ложной ппф, то такое множество пп-формул называется *семантически непротиворечивым*. Наше *специальное предположение* утверждает семантическую непротиворечивость множества доказуемых пп-формул.

**Замечание.** В формулировках результатов (с), (д) и (е) понятие истинности не фигурирует. Эти результаты остаются справедливыми при замене предположения о том, что никакая ложная ппф не доказуема, более слабым синтаксическим предположением (т. е. комбинаторным предположением о символизме), относящимся к *непротиворечивости* множества доказуемых пп-формул. В своем первоначальном доказательстве Гёдель поступает именно так. Фактически он показывает, что  $[x \in K \Leftrightarrow [F_x \text{ доказуема}]]$  имеет место, если множество доказуемых пп-формул обладает свойством, известным логикам как *ω-непротиворечивость*. Россер впоследствии усилил этот результат, использовав (по существу) несколько более сложное выражение  $G$  вместо гёделева выражения  $F$  и показав, что  $[x \in K \Leftrightarrow [G_x \text{ доказуема}]]$  имеет место, если множество доказуемых пп-формул *непротиворечиво*. Определения и изложение идей методов можно найти в упр. 7-64 и 7-65. Дальнейшие результаты о теоретико-множественной арифметике приведены в § 14.7 и в упр. с 14-21 по 14-23.

## § 7.9. УПРАЖНЕНИЯ

### § 7.1

7-1. Покажите, что  $[A \leq_m \bar{A} \& A \text{ рекурсивно перечислимо}] \Rightarrow A \text{ рекурсивно}$ .

7-2. Покажите, что существует нерекурсивное  $A$ , такое, что  $A \leq_m \bar{A}$ . (*Указание.* Воспользуйтесь  $K \oplus \bar{K}$ .)

7-3 (Деккер). (а) Покажите, что если  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы, то  $[A \cup B = N \& A \cap B \neq \emptyset] \Rightarrow A \leq_m A \cap B$ .  
 Δ(b). Покажите, что если  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы, то

$$[A \cup B = N \& A \cap B \text{ бесконечно}] \Rightarrow A \leq_1 A \cap B.$$

7-4. Пусть  $A$  и  $B$  — бесконечные множества, такие, что  $(A - B) \cup (B - A)$  конечно. Покажите, что  $A =_m B$  ( $A =_1 B$  может и не быть справедливо; см. гл. 8).

7-5. Сравните относительно  $\leq_m$  следующие множества:

- (i)  $\{x \mid x \text{ просто}\}$ ;
- (ii)  $\{x \mid x \text{ четно}\}$ ;
- (iii)  $\{x \mid W_x = \emptyset\}$ ;
- (iv)  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$ ;
- (v)  $\{x \mid \Phi_x \text{ общерекурсивна}\}$ ;

Δ(vi)  $\{x \mid W_x = W_n\}$  для фиксированного  $n$ . (Отношение (vi) к другим множествам зависит от  $n$ . Следует рассмотреть три случая.)

7-6. (а) Исследуйте структуру рекурсивных множеств относительно  $\leq_m$ .

(б) Покажите, что  $[A \text{ рекурсивно и } B \text{ не рекурсивно}] = A \leq_m B$ .

7-7. (а) Исследуйте структуру рекурсивных множеств относительно  $\leq_1$ .  
 Δ(b). Покажите, что существуют такие  $A$  и  $B$ , что  $A$  рекурсивно,  $B$  не рекурсивно и  $A \not\leq_1 B$ . (*Указание.* Воспользуйтесь результатом упр. 5-8.)

7-8. (а) Покажите, что всякая  $m$ -степень содержит самое большое  $n_0$  множеств. Содержит ли какая-нибудь из них менее  $n_0$  множеств?  
 (б) Покажите, что всякая  $m$ -степень имеет самое большое  $n_0$   $m$ -степеней, предшествующих ей относительно упорядочения по  $m$ -сводимости.

(с) Покажите, что (а) и (б) имеют место для 1-степеней и упорядочения по 1-сводимости.

7-9. Покажите, что конструкция теоремы II (б) не может быть использована для доказательства того, что упорядочение по 1-сводимости образует полурешетку. Покажите, однако, что сами рекурсивные 1-степени образуют верхнюю полурешетку относительно  $\leqslant_1$ .

7-10. Введем определение:  $A \leqslant_{cf} B$ , если существует общерекурсивная функция  $g$ , такая, что  $c_A = gc_B$ . Является ли отношение  $\leqslant_{cf}$  рефлексивным и транзитивным? Если окажется, что является, дайте полное описание упорядочения по сводимости, этим отношением порождаемого.

$\Delta 7-11$ . Покажите, что  $\{x \mid \varphi_x \text{ общерекурсивна}\}$  и  $\{x \mid \varphi_x \text{ не является всюду определенной}\}$  не сравнимы относительно  $\leqslant_m$ . (Указание. Покажите, что в противном случае пары индексов частично рекурсивных функций могли бы быть пересчитаны так, что в каждой паре одна и только одна частично рекурсивная функция являлась бы всюду определенной; покажите далее, что такой пересчет мог бы быть использован для построения диагональной конструкции над классом всех общерекурсивных функций, что привело бы к противоречию. Эта диагональная конструкция сложна; возможно, что к некоторым парам индексов пришлось бы в процессе диагонализации обращаться более одного раза.)

### § 7.2

7-12. Определите место множества  $\{x \mid W_x = \emptyset\}$  в упорядочении по 1-сводимости. (Ответ.  $\equiv_1 \bar{K}$ .)

7-13. (а) Проделайте упр. 7-5 для  $\leqslant_1$ .

(б) Пусть  $D$  — конечное множество. Сравните относительно  $\leqslant_1$  множества  $K \times \bar{K}$  и  $\{x \mid W_x = D\}$ .

$\Delta 7-14$ . Каково соотношение между множествами  $\{x \mid W_x \text{ рекурсивно}\}$  и  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$  относительно  $\leqslant_1$ ?

7-15. (а) Покажите, что [ $\varphi$  частично рекурсивна &  $\varphi$  взаимно однозначна &  $\varphi(N)$  рекурсивно &  $A$  рекурсивно]  $\Rightarrow \varphi(A)$  рекурсивно.

(б) Покажите, что [ $\varphi$  частично рекурсивна &  $\varphi(N) = N \times A$  рекурсивно &  $\varphi(A)$  не рекурсивно] возможно.

7-16. В каждом из следующих случаев покажите, что определяемое отношение между  $A$  и  $B$  рефлексивно и транзитивно. Исследуйте структуру соответствующих „степеней неразрешимости“ рекурсивно перечислимых множеств.

(i) ( $\exists$  частично рекурсивная функция  $\varphi$ ) [ $A \subset \varphi^{-1}(B)$ ].

(ii) ( $\exists$  частично рекурсивная функция  $\varphi$ ) [ $A = \varphi^{-1}(B)$ ].

(iii) ( $\exists$  частично рекурсивная функция  $\varphi$ ) [ $\varphi$  взаимно однозначна &  $A = \varphi^{-1}(B)$ ].

(Частичный ответ. (i) Все множества распадаются на две степени; (ii) рекурсивно перечислимые множества распадаются на две степени; (iii) рекурсивно перечислимые множества распадаются на бесконечно много степеней.)

### § 7.3

7-17. В примере 2 из § 7.3 проверьте, что  $g$  является искомой продуктивной функцией.

7-18. Покажите, что  $[A \neq \emptyset \& (\exists \text{ частично рекурсивная функция } \psi) (\forall x)[W_x \subset A \& W_x \neq \emptyset] \Rightarrow [\psi(x) \text{ сходится} \& \psi(x) \in A - W_x]] \Rightarrow A$  продуктивно.

7-19. Покажите непосредственно, без использования теоремы V (б), что следующие множества продуктивны:  $\{x \mid \varphi_x \text{ — перестановка}\}$  и  $\{x \mid \varphi_x \text{ — отображение на}\}$ .

7-20. Покажите, что  $\{x \mid \varphi_x \text{ не всюду определена}\}$  продуктивно. (Указание. Покажите, что  $K \leqslant_m \{x \mid \varphi_x \text{ общерекурсивна}\}$ .) Это множество таково, что как оно само, так и его дополнение продуктивны.

7-21. Покажите, что существует  $\aleph_0$  творческих множеств.

7-22. Покажите, что  $\{x \mid (\exists y)[x \in W_y \& y \in W_x]\}$  — творческое множество с  $\lambda x[x]$  в качестве продуктивной функции.

7-23. Какие множества упр. 7-5 являются творческими? Какие имеются творческие дополнения?

7-24. Исследуйте  $f(A)$  и  $f^{-1}(A)$ , когда  $f$  — взаимно однозначная общерекурсивная функция и  $A$  — творческое множество и когда  $f$  — взаимно однозначная общерекурсивная функция и  $A$  — продуктивное множество.

7-25. (а) Покажите, что  $[A \text{ продуктивно} \& B \text{ рекурсивно перечислимо} \& B \subset A] \Rightarrow A - B \text{ продуктивно}.$

(б) Покажите, что  $[A \text{ продуктивно} \& B \text{ рекурсивно перечислимо} \& A \subset B] \Rightarrow A \cup B \text{ продуктивно}.$

$\Delta 7-26$ . Покажите, что  $[A \text{ творческое} \& B \text{ рекурсивно перечислимо}] \& A_m \leqslant_m B \times \bar{B} \Rightarrow B \text{ творческое}.$

$\Delta 7-27$ . Покажите, что  $A \text{ творческое} \Rightarrow A \times A \text{ творческое}.$   
(Обращение этого факта было установлено Лахланом.)

### § 7.4

7-28. Между какими парами множеств из упр. 7-5 имеет место рекурсивный изоморфизм?

7-29. Покажите, что  $A \oplus \bar{A} = \overline{A \oplus \bar{A}}$ .

$\Delta 7-30$ . Покажите, что  $[f(A) = B \& f(\bar{A}) = \bar{B} \& g(B) = A \& g(\bar{B}) = \bar{A}] \& f \text{ рекурсивно} \& g \text{ рекурсивно}] \Rightarrow A = B$ .

$\Delta 7-31$ . Пусть  $R_x = \text{Val } \varphi_x$ . Пусть  $V_x$  определено как в упр. 5-11 (б). Тогда каждая из последовательностей  $\{R_x\}_{x=0}^{x=\infty}$ ,  $\{V_x\}_{x=0}^{x=\infty}$  и  $\{W_x\}_{x=0}^{x=\infty}$  задает нумерацию рекурсивно перечислимых множеств. Покажите, что, каковы бы ни были две из этих трех нумераций, одна из них, в соответствующем сильном смысле, является рекурсивной перестановкой другой. (Указание. Воспользуйтесь методом доказательства теоремы VI).

### § 7.5

$\Delta 7-32$ . (Майхилл). Покажите, что любые два творческих множества рекурсивно изоморфны.

### § 7.6

7-33. Покажите, как структура рекурсивных множеств относительно  $\leqslant_1$  и  $\leqslant_m$  согласуется с теоремой VIII.

7-34. Введем определение:  $A \leqslant_f B$ , если  $(\exists \text{ общерекурсивная } f) [f \text{ взаимно однозначна} \& A = f^{-1}(B) \& \text{Val } f \text{ рекурсивно}]$ .

(а) Покажите, что  $\leqslant_f$  рефлексивно и транзитивно и что его „степени“ суть в точности типы рекурсивного изоморфизма.

(б) Покажите, что  $A \leqslant_m B \Leftrightarrow A \times N \leqslant_f B \times N$ .

(с) Покажите, что если или  $A$ , или  $B$  является цилиндром, то  $A \leqslant_1 B \Rightarrow A \leqslant_f B$  (Р. Робинсон обнаружил существование рекурсивно перечислимых множеств  $A$  и  $B$ , таких, что  $A \leqslant_1 B$ , но  $A \not\leqslant_f B$ ).

7-35. Докажите теорему IX.

7-36. (а) Покажите, что если хотя бы одно из множеств  $A$  или  $B$  является цилиндром, то  $A \times B$  — цилиндр.

(б) Покажите, что если как  $A$ , так и  $B$  суть цилиндры, то  $A \oplus B$  есть цилиндр. (Указание. Воспользуйтесь теоремой IX.)

В упр. 8-29 мы увидим, что  $A \oplus B$  и  $A \times B$  не обязательно являются множествами одной и той же  $m$ -степени, даже если  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы.

(с) Какие из множеств  $K \times \bar{K}$  и  $K \oplus \bar{K}$  являются цилиндрами?

(д) Покажите, что из того, что  $A \oplus B$  есть цилиндр, не обязательно следует, что или  $A$ , или  $B$  есть цилиндр.

Δ(е) Каково соотношение между  $K \times \bar{K}$  и  $K \oplus \bar{K}$  относительно  $m$ -упорядочения? (Частичный ответ. Они различных степеней.)

Δ-37. Введем определение:  $A$  есть 1-1-сплинтер, если ( $\exists$  общерекурсивная взаимно однозначная функция  $f$ ) ( $\exists x[A = \{x, f(x), ff(x), fff(x), \dots\}]$ ). (Сплинтеры изучались Юллианом и позднее Майхиллом; см. Юллиан [1960] и Майхилл [1959а].)

(а) Покажите, что это понятие рекурсивно инвариантно.

(б) Покажите, что если  $A$  и  $\bar{A}$  бесконечны и  $A$  есть 1-1-сплинтер  $\Rightarrow A$  — рекурсивно перечислимый цилиндр. (Указание. Покажите, что  $(\forall B)[B \leq_m \leq_m A \Rightarrow B \leq_1 A]$ . Заметим, что в  $\bar{A}$  могут встречаться „циклы“.)

(с) Покажите, что  $[A \neq \emptyset \& A — рекурсивно перечислимый цилиндр] \Rightarrow A$  есть 1-1-сплинтер. (Указание. Поскольку  $A \equiv A \times N$ , достаточно установить, что  $A \times N$  есть 1-1-сплинтер. Пусть  $n \in A$ . Определим  $f$  так, чтобы  $f(x, y) = \langle x, y + 1 \rangle$  за тем лишь исключением, что по мере появления элементов множества  $A$  в его эффективном пересчете, это правило модифицируется с использованием процедуры уплотнения таким образом, чтобы последователи  $\langle n, 0 \rangle$ , получаемые посредством  $f$ , постепенно исчерпывали  $A \times N$ .) (Замечание. Определение сплинтера получается из определения 1-1-сплинтера опусканием требования взаимной однозначности функции  $f$ . Янг установил существование бесконечного сплинтера, не являющегося цилиндром.)

(д) (Янг). Будем говорить, что общерекурсивная перестановка  $f$  свободна от циклов, если для каждого непустого конечного множества  $D$  имеет место  $f(D) \neq D$ .

Докажите, что  $A$  — цилиндр  $\Leftrightarrow$  существует свободная от циклов рекурсивная перестановка  $f$ , такая, что  $f(A) = A$ .

7-38. Используйте теорему IX, чтобы показать, что все множества из упр. 7-5 суть цилиндры.

## § 7.7

7-39. Пусть  $f$  — данная общерекурсивная функция. Пусть  $\mathcal{A} = \{B \mid B$  продуктивно с  $f$  в качестве продуктивной функции).

(а) Приведите примеры общерекурсивной функции  $f$ , такой, что  $\mathcal{A} = \emptyset$ , и такой, что  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ .

(б) Покажите, что  $[A \in \mathcal{A} \& B \in \mathcal{A}] \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ .

(с) Покажите, что  $[A \in \mathcal{A} \& B \in \mathcal{A}]$  не всегда влечет за собой  $A \cup B \in \mathcal{A}$ .

▲(д) Покажите, что  $[A \in \mathcal{A} \& B \in \mathcal{A}] \Rightarrow A \cup B$  продуктивно.

▲(е) Покажите, что  $\mathcal{A}$  порождает решетку продуктивных множеств относительно операций  $\cap$  и  $\cup$ .

7-40. (Деккер). Пусть  $\text{Dom } A$  есть  $\{x \mid W_x \subset A\}$ . Покажите, что  $A$  — продуктивно  $\Rightarrow \text{Dom } A$  продуктивно.

7-41. Покажите, что  $\bar{K}$  —  $\text{Dom } K$  бесконечно.

7-42. (См. 7-40.) Пусть  $A$  продуктивно с  $\psi$  в качестве продуктивной функции. Мы будем  $\psi(\text{Dom } A)$  называть центром  $A$  и обозначать  $\text{center}_\psi A$ . Покажите, что  $\text{center}_\psi A \subset B \subset A \Rightarrow B$  продуктивно.

7-43. Покажите, что существует  $2^{\aleph_0}$  продуктивных множеств. (Указание. Воспользуйтесь упр. 7-41 и 7-42.)

7-44. Покажите, что всякое продуктивное множество обладает  $2^{\aleph_0}$  продуктивными подмножествами. (Указание. См. упр. 7-43.) Следует найти центр продуктивного множества, такой, чтобы существовало бесконечно много элементов множества, не принадлежащих центру.)

7-45. Пусть  $A$  — продуктивное множество с  $\psi$  в качестве продуктивной функции. Покажите, что существует продуктивное множество  $B$  с  $\psi$  в качестве продуктивной функции, такое, что  $B = \text{center}_\psi B$ . (Указание. Возьмите пересечение всех множеств, имеющих  $\psi$  своей продуктивной функцией.) Мы назовем такое продуктивное множество насыщенным относительно  $\psi$ .

Δ-46. (Деккер.) (Это упражнение предполагает некоторое знакомство со счетными ординальными числами. Краткие сведения об ординальных числах содержат упр. с 11-46 по 11-53.) Пусть  $\psi$  — продуктивная функция некоторого продуктивного множества. Определим трансфинитной индукцией по счетным ординалам

$$\begin{aligned} S_0 &= \emptyset, \\ S_{\alpha+1} &= S_\alpha \cup \{\psi(x) \mid W_x \subset S_\alpha\}, \\ S_\beta &= \bigcup_n S_{\alpha_n} \text{ для } \beta = \lim_n \alpha_n. \end{aligned}$$

Пусть  $B = \bigcup_\alpha S_\alpha$ . Покажите, что  $B$  наполнено (см. упр. 7-45) и совпадает с пересечением всех множеств, продуктивных относительно  $\psi$ .

(Мы увидим позднее, что любые два таких множества для различных взаимно однозначных функций  $\psi$  рекурсивно изоморфны и высокой степени нерашишимости.)

7-47. Покажите, что всякое бесконечное рекурсивно перечислимое множество является объединением непересекающихся между собой творческого множества и продуктивного множества.

7-48. Покажите, что всякое продуктивное множество является объединением непересекающихся между собой творческого множества и продуктивного множества. (Указание. Воспользуйтесь теоремой X и упр. 7-47.)

7-49. Покажите, что всякая взаимно однозначная общерекурсивная функция есть продуктивная функция некоторого творческого множества. (Указание. Следует рассмотреть  $\{f(x) \mid f(x) \in W_x\}$ . Можно также воспользоваться конструкцией, подобной конструкции упр. 7-46).

7-50. Покажите, что  $A$  продуктивно  $\Rightarrow A$  продуктивно с взаимно однозначной продуктивной общерекурсивной функцией. (Указание. Пусть  $f$  — данная продуктивная общерекурсивная функция. Определим:  $g(0) = f(0)$ ;  $g(n+1) = f(n+1)$ , если  $f(n+1) \notin \{g(0), \dots, g(n)\}$ , в противном случае воспользуйтесь свойством продуктивности. Предостережение:  $\{g(0), \dots, g(n)\}$  может не содержаться в  $A$ . Дальнейшее указание: следует взять  $W_{h(x)} = W_x \cup \{f(x)\}$ , затем рассмотреть  $f(n+1)$ ,  $fh(n+1)$ ,  $hh(n+1)$ ,  $\dots$  и выяснить, встречаются ли повторения.)

7-51. Покажите, что  $A$  продуктивно  $\Rightarrow A$  продуктивно с рекурсивной перестановкой в качестве продуктивной функции. (Указание. Очевидным образом метод упр. 7-50 позволяет перейти от функции  $f$  к взаимно однозначной функции  $h \circ f$ . Остается показать, что от функции  $f$  в можно перейти к функции  $h \circ f$ . Пусть  $D$  — бесконечное рекурсивное множество р. п. индексов множества  $N$ . Пусть  $g$  пересчитывает  $D$  без повторений. Положим  $h(x) = g^{-1}(x)$  на  $D$  и  $h(x) = f(x)$  на  $\bar{D}$ .)

▲7-52. (Майхилл.) Покажите, что  $A$  продуктивно  $\Rightarrow A$  вполне продуктивно.

7-53. Покажите, что  $A$  продуктивно  $\Rightarrow A$  полупродуктивно.

7-54. (а) Докажите теорему X для полупродуктивных множеств.  
 (б) Докажите теорему XI для полупродуктивных множеств.

7-55. (а) Определите понятие „сильной сводимости” в соответствии с теорией пар непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств.

(б) Покажите, что пара множеств, существование которой утверждает теорема XII (с), является „полной” в подходящем смысле относительно этой сводимости.

(с) Покажите, что всякая полная пара непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств эффективно неотделима.

7-56. Докажите пункты (а) и (б) теоремы XII.

7-57. Измените доказательство теоремы XI так, чтобы с его помощью показать, что всякая эффективно неотделимая пара непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств обладает всюду определенной „продуктивной функцией”.

7-58. Модифицировав доказательство теоремы XII (с), установите существование системы, состоящей более чем из двух множеств, и такой, что любые два ее множества не пересекаются и эффективно неотделимы.

7-59. Покажите (не прибегая к упр. 7-32), что существует творческое множество  $K'$ , такое, что  $K$  и  $K'$  не пересекаются и эффективно неотделимы. (Указание. Покажите, что  $K = A_0$ , где  $A_0$  — то же, что и при доказательстве теоремы XII.)

### § 7.8

7-60. Докажите, что  $[B$  рекурсивно перечислимо &  $A \cap B$  продуктивно]  $\Rightarrow A$  продуктивно. (Отсюда следует основная лемма § 7.8.)

7-61. С использованием тезиса Чёрча объясните, почему множество  $\{F_x \mid x \in N\}$  (определение см. в § 7.8) должно быть рекурсивным и почему  $\{F_x \mid x \notin K\}$  должно быть продуктивным.

7-62. Предположим, имеется логическая система, формулируемая в символизме обычной логики предикатов. Пп-формулы могут, таким образом, содержать символ & (наряду с другими). Отождествим пп-формулы с их гёделевыми номерами. Отношение непосредственной выводимости задается как отношение между конечными множествами пп-формул и пп-формулами. Это отношение рекурсивно, т. е.  $\{(x, y) \mid \text{пп } y \text{ непосредственно выводима из конечного множества } D_x\}$  рекурсивно. Определим отношение выводимости следующим образом:  $y$  выводимо из  $A$ , если существует конечная последовательность  $\langle y_0, y_1, \dots, y_n \rangle$ , такая, что  $y = y_n$  и для всех  $j$ ,  $0 \leq j \leq n$ , или  $y_j \in A$ , или  $y_j$  непосредственно выводимо из некоторого подмножества  $\{y_0, \dots, y_{j-1}\}$ . Пусть  $\tilde{A} = \{x \mid x \text{ выводимо из } A\}$ . Если  $B = \tilde{A}$ , мы будем называть  $A$  множеством аксиом для  $B$ .

(а) Покажите, что  $A$  рекурсивно перечислимо  $\Rightarrow \tilde{A}$  рекурсивно перечислимо.

(б) Покажите, что  $A \subset \tilde{A}$  и  $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$ .

Пусть  $(x \& y)$  обозначает пп, получаемую помещением „&” между  $x$  и  $y$ . Предположим, что для всех  $x$  и  $y$ ,  $(x \& y) \in \{x, y\}$ ,  $x \in \{(x \& y)\}$  и  $y \in \{(x \& y)\}$ .

(с) Покажите, что  $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$  может не быть верно.

7-63. (д) (Крэйг). Покажите, что  $B$  рекурсивно перечислимо  $\Rightarrow (\exists A)[A \text{ — рекурсивно } \& \tilde{A} = B]$ . (Указание. Воспользуйтесь теоремой 5-III. Следует

обратить внимание на то обстоятельство, что для всякого  $x$  элементы последовательности  $x, (x \& x), ((x \& x) \& x), \dots$  взаимовыводимы.) Это и есть теорема Крэйга: *всякая рекурсивно перечислимая теория (в обычной логике) имеет рекурсивное множество аксиом* (Крэйг [1953]).

7-63. Это упражнение предполагает некоторое знакомство с логикой и ее терминологией. Рассмотрим чистое исчисление предикатов первого порядка, т. е. обычную логику предикатов. Существует ли рекурсивное множество справедливых биусловий, т. е. эквивалентностей, таких, что все справедливые биусловия могут быть порождены ими путем „подстановки равенств в равенства”, т. е. применением операции подстановки одной эквивалентности в другую? (Указание. Воспользуйтесь методом, подобным методу 7-62.)

7-64. (Первая теорема Гёделя [1931]). Рассмотрим арифметику Пеано или теоретико-множественную арифметику. Предположим, что существует выражение элементарной арифметики с четырьмя свободными переменными, назовем его  $Mabcd$  (с  $a, b, c, d$  в качестве этих переменных), такое, что (i) если  $P_z$  при входе  $x$  дает выход  $y$  менее чем за  $w$  шагов, то  $Mzxyw$  доказуема<sup>1</sup>; (ii) если  $P_z$  при входе  $x$  не дает выхода  $y$  менее чем за  $w$  шагов, то  $(\neg Mzxyw)$  доказуема (см. § 14.4 и 14.7). Будем говорить, что наша теория  $\omega$ -непротиворечива, если для любого выражения  $Ga$  с единственной свободной переменной  $a$ , коль скоро  $(\exists a)Ga$  доказуема, для некоторого  $x$   $(\neg Gx)$  недоказуема.

Предположим, что наша теория согласуется с обычными правилами элементарной логики. Покажите, что если наша теория  $\omega$ -непротиворечива, то (i) она образует творческое множество и (ii) должна существовать неразрешимая пп. (Указание. Возьмите в качестве  $F_x$   $(\exists c)(\exists d)Mxxcd$  и покажите, что  $[F_x \text{ доказуема}] \Leftrightarrow x \in K$ .)

7-65. (Теорема Гёделя—Россера [1936].) Пусть теория и выражение  $Mabcd$  — такие же, как в упр. 7-64. Пусть  $z_0$  и  $z_1$  — р.п. индексы для  $A_0$  и  $A_1$  из теоремы XII. Предположим, что  $z_0$  и  $z_1$  могут быть выбраны так, что следующая пп доказуема:  $(\forall b)\neg[(\exists c)(\exists d)Mz_0bcd \& (\exists c)(\exists d)Mz_1bcd]$ . Назовем нашу теорию непротиворечивой, если для любой пп  $H$ , коль скоро  $H$  доказуема,  $(\neg H)$  недоказуема.

Предположим, что наша теория согласуется с обычными правилами элементарной логики. Покажите, что если наша теория непротиворечива, то (i) она образует творческое множество и (ii) должна существовать неразрешимая пп. (Указание. Рассмотрите  $W_u = \{x \mid (\exists c)(\exists d)Mz_0xcd \text{ доказуема}\}$  и  $W_v = \{x \mid \neg(\exists c)(\exists d)Mz_0xcd \text{ доказуема}\}$  и воспользуйтесь эффективной неотделимостью  $A_0$  и  $A_1$ . Заметим, что всякое рекурсивно перечислимое множество  $B$ , такое, что  $A_0 \subset B \subset A_1$ , должно быть творческим.)

<sup>1</sup>) Мы придерживаемся здесь следующего способа обозначения: если  $\dots a \dots$  есть выражение со свободной переменной  $a$  и  $x$  есть число, то  $\dots x \dots$  есть результат подстановки нумерала  $x$  вместо  $a$  в  $\dots a \dots$ . Таким образом,  $Mzxyw$  обозначает пп, полученную подстановкой нумералов для чисел  $z, x, y$  и  $w$  вместо переменных  $a, b, c$  и  $d$  в выражение  $Mabcd$ ; подобным образом ниже для  $Gx$  и  $(\exists c)(\exists d)Mxxcd$ .

## Глава 8. ТАБЛИЧНЫЕ СВОДИМОСТИ; ПРОСТЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 8.1. Простые множества	140
§ 8.2. Иммунные множества	142
§ 8.3. Табличная сводимость	145
§ 8.4. Табличная сводимость и много-односводимость	148
§ 8.5. Ограниченнотабличная сводимость	150
§ 8.6. Структура степеней	155
§ 8.7. Другие рекурсивно перечислимые множества	158
§ 8.8. Упражнения	160

### § 8.1. ПРОСТЫЕ МНОЖЕСТВА

Среди вопросов, оставшихся в последней главе открытыми, были следующие.

1. Всякое ли нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество является творческим?
2. Всякое ли нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество  $m$ -полно?
3. Совпадают ли  $\leq_1$  и  $\leq_m$  на нерекурсивных рекурсивно перечислимых множествах?

Тесная связь между „продуктивными“ диагональными методами и неразрешимостью могла бы навести на мысль об утвердительном ответе на первый вопрос. Примеры нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств, рассматривавшиеся до сих пор, возможно, подсказывают утвердительный ответ на вопрос 2. Теорема 7-VII могла бы свидетельствовать в пользу утвердительного ответа на вопрос 3. На все три вопроса, однако, ответы, как мы теперь покажем, отрицательны.

Упражнение 5-8 обнаруживает существование бесконечного множества, не имеющего бесконечного рекурсивно перечислимого подмножества. Если множество с этим свойством обладает рекурсивно перечислимым дополнением, то это рекурсивно перечислимое дополнение называется *простым*. Этот термин принадлежит Посту [1944].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество  $A$  *просто*, если

- (i)  $A$  рекурсивно перечислимо;
- (ii)  $\bar{A}$  бесконечно;
- (iii)  $(\forall B)[[B \text{ бесконечно} \& B \text{ рекурсивно перечислимо}] \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset]$ .

Это понятие рекурсивно инвариантно, поскольку оно определяется в терминах рекурсивно инвариантных понятий. Некоторые основные свойства простых множеств приведены в теореме I.

**Теорема I.** (a)  $A$  просто  $\Rightarrow A$  не рекурсивно.

(b)  $A$  просто  $\Rightarrow A$  не является творческим.

(c)  $A$  просто  $\Rightarrow A$  не  $m$ -полно.

(d)  $A$  просто  $\Rightarrow A$  не цилиндр.

**Доказательство.** (a) Если  $A$  рекурсивно и пункт (ii) предыдущего определения имеет место, то (iii) не выполняется при  $B = \bar{A}$ .

(b) Так как всякое продуктивное множество обладает бесконечным рекурсивно перечислимым подмножеством (теорема 7-X), то, если  $A$  — творческое множество, (iii) места не имеет.

(c) Непосредственно вытекает из (b) (следствие 7-V).

(d) Предположим  $A = C \times N$  и  $A$  просто. Тогда  $\bar{A} \neq \emptyset$ ; отсюда

$$\bar{C} \times \bar{N} = \bar{C} \times N \neq \emptyset$$

и  $\bar{C} \neq \emptyset$ . Пусть  $m \in \bar{C}$ . Тогда  $\{m\} \times N$  есть бесконечное рекурсивное перечислимое подмножество множества  $\bar{C} \times N$ . В силу рекурсивной инвариантности пункт (iii) для  $A$  не выполняется и  $A$  не может быть простым множеством; таким образом, приходим к противоречию. ■

Далее, теорема II показывает, что простые множества существуют.

**Теорема II (Пост).** Существует простое множество.

**Доказательство.** Пусть  $C = \{\langle x, y \rangle \mid y \in W_x \text{ и } y > 2x\}$ . По второй теореме о проекции  $C$  рекурсивно перечислимо. Фиксируем некоторый эффективный способ пересчета  $C$ . Образуем множество  $C' = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in C \& (\forall z)[[z \neq y \& \langle x, z \rangle \in C] \Rightarrow \langle x, z \rangle \text{ идет позже } \langle x, y \rangle \text{ в этом пересчете } C]\}$ . (По существу мы применяем теорему 5-XVI, теорему об однозначности.) Множество  $C'$ , очевидно, рекурсивно перечислимо, и  $\{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in C'\}$  есть частично рекурсивная функция (теорема 5-IX). Пусть  $S$  есть множество значений этой частично рекурсивной функции, т. е.  $S = \{y \mid (\exists x)[\langle x, y \rangle \in C']\}$ . Мы покажем, что  $S$  просто.

(i)  $S$  рекурсивно перечислимо, поскольку оно является множеством значений частично рекурсивной функции.

(ii) По построению самое большое  $k$  чисел из  $\{0, 1, \dots, 2k\}$  может принадлежать  $S$ . Это имеет место для любого  $k$ ; следовательно,  $\bar{S}$  бесконечно.

(iii) Предположим, что  $B$  рекурсивно перечислимо и бесконечно. Пусть  $B = W_{x_0}$ . Тогда в нем существуют числа, большие чем  $2x_0$ . По построению  $\langle x_0, z \rangle$  должно принадлежать  $C'$  при некотором  $z$  из  $B$ . Отсюда  $z \in B \cap S$  и  $B \cap S \neq \emptyset$ . ■

Из теорем I и II вытекает несколько следствий.

**Следствие II (а).** *Существуют нерекурсивные рекурсивно перечислимые множества, не являющиеся ни т-полными, ни творческими, ни цилиндрами.*

**Доказательство очевидно.** ■

**Следствие II (б).**  $\equiv_1$  и  $\equiv_m$  не совпадают на нерекурсивных рекурсивно перечислимых множествах и тем самым  $\leq_1$  и  $\leq_m$  не совпадают на нерекурсивных рекурсивно перечислимых множествах.

**Доказательство.**  $S \equiv_m S \times N$ , согласно теореме 7-VIII, но  $S \not\equiv_1 S \times N$  по теореме I. Отсюда, согласно теореме 7-VIII,  $S \times N \leq_m S$ , но  $S \times N \not\leq_1 S$ . ■

Тем самым мы получили ответы на вопросы 1, 2 и 3, поставленные в начале главы.

В § 8.6 мы покажем, что рекурсивно перечислимая т-степень может содержать бесконечно много 1-степеней. „Патология”, выявляемая простым множеством, сама по себе представляет интерес и будет изучена в дальнейшем. В частности, это оказывается полезным при исследовании нового более общего типа сводимости, который будет описан в § 8.3. Рекурсивно перечислимые множества обладают целым рядом патологий иного сорта; мы обсудим некоторые из них в § 8.7 и в упражнениях. Ввиду отсутствия удовлетворительных теорем о представимости основная часть нашего исследования рекурсивно перечислимых множеств будет представлять собой нечто вроде перечня различных встречающихся патологий.

## § 8.2. ИММУННЫЕ МНОЖЕСТВА

Для множеств со свойством, описанным в упр. 5-8, т. е. со свойством, относящимся к дополнению простого множества, былведен Деккером специальный термин.

**Определение.** Множество  $A$  *иммунино*, если

- (i)  $A$  бесконечно;
- (ii)  $(\forall B)[[B \text{ бесконечно} \& B \text{ рекурсивно перечислимо}] \Rightarrow \Rightarrow B \cap \bar{A} \neq \emptyset]$ .

Семейство иммунных множеств аналогично в некотором смысле семейству конечных множеств. Семейство иммунных или конечных множеств в определенных аспектах подобно семейству множеств меры 0 в пространстве с мерой (см. упр. 8-11).

**Определение.**  $A$  *изолировано*, если  $A$  конечно или иммунино.

Представляется удобным иметь стандартный способ констатации того обстоятельства, что дополнение множества обладает

определенным свойством. С этой целью мы принимаем следующее соглашение.

**Соглашение.** Пусть (...) есть свойство множеств. Мы будем говорить, что множество ко(…), если его дополнение (...).

Например, *коиммунное* множество — это множество, дополнение которого иммунино, *коконечное* множество — множество, дополнение которого конечно. Множество просто тогда и только тогда, когда оно одновременно рекурсивно перечислимо и коиммунно.

Множества, являющиеся коконечными или простыми, т. е. рекурсивно перечислимые коизолированные множества, играют роль, подобную роли множеств меры 1 в пространствах с мерой полной меры 1. В частности, они образуют дуальный идеал в решетке всех рекурсивно перечислимых множеств (относительно  $\cap$  и  $\cup$ , см. упр. 8-11). Это могло бы навести на мысль, что изолированные множества образуют идеал в решетке всех множеств. Следующая теорема, однако, показывает, что семейство изолированных множеств не является замкнутым относительно конечных пересечений и что существует несчетно много изолированных множеств.

**Теорема III.** *Существует  $2^{\aleph_0}$  множеств  $A$ , таких, что как  $A$ , так и  $\bar{A}$  иммунны.*

**Доказательство.** Пусть  $x_0, x_1, \dots$  суть элементы множества  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$ , расположенные в порядке возрастания. Определим последовательность пар следующим образом:

$$\{y_0, z_0\} = [\text{два наименьших элемента из } W_{x_0}],$$

причем  $y_0 < z_0$ .

$$\{y_{k+1}, z_{k+1}\} = [\text{два таких наименьших элемента из } W_{x_{k+1}}, \text{ которые превосходят и } y_k, \text{ и } z_k],$$

причем  $y_{k+1} < z_{k+1}$ . Мы образуем множество  $A$ , выбирая один элемент из каждого члена этой последовательности пар. Существует  $2^{\aleph_0}$  различных способов такого выбора. Каждое из множеств  $A$  и  $\bar{A}$  должно пересекаться со всяким бесконечным рекурсивно перечислимым множеством. Следовательно, как  $A$ , так и  $\bar{A}$  иммунно. ■

Всякое ли нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество является или творческим, или простым? Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос.

**Теорема IV.** *Существует рекурсивно перечислимое множество, не являющееся ни рекурсивным, ни простым, ни творческим.*

**Доказательство.** Пусть  $A$  просто, рассмотрим  $A \times N$ .  $A \times N$  рекурсивно перечислимо, поскольку  $A$  таково.  $A \times N$  не является рекурсивным, так как  $A \leqslant_1 A \times N$ . Множество  $A \times N$  не просто, поскольку оно есть цилиндр. Легко показать, что  $A \times N$  — творческое множество  $\Rightarrow A$  творческое множество (упр. 8-10); теорема доказана. ■

**Следствие IV.** *Существуют множества, не являющиеся ни рекурсивно перечислимыми, ни продуктивными, ни иммунными.*

**Доказательство.** Таковым является множество  $\overline{A \times N}$  из доказательства теоремы. ■

Следующая теорема показывает, что, хотя изолированность не наследуема вниз по  $m$ -упорядочению (так как  $A \times N \leqslant_m A$  как было установлено ранее), она наследуема вниз по 1-упорядочению.

**Теорема V.**  $[A \leqslant_1 B \text{ & } B \text{ изолировано}] \Rightarrow A \text{ изолировано}$ .

**Доказательство очевидно.** ■

Изолированные множества используются при построении в теории рекурсивных функций аналога теории кардинальных чисел, в частности, теории кардинальных чисел, которые *промежуточны* в смысле Уайтхеда и Рассела. (Промежуточное кардинальное число есть кардинальное число множества, мощность которого превосходит мощность всякого конечного множества, но которое не может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие ни с каким своим собственным подмножеством. В обычной теории множеств из аксиомы выбора вытекает, что промежуточных кардинальных чисел не существует.) Мы установим эту аналогию в упр. 8-32 (см. также упр. 10-4).

Так как простые и коконечные множества образуют дуальный идеал в решетке всех рекурсивно перечислимых множеств (об этом понятии см. § 12.1), может быть построена факторрешетка, идентифицирующая два рекурсивно перечислимых множества в том и только том случае, если они отличаются на конечное или копростое множество; т. е.  $A$  и  $B$  идентифицированы  $\Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A)$  конечно или копросто. Например, в этой факторрешетке  $A$  идентифицируется с  $N$  тогда и только тогда, когда  $A$  является простым или коконечным. Таким образом, в случае простого множества  $A$ ,  $A$  идентифицируется с  $N$ , но  $A \times N$  — нет. В силу  $A \equiv_m A \times N$  классы эквивалентности, образующие элементы факторрешетки, не согласуются с  $m$ -степенями. Поскольку главной нашей целью является изучение сводимости, мы отложим общее исследование этих решеток до гл. 12 (см. упр. 8-12).

### § 8.3. ТАБЛИЧНАЯ СВОДИМОСТЬ

Множества  $K$ ,  $\overline{K}$ ,  $K \oplus \overline{K}$  и  $K \times \overline{K}$  попадают в 4 различные  $m$ -степени (см. упр. 7-36), причем  $K$  и  $\overline{K}$  не сравнимы. Тем не менее эти четыре множества в некотором естественном интуитивном смысле взаимно сводимы. Например, если бы мы могли выяснить для любого числа, принадлежит ли оно  $K$ , мы могли бы, дважды произведя такие выяснения, установить, принадлежит ли  $\langle x, y \rangle$  множеству  $K \times \overline{K}$ . Более тривиально, если бы мы располагали методом, позволяющим решать для любого числа, принадлежит ли оно  $K$ , мы очевидным образом имели бы метод, позволяющий решать относительно любого числа, является ли оно элементом  $\overline{K}$ . В этом смысле понятие  $m$ -сводимости слишком узко.

Мы сформулируем новое более общее понятие сводимости, описав его поначалу весьма приблизительно. Мы скажем, что  $A$  „сводимо“ к  $B$ , если существует эффективная процедура, такая, что для любого  $x$  мы можем найти (i) конечное множество чисел  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  и (ii) в зависимости от ответов на вопросы „ $y_1 \in B?$ “, „ $y_2 \in B?$ “, …, „ $y_k \in B?$ “ определить, будет ли  $x$  элементом множества  $A$ . Например,  $A = K \times \overline{K}$  „сводимо“ к  $B = K$ : для любого данного  $x$  мы образуем множество чисел  $\{\pi_1(x), \pi_2(x)\}$ ; если  $\pi_1(x) \in B$  и  $\pi_2(x) \notin B$ , то  $x \in A$ ; если  $\pi_1(x) \notin B$  или  $\pi_2(x) \in B$ , то  $x \notin A$ . Подобным же образом  $A = \overline{K}$  „сводимо“ к  $B = K$ : по любому данному  $x$  мы образовываем множество  $\{x\}$ ; если  $x \notin B$ , то  $x \in A$ , тогда как если  $x \in B$ , то  $x \notin A$ .

Мы уточним это в следующих определениях.

**Определение.**  $I = \{0, 1\}$ ,

$$I^n = I \times I \times \dots \times I \quad (n \text{ сомножителей}).$$

**Определение.**  $\alpha$  есть  $n$ -арная булева функция, если  $\alpha$  отображает  $I^n$  в  $I$ . Булева функция есть конечный объект. В логике булева функция иногда называется *истинностной таблицей*. Существует, очевидно,  $2^{2^n}$  различных  $n$ -арных булевых функций. (Если на  $I$  задана структура поля из двух элементов, то всякий полином  $n$  переменных над этим полем определяет  $n$ -арную булеву функцию. Обратно, согласно интерполяционной теореме Лагранжа, всякая  $n$ -арная функция задается полиномом. Достаточно рассмотреть лишь „приведенные“ полиномы, в которых каждая переменная встречается не более чем в первой степени. Существует  $2^{2^n}$  таких приведенных полиномов. Отсюда следует, что имеет место взаимно однозначное соответствие между приведенными полиномами и булевыми функциями. Мы назовем такие полиномы булевыми полиномами.)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Упорядоченную пару  $\langle\langle x_1, \dots, x_n \rangle, \alpha\rangle$ , где  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$

есть  $n$ -ка чисел, а  $\alpha$  есть  $n$ -арная булева функция ( $n > 0$ ), назовем *табличным условием* (или *tt-условием*) порядка  $n$ . Множество  $\{x_1, \dots, x_n\}$  назовем *ассоциированным множеством* этого tt-условия.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** tt-условие выполняется на множестве  $A$ , если  $\alpha(c_A(x_1), \dots, c_A(x_n)) = 1$ , где  $c_A$  есть характеристическая функция множества  $A$ .

Каждое tt-условие есть конечный объект; очевидно, можно устроить эффективное кодирование, отображающее все tt-условия (различных порядков) на  $N$ . Предположим, начиная с этого момента, что такое кодирование фиксировано. Говоря „tt-условие  $x$ ”, мы будем иметь в виду tt-условие с кодовым номером  $x$ .

Теперь может быть определено наше понятие сводимости.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество  $A$  таблично сводимо к  $B$  (обозначение:  $A \leq_{tt} B$ ), если существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для всех  $x$  [ $x \in A \Leftrightarrow$  tt-условие  $f(x)$  выполняется на  $B$ ]. Будем употреблять для „табличной сводимости” сокращение „tt-сводимость”.

Следующая теорема очевидна.

**ТЕОРЕМА VI.** Отношение  $\leq_{tt}$  рефлексивно и транзитивно.

**Доказательство.** Рефлексивность. Для заданного  $x$  пусть  $f(x)$  есть tt-условие  $\langle\langle x \rangle, \alpha\rangle$ , где  $\alpha$  — тождественная унарная булева функция.

Транзитивность. Предположим, что  $A \leq_{tt} B$  посредством  $f$  и  $B \leq_{tt} C$  посредством  $g$ . Мы покажем, как вычислить функцию  $h$ , такую, что  $A \leq_{tt} C$  посредством  $h$ . Пусть дано  $x$ . Найдем tt-условие  $f(x)$ ; пусть

$f(x)$  есть  $\langle\langle y_1, \dots, y_m \rangle, \alpha\rangle$ .

Найдем tt-условия  $g(y_1), \dots, g(y_m)$ ; пусть

$g(y_1)$  есть  $\langle\langle z_{11}, \dots, z_{1n_1} \rangle, \beta_1\rangle$ ,

$g(y_m)$  есть  $\langle\langle z_{m1}, \dots, z_{mn_m} \rangle, \beta_m\rangle$ .

Тогда искомое tt-условие  $h(x)$  есть

$\langle\langle z_{11}, \dots, z_{1n_1}, z_{21}, \dots, z_{m_1}, \dots, z_{mn_m} \rangle, \lambda w_{11} \dots w_{mn_m}$

$[\alpha(\beta_1(w_{11}, \dots, w_{1n_1}), \beta_2(w_{21}, \dots), \dots, \beta_m(w_{m_1}, \dots, w_{mn_m}))]\rangle$ .

Булевые функции  $\beta_1, \dots, \beta_m$  соответственно  $n_1$ -арна,  $\dots$ ,  $n_m$ -арна, а булева функция в tt-условии  $h(x)$   $q$ -арна, где  $q = n_1 + \dots + n_m$ . ■

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $A \equiv_{tt} B$ , если  $A \leq_{tt} B$  и  $B \leq_{tt} A$ . Классы эквивалентности  $\equiv_{tt}$  называются *табличными степенями* или *tt-степенями*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество  $A$  таблично полно („tt-полно”), если

(i)  $A$  рекурсивно перечислимо,

(ii)  $(\forall B)$  [ $B$  рекурсивно перечислимо  $\Rightarrow B \leq_{tt} A$ ].

Следующая теорема содержит элементарные сведения о tt-сводимости.

**Теорема VII.** (a)  $A \leq_m B \Rightarrow A \leq_{tt} B$ .

(b)  $A \leq_{tt} \bar{A}$  (и, следовательно,  $A \equiv_{tt} \bar{A}$ ).

(c) Упорядочение по tt-сводимости образует верхнюю полурешетку.

(d) [ $B$  рекурсивно и  $A \leq_{tt} B$ ]  $\Rightarrow A$  рекурсивно.

(e)  $A$  рекурсивно  $\Rightarrow (\forall B)[A \leq_{tt} B]$ .

**Доказательство.** (a) Очевидно.

(b) Очевидно, см. в качестве примера множества  $K$  и  $\bar{K}$ , рассмотренные выше.

(c)  $A \oplus B$  вновь может быть использовано при построении наименьшей верхней грани, так как если  $A \leq_{tt} C$  и  $B \leq_{tt} C$ , то, очевидно,  $A \oplus B \leq_{tt} C$ .

(d) Очевидно.

(e) Пусть множество  $A$  рекурсивно; выберем  $f$  так, чтобы  $f(x)$  было tt-условием с булевой функцией, тождественно равной 1, если  $x \in A$ , и тождественно равной 0, если  $x \notin A$ . ■

Рекурсивная инвариантность отношения  $\leq_{tt}$  немедленно следует из свойства (a). Из (d) и (e) вытекает, что упорядочение по tt-сводимости имеет единственную минимальную степень, состоящую из рекурсивных множеств и не содержащую никаких других. Из (b) легко усматривается, что степень может содержать как рекурсивно перечислимые множества, так и множества, рекурсивно перечислимые не являющиеся. Мы назовем tt-степень *рекурсивно перечислимой*, если она содержит хотя бы одно рекурсивно перечислимое множество. Таким образом, tt-степень множества  $\bar{K}$  есть рекурсивно перечислимая степень, поскольку она содержит  $K$ . (В гл. 10 мы увидим, что существуют не сравнимые рекурсивно перечислимые tt-степени.)

Из свойства (a) имеем, что  $A \equiv_m B \Rightarrow A \equiv_{tt} B$ . Мы можем поэтому рассматривать tt-степень как составленную из m-степеней. Соотношение между tt-степенями и m-степенями выясняется далее в § 8.4.

**Замечание.** Определение отношения  $\leq_{tt}$  может быть модифицировано различными способами (см. упр. 9-45, например).

Одна из таких модификаций требует, чтобы при сведении какого-либо множества к другому фигурировала одна и та же булева функция во всех tt-условиях для этой пары множеств. Менее строгая по виду модификация требует, чтобы при сведении одного множества к другому налагалось бы равномерное ограничение на порядок tt-условий. Иными словами,  $A$  сводимо к  $B$ , если  $(\exists \text{ общерекурсивная функция } f) (\exists m) (\forall x) [\text{tt-условие } f(x) \text{ имеет порядок } \leq_m \text{ и } [x \in A \Leftrightarrow f(x) \text{ выполняется на } B]]$ . Эти две модификации оказываются эквивалентными (упр. 8-28), исключая тривиальный особый случай. Такая сводимость исследуется в § 8.5 ниже.

Является ли tt-сводимость наиболее общим видом сводимости, соответствующим нашим интуитивным представлениям? Неожиданно ответ оказывается отрицательным, как мы увидим в гл. 9.

#### § 8.4. ТАБЛИЧНАЯ СВОДИМОСТЬ И МНОГО-ОДНОСВОДИМОСТЬ

Отношения  $\leq_m$  и  $\leq_{tt}$  различны, если они рассматриваются на произвольных множествах. Различны ли они на рекурсивно перечислимых множествах? В частности, существуют ли tt-полные множества, которые не m-полны? Следующие теорема и следствие дают утвердительные ответы на оба эти вопроса. Конструкция из теоремы принадлежит Посту [1944].

**Теорема VIII (Пост).** *Существует множество, одновременно простое и tt-полное.*

**Доказательство.** Пусть  $S$  — простое множество, построенное при доказательстве теоремы II. Мы видели, что для всякого  $k$  самое большее  $k$  чисел из  $\{0, 1, \dots, 2k\}$  может встретиться в  $S$ . Отсюда любое подмножество из  $\{0, 1, \dots, 2k\}$ , состоящее из  $k+1$  элементов, должно пересекаться с  $\bar{S}$ . В частности, каждое из множеств  $\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7, \dots, 14\}, \dots, \{2^n - 1, \dots, 2^{n+1} - 2\}, \dots$ , должно пересекаться с  $\bar{S}$ . Пусть

$$S_x = \{2^x - 1, \dots, 2^{x+1} - 2\}.$$

Тогда для всех  $x$   $S_x \cap \bar{S} \neq \emptyset$ .

Определим  $S^* = S \cup (\bigcup_{x \in K} S_x)$ . Множество  $S^*$ , очевидно, рекурсивно перечислимо. Более того,  $\bar{S}^*$  бесконечно, поскольку  $\bar{K}$  бесконечно. Множество  $\bar{S}^*$  иммунно, так как оно бесконечно и является подмножеством иммунного множества  $\bar{S}$ . Отсюда следует, что  $S^*$  — простое множество.

В соответствии с нашей конструкцией  $x \in K \Leftrightarrow S_x \subset S^*$ . Этого и требует tt-сводимость. Для любого  $x$  tt-условие, соответ-

ствующее  $x$ , есть  $\langle\langle 2^x - 1, \dots, 2^{x+1} - 2 \rangle, \alpha \rangle$ , где

$$\alpha(w_1, \dots, w_m) = 1 \Leftrightarrow w_1 = w_2 = \dots = w_m = 1;$$

это tt-условие имеет порядок  $m = 2^x$ . Таким образом,  $K \leq_{tt} S^*$ . Пусть  $A$  — рекурсивно перечислимое множество. Тогда  $A \leq_m K$ . Отсюда  $A \leq_{tt} S^*$ . Таким образом,  $S^*$  является tt-полным. ■

**Следствие VIII.** *Существует множество, которое tt-полно, но не m-полно; таким образом,  $\equiv_m$  и  $\equiv_{tt}$  различны на рекурсивно перечислимых множествах и  $\leq_m$ , и  $\leq_{tt}$  различны на рекурсивно перечислимых множествах.*

**Доказательство.**  $K \equiv_{tt} S^*$ , но в силу теоремы I(c)  $K \not\leq_m S^*$ .

Что можно сказать о структуре tt-степени в терминах составляющих ее m-степеней и 1-степеней? Следующая структурная теорема является аналогом теоремы 7-VIII о цилиндрах.

**Определение.**  $B^{tt} = \{x \mid \text{tt-условие } x \text{ выполняется на } B\}$ .

**Определение.**  $A$  есть tt-цилиндр, если  $A \equiv B^{tt}$  для некоторого  $B$ .

**Теорема IX.** (a)  $A \leq_1 A^{tt}$ .

(b)  $A^{tt} \leq_{tt} A$  (и, следовательно,  $A \equiv_{tt} A^{tt}$ ).

(c)  $A$  есть tt-цилиндр  $\Rightarrow A$  есть цилиндр.

(d)  $A$  есть tt-цилиндр  $\Leftrightarrow (\forall B)[B \leq_{tt} A \Rightarrow B \leq_1 A]$ .

(e)  $A \leq_{tt} B \Leftrightarrow A^{tt} \leq_1 B^{tt}$ .

**Доказательство.** (a) Возьмем функцию  $f$ , такую, что  $f(x)$  есть tt-условие  $\langle\langle x \rangle, \alpha \rangle$  с тождественной унарной булевой функцией  $\alpha$ . Тогда  $x \in A \Leftrightarrow f(x)$  выполняется на  $A \Leftrightarrow f(x) \in A^{tt}$ .

(b) Возьмем  $g = \lambda x[x]$ . Тогда  $x \in A^{tt} \Leftrightarrow x$  выполняется на  $A \Leftrightarrow g(x)$  выполняется на  $A$ . Отсюда  $A^{tt} \leq_{tt} A$  посредством  $g$ .

(c) Пусть дано tt-условие  $\langle\langle x_1, \dots, x_n \rangle, \alpha \rangle$ . Образуем  $\langle\langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m \rangle, \beta \rangle$ , где  $x_{n+1}, \dots, x_m$  выбираются произвольно и где  $\beta$  определяется посредством равенства  $\beta(w_1, \dots, w_m) = \alpha(w_1, \dots, w_n)$ . Очевидно, эти два tt-условия выполняются в точности на одних и тех же множествах. По любому данному tt-условию мы можем равномерно эффективно пересчитать бесконечно много таких „более широких“ условий, выполняющихся в точности на тех же самых множествах. Отсюда непосредственно следует, что необходимое и достаточное условие теоремы 7-IX выполняется для любого множества вида  $A^{tt}$ . Тем самым любой tt-цилиндр есть цилиндр.

(d)  $\Rightarrow$ . Пусть  $A \equiv C^{tt}$ , предположим, что  $B \leq_{tt} A$ . Тогда в силу (b)  $B \leq_{tt} C$  и существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $x \in B \Leftrightarrow f(x)$  выполняется на  $C \Leftrightarrow f(x) \in C^{tt}$ . Таким

образом,  $B \leqslant_m C^{\text{tt}}$  посредством  $f$ . В силу пункта (c),  $C^{\text{tt}}$  есть цилиндр и, согласно теореме 7-VIII,  $B \leqslant_1 C^{\text{tt}}$ . Следовательно  $B \leqslant_1 A$ .

$\Leftarrow$ . Предположим, что  $(\forall B)[B \leqslant_{\text{tt}} A \Rightarrow B \leqslant_1 A]$ . Рассмотрим  $A^{\text{tt}}$ . Согласно (b),  $A^{\text{tt}} \leqslant_{\text{tt}} A$ ; отсюда по предположению  $A^{\text{tt}} \leqslant_1 A$ . В силу (a)  $A \leqslant_1 A^{\text{tt}}$ . Получаем  $A \equiv_1 A^{\text{tt}}$  и, следовательно,  $A = A^{\text{tt}}$ . Таким образом,  $A$  есть tt-цилиндр.

(e)  $\Rightarrow$ . Предположим, что  $A \leqslant_{\text{tt}} B$ . Тогда  $A^{\text{tt}} \leqslant_{\text{tt}} A \leqslant_{\text{tt}} B \leqslant_1 B^{\text{tt}}$ , согласно (a) и (b). Отсюда  $A^{\text{tt}} \leqslant_{\text{tt}} B^{\text{tt}}$  и, согласно (d),  $A^{\text{tt}} \leqslant_1 B^{\text{tt}}$ .

$\Leftarrow$ . Предположим  $A^{\text{tt}} \leqslant_1 B^{\text{tt}}$ . Тогда  $A \leqslant_1 A^{\text{tt}} \leqslant_1 B^{\text{tt}} \leqslant_{\text{tt}} B$ , согласно (a) и (b), и, следовательно  $A \leqslant_{\text{tt}} B$ . ■

Следствие IX.  $A$  есть tt-цилиндр  $\Leftrightarrow A^{\text{tt}} \leqslant_1 A \Leftrightarrow A \equiv A^{\text{tt}}$ .

Доказательство очевидно. ■

Назовем  $A^{\text{tt}}$  tt-цилиндрификацией множества  $A$ .

В силу предыдущей теоремы всякая tt-степень содержит максимальную 1-степень (и, следовательно, также и максимальную  $m$ -степень) и эта 1-степень может быть получена из любого множества из рассматриваемой tt-степени tt-цилиндрификацией.

Далее, из пункта (e) предыдущей теоремы вытекает существование канонического гомоморфного отображения из упорядочения по tt-сводимости в упорядочение по 1-сводимости. Заметим, что если  $A$  не рекурсивно, то  $A^{\text{tt}}$  не является рекурсивно перечислимым множеством (так как и  $A$ , и  $\bar{A} \leqslant_1 A^{\text{tt}}$ , согласно теоремам VII (b) и IX (d)). Тем самым нерекурсивные 1-степени, являющиеся образами при этом гомоморфном отображении, не рекурсивно перечислимы.

В § 8.6 мы увидим, что одна рекурсивно перечислимая tt-степень может содержать бесконечно много рекурсивно перечислимых  $m$ -степеней. В гл. 9 мы покажем, что существуют рекурсивно перечислимые множества, которые и не рекурсивны, и не tt-полны.

## § 8.5. ОГРАНИЧЕННОТАБЛИЧНАЯ СВОДИМОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.  $A$  ограниченнотаблично сводимо к  $B$  (обозначение:  $A \leqslant_{\text{btt}} B$ ), если  $(\exists$  общерекурсивная  $f$ )  $(\exists m)(\forall x)$  [tt-условие  $f(x)$  имеет порядок  $\leqslant_m$  и  $[x \in A \Leftrightarrow f(x) \text{ выполняется на } B]$ ].

Мы будем вместо „ограниченнотабличная сводимость” писать „btt-сводимость”.

Примеры.  $K \leqslant_{\text{btt}} \bar{K}$  с порядком, ограниченным 1;  $K \times \bar{K} \leqslant_{\text{btt}} K$  с порядком, ограниченным 2.

tt-условия, использовавшиеся в теореме VIII, чтобы показать, что  $K \leqslant_{\text{tt}} S^*$ , не имеют ограниченного порядка. (tt-условие, полученное для  $x$ , имело порядок  $2^x$ .)

Теорема X. Отношение  $\leqslant_{\text{btt}}$  рефлексивно и транзитивно.

Доказательство. При доказательстве теоремы VI мы видели, что  $A \leqslant_{\text{btt}} A$  с порядком, ограниченным 1.

Если  $A \leqslant_{\text{btt}} B$  и  $B \leqslant_{\text{btt}} C$  с порядками, ограниченными соответственно числами  $m_1$  и  $m_2$ , то из конструкции теоремы VI следует, что  $A \leqslant_{\text{btt}} C$  с порядком, ограниченным  $m_1 \cdot m_2$ . ■

Определение.  $A \equiv_{\text{btt}} B$ , если  $A \leqslant_{\text{btt}} B$  и  $B \leqslant_{\text{btt}} A$ . Классы эквивалентности  $\equiv_{\text{btt}}$  называются btt-степенями.

Определение. Множество  $A$  btt-полно, если

- (i)  $A$  рекурсивно перечислимое,
- (ii)  $(\forall B)$  [ $B$  рекурсивно перечислимое  $\Rightarrow B \leqslant_{\text{btt}} A$ ].

Теорема XI. Теорема VII остается справедливой, если  $\leqslant_{\text{tt}}$  заменить  $\leqslant_{\text{btt}}$ .

Доказательство. Доказательство теоремы VII непосредственно переносится на случай btt-сводимости. ■

Ограниченнотабличная сводимость недостаточно широко изучена. Существует несколько изящных доказательств, к ней относящихся. Мы приведем их ниже. Очевидно,  $A \leqslant_{\text{btt}} B \Rightarrow A \leqslant_{\text{tt}} B$ . Отличается ли  $\leqslant_{\text{btt}}$  от  $\leqslant_{\text{tt}}$  (т. е. возможно ли  $A \leqslant_{\text{tt}} B$  без того, чтобы  $A \leqslant_{\text{btt}} B$ )? Отличаются ли btt-полные множества от tt-полных множеств? Следующая теорема Поста [1944] вместе с теоремой VIII дает утвердительный ответ на оба эти вопроса.

Теорема XII (Пост). Множество  $A$  является btt-полным  $\Rightarrow A$  не является простым.

Доказательство. Предположим,  $A$  btt-полно. Тогда  $K \leqslant_{\text{btt}} A$ . Пусть порядок btt-сводимости множества  $K$  к  $A$  ограничен числом  $m$ . Докажем лемму.

Лемма. Пусть  $K \leqslant_{\text{btt}} A$  с порядком, ограниченным числом  $m$ . Тогда существует бесконечное рекурсивно перечислимое множество tt-условий  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , каждое порядка  $\leqslant_m$ , с ассоциированными множествами  $T_0, T_1, T_2, \dots$  соответственно, такими, что

- (i) для всякого  $i$  tt-условие  $t_i$  выполняется на  $A$ ;
- (ii) для всякого  $i$   $T_i \cap \bar{A} \neq \emptyset$ ;
- (iii) для всякого  $i$  множество  $\{j \mid T_j \cap \bar{A} = T_i \cap \bar{A}\}$  содержит не более  $2^{2^{m+1}}$  элементов.

**Доказательство леммы.** Любое tt-условие может очевидным образом быть представлено формулой логики высказываний, образованной из основных частей вида „ $n \in X$ “ ( $n$  — номерал для некоторого числа), причем формула истинна для множества  $X$  тогда и только тогда, когда tt-условие выполняется на этом множестве; обратно, любая такая формула задает tt-условие. Формула „ $4 \notin X \vee 17 \in X$ “ может быть поставлена в соответствие, например, tt-условию  $\langle\langle 4, 17 \rangle, \alpha \rangle$ , где  $\alpha$  определяется булевым полиномом  $w_1 w_2 + w_1 + 1$ . Заметим, что каждой формуле может быть поставлено в соответствие любое из бесконечного числа tt-условий (соответственно различным повторениям и перестановкам в  $n$ -ке и различным значениям  $n$ ) и что каждому tt-условию может быть поставлена в соответствие любая из бесконечного числа логически эквивалентных формул. Мы скажем, что формула *выводима* из некоторого множества формул, если она выводима в элементарной логике высказываний. Например, „ $9 \notin X \vee 17 \in X$ “ выводима из трех формул „ $4 \in X$ “, „ $9 \in X$ “ и „ $4 \notin X \vee 17 \in X$ “. Мы скажем, что tt-условие *выводимо* из некоторого множества tt-условий, если выводимость имеет место для соответствующих формул. Это понятие выводимости для tt-условий вполне согласуется с много-многозначным соответствием между формулами и tt-условиями, а из семантической непротиворечивости логики высказываний следует, что если  $x$  (некоторое tt-условие) выводимо из  $A$  (множества tt-условий), то на любом  $B$ , на котором выполняются все tt-условия из  $A$ , должно также выполняться и  $x$ <sup>1)</sup>.

Поскольку  $\bar{K} \leq_{\text{btt}} K$  с порядком, ограниченным 1, и  $K \leq_{\text{btt}} A$  с порядком, ограниченным числом  $m$ , то  $\bar{K} \leq_{\text{btt}} A$  с порядком, ограниченным  $m$ . Пусть  $\bar{K} \leq_{\text{btt}} A$  посредством  $f$  с порядком, ограниченным  $m$ . Зададим эффективную последовательность  $t_0, t_1, \dots$  следующим образом.

Нахождение  $t_0$ . Рассмотрим множество  $C$  всех tt-условий, соответствующих формулам „ $x \in X$ “ для  $x \in A$ . Поскольку  $A$  рекурсивно перечислимо, множество это рекурсивно перечислимо. Пусть  $C_0$  — множество всех tt-условий, выводимых из tt-условий множества  $C$ . Очевидно,  $C_0$  рекурсивно перечислимо. Пусть  $B_0 = f^{-1}(C_0) = \{x \mid f(x) \in C_0\}$ . Пусть  $x_0$  — рекурсивно перечислимый индекс множества  $B_0$ ; возьмем  $t_0 = f(x_0)$ .

<sup>1)</sup> Выводимость могла бы быть определена непосредственно для tt-условий; именно,  $x$  *выводимо* из  $A$ , если  $(\forall B) [(\forall y) [y \in A \Rightarrow y \text{ выполняется на } B] \Rightarrow x \text{ выполняется на } B]$ . Употребление в этом тексте формул служит признаком (без дальнейшего доказательства) того обстоятельства, что множество всех tt-условий, выводимых из рекурсивно перечислимого множества tt-условий, само рекурсивно перечислимо.

**Нахождение  $t_{k+1}$ .** Пусть  $C_{k+1}$  — множество всех tt-условий, выводимых из  $C_k \cup \{t_k\}$ . Оно рекурсивно перечислимо, поскольку рекурсивно перечислимо множество  $C_k$ . Пусть  $B_{k+1} = f^{-1}(C_{k+1})$ . Пусть  $x_{k+1}$  — р. п. индекс множества  $B_{k+1}$ ; возьмем  $t_{k+1} = f(x_{k+1})$ .

Очевидно,  $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots$ . Мы покажем индукцией, что (i) и (ii) имеют место.

Для  $t_0$ . Все условия множества  $C_0$  выполняются на  $A$ . Следовательно,  $B_0 \subset \bar{K}$  в силу сводимости множества  $\bar{K}$  к  $A$ . Тогда  $x_0 \in \bar{K} - B_0$ , поскольку  $\bar{K}$  продуктивно с  $\lambda x[x]$  в качестве продуктивной функции. Таким образом, в силу сводимости  $\bar{K}$  к  $A$  условие  $t_0 = f(x_0)$  выполняется на  $A$ . Это доказывает (i). Имеем  $T_0 \cap \bar{A} \neq \emptyset$ , так как  $[T_0 \cap \bar{A} = \emptyset \& t_0 \text{ выполняется на } A] \Rightarrow t_0 \in C_0 \Rightarrow \Rightarrow x_0 \in B_0$  в противоречие с тем фактом, что  $x_0 \in \bar{K} - B_0$ . Этим доказывает (ii). Заметим, что  $t_0 \notin C_0$ .

Для  $t_{k+1}$ . Предположим, что (i) и (ii) имеют место для всех  $i \leq k$  и что все tt-условия из  $C_k$  выполняются на множестве  $A$ . Тогда и все условия из  $C_{k+1}$  выполняются на  $A$ . Отсюда  $B_{k+1} \subset \bar{K}$  и  $x_{k+1} \in \bar{K} - B_{k+1}$  в силу продуктивности  $\bar{K}$ . Таким образом, в силу сводимости множества  $\bar{K}$  к  $A$  условие  $t_{k+1} = f(x_{k+1})$  выполняется на  $A$ . Это доказывает (i). Имеем  $T_{k+1} \cap \bar{A} \neq \emptyset$ , так как  $[T_{k+1} \cap \bar{A} = \emptyset \& t_{k+1} \text{ выполняется на } A] \Rightarrow t_{k+1} \in C_0 \Rightarrow \Rightarrow t_{k+1} \in C_{k+1} \Rightarrow x_{k+1} \in B_{k+1}$  в противоречие с тем фактом, что  $x_{k+1} \notin B_{k+1}$ . Этим доказано (ii). Заметим, что  $t_{k+1} \notin C_{k+1}$ .

Пусть  $n_i$  — порядок tt-условия  $t_i$ . Для всякого  $i$  рассмотрим tt-условие  $t'_i$ , получаемое из  $t_i$  следующим образом:  $t'_i$  имеет то же ассоциированное множество  $T_i$ , что и  $t_i$ ;  $n_i$ -ка для  $t'_i$  получается переупорядочением  $n_i$ -ки для  $t_i$ , таким, что сначала идут элементы из  $T_i \cap \bar{A}$  в порядке неубывания, а за ними следуют (в любом порядке) элементы из  $T_i \cap A$ ; булева функция для  $t'_i$  получается соответствующим переупорядочением аргументов булевой функции для  $t_i$ . Таким образом, для всякого  $i$  условия  $t_i$  и  $t'_i$  тривиально эквивалентны (и взаимно выводимы). Каждое из условий  $t'_0, t'_1, \dots$  имеет порядок  $\leq m$ , поскольку по предположению все tt-условия из области значений функции  $f$  имеют порядок  $\leq m$ . (Последовательность  $t'_0, t'_1, \dots$  может не быть рекурсивно перечислимой.)

Чтобы доказать (iii), заметим, что существует  $2^{2^0} + 2^{2^1} + \dots + 2^{2^m} < 2^{2^{m+1}}$  различных булевых функций  $m$  или менее аргументов. Если бы

$\{j \mid T_j \cap \bar{A} = T_i \cap \bar{A}\}$

имело более чем  $2^{2^{m+1}}$  элементов для какого-нибудь  $i$ , то для некоторых  $j_1$  и  $j_2$ , таких, что  $j_1 < j_2$ ;  $t'_{j_1}$  и  $t'_{j_2}$  имели бы одну и ту же

булеву функцию и

$$T_{j_1} \cap \bar{A} = T_{j_2} \cap \bar{A}.$$

Мы пришли к противоречию, так как  $t'_{j_2}$  было бы тогда выводимо из  $C \cup \{t'_{j_1}\}$  (упр. 8-25), значит,  $t_{j_2}$  было бы выводимо из  $C \cup \{t_{j_1}\}$  и, следовательно,  $t_{j_2}$  оказалось бы в  $C_{j_1+1} \subset C_{j_2}$  в противоречие с нашим заключением о том, что  $t_k \notin C_k$  для всех  $k$ .

Тем самым лемма доказана<sup>1)</sup>. Завершим теперь доказательство теоремы.

Определим  $s(i) = [\text{мощность множества } T_i \cap \bar{A}]$  ( $s$  не обязательно рекурсивная функция). Пусть  $q = \mu z [s(i) = z \text{ для бесконечно многих } i]$ . Поскольку  $1 \leq s(i) \leq m$ , такое  $q$  существует.

Тогда  $s(i) < q$  лишь для конечного числа  $i$ . Выберем  $i_0$  так, что  $s(i) \geq q$  для всех  $i \geq i_0$ . Пересчитываем  $A$ . Как только все кроме  $q$  элементов некоторого  $T_i$  ( $i \geq i_0$ ) появятся в пересчете  $A$ , мы можем заключить, что оставшиеся  $q$  элементов должны лежать в  $\bar{A}$ . Значит, мы можем пересчитывать  $j_0, j_1, \dots$ , такие, что  $i_0 \leq j_0 < j_1 < \dots$  и

$$s(j_0) = s(j_1) = \dots = q,$$

и для каждого  $j_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) выписывать элементы из  $T_{j_i} \cap \bar{A}$ . Таким образом, множество  $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} (T_{j_i} \cap \bar{A})$  рекурсивно перечислимо. Очевидно, что  $W \subset \bar{A}$ . Согласно пункту (iii) леммы,  $W$  должно быть бесконечно. Следовательно,  $\bar{A}$  содержит бесконечное рекурсивно перечислимое подмножество и  $A$  не может быть просто. ■

**Следствие XII.** Существует tt-полное, но не btt-полное множество; тем самым,  $\equiv_{\text{btt}}$  и  $\equiv_{\text{tt}}$  различны на рекурсивно перечислимых множествах и  $\leq_{\text{btt}}$ ,  $\leq_{\text{tt}}$  различны на рекурсивно перечислимых множествах.

**Доказательство.** Множество  $S^*$  из теоремы VIII таково:  $K \equiv_{\text{tt}} S^*$ , но  $K \not\leq_{\text{btt}} S^*$ . ■

Легко видеть, что  $\leq_m$  и  $\leq_{\text{btt}}$  различны на рекурсивных множествах. Следующий результат Фишера [1963] показывает, что  $\leq_m$  и  $\leq_{\text{btt}}$  различны на нерекурсивных рекурсивно перечислимых множествах.

**Теорема XIII (Фишер).** Существуют нерекурсивные рекурсивно перечислимые множества  $A$  и  $B$ , такие, что  $A \leq_{\text{btt}} B$ , но  $A \not\leq_m B$ .

<sup>1)</sup> Эта лемма следует также из доказательства более общей леммы теоремы 9-XVIII.

**Доказательство.** Возьмем  $S^*$  из доказательства теоремы VIII. Очевидно  $S^* \times S^* \leq_{\text{btt}} S^*$ . Покажем, что предположение о том, что  $S^* \times S^* \leq_m S^*$ , приводит к противоречию.

Если бы имело место  $S^* \times S^* \leq_m S^*$ , то существовала бы общерекурсивная функция  $g$ , такая, что

$$[x \in S^* \& y \in S^*] \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in S^* \times S^* \Leftrightarrow g(x, y) \in S^*.$$

Далее, согласно доказательству теоремы VIII,  $x \in K \Leftrightarrow S_x \subset S^*$ , где  $S_x = \{2^x - 1, \dots, 2^{x+1} - 2\}$ . Определим общерекурсивную функцию  $f$  следующим образом:

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = g(1, 2),$$

$$f(2) = g(g(3, 4), g(5, 6)),$$

$$f(3) = g(g(g(7, 8), g(9, 10)), g(g(11, 12), g(13, 14))),$$

Тогда  $f(x) \in S^* \Leftrightarrow S_x \subset S^*$ . Отсюда  $K \leq_m S^*$  посредством  $f$  и множество  $S^*$  является т-полным. Но  $S^*$  просто, что противоречит теореме I (c). ■

**Следствие XIII.** Отношения  $\equiv_{\text{btt}}$  и  $\equiv_m$  различны на нерекурсивных рекурсивно перечислимых множествах.

**Доказательство.** В приведенном выше доказательстве  $S^* \times S^* \equiv_{\text{btt}} S^*$ , но  $S^* \times S^* \not\leq_m S^*$ . ■

Всякое ли btt-полное множество также и т-полно? На этот вопрос ответил Янг [1963], который построил btt-полное множество, т-полным не являющееся. Идея построения этого множества изложена в упр. 10-18. Этот вопрос родствен вопросу, решенному Лахланом [1966], который показал, что  $A \times A$  творческое  $\Rightarrow A$  творческое.

Какие аналоги теоремы IX имеют место для btt-сводимости? В частности, существует ли внутри всякой btt-степени максимальная т-степень? Джокуш показал, что ответ на последний вопрос отрицателен.

В теореме 14-IX, приводимой ниже, мы воспользуемся упр. 8-28 для получения следующего описания btt-сводимости. Пусть для всякого  $B$   $\mathcal{X}_m(B)$  есть булева алгебра множеств, порождаемая совокупностью всех множеств, т-сводимых к  $B$ . Тогда, если множество  $B$  отлично от  $N$  и от  $\emptyset$ , то  $A \leq_{\text{btt}} B \Leftrightarrow A \in \mathcal{X}_m(B)$ .

## § 8.6. СТРУКТУРА СТЕПЕНЕЙ

Сколько рекурсивно перечислимых степеней существует при упорядочениях по различным видам сводимости? Сколько 1-степеней может содержаться в данной т-степени? Сколько т-степеней в данной tt-степени? Рассмотрим эти вопросы.

**Теорема XIV** (Деккер).  $m$ -степень простого множества содержит бесконечную совокупность 1-степеней, линейно упорядоченных отношением  $\leqslant_1$  по типу целых чисел  $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$  и состоящих целиком из простых множеств.

**Доказательство.** Начнем с леммы.

**Лемма.** Пусть  $A$  и  $B$  — рекурсивно перечислимые множества, такие, что

$$B = A \cup \{m\}$$

для некоторого  $m \in \bar{A}$ . Тогда

- (i)  $A$  просто  $\Leftrightarrow B$  просто;
- (ii)  $A$  просто  $\Rightarrow [B \leqslant_1 A \& A \leqslant_m B \& A \not\leqslant_1 B]$ .

**Доказательство леммы.** (i) Очевидно.

(ii). Пусть  $n \in \bar{A}$ ,  $n \neq m$ . Тогда  $A \leqslant_m B$  посредством следующей функции  $f$ :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq m; \\ n, & \text{если } x = m. \end{cases}$$

Пусть  $C$  — бесконечное рекурсивное подмножество множества  $A$ . Пусть  $p$  — рекурсивная перестановка, отображающая  $C \cup \{m\}$  на  $C$ . Тогда  $B \leqslant_1 A$  посредством следующей функции  $g$ :

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin C \cup \{m\}; \\ p(x), & \text{если } x \in C \cup \{m\}. \end{cases}$$

Предположим, что  $A \leqslant_1 B$ . Тогда  $A \equiv B$  посредством некоторой рекурсивной перестановки  $h$  (теорема 7-VI). Тем самым  $m$ ,  $h(m)$ ,  $hh(m)$ , … различны и, следовательно, образуют бесконечное рекурсивно перечислимое подмножество  $\bar{A}$ , в противоречие с простотой  $A$ . Отсюда  $A \not\leqslant_1 B$ . Это доказывает лемму.

Теперь теорема очевидна. Пусть  $A$  — простое множество,  $\{a_0, a_1, \dots\}$  — бесконечное подмножество множества  $A$ , и пусть  $\{b_0, b_1, \dots\}$  — бесконечное подмножество множества  $\bar{A}$ . Тогда, согласно лемме,

$$\dots, A \cup \{b_0, b_1\}, A \cup \{b_0\}, A, A - \{a_0\}, A - \{a_0, a_1\}, \dots$$

дает искомое линейное упорядочение 1-степеней простых множеств. ■

**Следствие XIV.**  $m$ -степень иммунного множества содержит бесконечно много 1-степеней.

**Доказательство.** Применим конструкцию, подобную заключительной конструкции предыдущей теоремы. Если бы любые два множества были одной и той же 1-степени, мы имели бы противоречие, подобное противоречию, полученному в лемме при доказательстве того, что  $A \not\leqslant_1 B$ . ■

**Теорема XV** (Фишер). Полная  $t$ -степень содержит линейно упорядоченную потоку натуральных чисел  $(0, 1, 2 \dots)$  совокупность рекурсивно перечислимых  $m$ -степеней.

**Доказательство.** Возьмем  $S^*$  из доказательства теоремы VIII. Рассмотрим множества

$$A_0 = S^*,$$

$$A_1 = S^* \times S^*,$$

… . . . .

$$A_k = S^* \times \dots \times S^* \quad (2^k \text{ сомножителей}).$$

… . . . .

Очевидно,  $A_0 \leqslant_1 A_1 \leqslant_1 A_2 \leqslant_1 \dots$  и  $A_0 \equiv_{tt} A_1 \equiv_{tt} A_2 \equiv_{tt} \dots$ , однако,  $j > i \Rightarrow A_j \not\leqslant_m A_i$ . В противном случае, пусть  $u, v$  таковы, что  $u < v$  и  $A_v \not\leqslant_m A_u$ . Так же как при доказательстве теоремы XIII, может быть найдена общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для всех  $x$   $S_x \subset S^* \Leftrightarrow f(x) \in A_u$ . Поясним задание функции  $f$  на примере. Предположим, что  $A_4 \leqslant_m A_2$  посредством  $h$ . (По определению  $A_4 = (S^*)^{16}$  и  $A_2 = (S^*)^4$ ). Тогда

$$f(0) = \langle 0, 0, 0, 0 \rangle,$$

$$f(1) = \langle 1, 2, 1, 2 \rangle,$$

$$f(2) = \langle 3, 4, 5, 6 \rangle,$$

$$f(3) = h(\langle 7, 8, \dots, 14, 7, 8, \dots, 14 \rangle),$$

$$f(4) = h(\langle 15, \dots, 30 \rangle),$$

$$f(5) = h(\langle w_1, \dots, w_{16} \rangle),$$

где

$$\langle w_1, \dots, w_4 \rangle = h(\langle 31, \dots, 46 \rangle),$$

$$\langle w_5, \dots, w_8 \rangle = h(\langle 47, \dots, 62 \rangle),$$

$$\langle w_9, \dots, w_{16} \rangle = \langle w_1, \dots, w_8 \rangle$$

и т. д.

Мы опускаем детали задания  $f$  в общем случае.

Так как  $x \in K \Leftrightarrow S_x \subset S^*$ , имеем  $K \leqslant_m A_u$ . Но  $A_u \leqslant_{btt} S^*$ . Отсюда  $K \leqslant_{btt} S^*$ . Поскольку  $S^*$  просто, это противоречит теореме XII. ■

**Следствие XV.** Существует  $btt$ -степень, содержащая линейно упорядоченную по типу натуральных чисел  $(0, 1, 2, \dots)$  совокупность рекурсивно перечислимых  $m$ -степеней.

**Доказательство.** В доказательстве теоремы  $A_i \equiv_{btt} \equiv_{btt} A_j$  при любых  $i, j$ . ■

Теорема XIV была недавно усиlena Янгом [1966], который показал, что всякая нерекурсивная  $m$ -степень или состоит из

единственной 1-степени, или содержит еще 1-степени, линейно упорядоченные по типу целых чисел. Джокушем было установлено существование рекурсивно перечислимых  $m$ -степеней, отличных от  $m$ -степеней множеств  $\emptyset, N$  и  $K$  и состоящих из единственной 1-степени. Джокуш показал также, что всякая нерекурсивная  $t$ -степень содержит бесконечно много  $m$ -степеней. См. Джокуш [1966].

### § 8.7. ДРУГИЕ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Было рассмотрено три типа рекурсивно перечислимых множеств: рекурсивные, творческие и простые. Теорема IV показывает, что существуют иные типы рекурсивно перечислимых множеств: если  $A$  просто, то множество  $A \times N$ , цилиндрификация  $A$ , не является ни рекурсивным, ни творческим, ни простым множеством. В самом деле, поскольку всякое творческое множество  $m$ -полно (как это будет доказано в гл. 11), то из изложенных нами до настоящего момента результатов структурной теории следует, что цилиндрификация любого нерекурсивного не  $m$ -полного множества ни рекурсивна, ни креативна, ни проста. Рекурсивно перечислимые множества, которые не являются ни рекурсивными, ни творческими, ни простыми, были названы Деккером [1953] *мезоичными*.

Не существует удовлетворительной теории, которая давала бы единое представление рекурсивно перечислимых множеств. Целый ряд элементарных вопросов остается открытым. Классификация рекурсивно перечислимых множеств была предпринята Деккером и Майхиллом и Успенским [1957]. Это полезный каталог изученных к настоящему времени типов множеств, но, с теоретической точки зрения, несколько произвольный. На первом этапе все множества группируются по следующим пятью классам:

$$\mathcal{B}_0 = \{A \mid A \text{ рекурсивно перечислимо}\}.$$

$$\mathcal{B}_1 = \{A \mid A \text{ иммунно}\}.$$

$$\mathcal{B}_2 = \{A \mid A \text{ не рекурсивно перечислимо и является объединением бесконечного рекурсивно перечислимого множества и иммунного множества}\}.$$

$$\mathcal{B}_3 = \{A \mid (\forall \text{ рекурсивно перечислимое множество } B) [B \subset \subset A \Rightarrow (\exists \text{ рекурсивно перечислимое множество } C) [C \text{ бесконечно} \& C \subset A \& C \cap B = \emptyset]], \text{ и не существует равномерного эффективного способа нахождения } p. n. \text{ индекса такого множества } C \text{ по } p. n. \text{ индексу множества } B\}.$$

$$\mathcal{B}_4 = \{A \mid A \text{ продуктивно}\}.$$

Тривиальным образом устанавливается (упр. 8-34), что эта классификация взаимно исключающая и исчерпывающая. Если

расположить множества в спектр по возрастающей „насыщенности“ бесконечными рекурсивно перечислимыми подмножествами, то классы  $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_4$  могут восприниматься как области этого спектра.

Может быть получена классификация рекурсивно перечислимых множеств, основанная на рассмотренной классификации их дополнений. Пусть  $\mathcal{C}_i = \{A \mid A \text{ рекурсивно перечислимо и } \bar{A} \in \mathcal{B}_i\}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . Тогда  $\mathcal{C}_0$  есть в точности класс рекурсивных множеств,  $\mathcal{C}_1$  — класс простых множеств и  $\mathcal{C}_4$  — класс творческих множеств. Множества из  $\mathcal{C}_2$  иногда называют *псевдопростыми*, а множества из  $\mathcal{C}_3$  — *псевдотворческими* (эти термины иногда употребляются и несколько иным образом, см. ниже). Классы  $\mathcal{C}_2$  и  $\mathcal{C}_3$  непусты; в самом деле, пусть множество  $A$  просто, тогда (i)  $\{2x \mid x \in A\}$  попадает в  $\mathcal{C}_2$  и (ii)  $A \times N$  попадает в  $\mathcal{C}_3$  (упр. 8-35 и 8-36). В действительности всякий не являющийся ни рекурсивным, ни творческим множеством рекурсивно перечислимый цилиндр попадает в  $\mathcal{C}_3$ . Янг показал, что не всякое множество из  $\mathcal{C}_3$  есть цилиндр (упр. 8-49).

Множества из  $\mathcal{C}_2$  можно далее классифицировать следующим образом:

$$\mathcal{C}_{21} = \{A \mid A \in \mathcal{C}_2 \text{ и } (\exists \text{ рекурсивное множество } C) [C \text{ бесконечно} \& C \subset \bar{A} \& (\forall \text{ рекурсивно перечислимое множество } B) [B \subset \bar{A} \Rightarrow \text{все кроме конечного числа элементов из } B \text{ принадлежат } C]]\}.$$

$$\mathcal{C}_{22} = \{A \mid A \in \mathcal{C}_2 \text{ и } A \notin \mathcal{C}_{21} \text{ и } (\exists \text{ рекурсивно перечислимое множество } C) [C \text{ бесконечно} \& C \subset \bar{A} \& (\forall \text{ рекурсивно перечислимое множество } B) [B \subset \bar{A} \Rightarrow \text{все кроме конечного числа элементов из } B \text{ принадлежат } C]]\}.$$

$$\mathcal{C}_{23} = \{A \mid A \in \mathcal{C}_2 \text{ и } A \notin \mathcal{C}_{21} \text{ и } A \notin \mathcal{C}_{22}\}.$$

Если рекурсивно перечислимое множество  $C$  обладает тем свойством, что  $[C \text{ бесконечно} \& C \subset \bar{A} \& (\forall \text{ рекурсивно перечислимое множество } B) [B \subset \bar{A} \Rightarrow \text{все кроме конечного числа элементов из } B \text{ принадлежат } C]]$ , то  $C$  называется *центром* множества  $\bar{A}$ . Если  $\bar{A} = C \cup D$ , где  $C$  бесконечно и рекурсивно перечислимо, а  $D$  иммунно, то множество  $C$  называется *простым в  $\bar{A}$* . Таким образом, например,  $\mathcal{C}_2$  есть класс таких нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств, для которых существуют множества, простые в их дополнениях;  $\mathcal{C}_{21}$  есть класс нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств, дополнения которых обладают рекурсивными центрами. Иногда в литературе термин *псевдопростое* относят лишь к множествам из  $\mathcal{C}_{21} \cup \mathcal{C}_{22}$ , а термин *псевдотворческое* — к множествам из  $\mathcal{C}_{23} \cup \mathcal{C}_3$ .

Класс  $\mathcal{C}_{21}$  непуст, так как для любого простого множества  $A$   $\{2x \mid x \in A\} \in \mathcal{C}_{21}$ . Мы увидим в упр. 8-39, что класс  $\mathcal{C}_{22}$  непуст, и в упр. 8-42, что непуст класс  $\mathcal{C}_{23}$ .

Классы  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_{21}$ ,  $\mathcal{C}_{22}$ ,  $\mathcal{C}_{23}$ ,  $\mathcal{C}_3$ ,  $\mathcal{C}_4$  образуют области спектра нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств по возрастающей насыщенности их дополнений (см. упр. 8-46). Еще несколько областей обнаружено внутри  $\mathcal{C}_1$  (простые множества). Мы обратимся к этому в гл. 9 и 12.

## § 8.8. Упражнения

### § 8.1

8-1. Пусть  $A$  и  $B$  просты.

(а) Покажите, что множество  $A \oplus B$  просто.

(б) Покажите, что  $A \times B$  не является простым множеством.

(Часть (а) показывает, что результат применения операции  $\oplus$  к двум нецилиндрам может быть нецилиндром.)

8-2. Какова мощность семейства простых множеств?

8-3. Постройте два простых множества, объединение которых есть  $N$ .

Δ8-4. (Деккер). (а) Покажите, что пересечение продуктивного и простого множеств продуктивно.

(б) Покажите, что пересечение творческого и простого множеств должно быть творческим множеством.

8-5 (Рабин). Пусть  $A$  — бесконечное множество с бесконечным дополнением. Рассмотрим следующую игру между двумя игроками I и II. I выбирает любое число  $x$ , тогда II, зная  $x$ , выбирает  $y$ . Если  $x + y \in A$ , I выигрывает; в противном случае выигрывает II. Если  $A$  не рекурсивно, мы предполагаем существование „оракула”, который говорит игрокам, кто из них выиграл. Очевидно, что чистая, т. е. детерминированная стратегия для II состоит в образовании всюду определенной функции  $f$ , такой, что, когда I выбирает  $x$ , II выбирает  $y = f(x)$ . Поскольку  $A$  бесконечно, ясно, что для любого  $x$  существует  $y$ , такое, что  $x + y \notin A$ . Таким образом, для II должна существовать выигрышная стратегия. (Это частный и тривиальный случай общей теоремы об играх.)

Покажите, что если в качестве  $A$  взято простое множество, то произойдет следующее.

(и) II не имеет рекурсивной выигрышной стратегии.

(ii) Если II выбирает какую-то рекурсивную стратегию и следует ей в течение повторяющихся партий игры, то существует эффективная процедура, благодаря которой I может обнаруживать  $x$ , выигрывающее против стратегии II.

8-6. Предположим, что  $A \leq_m B$ ,  $B$  просто,  $C$  рекурсивно перечислимо и  $C \cap A = \emptyset$ . Покажите, что  $A$  и  $C$  рекурсивно отделимы.

8-7 (Фишер). (а) Покажите, что  $C$  творческое  $\Rightarrow C \times B$  является творческим для всякого рекурсивно перечислимого непустого  $B$ .

(б) Покажите, что  $A$  просто  $\Rightarrow A \times A$  не является творческим.

Δ(c) Пусть  $A$  просто. Покажите, что  $A \times B$  творческое  $\Rightarrow B$  творческое для любого рекурсивно перечислимого  $B$ . (Указание: Доказательство можно получить, используя лишь исходные определения. Это одно из наиболее трудных Δ-упражнений.)

### § 8.2

8-8. Пусть  $A$  есть множество четных чисел. Покажите, что существует рекурсивно перечислимая 1-степень, которая не сравнима ни с  $A$ , ни с какими бы то ни было конечными степенями, но которая превосходит все бесконечные 1-степени.

8-9. Пусть  $f$  — взаимно однозначная общерекурсивная функция. Каковы  $f(A)$  и  $f^{-1}(A)$ , если (i)  $A$  просто; (ii)  $A$  иммунно.

8-10. Покажите, что  $A \times N$  творческое  $\Rightarrow A$  творческое.

8-11. (Деккер). Пусть  $A$  и  $B$  просты; пусть  $C$  — произвольное рекурсивно перечислимое множество. Покажите, что

(i)  $A \cap C$  просто;

(ii)  $A \cup C$  просто или коконечно.

Отсюда заключаем, что семейство простых и коконечных множеств образует дуальный идеал в решетке рекурсивно перечислимых множеств (о понятии дуального идеала см. § 12.1).

8-12. Рассмотрим факторрешетку, получаемую идентификацией рекурсивно перечислимых множеств по модулю копростых и конечных множеств (понятие факторрешетки можно найти в § 12.1).

(а) Покажите, что всякое множество, идентифицируемое с творческим, должно быть творческим.

(б) Покажите, что существуют два творческих множества, которые не идентифицированы одно с другим.

### § 8.3

8-13. Покажите, что  $A \oplus B \equiv_{tt} A \times B$ , если ни  $A$ , ни  $B$  не пусты.

8-14. Покажите, что семейство  $\{A \mid A \leq_{tt} B\}$  образует булеву алгебру, т. е. замкнуто относительно объединения, пересечения и операции взятия дополнения.

8-15. Покажите, что всякая  $tt$ -степень содержит в точности  $\aleph_0$  множеств.

8-16. Покажите, что всякая нерекурсивная  $tt$ -степень содержит множество, не являющееся рекурсивно перечислимым и не имеющее рекурсивно перечислимого дополнения.

▲8-17. Покажите, что множества  $K$ ,  $\{x \mid W_x$  бесконечно} и  $\{x \mid W_x$  рекурсивно} попадают в различные, но сравнимые  $tt$ -степени.

### § 8.4

8-18. Приведите пример цилиндра, который не является ни рекурсивно перечислимым множеством, ни  $tt$ -цилиндром.

8-19. Покажите, как структура рекурсивных множеств при  $tt$ -упорядочении согласуется с теоремой IX.

8-20. (а) Покажите, что  $A$  есть  $tt$ -цилиндр  $\Rightarrow A \equiv \bar{A}$ .

△(б) Покажите, что из  $A \equiv \bar{A}$  не следует, вообще говоря, что  $A$  есть  $tt$ -цилиндр. (Указание. Возьмите  $A = K \oplus \bar{K}$ , см. далее упр. 7-36 (e).)

### § 8.5

8-21. Покажите, что результаты упражнений с 8-13 по 8-16 имеют место при замене  $tt$  на  $btt$ .

8-22. (а) Покажите, что  $A \times A \leq_{btt} A$  (в то время как в силу теоремы XIII существует рекурсивно перечислимое множество  $A$ , такое, что  $A \times A \not\leq_m A$ .

(б) Покажите, что существуют рекурсивные рекурсивно перечислимые множества  $A$  и  $B$ , такие, что  $A \times B \not\equiv_m A \oplus B$ .

8-23. Покажите, что  $(\forall A)(\exists B)[B \leq_{btt} A \& A \leq_{btt} B \& B = \bar{B}]$ . (Указание. Привлеките операцию сочленения  $\oplus$ .)

8-24. Рассмотрите  $btt$ -сводимость порядка 1. Покажите, что это отношение транзитивно и рефлексивно. Является ли упорядочение по этой сводимости полурешеткой? Покажите, что полное относительно этого типа сводимости множество является творческим. (Из того результата, что  $A$  творческое  $\Rightarrow A$

м-полно (устанавливаемого в гл. 11), следует, что полная степень при этом упорядочении совпадает с полной  $m$ -степенью (и, следовательно, с полной 1-степенью).)

8-25. В доказательстве теоремы XII покажите, что если  $T_{j_1} \cap \bar{A} = T_{j_2} \cap \bar{A}$ , то  $t'_{j_2}$  выводимо из  $C \cup \{t'_{j_1}\}$ .

△ 8-26. Скажем, что  $tt$ -условие *дизъюнктивно*, если ему поставлена в соответствие формула вида  $x_1 \in X \vee x_2 \in X \vee \dots \vee x_k \in X$  (или, что эквивалентно, если булев полином его булевой функции может быть записан в виде суммы двух термов, первого терма, являющегося 1, и второго терма — произведения сомножителей вида  $(w_i + 1)$ ). Иногда рассматривается  $tt$ -сводимость только с дизъюнктивными  $tt$ -условиями. (Сводимость множества  $\bar{A} \times \bar{A}$  к  $A$  — пример такой сводимости.) Назовем такую сводимость *q-сводимостью*. Имеем, таким образом, следующее

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $A \leqslant_q B$ , если ( $\exists$  общерекурсивная  $f$ )  $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow \Leftrightarrow D_{f(x)} \cap B \neq \emptyset]$ .

Возникает естественный вопрос, совпадают ли понятия *q-сводимости* и *tt-сводимости*.

(i) Покажите, что  $\leqslant_q$  рефлексивно и транзитивно.

(ii) Покажите, что  $A \leqslant_m B \Rightarrow A \leqslant_q B \Rightarrow A \leqslant_{tt} B$ .

(iii) Опишите структуру рекурсивных множеств относительно *q-сводимости*.

(iv) Определим *q-цилиндр* следующим образом:  $A^q = \{x \mid D_x \cap A \neq \emptyset\} \times N$ . Докажите аналог теоремы IX. Покажите, что этот аналог не имеет места, если  $A^q$  определено как  $\{x \mid D_x \cap A \neq \emptyset\}$ . (Указание. Рассмотрите множество  $A$ , такое, что  $\bar{A}$  иммунно.)

(v) Покажите, что  $[A \leqslant_q B \& B \text{ рекурсивно перечислимо}] \Rightarrow A \text{ рекурсивно перечислимо}$ .

(vi) Выведите из (v), что  $\leqslant_q$  не влечет за собой ни  $\leqslant_{tt}$ , ни  $\leqslant_{bit}$ .

(vii) Покажите, что  $\leqslant_q$  не влечет за собой  $\leqslant_{bit}$ . (Указание. Покажите, что  $\bar{K} \leqslant S^*$ , где  $S^*$  — множество из доказательства теоремы VIII.)

△ 8-27 (см. упр. 8-26).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Назовем множество  $A$  *q-творческим*, если  $A$  рекурсивно перечислимо и ( $\exists$  общерекурсивная  $f$ )  $(\forall x)[W_x \subset \bar{A} \Rightarrow [D_{f(x)} \subset \bar{A} \& D_{f(x)} \not\subset W_x]]$ . (Это определение принадлежит Шёнфильду [1957], который называет такие множества *квазитворческими*.)

(i) Покажите, что  $A$  *q-полно*  $\Rightarrow A$  *q-творческое*. (Обратное также имеет место; см. упр. 11-18).

(ii) Покажите, что  $A$  *q-творческое*  $\Rightarrow A$  не просто.

(iii) Покажите, что понятия *q-полного* множества и *tt-полного* множества не совпадают; отсюда заключите, что  $\leqslant_q$  и  $\leqslant_{tt}$  различаются на нерекурсивных рекурсивно перечислимых множествах.

(Еще о *q-сводимости* см. упр. 8-44.) (Замечание. Если в тексте начала упр. 8-26 заменить *дизъюнктивный* на *конъюнктивный*, мы придем к *c-сводимости*;  $A \leqslant_c B$ , если ( $\exists$  общерекурсивная функция  $f$ )  $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow \Leftrightarrow D_{f(x)} \subset B]$ . Если мы заменим *дизъюнктивный* на *позитивный*, придем к *p-сводимости*:  $A \leqslant_p B$ , если ( $\exists$  общерекурсивная функция  $f$ )  $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\exists y)[y \in D_{f(x)} \& D_y \subset B]]$ . Как *c-сводимость*, так и *p-сводимость* изучались Джокушем [1966].)

△ 8-28 (Фишер). Покажите, что модификации понятия *tt-сводимости*, упоминавшиеся в замечании конца § 8.3, эквивалентны (за исключением того случая, когда одно из множеств  $B$  или  $\bar{B}$  пусто).

### § 8.6

8-29. (Джокуш). (a) Пусть  $A$  и  $B$  — рекурсивно перечислимые цилиндры. Покажите, что  $A \oplus B =_{m^A} B$  может не иметь места.

(b) Покажите, что  $A \oplus B =_{m^A} A \Leftrightarrow A$  есть цилиндр, и заключите, что существуют нерекурсивные рекурсивно перечислимые множества  $A$  и  $B$ , такие, что  $A \oplus B$  не есть наименьшая верхняя грань множеств  $A$  и  $B$  при 1-упорядочении.

(c) Покажите, что если или  $A$ , или  $B$  есть цилиндр, то  $A \oplus B$  есть наименьшая верхняя грань множеств  $A$  и  $B$  при 1-упорядочении.

(d) Покажите, что всякая  $m$ -степень или состоит из единственной 1-степени, или содержит бесконечную линейно упорядоченную совокупность 1-степеней.

8-30. Должна ли следовать из *tt-полноты* множества  $A$  *m-сводимость* к  $A \times \bar{A}$  всякого рекурсивно перечислимого множества? (Указание. Возьмите в качестве  $A$  множество  $S^*$ .)

△ 8-31. Определим

$$B_1 = S^*,$$

$$B_2 = S^* \times S^*,$$

$$\dots \times S^* \times S^* \times \dots \times S^* \quad (k \text{ сомножителей})$$

Покажите, что  $B_1, B_2, \dots$  попадают в различные  $m$ -степени.

△ 8-32. Определим *изолическую сводимость* следующим образом.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $A \leqslant_i B$ , если ( $\exists$  частичнорекурсивная взаимно однозначная функция  $\varphi$ )  $[A = \varphi^{-1}(B)]$ .

(i) Покажите, что  $\leqslant_i$  рефлексивно и транзитивно.

(ii) Определим  $\equiv_i$  очевидным образом. Докажите, что  $A \equiv_i B \Leftrightarrow (\exists$  частичнорекурсивная взаимно однозначная функция  $\varphi$ )  $[A \subset \text{Arg } \varphi \& B = \varphi(A)]$ . (Указание (Монастырь). Примените технику, подобную той, которая была применена при доказательстве теоремы 7-VI. Следует иметь в виду, что при этом возникнут дополнительные трудности.)

*i-степени* известны как *типы рекурсивной эквивалентности*. Они широко изучались Деккером, Майхиллом, Нероудом и др. (см. Деккер и Майхилл [1960]). *i-степени* изолированных множеств называются *изолями*. (Тривиально, что  $[A \text{ изолировано} \& A \equiv_i B] \Rightarrow B \text{ изолировано}.$ )

(iii) Покажите, что если  $A$  и  $B$  изолированы, то  $A \oplus B$  и  $A \times B$  изолированы.

Если „сумму” и „произведение” изолей  $A$  и  $B$  определить как изоли  $A \oplus B$  и  $A \times B$  соответственно, то может быть развита теория *арифметики изолей*, в большой степени аналогичная теории промежуточных кардинальных чисел (см. замечание в § 8.2 выше). В частности, может быть показано, что имеют место различные законы сокращения<sup>1</sup>).

(iv) Покажите, что существует  $2^{N^0}$  изолей.

(v) Покажите, что копростые множества распадаются на  $\aleph_0$  различных изолей (воспользуйтесь теоремой XIV).

(vi) Покажите, что бесконечные рекурсивно перечислимые множества образуют единственную *i-степень*.

(vii) Покажите, что существует бесконечно много *i-степеней*, не являющихся изолями. (Указание. Воспользуйтесь мощностными соображениями

<sup>1</sup> С точки зрения гомологической алгебры, теория типов рекурсивной эквивалентности возникает, когда мы рассматриваем *категорию* множеств натуральных чисел и частичнорекурсивных отображений. Операции  $\oplus$  и  $\times$  тогда выступают как прямая сумма и прямое произведение.

по поводу числа неизолированных множеств и числа возможных множеств в каждой  $i$ -степени.)

(viii) Покажите, что  $A$  иммунно  $\Rightarrow A$  и  $N$  не сравнимы относительно упорядочения по  $i$ -сводимости.

(ix) Покажите, что если множества  $A$  и  $B$  бесконечны и рекурсивно перечислимые, то  $A \equiv B \Leftrightarrow \bar{A} \equiv \bar{B}$ .

**8-33.** Определим  $\leq_i$ , следующим образом:  $A \leq_i B$ , если ( $\exists$  частично-рекурсивная взаимно однозначная функция  $\varphi$ )  $[A \subset \varphi^{-1}(B)]$ .

(i) Покажите, что  $\leq_i$  рефлексивно и транзитивно.

(ii) Покажите, что для изолированных множеств понятия  $i$ -степени и  $i$ -степени (упр. 8-32) совпадают.

(iii) Покажите, что все неизолированные множества образуют единственную  $i$ -степень.

### § 8.7

**8-34.** Покажите, что классификация  $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_4$  является исчерпывающей и взаимно исключающей.

8-35. Покажите, что  $A$  просто  $\Rightarrow \{2x \mid x \in A\} \in \mathcal{C}_2$ .

8-36. Покажите, что  $A$  просто  $\Rightarrow A \times N \in \mathcal{C}_3$ .

8-37. (a) Покажите, что все нерекурсивные рекурсивно перечислимые цилиндры принадлежат  $\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$ .

(b) Покажите, что все полутворческие множества (т. е. рекурсивно перечислимые множества с полупродуктивными дополнениями) лежат в  $\mathcal{C}_{23} \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$ .

8-38. Покажите, что если  $C$  есть центр множества  $\bar{A}$ , то  $C$  просто в  $\bar{A}$ .

**Δ-39.** Это упражнение относится к теории пар непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств (см. § 7.7). Мы предложим здесь аналог *простоты* и воспользуемся им, чтобы доказать существование пары непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств, не являющихся ни рекурсивно отдельными, ни эффективно неотделыми, а также показать, что класс  $\mathcal{C}_{22}$  § 8.7 не пуст. Построение такой пары множеств подобно построению множества  $S$  Поста (теорема II) и может быть проведено модификацией конструкции Мучника [1956a] и Тенненбаума.

Пусть  $D = \{(x, y) \mid y \in W_x \& y > 3x\}$ . Множество  $D$  рекурсивно перечислимо и может быть эффективно расположено в последовательность  $\langle x_0, y_0 \rangle, \langle x_1, y_1 \rangle, \dots$ . Мы пересчитываем  $D$  и в то же самое время образовываем два пересчета  $A$  и  $B$ , согласно процедуре (которая вскоре будет определена), такой, что, когда каждое  $\langle x_i, y_i \rangle$  появляется в пересчете  $D$ ,  $y_i$  добавляется или не добавляется к одному из двух пересчетов. На любом таком шаге, если  $y_i$  добавлено к тому или иному пересчету, мы скажем, что  $x_i$  *помещает*  $y_i$  в этот пересчет. Процедура образования пересчетов определяется следующим образом.

Этап  $i$ . Посмотрите, помещено ли  $y_i$  в один из пересчетов на предыдущем этапе. Если да, переходите к этапу  $i + 1$ . Если нет, посмотрите, поместило ли  $x_i$  что-нибудь в  $A$ . Если нет, поместите  $y_i$  в  $A$ . Если да, посмотрите, поместило ли  $x_i$  что-нибудь в  $B$ . Если нет, поместите  $y_i$  в  $B$ . Если да, переходите к этапу  $i + 1$ .

Очевидно,  $A$  и  $B$  образуют пару непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств. Докажите следующее:

(i)  $\overline{A \cup B}$  бесконечно.

(ii)  $[C$  рекурсивно перечислимо  $\& C \cap (\overline{A \cup B})$  бесконечно]  $\Rightarrow$   $\Rightarrow [C \cap A \neq \emptyset \& C \cap B \neq \emptyset]$ .

(iii) Пара  $A, B$  не является рекурсивно отдельной.

(iv) Пара  $A, B$  не является эффективно неотделенной.

(v)  $B$  есть центр множества  $\bar{A}$ , рекурсивно перечислимый, но не рекурсивный.

(vi)  $\bar{A}$  не имеет рекурсивного центра. (Из (v) и (vi) заключаем, что  $A \in \mathcal{C}_{22}$  (см. § 8.7).)

Пара рекурсивно перечислимых множеств, обладающих свойствами (i) и (ii), называется *сильно неотделимой*.

**8-40.**  $A$  называется *максимальным множеством*, если  $A$  рекурсивно перечислимое,  $\bar{A}$  бесконечно и  $(\forall B) [[B$  рекурсивно перечислимое  $\& B \supset A] \Rightarrow \Rightarrow [B - A$  конечно или  $N - B$  конечно]].

(i) Покажите, что  $A$  максимально  $\Rightarrow A$  просто.

(ii) Постройте простое множество, не являющееся максимальным.

▲(iii) Покажите, что максимальные множества существуют. (Мы докажем это в гл. 12; никакого простого доказательства не известно.)

**Δ-41.** Пусть  $S_0, S_1, \dots$  — такие же, как в доказательстве теоремы VIII. Пусть  $\mathcal{S} = \{S_x \mid S_x \subset W_x\}$ . Пусть  $A = \{z \mid (\exists y)(S_y \in \mathcal{S} \& z \text{ есть наибольший элемент из } S_y)\}$ .

(i) Покажите, что  $A$  — полуторческое множество (т. е. рекурсивно перечислимое множество с полупродуктивным дополнением) с полуторческим общерекурсивной функцией  $f$ , такой, что  $W_{f(x)} = W_x \cup S_x$ .

(ii) Покажите, что  $A$  — на самом деле творческое множество. (Указание. Докажите это непосредственно построением продуктивной функции или косвенным путем, показав, что  $A$   $\pi$ -полно.)

**Δ-42** (Шён菲尔德). Модифицируем конструкции упр. 8-41 следующим образом. Возьмем  $S$  из теоремы II. Возьмем  $\mathcal{S}$  как в упр. 8-41. Положим  $E = \bigcup_{S_x \in \mathcal{S}} S_x$ . Образуем  $B = S \cup E$ . Согласно теореме VIII,  $(\forall x)[\bar{S} \cap S_x \neq \emptyset]$ .

Отсюда  $S_x \subset B \Leftrightarrow \bar{S}_x \in \mathcal{S}$ . Выберем из каждого  $S_x$  из  $\mathcal{S}$  по одному представителю следующим образом. Пересчитываем  $B$  (оно, очевидно, рекурсивно перечислимое), и для каждого  $S_x$  из  $\mathcal{S}$  берем в качестве его представителя тот его элемент, который последним появился в пересчете множества  $B$ . Положим  $A = [\text{множество таких представителей}]$ . Докажите, что

(i)  $A$  рекурсивно перечислимое и бесконечно,

(ii)  $B - A$  рекурсивно перечислимое,

(iii)  $A$  полуторческое,

(iv)  $A$  не рекурсивно,

(v)  $B$  просто,

(vi)  $A$  не творческое. (Указание. Если бы оно было таковым, можно было бы, воспользовавшись продуктивностью множества  $B - A$ , получить бесконечное рекурсивно перечислимое подмножество множества  $\bar{B}$ .)

(vii)  $A$  попадает в класс  $\mathcal{C}_{23}$  из § 8.7.

**8-43.** (a) Покажите, что  $A$  просто  $\Rightarrow A \times N$  не полуторческое (и, следовательно,  $\mathcal{C}_3$  содержит множества, которые не являются полуторческими).

(b) Покажите, что  $A$  полуторческое  $\Rightarrow A \times N$  полуторческое.

(c) Воспользовавшись упр. 8-42, заключите, что не  $\pi$ -полный рекурсивно перечислимый цилиндр не обязательно изоморфен цилиндрификации простого множества.

**Δ-44** (Шён菲尔德). (Упр. 8-26 и 8-27.)

(a) Покажите, что множество  $A$  из упр. 8-42  $\pi$ -полн (и, следовательно,  $\mathbb{Q}$ -креативно).

(b) Покажите, что множество  $A$  из упр. 8-42 не  $btt$ -полн. (Указание. Предположите, что  $A$   $btt$ -полн; воспользовавшись рекурсивной перечислимостью множества  $B - A$ , методом теоремы XII, покажите, что  $B$  не может быть просто, что дает противоречие.)

(c) Отсюда заключите, что  $\leq_q$  отличается от  $\leq_{btt}$  на рекурсивно перечислимых множествах.

$\Delta 8\text{-}45$  (Шён菲尔德). Получите следующую недоказанную версию теоремы XII:  $A \text{ бтт-полно} \Rightarrow A \in \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$ . (Указание. Воспользуйтесь методом упр. 8–44 (б)).

$\Delta 8\text{-}46$  (Янг). Покажите, что классы  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_{21}, \mathcal{C}_{22}, \mathcal{C}_{23}, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$  расположены на линейном спектре в следующем смысле: никакое рекурсивно перечислимое множество не может быть 1-сводимо к рекурсивно перечислимому множеству, лежащему левее его в этом спектре.

$\Delta 8\text{-}47$  (Уиман). Покажите, что дополнение множества из  $\mathcal{C}_{22}$  не может быть объединением непересекающихся рекурсивного и иммунного множеств.

$\Delta 8\text{-}48$ . Если  $A \leqslant_1 B$  и  $A$  — цилиндр, должно ли  $B$  быть цилиндром? (Указание. Возьмите  $A = N \times N$ ,  $B \in \mathcal{C}_2$ .)

$\Delta 8\text{-}49$  (Янг). Покажите, что  $\mathcal{C}_3$  содержит множество, не являющееся цилиндром. (Указание. Установите лемму:  $[S \text{ просто} \& S \times S \text{ — цилиндр}] \Rightarrow S \times S \leqslant_m S$ , а затем примените к  $S^*$  теорему XIII.) (Джокуш показал, что существует такое простое  $S$ , что  $S \times S$  есть цилиндр.)

$\Delta 8\text{-}50$  (Янг). Построить множества  $A$  и  $B$  из  $\mathcal{C}_3$ , такие, что  $A \leqslant_1 B$ ,  $A$  — цилиндр, но  $B$  — не цилиндр (Указание. Рассмотрите  $S^* \times N$  и  $S^* \times S^*$  из упр. 8-49.)

$\Delta 8\text{-}51$  (Сакс). Введем определение:  $A$  эффективно просто, если  $A$  рекурсивно перечислимо и ( $\exists$  общерекурсивная функция  $f$ )  $(\forall x)[W_x \subset \bar{A} \Rightarrow W_x$  имеет менее чем  $f(x)$  элементов].

(а) Покажите, что множество  $S$  теоремы II эффективно просто.  
 (б) Покажите, что существует простое множество, не являющееся эффективно простым.

## Глава 9. СВОДИМОСТЬ ПО ТЬЮРИНГУ; ГИПЕРПРОСТЫЕ МНОЖЕСТВА

- § 9.1. Пример 167
- § 9.2. Относительная рекурсивность 168
- § 9.3. Релятивизованная теория 176
- § 9.4. Сводимость по Тьюрингу 179
- § 9.5. Гиперпростые множества; теорема Деккера 181
- § 9.6. Сводимость по Тьюрингу и табличная сводимость; проблема Поста 184
- § 9.7. Сводимость по перечислимости 189
- § 9.8. Рекурсивные операторы 193
- § 9.9. Упражнения 202

### § 9.1. ПРИМЕР

На интуитивном уровне, множество  $A$  сводимо к  $B$ , если по любому данному способу вычисления  $c_B$  мы можем получить способ вычисления  $c_A$ . Удовлетворительно ли табличная сводимость представляет это интуитивное понятие или возможны случаи, когда интуитивная сводимость имеет место, а табличная сводимость — нет?

Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$\tilde{K} = \{x \mid (\exists y)[\varphi_x(x) = y \& \text{tt-условие } y \text{ выполняется на } K]\}.$$

Теорема I.  $\tilde{K} \not\leq_{\text{tt}} K$ .

Доказательство. Предположим, что  $\tilde{K} \leq_{\text{tt}} K$ . Тогда  $\tilde{K} \leq_{\text{tt}} K$ . Пусть  $\tilde{K} \leq_{\text{tt}} K$  посредством функции  $\varphi_{x_0}$ . Мы имеем, что  $x_0 \in \tilde{K} \Leftrightarrow \varphi_{x_0}(x_0)$  выполняется на  $K$  (в силу сводимости множества  $\tilde{K}$  к  $K$  посредством  $\varphi_{x_0}$ )  $\Leftrightarrow x_0 \in \tilde{K}$  (по определению  $\tilde{K}$ ). Таким образом получаем противоречие. ■

Приведем теперь доводы в пользу следующего предложения.

Предложение.  $\tilde{K}$  сводимо к  $K$  интуитивно.

Аргументация. Предположим, мы имеем способ, позволяющий выяснить, принадлежит ли число множеству  $K$ . Пусть дано  $z$ . Мы хотим установить, имеет ли место  $z \in \tilde{K}$ . Предлагаемая процедура такова.

Выясняем, будет ли  $z \in \tilde{K}$ . Если  $z \notin K$ , то  $\varphi_z(z)$  расходится, и мы можем заключить, что  $z \notin \tilde{K}$ . Если  $z \in K$ , то  $\varphi_z(z)$  сходится, мы можем вычислить  $\varphi_z(z)$  и, задавая дальнейшие вопросы о  $K$ , выяснить, является ли  $\varphi_z(z)$  tt-условием, выполняющимся на  $K$ . Если да, мы заключаем, что  $z \in \tilde{K}$ ; если нет, мы делаем вывод, что  $z \notin \tilde{K}$ . ■

**Комментарий.**  $\tilde{K}$  интуитивно сводимо к  $K$ , поскольку для ответа на любой конкретный вопрос о принадлежности множеству  $\tilde{K}$  нам надо задать лишь конечное число отдельных вопросов о принадлежности множеству  $K$ . Заметим, однако, что мы не знаем заранее, т. е. прежде чем мы получим какие-либо ответы о  $K$ , какие вопросы о  $K$  нам придется задать. Чтобы выяснить, принадлежит ли  $z$  множеству  $\tilde{K}$ , мы сначала проверяем, будет ли  $z \in K$ , а затем используем ответ на этот вопрос, чтобы установить, какие дальнейшие вопросы необходимы (если они действительно необходимы).

Это отлично от tt-сводимости. Как мы ранее заметили, если  $A$  tt-сводимо к  $B$ , то по любому вопросу об  $A$  мы можем эффективно и явно получить заранее, т. е. до того как мы имеем какие-либо ответы о  $B$ , (i) конечное множество вопросов, которые надлежит задать о  $B$ , и (ii) указание на то, как каждая возможная комбинация ответов на эти вопросы о  $B$  определяет ответ на наш вопрос об  $A$ <sup>1)</sup>.

В этой главе мы определим сводимость, называемую нами *сводимостью по Тьюрингу*. Она обычно признается формализацией наиболее общего интуитивного понятия сводимости. Это, пожалуй, наиболее существенное и важное из всех понятий сводимости. Мы изложим также ряд идей и методов, связанных с тьюринговой сводимостью и являющихся весьма существенными при дальнейшем изложении.

## § 9.2. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ РЕКУРСИВНОСТЬ

Пусть дано множество  $X$ . Рассмотрим процедуру, которая определяется конечным набором инструкций и входом следующим образом. В тот момент, когда задается вход, начинается вычисление. Вычисление происходит алгоритмически, за тем лишь исключением, что (a) время от времени вычислитель может быть поставлен перед необходимостью получить ответ на вопрос вида „ $n \in X$ ?” (вообще говоря, сам этот вопрос, т. е. значение  $n$ , есть результат предшествующего вычисления); (b) набор инструкций не дает никакого способа отвечать на такие вопросы об  $X$ ; (c) получение ответа на такой вопрос считается одним шагом общей процедуры и (d) от этого ответа зависят, вообще говоря, последующие шаги этой процедуры. Если такие ответы правильно и автоматически выдаются некоторым внешним устройством, мы имеем вполне

<sup>1)</sup> Эти замечания подсказывают некоторую (возможно) промежуточную сводимость, в которой множество вопросов (i) задается заранее, но указания (ii) нет. Мы назовем такую сводимость *слабой табличной сводимостью*. Она рассматривается в упр. 9-45.

определенное и в некотором смысле эффективное вычисление<sup>1)</sup>. Мы будем называть такую процедуру *алгоритмом относительно множества  $X$* . В § 9.1, например, процедура для вычисления  $c_{\tilde{K}}$ , характеристической функции множества  $\tilde{K}$ , алгоритмична относительно  $K$ .

Как может быть уточнено это понятие *относительного алгоритма*? Несколько отличающиеся друг от друга, но эквивалентные формализации проводятся обычно по аналогии с одним из формальных уточнений § 1.5. Мы выберем иной путь и определим относительный алгоритм непосредственно с помощью понятия частично рекурсивной функции, основного нашего понятия. Прежде чем перейти к этому, приведем несколько хорошо известных формализаций. Детали мы опускаем.

### МашинаТьюринга с оракулом

Внешнее устройство, выдающее правильные ответы на вопросы об  $X$ , часто называют *оракулом*. Его обычно представляют себе как (никаким иным образом не определяемый) „черный ящик”, связанный с вычислителем. Понятие относительного алгоритма может быть формально уточнено с помощью объектов, являющихся в сущности машинами Тьюринга с оракулом. Этот подход принадлежит Дэвису. Машины Тьюринга определяются, как прежде, за тем лишь исключением, что (i) машина может писать символ „ $S$ ” наряду с символом „ $1$ ”<sup>2)</sup> и (ii) в добавление к четверкам вида *«состояние, содержимое ячейки, операция, состояние»* машина может иметь четверки вида *«состояние, содержимое ячейки, состояние, состояние»*. Пусть, например,  $q_2 1 q_3 q_4$  имеется в данной машине; тогда, если (при любом вычислении относительно  $X$ ) машина находится в состоянии  $q_2$  и обозревает ячейку, содержащую  $1$ , происходит следующее. Пусть  $n$  — общее число единиц, появившихся на ленте (к этому моменту). Если  $n \in X$ , машина переходит в состояние  $q_3$ ; если  $n \notin X$ , машина переходит в состояние  $q_4$ . Это считается единичным шагом, и на ленте на этом шаге никаких операций не производится.

Мы называем такую модифицированную форму машины Тьюринга *машиной с оракулом*. Заметим, что определение машины с оракулом посредством множества четверок не зависит ни от какого конкретного выбора множества  $X$ . Одна и та же машина с оракулом и один и тот же вход могут быть использованы при различных  $X$  и могут порождать соответственно различные вычисления.

Следующая машина с оракулом, например, будет вычислять  $c_X$  относительно любого данного множества  $X$ . (Мы принимаем

<sup>1)</sup> Если множество  $X$  рекурсивно, мы можем сделать общую процедуру рекурсивной добавлением набора инструкций для  $c_X$ .

<sup>2)</sup> Дэвис допускал более одного дополнительного внутреннего символа.

относительно численных значений входов и выходов те же соглашения, что и прежде; см. гл. 1.)

$$\begin{aligned} q_0 & 1 \ B \ q_1 \\ q_1 & B \ R \ q_2 \\ q_2 & 1 \ q_3 \ q_4 \\ q_2 & B \ q_3 \ q_4 \\ q_3 & B \ 1 \ q_7 \\ q_3 & 1 \ B \ q_5 \\ q_5 & B \ R \ q_3 \\ q_4 & 1 \ B \ q_6 \\ q_6 & B \ R \ q_4. \end{aligned}$$

Эта конкретная машина не использует  $S$ . В более общем случае  $S$  используется для того, чтобы машина могла записывать и сохранять результаты предшествующих вычислений в течение всего времени, пока оракул задаются вопросы.

### Машины Тьюринга с вспомогательными лентами

Иная модификация формализации с помощью машины Тьюринга получается добавлением к каждой машине вспомогательной бесконечной ленты (вместо оракула), на которой записаны в возрастающем порядке (в виде последовательностей единиц) элементы множества  $X$ . Используются операции  $L'$  и  $R'$  сдвига вспомогательной ленты влево и вправо; четверки заменяются пятерками вида *состояние, содержимое ячейки, содержимое ячейки на вспомогательной ленте, операция, состояние*. При соответствующем наборе инструкций машина просматривает вспомогательную ленту для получения информации об  $X$ . Ответ на единичный вопрос об  $X$  может потребовать многих шагов. Это и предыдущее уточнение эквивалентны в том смысле, что (при любом  $X$ ) они описывают один и тот же класс функций. Мы не будем вдаваться в дальнейшие детали.

### Расширенная клиниевская формализация

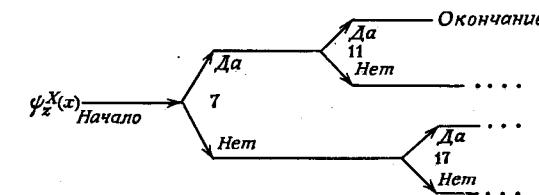
Третья, по-прежнему эквивалентная, формализация может быть получена из клиниевской описания частично рекурсивных функций (§ 1.5) следующим образом. Вводится *относительный функциональный символ*  $c$  (в добавление к обычным главным и вспомогательным функциональным символам). Символ  $c$  можно представлять себе как обозначение характеристической функции множества  $X$ . Равенство вида  $c(\sigma) = \tau$  можно включить в вывод только в том случае, если оно выводимо из предыдущих равенств по обычным правилам или если  $\sigma$  есть нумерал для некоторого натурального числа,

а  $\tau$  есть 1 или 0 в зависимости от того, является ли это число элементом множества  $X$  или нет. Мы не будем более обсуждать здесь эту формализацию.

Эквивалентность этих трех формализаций может быть доказана методами, подобными тем, которые использовались при доказательстве Основного результата § 1.6. Можно представить подробное и убедительное обоснование того, что эти уточнения во всей общности охватывают содержание неформального понятия *алгоритма относительно  $X$* . Может быть проведено рассуждение, совершенно аналогичное рассуждению гл. 1, и очевидным образом сформулирован и принят *относительный тезис Чёрча*.

Наша формализация производится иным образом. Чтобы разъяснить, что послужило причиной такого выбора способа формализации, мы покажем, как к нему приводит формализация с помощью машины с оракулом.

Составим эффективный пересчет всех машин с оракулом. Воспользуемся этим пересчетом, чтобы присвоить каждой машине с оракулом индекс. Пусть  $P'_z$  — машина с оракулом, имеющая индекс  $z$ . Каждой машине с оракулом и каждому выбору множества  $X$  соответствует тогда, обычным образом, функция одной переменной (численные значения входов и выходов определяются, как в гл. 1). Пусть  $\psi_z^X$  — функция, вычисляемая машиной  $P'_z$  относительно множества  $X$ . Если фиксировано  $x$  и задан некоторый вход  $x$ , мы можем эффективно задать (возможно бесконечную) *диаграмму*, которая описывает все возможные вычисления для  $\psi_z^X(x)$  (приарьируем  $X$ ). Это делается следующим образом. Возьмем вход  $x$ . Начнем вычисления, определяемые машиной  $P'_z$ . Вычисления производим до тех пор, пока не будет задан первый вопрос (им может быть, например, „ $7 \in X$ ?“). В этот момент начнем два вычисления; одно, соответствующее утвердительному ответу ( $7 \in X$ ), и другое, соответствующее отрицательному ответу ( $7 \notin X$ ). Каждая из этих ветвей затем подразделяется и т. д., пока задаются вопросы. Разумеется, вопрос, заданный на одной ветви, не обязательно должен быть задан на другой. Если на какой-то ветви задан вопрос, на который был уже получен ответ на той же самой ветви, мы используем прежний ответ и не устраиваем подразделения. Это разветвленное вычисление составляет искомую диаграмму. Может, например, возникнуть такая диаграмма:



Любая ветвь такой диаграммы определяет два множества  $D'$  и  $D''$ , где  $D' = \{w \mid \text{на этой ветви использован утвердительный ответ на вопрос } "w \in X?"\}$  и  $D'' = \{w \mid \text{на этой ветви использован отрицательный ответ на вопрос } "w \in X?"\}$ . (Таким образом, для обрывающейся ветви, изображенной на диаграмме,  $D' = \{7, 11\}$ ,  $D'' = \emptyset$ .) Очевидно,  $D' \cap D'' = \emptyset$ . Для любого множества  $X$ , такого, что  $D' \subset X$  и  $D'' \subset \bar{X}$ , вычисление с помощью машины с оракулом для  $\psi_z^X(x)$  должно совпадать с вычислением вдоль этой ветви. Некоторые ветви этой диаграммы могут обрываться (и, следовательно, выдавать выход), другие — нет. На любой обрывающейся ветви  $D'$  и  $D''$  конечны.

В процессе построения диаграммы может быть эффективно порождено следующее (рекурсивно перечислимое) множество:  $\{\langle y, u, v \rangle \mid \text{существует обрывающаяся ветвь, для которой } D' = D_u, D'' = D_v \text{ и для которой } y \text{ является выходом}\}$ . Р. п. индекс такого множества будет зависеть от входа  $x$  и индекса машины  $z$ . Следовательно (согласно  $s$ - $t$ - $n$ -теореме и теореме о проекции), существует общерекурсивная функция  $h$ , такая, что

$$W_{h(z)} = \{\langle x, y, u, v \rangle \mid \text{существует обрывающаяся ветвь в диаграмме для машины } P'_z \text{ при входе } x, \text{ для которой } D' = D_u, D'' = D_v \text{ и для которой выходом является } y\}.$$

Это наводит на мысль, что мы можем формализовать относительные алгоритмы с помощью соответствующих рекурсивно перечислимых множеств. Мы приводим теперь такую формализацию. Она будет принята за основу при дальнейшем изложении.

**Определение.**  $\langle x, y, u, v \rangle$  совместна, если  $D_u \cap D_v = \emptyset$ ;  $\langle x_1, y_1, u_1, v_1 \rangle$  и  $\langle x_2, y_2, u_2, v_2 \rangle$  согласованы, если

$$D_{u_1} \cap D_{v_2} = D_{u_2} \cap D_{v_1} = \emptyset.$$

**Определение.**  $W_z$  регулярно, если

- (i)  $\langle x, y, u, v \rangle \in W_z \Rightarrow \langle x, y, u, v \rangle$  совместна;
- (ii)  $[\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle \in W_z \& \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle \in W_z \& \langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle \neq \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle] \Rightarrow \langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle$  и  $\langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$  не согласованы.

Очевидно, множество  $W_{h(z)}$ , определенное выше, регулярно. Обратно, Блюм показал, что для всякого регулярного рекурсивно перечислимого множества  $A$  ( $\exists z$ ) [ $A = W_{h(z)}$ ] (см. упр. 9-4 и 9-5).

**Теорема II.** Существует общерекурсивная функция  $\rho$ , такая, что для всех  $z$

- (i)  $W_{\rho(z)}$  регулярно;
- (ii)  $W_z$  регулярно  $\Rightarrow W_{\rho(z)} = W_z$ .

**Доказательство.** Возьмем фиксированную функцию  $f'$ , как в следствии 5-V (c). Следствие 5- $\bar{V}$  (c) дает тогда для каждого  $z$  стандартный пересчет  $W_z$ . Пересчет множества  $W_{\rho(z)}$  получается из пересчета множества  $W_z$  опусканием всякой несовместной четверки  $\langle x, y, u, v \rangle$  и всякой четверки  $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle$ , которая согласована с четверкой  $\langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$ , уже помещенной в  $W_{\rho(z)}$ . (Это доказательство напоминает доказательство теоремы 5-XVI, теоремы об однозначности.) ■

Опишем теперь нашу формализацию. Пусть  $\rho$  — общерекурсивная функция теоремы II.

#### Определение

$$\begin{aligned} \Phi_z^X &= \{\langle x, y \rangle \mid (\exists u, v) [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)} \& D_u \subset X \& D_v \subset \bar{X}]\}. \\ \Phi_z^{(h)X} &= \lambda x_1 \dots x_k [\Phi_z^X(\langle x_1, \dots, x_k \rangle)]. \end{aligned}$$

Регулярность множества  $W_{\rho(z)}$  обеспечивает для всех  $z$  и  $X$  однозначность функции  $\Phi_z^X$ .

Пусть  $A$  фиксировано.

**Определение.** Функция  $\eta$  есть  $A$ -частичнорекурсивная функция, если  $\eta = \Phi_z^A$  для некоторого  $z$ . Функция  $f$  есть  $A$ -общерекурсивная функция, если для некоторого  $z$  имеем  $f = \Phi_z^A$  и  $\Phi_z^A$  всюду определена. (Разумеется, для фиксированного  $z$  и варьируемого  $X$  функция  $\Phi_z^X$  оказывается всюду или не всюду определенной в зависимости от  $X$ .)

Следующая теорема очевидна.

**Теорема III.**  $A$  рекурсивно  $\Rightarrow \Phi_z^A$  есть частичнорекурсивная функция.

**Доказательство.** Рекурсивность множества  $A$  делает все вычисления рекурсивными. ■

Из приводимых выше рассуждений с очевидностью следует, что наша формализация по крайней мере столь же обща, сколь и формализация при помощи машины с оракулом. Например (для частичнорекурсивных функций одной переменной),  $(\forall z)(\forall X)[\Phi_{h(z)}^X = \Psi_z^X]$ , где  $h$  — та же функция, что и выше.

Обратно, для данных  $X$ ,  $z$  и  $x$  мы можем вычислить  $\Phi_z^X(x)$  следующим образом. Пересчитываем  $W_{\rho(z)}$ . Как только какая-нибудь четверка  $\langle x', y', u', v' \rangle$  появляется, смотрим, будет ли  $x' = x$ ,  $D_u \subset X$  и  $D_v \subset \bar{X}$ . Если да, завершаем вычисления и выдаем  $y'$  в качестве выхода. Если мы приняли за основу относительный тезис Чёрча (исходя из машины с оракулом), мы имеем ( $\exists$  общерекурсивная функция  $f$ )  $(\forall z)(\forall X)[\Phi_{f(z)}^X = \Psi_z^X]$  (так как  $\Phi_z^X$ , очевид-

но, интуитивно алгоритмична относительно  $X$  (с набором инструкций, получаемым по  $z$ ))<sup>1)</sup><sup>2)</sup>.

Хотя формализация с помощью машин с оракулом в некотором отношении более согласуется с интуицией, чем наша, наша формализация имеет то преимущество, что она базируется лишь на уже определенных понятиях и может быть использована на неформальном уровне без привлечения нового релятивизированного тезиса Чёрча. Читателю рекомендуется, однако, держать в поле зрения также и интуитивное понятие относительного алгоритма. Последующие доказательства могут быть проведены, исходя из любой формализации, но они наиболее прозрачны, если основываются на этом интуитивном понятии.

Следующие определения и результаты естественны и очевидны.

**Определение.** Множество  $A$  рекурсивно относительно  $B$  (или  $\in B$ ), если функция  $c_A$  является  $B$ -общерекурсивной. Множество  $A$  рекурсивно перечислимо относительно  $B$  (или  $\in B$ ), если или  $A = \emptyset$ , или  $A = \text{Val } f$  для некоторой функции  $f$ , которая  $B$ -общерекурсивна.

**Теорема IV.**  $A$  рекурсивно в  $B \Leftrightarrow$  множества  $A$  и  $\bar{A}$  рекурсивно перечислимы в  $B$ .

Доказательство, как и для теоремы 5-II. ■

Предшествующая терминология может быть обобщена на  $k$ -арные отношения (в соответствии с соглашением § 5.3), если мы поставим в соответствие всякому  $k$ -арному отношению  $R$  множество  $\tau^k(R)$ .

**Определение.** Пусть  $R$  есть  $k_1$ -арное отношение и  $S$  есть  $k_2$ -арное отношение.

$$R \left\{ \begin{array}{l} \text{рекурсивно} \\ \text{рекурсивно перечислимо} \end{array} \right\} \text{в } S, \text{ если} \\ \tau^{k_1}(R) \left\{ \begin{array}{l} \text{рекурсивно} \\ \text{рекурсивно перечислимо} \end{array} \right\} \text{в } \tau^{k_2}(S).$$

$\psi$   $R$ -частичнорекурсивна, если  $\psi$   $\tau^{k_1}(R)$ -частичнорекурсивна.  
 $f$   $R$ -общерекурсивна, если  $f$   $\tau^{k_1}(R)$ -общерекурсивна.

Разумеется, функция сама есть отношение. Следовательно, имеем такую теорему.

**Теорема V.**  $f$   $A$ -общерекурсивна  $\Leftrightarrow f$  рекурсивно в  $A$ .

<sup>1)</sup> Разумеется, при более детальном изложении должна быть приведена явная конструкция функции  $f$ .

<sup>2)</sup> Подобное рассмотрение для функций  $k$  переменных ( $k > 1$ ) может быть получено с использованием метода теоремы 5-VIII.

Доказательство, как и для теоремы 5-IX. ■

Следующая теорема усиливает аналогию с теоремой 5-IX.

**Теорема VI.**  $\psi A$ -частичнорекурсивна  $\Leftrightarrow \psi$  рекурсивно перечислимо в  $A$ .

Доказательство, как и для теоремы 5-IX. ■

**Следствие VI.** Какова бы ни была всюду определенная функция  $f$ ,  $f$  рекурсивно перечислимо в  $A \Leftrightarrow f$  рекурсивно в  $A$ .

Доказательство. Так как  $f$  всюду определена,  $f$  рекурсивно перечислимо в  $A \Leftrightarrow f$   $A$ -частично рекурсивна (согласно теореме VI)  $\Leftrightarrow f$   $A$ -общерекурсивна (по определению)  $\Leftrightarrow f$  рекурсивно в  $A$  (согласно теореме V). ■

В значительной части здесь изложенного множество и его характеристическая функция взаимозаменяемы. Мы имеем, например, следующую теорему.

**Теорема VII.**  $A$  рекурсивно в  $B \Leftrightarrow c_A$  рекурсивно в  $B \Leftrightarrow c_A$  рекурсивно в  $c_B \Leftrightarrow A$  рекурсивно в  $c_B$ .

Доказательство. Первая и третья эквивалентности следуют из определения и теоремы V. Вторая эквивалентность становится очевидной, как только мы замечаем, что любой вопрос вида „ $z \in B$ ?” может быть переформулирован как „ $\langle z, 1 \rangle \in c_B$ ?” и что всякий вопрос вида „ $\langle x, y \rangle \in c_B$ ?” может быть переформулирован как „верно ли, что  $x \in B$  и  $y = 1$  или что  $x \notin B$  и  $y = 0$ ?”. ■

Как мы заметим в § 9.7, понятие „ $\psi$  частичнорекурсивна в  $\varphi$ ” обычно определяется таким образом, что оно (i) эквивалентно понятию „ $\psi$   $\tau(\varphi)$ -частичнорекурсивна” для всюду определенной функции  $\varphi$ , но (ii) более узок, если  $\varphi$  не всюду определена.

#### Рекурсивность относительно более чем одного множества

Могут быть определены процедуры, использующие более одного оракула. Мы скажем, что процедура алгоритмична относительно множеств  $X_1, \dots, X_m$ , если на любом ее этапе допускаются вопросы вида „ $n \in X_i$ ?”<sup>1)</sup>,  $i = 1, \dots, m$ . Мы уточним это в следующем определении.

**Определение.** Функция  $\psi$   $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ -частичнорекурсивна, если  $\psi$   $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_m)$ -частичнорекурсивна, где  $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_m = (\dots((X_1 \oplus X_2) \oplus X_3) \dots X_m)$ .

**Обозначение.** Мы будем, как правило, вместо  $\varphi_z^{X_1 \oplus \dots \oplus X_m}$  писать  $\varphi_z^{X_1, \dots, X_m}$ .

Читатель легко может убедиться в том, что понятия, определенные выше, рекурсивно инвариантны.

### § 9.3. РЕЛЯТИВИЗОВАННАЯ ТЕОРИЯ

В теории рекурсивных функций, развивающейся в предыдущих главах, основными объектами рассмотрения были частично рекурсивные функции. Если выбрать фиксированное множество  $A$  и заменить в этой теории частично рекурсивные функции  $A$ -частично рекурсивными функциями (во всех определениях и теоремах), то получим *релятивизованную теорию*. Все полученные до сих пор результаты остаются при такой *полной релятивизации* справедливыми. Доказательства, привлекающие соображения о длине вычислений, могут быть получены очевидной модификацией соответствующих доказательств нерелятивизованной теории, так как завершающиеся  $A$ -вычисления требуют, чтобы было задано лишь конечное число вопросов об  $A$  (каждый такой вопрос может быть принят за один шаг), или, говоря более строго, так как завершающееся вычисление для  $\varphi_z^A$  соответствует завершающемуся просматриванию множества  $W_{\rho(z)}$  (и шаги могут отмеряться как шаги в пересчете множества  $W_{\rho(z)}$ ). Понятия, получаемые путем такой полной релятивизации, *рекурсивно инвариантны относительно  $A$*  в том смысле, что они *инвариантны относительно группы  $\{f \mid f$  взаимно однозначна, отображает на и  $A$ -общерекурсивна*.

Более интересны и важны понятия и результаты, получаемые в *частично релятивизованной теории*. Во многих случаях данное понятие может быть частично релятивизовано несколькими различными способами. Например, пусть понятие *иммунного* множества (полностью) релятивизовано следующим образом.

**Определение.** Множество  $B$  является  *$A$ -иммунным*, если  $B$  бесконечно и не содержит никакого бесконечного множества, рекурсивно перечислимого в  $A$ .

Напрашиваются три различных способа частичной или полной релятивизации понятия *простоты*. Можно дать такие определения: множество  $B$   *$A$ -просто*, если

(a)  $B$  рекурсивно перечислимо в  $A$  и  $\bar{B}$   *$A$ -иммунно* (полная релятивизация);

(b)  $B$  рекурсивно перечислимо и  $\bar{B}$   *$A$ -иммунно* (частичная релятивизация);

(c)  $B$  рекурсивно перечислимо в  $A$  и  $\bar{B}$  иммунно (частичная релятивизация).

Говоря о релятивизованных понятиях, мы будем иметь в виду, если не оговорено противное, полную релятивизацию.

Как уже было замечено, полностью релятивизованные результаты могут быть перенесены непосредственно. Мы приводим здесь ряд наиболее фундаментальных результатов этого рода.

**Определение.**  $W_z^X = \text{Arg } \varphi_z^X$ .

**Теорема VIII** (релятивизованная основная теорема о рекурсивно перечислимых множествах (теорема 5-V)).  *$A$  рекурсивно перечислимо в  $B \Leftrightarrow (\exists z) [A = W_z^B]$ .*

**Доказательство.** Может быть перенесено непосредственно доказательство теоремы 5-V. ■

**Теорема IX** (релятивизованные теоремы о проекции). *Если  $R$  рекурсивно перечислимо в  $A$ , то существует отношение  $S$ , рекурсивное в  $A$ , такое, что  $R$  есть проекция  $S$ .*

*Если  $R$  рекурсивно перечислимо в  $A$ , то любая проекция отношения  $R$  рекурсивно перечислена в  $A$ .*

**Доказательство.** Доказательства теорем 5-X и 5-XI, опиравшиеся лишь на исходные представления, непосредственно переносятся с заменой всех понятий на понятия, релятивизованные относительно  $A$ . Более строгие доказательства с помощью формализации из § 9.2 можно получить непосредственным применением нерелятивизованных теорем о проекции. ■

**Определение.**  $K^A = \{x \mid \varphi_x^A(x) \text{ сходится}\} = \{x \mid x \in W_x^A\}$ .

**Теорема X.**  *$(\forall A)(\exists B) [B$  рекурсивно перечислимо в  $A$  и  $B$  не рекурсивно в  $A$ ].*

**Доказательство.** Пусть дано множество  $A$ . Возьмем  $B = K^A$ . Множество  $K^A$  рекурсивно перечислимо в  $A$ , согласно теореме IX (см. упр. 9-8). Оно не может быть рекурсивно в  $A$ , так как в этом случае в силу теорем IV и VIII было бы  $\overline{K^A} = W_{x_0}^A$  для некоторого  $x_0$  и мы имели бы  $x_0 \in K^A \Leftrightarrow x_0 \in W_{x_0}^A$  (по определению  $K^A \Leftrightarrow x_0 \in \overline{K^A}$  (согласно выбору  $x_0$ ); противоречие. ■

Частично релятивизованные варианты ранее установленных теорем часто оказываются сильнее полностью релятивизованных вариантов. В частности, имеет место сильная частично релятивизованная форма *s-m-n*-теоремы. Она в свою очередь дает более сильные частично релятивизованные варианты целого ряда других результатов, получаемых с помощью *s-m-n*-теоремы. Так, например, следствием нашей релятивизованной *s-m-n*-теоремы будет то обстоятельство, что в релятивизованных вариантах следствий теоремы 5-V функции  $f, g, f', g', f''$  и  $g''$  могут быть сохранены общерекурсивными.

**Теорема XI** (релятивизованная *s-m-n*-теорема). *Для любых  $m, n \geq 1$  существует общерекурсивная функция  $\hat{s}_n^m$   $m+1$  перемен-*

ных, такая, что для всех  $X$  и всех  $z, x_1, \dots, x_m$

$$\begin{aligned} \lambda x_{m+1} \dots x_{m+n} [\varphi_z^{(m+n)X}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})] = \\ = \varphi_{s_n^m(z, x_1, \dots, x_m)}^{(n)X} \end{aligned}$$

**Доказательство.** Мы построим функцию  $\hat{s}_1^1$ . Доказательство для других значений  $m$  и  $n$  аналогично.

Применив нерелятивизованную  $s$ - $m$ - $n$ -теорему, мы можем получить общерекурсивную функцию  $f$ , такую, что для всех  $x_1$  и  $z$

$$W_{f(z, x_1)} = \{\langle x_2, y, u, v \rangle \mid \langle \langle x_1, x_2 \rangle, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)}\}.$$

Согласно этой конструкции, множество  $W_{f(z, x_1)}$  регулярно при всех  $z$  и  $x_1$ . Отсюда следует, что

$$\langle x_2, y \rangle \in \varphi_f^X(z, x_1) \Leftrightarrow \langle \langle x_1, x_2 \rangle, y \rangle \in \varphi_z^{(2)X}.$$

Тем самым  $f$  есть искомая функция  $\hat{s}_1^1$ .

Более формально, функция  $\hat{s}_1^1$  может быть определена как  $\lambda z x_1 [h_2 s_4^1(h_1 \rho(z), x_1)]$ , где  $h_1$  и  $h_2$  суть общерекурсивные функции, устанавливающие равномерность в следующих случаях (см. теорему 5-VIII и замечание о равномерности, приведенное в конце § 5.5):

$$\varphi_{h_1(z)}^{(5)} = \lambda x_1 \dots x_5 [\varphi_z(\langle x_1, \dots, x_5 \rangle)]$$

и

$$\varphi_{h_2(z)} = \lambda x [\varphi_z^{(4)}(\pi_1^4(x), \dots, \pi_4^4(x))].$$

Далее, заметив, что  $\langle \langle x_1, x_2 \rangle, y, u, v \rangle = \langle x_1, x_2, y, u, v \rangle$  (см. § 5.3), получаем

$\text{Arg } \varphi_{h_1 \rho(z)}^{(5)} = \{\langle x_1, x_2, y, u, v \rangle \mid \langle \langle x_1, x_2 \rangle, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)}\}$ ,  
отсюда

$\text{Arg } \varphi_{s_4^1(h_1 \rho(z), x_1)}^{(4)} = \{\langle x_2, y, u, v \rangle \mid \langle \langle x_1, x_2 \rangle, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)}\}$   
и, следовательно,

$$\begin{aligned} W_{h_2 s_4^1(h_1 \rho(z), x_1)} &= \{\langle x_2, y, u, v \rangle \mid \langle \langle x_1, x_2 \rangle, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)}\} = \\ &= W_{\hat{s}_1^1(z, x_1)} \blacksquare^1 \end{aligned}$$

Для получения примера более сильной частичной релятивизации (ранее приводимого результата), которая может теперь быть установлена, рассмотрим теорему 5-XIII. Она утверждает, что  $(\exists \text{ общерекурсивная функция } h)(\forall x)(\forall y)[W_{h(x, y)} = W_x \cup W_y]$ .

<sup>1)</sup> В действительности функция  $\hat{s}_n^m$  может быть выбрана примитивно-рекурсивной.

Полная релятивизация этого результата такова:

$$(\forall X)(\exists \text{ } X\text{-общерекурсивная функция } h)$$

$$(\forall x)(\forall y)[W_h^X(x, y) = W_x^X \cup W_y^X].$$

Если в релятивизованном доказательстве используется теорема XI, то теорему 5-XIII можно усилить не только до утверждения  $(\forall X)(\exists \text{ общерекурсивная функция } h)(\forall x)(\forall y)[W_h^X(x, y) = W_x^X \cup W_y^X]$ , но и до утверждения

$$(\exists \text{ общерекурсивная функция } h)(\forall X)(\forall x)(\forall y)[W_h^X(x, y) = W_x^X \cup W_y^X].$$

Такая ситуация часто возникает при релятивизации результатов, имеющих место равномерно.

Понятия и результаты, уже релятивизованные относительно множества  $A$ , сами в свою очередь могут быть релятивизованы относительно другого множества  $B$ . При полной релятивизации новые понятия и результаты эквивалентны результатам, полученным обычной однократной релятивизацией относительно  $A \oplus B$ . Если, однако, последовательно выполняются частичные релятивизации, может возникнуть ряд интересных вопросов. Мы рассматриваем такого рода вопросы время от времени в ряде дальнейших разделов.

#### § 9.4. СВОДИМОСТЬ ПО ТЬЮРИНГУ

**Определение.** Множество  $A$  сводимо по Тьюрингу к  $B$  (обозначение:  $A \leqslant_T B$ ), если  $A$  рекурсивно в  $B$ , т. е. если  $c_A$  есть  $B$ -общерекурсивная функция. Мы также будем вместо „сводимость по Тьюрингу“ писать „ $T$ -сводимость“. Утверждения „ $A \leqslant_T B$ “ и „ $A$  рекурсивно в  $B$ “ эквивалентны. Некоторые авторы применяют исключительно термин „ $A$  рекурсивно в  $B$ “.

**Пример.** Из результатов § 9.1 имеем, что  $\tilde{K} \leqslant_T K$ , хотя  $\tilde{K} \not\leqslant_{Tt} K$ .

**Теорема XII.** Отношение  $\leqslant_T$  рефлексивно и транзитивно.

**Доказательство.** Рефлексивность. Очевидно, так как функция  $c_A$  тривиальным образом  $A$ -общерекурсивна (см. упр. 9-5).

Транзитивность. Предположим, что  $A \leqslant_T B$  и  $B \leqslant_T C$ . Тогда  $c_A = \varphi_{z_1}^B$  и  $c_B = \varphi_{z_2}^C$ . Доказательство проводится применением второй теоремы о проекции к множеству, конструируемому из  $W_{\rho(z_1)}$  и  $W_{\rho(z_2)}$  (см. упр. 9-14). Это дает  $z_3$ , такое, что  $c_A = \varphi_{z_3}^C$ .

Интуитивные соображения таковы. Мы можем найти значение функции  $c_A$  для какого-либо данного входа, если мы умеем находить значения функции  $c_B$  для некоторого конечного числа входов. Значение же функции  $c_B$  для какого-либо данного входа мы можем, в свою очередь, вычислить, вычислив значения функции  $c_C$  для некоторого конечного числа входов. Тем самым мы можем вычислить значение функции  $c_A$  для данного входа, если мы умеем вычислить значение функции  $c_C$  для некоторого конечного числа входов. ■

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $A \equiv_T B$ , если  $A \leq_T B$  и  $B \leq_T A$ .

Классы эквивалентности  $\equiv_T$  называются *тьюринговыми степенями* или *T-степенями*.

В литературе обычно в качестве основной сводимости берется сводимость по Тьюрингу (хотя, как правило, в приложениях, когда имеет место сводимость по Тьюрингу, некоторый более сильный вид сводимости также имеет место). Если слово „сводимость“ употреблено без дополнительных пояснений, подразумевается, как правило, *сводимость по Тьюрингу*. Если без дополнительных пояснений употреблен термин „степень неразрешимости“, обычно подразумевается *T-степень*. T-сводимость и tt-сводимость часто группируют вместе как *слабые сводимости* (в противоположность т-сводимости и 1-сводимости, *сильным сводимостям*).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество  $A$  полно по Тьюрингу („T-полно“ или „полно“), если

- (i)  $A$  рекурсивно перечислимо;
- (ii)  $(\forall B)$  [ $B$  рекурсивно перечислимо  $\Rightarrow B \leq_T A$ ].

Множество  $K$  есть T-полное множество.

Следующая теорема содержит некоторые элементарные сведения о T-сводимости.

**ТЕОРЕМА XIII.** (a)  $A \leq_{tt} B \Rightarrow A \leq_T B$ .

(b) Упорядочение по T-сводимости образует верхнюю полурешетку.

(c)  $[B$  рекурсивно &  $A \leq_T B] \Rightarrow A$  рекурсивно.

**Доказательство.** (a) Очевидно.

(b) Степень множества  $A \oplus B$  есть наименьшая верхняя грань степеней множеств  $A$  и  $B$  при упорядочении по T-сводимости.

(c) Согласно теореме III. ■

Из (a) имеем, что отношение  $\leq_T$  рекурсивно инвариантно. Из (c) и теоремы 8-VII (e) следует, что упорядочение по T-сводимости имеет единственную минимальную степень, состоящую из рекурсивных множеств и не содержащую никаких других. Мы скажем, что T-степень *рекурсивно перечислима*, если она содержит рекурсивно перечислимое множество. Из (a) следует, что  $A \equiv_{tt}$

$=_{tt} B \Rightarrow A =_{tt} B$ . Мы можем, следовательно, воспринимать T-степень как составленную из tt-степеней. Согласно примеру из § 9.1, T-степень множества  $K$ , т. е. полная T-степень, состоит из более чем одной tt-степени. В § 9.6 мы увидим, что она содержит более чем одну рекурсивно перечислимую tt-степень. Отношение между T-степенями и tt-степенями рассматривается далее в § 9.6.

## § 9.5. ГИПЕРПРОСТЫЕ МНОЖЕСТВА; ТЕОРЕМА ДЕККЕРА

Существует ли нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество, которое не tt-полно? Более узко, существует ли рекурсивно перечислимое множество, T-полное, но не tt-полное? Пост получил утвердительный ответ на этот вопрос, исследуя *гиперпростые* множества.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $A$  — бесконечное множество. Функция  $f$  мажорирует  $A$ , если  $(\forall n)[f(n) \geq z_n]$ , где  $z_0, z_1, \dots$  — элементы множества  $A$ , расположенные в порядке строгого возрастания. Диагональным методом легко может быть показано, что существуют множества, не мажорируемые никакой общерекурсивной функцией. Пусть  $f_0, f_1, \dots$  — последовательность всюду определенных функций, включающая в себя все общерекурсивные функции. Определим

$$g(0) = f_0(0) + 1,$$

$$g(n+1) = \mu z[z > g(n) \text{ & } z > f_{n+1}(n+1)].$$

Тогда множество значений функции  $g$  не мажорируется никакой общерекурсивной функцией. Мы назовем такие множества *гипериммунными*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $A$  гипериммунно, если  $A$  бесконечно и  $(\forall$  общерекурсивная функция  $f)$  [ $f$  не мажорирует  $A$ ].

**ТЕОРЕМА XIV.**  $A$  гипериммунно  $\Rightarrow A$  иммунно.

**Доказательство.** См. упр. 9-23. ■

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество  $A$  гиперпросто, если  $A$  рекурсивно перечислимо и  $\bar{A}$  гипериммунно.

Множество  $S$  из теоремы 8-II является примером простого, но не гиперпростого множества, поскольку  $\bar{S}$  мажорируется функцией  $\lambda x[2x]$ . Мы покажем ниже, что гиперпростые множества существуют.

Полезное и не вполне очевидное описание гипериммунных множеств дается следующей теоремой (Медведев [1955]). (Пост

принял это описание гиперпростых множеств в качестве определения.)

**Теорема XV** (Кузнецов, Медведев, Успенский).  $A$  гиперим-  
мунно  $\Leftrightarrow A$  бесконечно и  $\neg(\exists \text{ общерекурсивная функция } f)$   
 $[(\forall u)[D_{f(u)} \cap A \neq \emptyset] \& (\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow D_{f(u)} \cap D_{f(v)} = \emptyset]]$ ; т. е.

А бесконечно и не существует никакой эффективно перечислимой (по каноническим индексам) последовательности непересекающихся конечных множеств, каждое из которых пересекалось бы с  $A$ .

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Предположим, что такая общекурсивная функция  $f$  существует. Тогда  $(\forall u)D_{f(u)} \neq \emptyset$ . Определим  $g = \lambda y \{\text{максимальный элемент множества } \bigcup_{i=0}^y D_{f(i)}\}$ . Очевидно,  $g$  общекурсивна и мажорирует  $A$ .

$$h(n+1) = g(h(n)+1).$$

Рассмотрим последовательность конечных множеств

$$D^{(0)} = \{0, 1, \dots, h(0)\},$$

$$D^{(1)} = \{h(0) + 1, \dots, h(1)\},$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$D^{(n+1)} = \{h(n) + 1, \dots, h(n+1)\},$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

Эта последовательность, очевидно, рекурсивно перечислена по каноническим индексам. Далее, для всякого  $n$  множество  $D^{(n+1)}$  имеет  $h(n+1) = g(h(n)+1)$  в качестве своего наибольшего элемента. Следовательно, в предположении, что  $g$  обладает мажорирующим свойством, по меньшей мере  $h(n)+2$  элементов из  $A$  не превосходят  $h(n+1)$ . Но  $D^{(n+1)}$  содержит все, за исключением  $(h(n)+1)$ -го, натуральные числа, не превосходящие  $h(n+1)$ . Отсюда  $D^{(n+1)} \cap A \neq \emptyset$ .

Первое доказательство существования гиперпростых множеств было получено Постом. Впоследствии более общая и изящная теорема существования была найдена Деккером [1954], показавшим, что всякая нерекурсивная рекурсивно перечислимая Т-степень содержит гиперпростое множество.

**Теорема XVI** (Деккер). [ $A$  не рекурсивно &  $A$  рекурсивно перечислимом]  $\Rightarrow$  ( $\exists B$ ) [ $B \equiv_{\text{tp}} A$  &  $B$  гиперпросто].

**Доказательство.** Пусть  $A$  — данное рекурсивно перечислимое, но не рекурсивное множество. Тогда  $A = \text{Val } f$  для некоторой взаимно однозначной общерекурсивной функции  $f$ . Назовем  $x$  минимальным относительно функции  $f$ , если  $(\forall y) [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]$ .

Пусть

$$B = \{x \mid x \text{ не является минимальным относительно } f\} = \\ = \{x \mid (\exists y) [x < y \text{ & } f(y) \leq f(x)]\}.$$

Мы покажем, что множество  $B$  гиперпросто и что  $B \equiv_{\text{TA}} A$ .

(i)  $B$  рекурсивно перечислимо. Это немедленно следует из второй теоремы о проекции.

(ii)  $\bar{B}$  гипериммунно. Если это не так, пусть  $g$  мажорирует  $\bar{B}$ . Тогда  $x \in A \Leftrightarrow x \in \{f(0), f(1), \dots, f(g(x))\}$ . Это дает эффективный способ проверки принадлежности числа множеству  $A$ , и  $A$  рекурсивно в противоречие с предположением.

(iii)  $B \leqslant_{tt} A$ . Действительно,  $x \in B \Leftrightarrow f(y) < f(x)$  для некоторого  $y > x \Leftrightarrow C \cap A \neq \emptyset$ , где  $C = \{0, 1, \dots, f(x)\} = \{f(0), f(1), \dots, f(x)\}$ , это последнее может быть выражено в виде tt-условия.

(iv)  $A \leqslant_{\text{т}} B$ . В самом деле, мы можем проверить, будет ли  $z \in A$ , следующим образом. Проверяем, принадлежат ли множеству  $B$  числа  $0, 1, 2, \dots$  до тех пор, пока не будет получено  $z + 1$  элементов множества  $\bar{B}$ . Пусть наибольшим из них будет  $n_z$ . Посмотрим, встречается ли  $z$  в  $\{f(0), f(1), \dots, f(n_z)\}$ . Если да, то  $z \in A$ ; если нет, то  $z \notin A$ . Такой способ распознавания принадлежности множеству  $B$  верен, поскольку  $n_z$  минимален относительно  $f$  и  $z \leqslant f(n_z)$ .

**Следствие XVI.** (а) Всякая нерекурсивная рекурсивно перечислимая Т-степень содержит простое множество.

(b) Для всякого нерекурсивного рекурсивно перечислимого множества  $A$  существует гиперпростое множество  $B$ , такое, что  $B \leq_{tt} A$ .

Доказательство очевидно.

Максимальные множества были определены в упр. 8-40. Их существование будет доказано в гл. 12. В упр. 9-26 мы покажем, что всякое максимальное множество гиперпросто. Класс  $\mathcal{C}_1$  простых множеств (см. рассуждение из § 8.7) может быть разбит на следующие подклассы:

$$\begin{aligned}C_{11} &= \{A \mid A \text{ максимально}\}; \\C_{12} &= \{A \mid A \text{ гиперпросто} \& A \notin C_{11}\}; \\C_{13} &= \{A \mid A \text{ просто} \& A \notin C_{11} \cup C_{12}\}.\end{aligned}$$

Множества из этих классов имеют дополнения, которые все менее „редки”. Класс  $\mathcal{C}_{13}$  не пуст, он содержит множество  $S$  из теоремы 8-II (см. выше замечание, следующее непосредственно за определением гиперпростого множества). В упр. 9-36 мы покажем, что  $\mathcal{C}_{12}$  не пуст. В гл. 12 мы рассмотрим дальнейшие разбиения этих классов.

## § 9.6. СВОДИМОСТЬ ПО ТЬЮРИНГУ И ТАБЛИЧНАЯ СВОДИМОСТЬ; ПРОБЛЕМА ПОСТА

Для того чтобы показать, что для Т-сводимости не существует никакого аналога теорем 7-VIII и 8-IX, может быть использовано рассуждение § 9.1.

**Теорема XVII.** *Среди элементов Т-степени множества  $K$  не содержится никакого множества, максимального относительно tt-сводимости.*

**Доказательство.** Определим для любого  $A$  множество  $\tilde{A} = \{x \mid \varphi_x(x) \in A^{\text{tt}}\}$ . Тогда для любого  $A$ , такого, что  $K \leq_{\text{tt}} A$ , выполняется  $A \leq_{\text{tt}} \tilde{A}$ ,  $\tilde{A} \not\leq_{\text{tt}} A$  и  $\tilde{A} \leq_{\text{tt}} A$ . Мы докажем это следующим образом.

(i)  $A \leq_{\text{tt}} \tilde{A}$ . Для всякого  $x$  пусть  $\psi$  есть постоянная функция, значением которой является tt-условие  $\langle\langle x \rangle, \alpha\rangle$ , где  $\alpha$  — унарная тождественная булева функция. Так как набор инструкций для  $\psi$  может быть найден равномерно по  $x$ , мы имеем общерекурсивную функцию  $f$ , такую, что  $\psi = \varphi_{f(x)}$ . Функция  $f$ , очевидно, взаимно однозначна и  $x \in A \Leftrightarrow \varphi_{f(x)}(f(x))$  выполняется на  $A \Leftrightarrow f(x) \in \tilde{A}$ .

(ii)  $\tilde{A} \not\leq_{\text{tt}} A$ . Если  $\tilde{A} \leq_{\text{tt}} A$ , то  $\tilde{A} \leq_{\text{tt}} A$  посредством  $\varphi_{x_0}$  при некотором  $x_0$ . Отсюда  $x_0 \in \tilde{A} \Leftrightarrow \varphi_{x_0}(x_0)$  выполняется на  $A \Leftrightarrow x_0 \in A$ . Получаем противоречие.

(iii)  $\tilde{A} \leq_{\text{tt}} A$ . Чтобы выяснить, будет ли  $z \in \tilde{A}$ , воспользуемся сначала Т-сводимостью множества  $K$  к  $A$ , чтобы установить, будет ли  $z \in K$ . Если  $z \notin K$ , то  $z \notin \tilde{A}$ . Если  $z \in K$ , вычислим  $\varphi_z(z)$  и посмотрим, выполняется ли  $\varphi_z(z)$  на  $A$ . Если да,  $z \in \tilde{A}$ ; если нет,  $z \notin \tilde{A}$ .

Как результат пунктов (i), (ii) и (iii) имеем, что в Т-степени множества  $K$  не может быть множества, максимального относительно tt-сводимости. ■

(Теорема XVII может быть так же получена, как следствие упр. 9-18 (а) и 9-20.) (Джокуш [1966] показал, что всякая нереекурсивно перечислимая Т-степень содержит бесконечно много рекурсивно перечислимых tt-степеней.)

**Следствие XVII.** (а) *Никакая Т-степень, большая Т-степени множества  $K$  (при упорядочении по Т-сводимости), не может иметь максимальной tt-степени.*

(б) *Всякая Т-степень, большая Т-степени множества  $K$ , содержит бесконечную последовательность tt-степеней, линейно упорядоченных относительно  $\leq_{\text{tt}}$  по типу натуральных чисел  $(0, 1, 2, \dots)$ .*

**Доказательство** очевидно. ■

Всякая ли рекурсивно перечислимая Т-степень содержит рекурсивно перечислимую tt-степень, максимальную относительно  $\leq_{\text{tt}}$  среди рекурсивно перечислимых tt-степеней, содержащихся в этой Т-степени? Этот вопрос не решен. В Т-степени множества  $K$  tt-степень множества  $K$  максимальна<sup>1)</sup>.

Совпадают ли Т-полные множества с tt-полными множествами? Пост воспользовался следующей теоремой для получения отрицательного ответа на этот вопрос.

**Теорема XVIII (Пост).**  *$A$  tt-полно  $\Rightarrow A$  не гиперпросто.*

**Доказательство.** Доказательство по существу аналогично доказательству теоремы 8-XII, устанавливающей, что никакое btt-полное множество не просто.

Предположим, что  $A$  является tt-полным множеством. Тогда  $K \leq_{\text{tt}} A$ . Мы докажем лемму, подобную лемме, использованной при доказательстве теоремы 8-XII.

**Лемма.** *Пусть  $K \leq_{\text{tt}} A$ . Тогда существует бесконечное рекурсивно перечислимое множество tt-условий  $t_0, t_1, \dots$  с ассоциированными множествами  $T_0, T_1, \dots$  соответственно, такими, что*

- (i) *для всех  $i$  условие  $t_i$  выполняется на  $A$ ;*
- (ii) *для всех  $i$  имеем  $T_i \cap \bar{A} \neq \emptyset$ ;*
- (iii) *для всякого конечного множества  $D$  множество  $\{i \mid T_i \cap \bar{A} \subset D\}$  имеет не более чем  $2^{2^{d+1}}$  элементов, где  $d$  — мощность  $D$ .*

**Доказательство леммы.** В точности, как в теореме 8-XII, задается последовательность  $t_0, t_1, \dots$  и устанавливаются свойства (i) и (ii). Свойство (iii) докажем следующим образом.

**Определение.** Пусть  $t = \langle\langle x_1, \dots, x_k \rangle, \alpha\rangle$ . Пусть  $T$  — ассоциированное множество условия  $t$ , т. е.  $T = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Предположим, что  $n$  элементов из  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  лежат в  $T \cap \bar{A}$ ,  $n > 0$ . Определим  $\alpha' = \lambda w_1 w_2 \dots w_n [\alpha(a_1, a_2, \dots, a_k)]$ , где  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$  получается из  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  подстановкой 1 вместо каж-

<sup>1)</sup> Среди рекурсивно перечислимых tt-степеней. — Прим. перев.

дого  $x_i$ , принадлежащего  $A$ , и подстановкой  $w_1, w_2, \dots, w_n$  вместо остальных  $x_i$ . Функция  $\alpha'$  называется *производной истинностной таблицей* для  $t$ . Например, если

$$t = \langle\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle, \alpha \rangle,$$

и  $x_1, x_3 \in A$ ,  $x_2, x_4 \in \bar{A}$ , то  $\alpha' = \lambda w_1 w_2 [\alpha(1, w_1, 1, w_2)]$  есть производная истинностная таблица для  $t$ .

Пусть  $C$  — множество из доказательства теоремы 8-XII. Образуем  $t'_0, t'_1, \dots$  из  $t_0, t_1, \dots$ , как в доказательстве теоремы 8-XII. Пусть  $t_i$  и  $t_j$  таковы, что  $T_i \cap \bar{A} = T_j \cap \bar{A}$ . Если  $t'_i$  и  $t'_j$  имеют одни и те же производные истинностные таблицы, то  $t'_i$  должно быть *выводимо* (в смысле теоремы 8-XII) из  $t'_i$  и  $C$ ,  $t'_i$  должно быть *выводимо из*  $t'_j$  и  $C$ . Отсюда по построению  $t'_0, t'_1, \dots$ , если  $T_i \cap \bar{A} = T_j \cap \bar{A}$ , то  $t'_i$  и  $t'_j$  должны иметь различные производные истинностные таблицы (см. упр. 9-43).

Возьмем теперь конечное множество  $D$  мощности  $d$ . Оно имеет  $2^d$  подмножеств. А *fortiori*, самое большое  $2^d$  подмножеств множества  $D$  может содержаться в  $\bar{A}$ . Каждое из этих подмножеств имеет мощность  $\leq d$ . Следовательно, каждое подмножество имеет самое большое  $2^{2^d}$  соответствующих ему различных производных истинностных таблиц<sup>1)</sup>.  $2^{2^d} \cdot 2^d = 2^{2^d+d} < 2^{2^{d+1}}$ . Отсюда, если бы существовало более чем  $2^{2^{d+1}}$  элементов из  $\{t'_i \mid T_i \cap \bar{A} \subset D\}$ , то по меньшей мере два элемента давали бы общее пересечение с  $\bar{A}$  и имели бы одни и те же производные истинностные таблицы; пришли к противоречию. Тем самым лемма доказана.

Для доказательства теоремы покажем, что  $\bar{A}$  не гипериммунно. Определим общерекурсивную функцию  $f$  следующим образом:

$$f(0) = \text{[максимальный элемент множества } T_0];$$

$$f(n+1) = \text{[максимальный элемент множества } \bigcup_{i=0}^{2^{2^{f(n)+2}}} T_i].$$

Согласно пункту (iii) леммы, самое большое для  $2^{2^{f(n)+2}}$  множеств  $T_i$  может быть

$$T_i \cap \bar{A} \subset \{0, 1, 2, \dots, f(n)\}.$$

Таким образом, для каждого  $n$  имеем  $\{f(n) + 1, \dots, f(n+1)\} \cap \bar{A} \neq \emptyset$ . Следовательно,  $\{0, \dots, f(0)\}, \{f(0) + 1, \dots, f(1)\}, \{f(1) + 1, \dots\}, \dots$  есть последовательность непересекающихся

1) Производная истинностная таблица  $\alpha'$  соответствует конечному множеству  $D'$ , если для некоторого  $i$  имеем  $T_i \cap \bar{A} = D'$  и  $\alpha'$  есть производная таблица для  $t'_i$ .

конечных множеств, каждое из которых пересекается с  $\bar{A}$ . Согласно теореме XV,  $\bar{A}$  не гипериммунно. (В самом деле,  $A$  мажорируется функцией  $f$ ). ■

**Следствие XVIII.** Существует множество, которое Т-полно, но не tt-полно; отсюда  $\leq_t$  и  $\leq_{tt}$  различны на рекурсивно перечислимых множествах, и  $\equiv_t$  и  $\equiv_{tt}$  различны на рекурсивно перечислимых множествах.

**Доказательство.** Пусть  $\hat{K}$  — гиперпростое множество, такое, что  $K \equiv_t \hat{K}$ ; существование такого множества вытекает из теоремы Деккера. Тогда в силу только что установленной теоремы  $K \not\leq_t \hat{K}$ . ■

Природа соотношения между  $\leq_t$  и  $\leq_{tt}$  в каком-то смысле более глубоко выявляется следующей теоремой Нероуда [1957]. Напомним, что по определению

$$A \leq_t B \Leftrightarrow (\exists z) [c_A = \varphi_z^B].$$

**Теорема XIX** (Нероуд).

$A \leq_{tt} B \Leftrightarrow (\exists z) [c_A = \varphi_z^B \ \& \ (\forall X) [\varphi_z^X \text{ есть характеристическая функция}]] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\exists z) [c_A = \varphi_z^B \ \& \ (\forall X) [\varphi_z^X \text{ всюду определена}]].$$

**Доказательство.** Пусть 1\*, 2\* и 3\* — три утверждения, эквивалентность которых надлежит установить, в том порядке, в котором они приведены в формулировке теоремы.

(i)  $2^* \Rightarrow 3^*$  очевидно.

(ii)  $1^* \Rightarrow 2^*$ . Пусть  $A \leq_{tt} B$  посредством функции  $f$ . Возьмем  $z_0$ , такое, что для любого  $x$

$$\varphi_{z_0}^X(x) = \begin{cases} 1 & \text{если tt-условие } f(x) \text{ выполняется} \\ 0 & \text{если tt-условие } f(x) \text{ не выполняется} \end{cases} \text{ на } X.$$

Очевидно,  $\varphi_{z_0}^X$  есть характеристическая функция множества  $X$  и  $c_A = \varphi_{z_0}^B$ .

(iii)  $3^* \Rightarrow 1^*$ . Пусть дано  $z_1$ , такое, что  $\varphi_{z_1}^X$  всюду определена при любом  $X$ , и  $c_A = \varphi_{z_1}^B$ . Мы хотим установить, что  $A \leq_{tt} B$ , следовательно, нам надлежит указать общерекурсивную функцию  $f$ , такую, что  $x \in A \Leftrightarrow f(x)$  есть tt-условие, выполняющееся на  $B$ . Пусть дано  $x$ . Будем вычислять  $f(x)$ , согласно следующим инструкциям. Возьмите  $\varphi_{z_1}(x)$  и начинайте строить диаграмму вычислений, описанную и проиллюстрированную в § 9.2. По предположению каждая ветвь должна оборваться. Согласно основной теореме компактности для деревьев (формулируемой, доказываемой и обсуждаемой в упр. 9-40), диаграмма должна быть конечной.

В этой диаграмме каждое разветвление помечается числом, информация о котором должна быть затребована на этом разветвлении. Пусть  $D$  — множество всех таких чисел (встречающихся на разветвлениях нашей конечной диаграммы). Пусть  $x_1, \dots, x_n$  суть элементы множества  $D$ , расположенные в порядке возрастания. Тогда  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  будет  $n$ -кой нашего искомого tt-условия  $f(x)$ . Булева функция  $\alpha$  задается следующим образом. Для каждого  $\langle w_1, \dots, w_n \rangle \in I^n$  пусть  $Y = \{x_i \mid w_i = 1\}$ . Вычисляйте  $\varphi_{z_1}^Y(x)$ . Если это значение есть 0, положим  $\alpha(w_1, \dots, w_n) = 0$ ; если выход отличается от 0, положим  $\alpha(w_1, \dots, w_n) = 1$ . Тогда

$$x \notin A \Rightarrow [\varphi_{z_1}^B(x) = 0 \& \alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_n)) = 0]$$

и

$$x \in A \Rightarrow [\varphi_{z_1}^B(x) = 1 \& \alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_n)) = 1].$$

Таким образом,  $A \leqslant_{tt} B$  посредством функции  $f$ . ■

Эта теорема наводит на мысль о том, что сводимости могут рассматриваться как „эффективные“ отображения из  $2^N$  (семейства всех множеств) в  $2^N$ . Мы еще вернемся к этому в § 9.7, 9.8 и 13.7.

### Проблема Поста

Остался открытym следующий важный вопрос, касающийся упорядочения по сводимости рекурсивно перечислимых множеств. Существует ли множество, которое не рекурсивно и не Т-полно? Эквивалентно: существуют ли более чем две рекурсивно перечислимые Т-степени? Эквивалентно: всякие ли два нерекурсивных рекурсивно перечислимых множества должны быть одной и той же Т-степени? Этот вопрос, поставленный Постом [1944] и известный как *проблема Поста*, оставался открытым до 1956 года, когда Мучник и Фридберг независимо и почти одновременно пришли к его решению. Мы приведем решение в следующей главе.

Проблема Поста знаменательна в двух отношениях: (1) она касается многообразия структур, возможного среди нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств; (2) она, следовательно, касается многообразия, возможного среди аксиоматизируемых теорий и среди другого рода рекурсивно перечислимых проблем. Все известные (до 1956 года) теории были  $\equiv_T K$  (действительности даже  $\equiv_K$ ). Если бы все теории были  $\equiv_T K$ , то сводимость к  $K$  (по крайней мере, Т-сводимость к  $K$ ) была бы общим методом доказательства неразрешимости аксиоматизируемых теорий.

Пост сам потратил значительные усилия на решение этой проблемы. Как простые множества не могут быть т-полными, а гиперпростые множества tt-полными, так должен был бы сущес-

тствовать, по мнению Поста, специальный вид гиперпростых множеств, которые не могли бы быть Т-полными. Пост предложил понятие *гипергиперпростого* множества в качестве возможного кандидата такого рода.

**Определение.** Множество  $A$  гипергипериммунно, если  $A$  бесконечно и  $\neg(\exists$  общерекурсивная функция  $f$ )  $[(\forall u)[W_{f(u)} \text{ конечн} \& \& W_{f(u)} \cap A \neq \emptyset] \& (\forall v)[u \neq v \Rightarrow W_{f(u)} \cap W_{f(v)} = \emptyset]]$ .

(Это аналогично описанию гипериммунных множеств в теореме XV, с р. п. индексами, фигурирующими вместо канонических индексов.)

**Определение.** Множество  $A$  гипергиперпросто, если  $A$  рекурсивно перечислимо и  $\bar{A}$  гипергипериммунно (см. в упр. 9-48 (b) более простое определение гипергиперпростого множества, принадлежащее Ейтсу).

Пост не доказал ни существования гипергипериммунных множеств, ни существования гиперпростых множеств, которые бы не были гипергиперпросты. Ему не удалось показать, что гипергиперпростое множество не может быть Т-полным (мы теперь знаем, что это и не так, см. ниже). Мы исследуем некоторые особенности гипергиперпростых и гипергипериммунных множеств в упражнениях с 9-46 по 9-48. Далее в гл. 12 эти множества также будут обсуждаться нами. Существование гипергиперпростых множеств является следствием теоремы Фридберга, приводимой в гл. 12 (см. упр. 9-47). Существование гиперпростых множеств, которые не гипергиперпросты, будет установлено в упр. 10-17. Описание гипергиперпростых множеств в терминах ретрассирируемых множеств (см. упр. 9-44) дано в упр. 10-19. Ейтс построил гипергиперпростое множество, которое Т- полно.

### § 9.7. СВОДИМОСТЬ ПО ПЕРЕЧИСЛИМОСТИ

Введем теперь в рассмотрение техническое понятие, которое тесно связано как с различными видами сводимости, изучавшимися выше, так и с другими разделами теории рекурсивных функций. Мы будем называть его при этом изложении „сводимостью“, хотя оно, в некотором отношении, более емко, нежели наше основное интуитивное понятие сводимости. Исследование его не будет проводиться в соответствии с нашим исследованием других видов сводимости. Называя его сводимостью, мы подчеркиваем естественность того, что иногда затемняется при рассмотрении этого понятия и понятий, с ним связанных.

Пусть даны множества  $A$  и  $B$ . Рассмотрим процедуру, которая задается конечным набором инструкций следующим образом. Начинается вычисление. Вычисление выполняется алгоритмиче-

ски, за тем лишь исключением, что время от времени требуется, чтобы вычислитель получал „входное” число и, время от времени, процедура выдает „выходное” число. Если затребован вход, может быть подано любое натуральное число, может произойти и такое, что никакого числа подано не будет. Предположим, что если в качестве входов подаются элементы  $B$  в *каком бы то ни было порядке*, то процедура всегда выдает в конечном итоге в качестве выходов множество  $A$  в *некотором порядке*. Порядок, в котором появляются элементы множества  $A$ , может меняться при изменении порядка входных значений. (Мы допускаем перестановки в пересчете множества  $B$  и в пересчете множества  $A$ .) Если такая процедура существует, мы скажем, что  $A$  *сводимо по перечислимости* к  $B$ . Сформулируем это кратко, сказав, что  $A$  *сводимо по перечислимости* к  $B$ , если существует эффективная процедура для получения пересчета множества  $A$  из любого пересчета множества  $B$ .

**Пример 1.** Рассмотрим процедуру, которая запрашивает вход и удвоенное входное значение выдает в качестве выхода; запрашивает другой вход и т. д. Этой процедурой  $\{2, 4\}$  сводимо по перечислимости к  $\{1, 2\}$  и  $E$ , множество четных чисел, сводимо по перечислимости к  $N$ .

**Пример 2.** Рассмотрим процедуру, которая не запрашивает никакого входного значения и перечисляет множество  $K$  в качестве выходных значений. Этой процедурой  $K$  сводимо по перечислимости к любому множеству.

Как может быть уточнено понятие сводимости по перечислимости? Один из способов описания этого понятия состоит в том, чтобы определить подходящую модификацию машины Тьюринга. Например, мы могли бы взять машину, которая пишет „ $S$ ” наряду с „ $1$ ” и которая имеет две дополнительные операции  $I$  и  $O$  (для „входа” и „выхода”). Если встретилась операция  $I$ , то за один шаг внешнее устройство печатает или не печатает входное значение как цепочку единиц на отрезке ленты, который лежит справа от всех непустых ячеек и обозреваемой машиной ячейки. Если встретилась операция  $O$ , то за один шаг внешнее устройство записывает на отдельном листе выходов общее число единиц, находящихся на ленте. Конечно, заранее не ясно для данных машины и множества входов, будет ли множество выходов меняться при изменении порядка входных значений<sup>1)</sup>. Более того, не ясно без более детального исследования, что это описание с помощью машины Тьюринга достаточно общо, чтобы охватить все

1) Как мы увидим из нашего окончательного определения, этой трудности можно избежать введением дальнейших, довольно сложных (но равномерных) ограничений на машины.

случаи сводимости по перечислимости, которые интуитивно допустимы.

Мы избежим этих трудностей, определив сводимость по перечислимости с помощью понятия частично рекурсивной функции. Наш подход к сводимости по перечислимости подобен в этом отношении напомню подходу к Т-сводимости.

Чтобы мотивировать наше определение, мы покажем, как к нему приводит интуитивное понятие. Пусть дана процедура, которая интуитивно *сводит по перечислимости*  $A$  к  $B$ . Рассмотрим все конечные последовательности различных натуральных чисел. Будем говорить, что число  $x$  *вызывается* последовательностью  $\langle y_1, \dots, y_k \rangle$ , если эта процедура пишет  $x$  в качестве выходного значения, после того как в качестве входных значений поданы по порядку  $y_1, \dots, y_k$ , но прежде, чем затребовано какое-нибудь еще входное значение<sup>1)</sup>. Проверяя по очереди все конечные последовательности, мы можем рекурсивно перечислить множество  $\{\langle x, u \rangle \mid D_u \text{ состоит из элементов конечной последовательности различных чисел, которая вызывает } x\}$ . Пусть это множество есть  $W_z$ . Легко проверить, с учетом нашего предположения о том, что множество  $A$  перечисляется вне зависимости от порядка, в котором появляется  $B$ , что

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists u) [\langle x, u \rangle \in W_z \text{ & } D_u \subset B].$$

Это приводит к нашему определению.

**Определение.** Множество  $A$  *сводимо по перечислимости* к  $B$  (обозначение:  $A \leq_e B$ ), если

$$(\exists z) (\forall x) [x \in A \Leftrightarrow (\exists u) [\langle x, u \rangle \in W_z \text{ & } D_u \subset B]].$$

Множество  $A$  *сводимо по перечислимости* к  $B$  *посредством*  $z$ , если

$$(\forall x) [x \in A \Leftrightarrow (\exists u) [\langle x, u \rangle \in W_z \text{ & } D_u \subset B]].$$

Обратно, заметим, что любое  $z$  задает процедуру интуитивного характера, описанного ранее. Эта процедура состоит в следующем. Одновременно начинаем перечислять  $W_z$  и требовать входы. Как только обнаружится, что в  $W_z$  уже появилось  $\langle x, u \rangle$ , для которого  $D_u$  содержится в множестве уже полученных входных значений и для которого  $x$  еще не было выдано как выходное значение, добавляем  $x$  к выходному списку. Для любого данного множества входов эта процедура порождает одно и то же множество выходов независимо от порядка, в котором предстает множество входов. Таким образом, любое  $z$  и любое  $B$  определяют един-

1) Могло бы случиться, что после  $y_1, \dots, y_{k-1}$ , поданных в качестве входов, никакое другое входное значение затребовано не было. В этом случае *никакое* число не вызывается последовательностью  $y_1, \dots, y_k$ .

ственное множество  $A$ , такое, что  $A \leq_e B$  посредством  $z$ , именно  $\{x \mid (\exists u) [\langle x, u \rangle \in W_z \& D_u \subset B]\}$ . Следовательно, каждое  $z$  задает всюду определенное отображение из  $2^N$  в  $2^N$ . Мы назовем такие отображения *операторами перечисления*<sup>1)</sup> и обозначим оператор, соответствующий  $z$ , через  $\Phi_z$ .

Определение.  $\Phi_z(X) = Y$ , если  $Y \leq_e X$  посредством  $z$ .

Операторы перечисления являются аналогом, на уровне множеств, общерекурсивных функций. Они более просты, нежели общерекурсивные функции в том отношении, что для них имеет место теорема о нумерации, т. е. тем, что они обладают (определенной на  $N$ ) гёделевой нумерацией.

Теорема XX. Если  $\Phi$  и  $\Psi$  суть операторы перечисления, то композиция  $\Phi\Psi$  есть оператор перечисления.

1) Для рассматриваемого частного случая отображений  $2^N$  в  $2^N$  понятие оператора перечисления совпадает по объему с понятием (одноместной) вычислимой операции (Успенский [1955]). Применительно к этому случаю общее определение вычислимой операции конкретизируется следующим образом. Пусть  $N^*$  — множество всех конечных подмножеств натурального ряда  $N$ . Графиком отображения  $\psi$  множества  $N^*$  в  $2^N$  называется множество всех таких пар  $\langle D, x \rangle$ , что  $D \in N^*$ ,  $x \in N$ ,  $x \in \psi(D)$ ; отображение  $\psi$  называется вычислимым, коль скоро его график рекурсивно перечислим (рекурсивная перечислимость графика естественно определяется — например, при помощи перехода к каноническим индексам конечных множеств). Отображение множества  $2^N$  в  $2^N$  называется вычислимой операцией, если во-первых, оно непрерывно относительно топологии, указанной в упражнении 11-35 (а), и, во-вторых, его ограничение на  $N^*$  вычислимо.

В общем случае понятие  $l$ -местной вычислимой операции строится следующим образом, с учетом того, что для любого множества  $X$  в  $2^X$  можно ввести топологию способом, указанным в упражнении 11-35 (а). Рассматривается введенное Гильбертом [1904] множество всех комбинаций символа  $I$  с самим собой, всеми комбинациями этих комбинаций и т. д. Это множество обозначается через  $\mathfrak{H}$ ; таким образом,  $\mathfrak{H}$  состоит из всевозможных выражений вида I, II, III, IIII, (I)(II), (II)(II)(II), ((I)(II))(II), (((III)(I))I) и т. п. Натуральный ряд  $N$  и его декартовы степени вкладываются в  $\mathfrak{H}$  в качестве подмножеств. Обозначим через  $M^*$  множество всех конечных подмножеств множества  $M$ . Естественным образом определяется понятие рекурсивно перечислимого подмножества множества  $\mathfrak{H}$ , а также понятие рекурсивно перечислимого подмножества декартова произведения  $\underbrace{\mathfrak{H}^* \times \dots \times \mathfrak{H}^*}_{l \text{ раз}} \times \mathfrak{H}$ . Пусть  $M_1, \dots$

$\dots, M_l$  — произвольные рекурсивно перечислимые подмножества множества  $\mathfrak{H}$ . Отображение  $\phi$  произведения  $M_1^* \times \dots \times M_l^*$  в  $2^\mathfrak{H}$  называется вычислимым, если рекурсивно перечислим его график, т. е. множество всех таких наборов  $\langle D_1, \dots, D_l, x \rangle$ , что  $x \in \psi(D_1, \dots, D_l)$ . Отображение топологического произведения  $2^{M_1} \times \dots \times 2^{M_l}$  в  $2^\mathfrak{H}$  называется  $l$ -местной вычислимой операцией, если оно непрерывно и его ограничение на  $M_1^* \times \dots \times M_l^*$  вычислимо. Описанный в начале настоящего примечания частный случай получается из общего, если  $l = 1$ ,  $M_1 = N$  и отображение таково, что все его образы принадлежат  $2^N$ . — Прим. ред.

Доказательство. Немедленно следует из тезиса Чёрча. Более строгое доказательство использует вторую теорему о проекции. Мы опускаем детали. ■

В следующей теореме приведены некоторые основные структурные свойства операторов перечисления.

Теорема XXI. Пусть  $\Psi$  есть оператор перечисления.

- (а)  $A \subset B \Rightarrow \Psi(A) \subset \Psi(B)$  („ $\Psi$  монотонен”).
- (б)  $x \in \Psi(A) \Rightarrow (\exists D) [D \text{ конечно} \& D \subset A \& x \in \Psi(D)]$  („ $\Psi$  непрерывен”) (см. упр. 11-35).

Доказательство. Непосредственно вытекает из определения сводимости по перечислимости. ■

Применение операторов перечисления к однозначным множествам (и, следовательно, в силу соглашения § 5.3 к функциям) ставит ряд интересных вопросов, которые будут рассмотрены в § 9.8.

Определение.  $A \equiv_e B$ , если  $A \leq_e B$  и  $B \leq_e A$ .

Обозначение. Пусть  $\psi$  и  $\varphi$  суть функции. Мы употребляем для  $\tau(\psi) \leq_e \tau(\varphi)$  сокращение  $\psi \leq_e \varphi$  и для  $\tau(\psi) \equiv_e \tau(\varphi)$  сокращение  $\psi \equiv_e \varphi$ .

В литературе понятие „ $\psi$  частично рекурсивна в  $\varphi$ ” обычно определяется как совпадающее с  $\psi \leq_e \varphi$ . Степени при упорядочении по  $e$ -сводимости, т. е. классы эквивалентности  $\equiv_e$ , иногда называют *функциональными степенями*. Эти степени рассматриваются далее в § 13.6.

Среди трех отношений „ $A$  рекурсивно в  $B$ ”, „ $A \leq_e B$ ” и „ $A$  рекурсивно перечислимо в  $B$ ” имеют место следующие импликации; никакие другие импликации места, вообще говоря, не имеют:

$A$  рекурсивно в  $B \Rightarrow A$  рекурсивно перечислимо в  $B$ ;  $A \leq_e B \Rightarrow A$  рекурсивно перечислимо в  $B$ .

(См. упр. 9-57.) Остается случай, когда  $A$  и  $B$  — однозначные множества. Например,  $\psi$  рекурсивно перечислимо в  $\varphi$  не влечет за собой, вообще говоря,  $\psi \leq_e \varphi$ .

## § 9.8. РЕКУРСИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Возникает целый ряд интересных вопросов, касающихся соотношения между операторами перечисления и однозначными множествами. Мы рассмотрим некоторые из них здесь, а позднее, в § 15.3, предпримем дальнейшее их обсуждение.

Пусть  $\mathcal{F}$  — класс всех функций одной переменной. Отображение подкласса класса  $\mathcal{F}$  в  $\mathcal{F}$  назовем *функциональным оператором*. Каждая функция  $\varphi$  имеет соответствующее одно-

значное множество  $\tau(\varphi)$ , и каждое однозначное множество  $A$  определяет функцию  $\tau^{-1}(A)$ . Пусть  $\tau\mathcal{F}$  — класс всех однозначных множеств. Тогда  $\tau$  есть взаимно однозначное стандартное отображение класса  $\mathcal{F}$  на  $\tau\mathcal{F}$ . Всякий функциональный оператор  $\Psi$  определяет отображение  $\Gamma$  подкласса класса  $\tau\mathcal{F}$  в  $\tau\mathcal{F}$ , где  $\Gamma = \tau\Psi\tau^{-1}$ , и каждое отображение  $\Gamma$  подкласса класса  $\tau\mathcal{F}$  в  $\tau\mathcal{F}$  определяет функциональный оператор  $\Psi$ , где  $\Psi = \tau^{-1}\Gamma\tau$ .

**Определение.** Пусть  $\Phi$  — некоторое (всюду определенное) отображение класса  $2^N$  в  $2^N$ . Оно определяет отображение  $\Phi_{\tau\mathcal{F}}$  подкласса класса  $\tau\mathcal{F}$  в  $\tau\mathcal{F}$  следующим образом:

(i)  $\text{Arg } \Phi_{\tau\mathcal{F}} = \Phi^{-1}(\tau\mathcal{F}) \cap \tau\mathcal{F}$ ;

(ii)  $\Phi_{\tau\mathcal{F}} = \Phi$  на области определения отображения  $\Phi_{\tau\mathcal{F}}$ .

(Таким образом,  $\Phi_{\tau\mathcal{F}}$  есть ограничение  $\Phi$  на те однозначные множества  $A$ , для которых  $\Phi(A)$  также однозначно.) Тогда  $\Phi_{\tau\mathcal{F}}$  в свою очередь задает функциональный оператор  $\Psi = \tau^{-1}\Phi_{\tau\mathcal{F}}\tau$ . Мы будем говорить, что отображение  $\Phi$  определяет функциональный оператор  $\Psi$ .

**Определение.**  $\Psi$  — частичнорекурсивный оператор, если

и

(i)  $\Psi$  — функциональный оператор

и

(ii) для некоторого  $z$   $\Phi_z$  определяет  $\Psi$ .

(То есть функциональный оператор есть частично рекурсивный оператор, если он определяется оператором перечисления.)

**Определение.**  $\Psi$  есть рекурсивный оператор, если

(i)  $\Psi$  есть частичнорекурсивный оператор;

(ii)  $\text{Arg } \Psi = \mathcal{F}$ .

(То есть, иными словами, частичнорекурсивный оператор является рекурсивным оператором, если он определяется оператором перечисления  $\Phi_z$ , таким, что  $\Phi_z(\tau\mathcal{F}) \subset \tau\mathcal{F}$ .)

**Пример 1.**  $\lambda A[A]$  определяет рекурсивный оператор, тождественное отображение класса  $\mathcal{F}$  на  $\mathcal{F}$ <sup>1)</sup>.

**Пример 2.**  $\lambda A[N]$  определяет частичнорекурсивный оператор, область определения которого пуста.

**Пример 3.** Пусть  $\eta$  — фиксированная частичнорекурсивная функция. Отображение из  $\mathcal{F}$  в  $\mathcal{F}$ , задаваемое функцией  $\lambda f[\eta f]$ , есть рекурсивный оператор, то же можно сказать и об отображении, задаваемом функцией  $\lambda f[\eta f]$ .

Пусть  $\mathcal{F}$  — класс всех всюду определенных функций одной переменной.

<sup>1)</sup> Мы здесь распространяем употребление  $\lambda$ -обозначений на множественно-значные и функционально-значные выражения очевидным образом.

**Определение.**  $\Psi$  есть общерекурсивный оператор, если

(i)  $\Psi$  есть частичнорекурсивный оператор,

(ii)  $\mathcal{F} \subset \text{Arg } \Psi$ ,

(iii)  $\Psi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ .

(Таким образом, частичнорекурсивный оператор является общерекурсивным оператором, если он определен на всех всюду определенных функциях и переводит всюду определенные функции во всюду определенные.)

Легко показать, что не всякий частичнорекурсивный оператор может быть продолжен до рекурсивного оператора (упр. 9-64). С другой стороны, следующая теорема показывает, что всякий общерекурсивный оператор есть рекурсивный оператор.

**Теорема XXII.** Пусть  $\Psi$  — частичнорекурсивный оператор. Если  $\mathcal{F} \subset \text{Arg } \Psi$ , то  $\Psi$  — рекурсивный оператор.

**Доказательство.** Пусть  $\Phi_z$  определяет  $\Psi$ . Если  $\Psi$  не есть рекурсивный оператор, то, согласно теореме XXI, должны существовать множества  $A$  и  $D$ , такие, что  $A = \Phi_z(D)$ ,  $D$  однозначно и конечно, а  $A$  не однозначно. Но  $D$  может быть продолжено до  $B$  (т. е.  $D \subset B$ ), такого что  $B = \tau(f)$  для некоторой (всюду определенной) функции  $f$ . Согласно теореме XXI,  $A \subset \Phi_z(B)$  и, следовательно,  $\Phi_z(B)$  не однозначно, в противоречие с нашим предположением о том, что  $\mathcal{F} \subset \text{Arg } \Psi$ . ■

**Следствие XXII.** Всякий общерекурсивный оператор является рекурсивным оператором.

**Доказательство очевидно.** ■

Перейдем к изложению фундаментального результата настоящего раздела, основной теоремы об операторах. Эта теорема показывает, что если мы ограничимся рассмотрением входов из  $\mathcal{F}$  (всюду определенных функций), то всякий частичнорекурсивный оператор может быть продолжен до рекурсивного оператора. Этот результат о частичнорекурсивных операторах противостоит теореме 2-II о непродолжимости всех частично рекурсивных функций. Он имеет место равномерно и, следовательно, дает эффективный пересчет рекурсивных операторов на  $\mathcal{F}$ . Таким образом, этот результат противостоит также упр. 2-9 о неперечислимости общерекурсивных функций.

**Теорема XXIII** (основная теорема об операторах). Существует общерекурсивная функция  $\sigma$ , такая, что для всякого  $z$  если  $\Phi_z$  определяет частичнорекурсивный оператор  $\Psi$ , то  $\Phi_{\sigma(z)}$  определяет рекурсивный оператор  $\Psi'$ , обладающий свойством, что для всякой всюду определенной функции  $f$   $f \in \text{Arg } \Psi \Rightarrow \Psi'(f) = \Psi(f)$ .

**Доказательство.** Мы приведем сначала интуитивные доводы, а затем более детальную конструкцию. Из соображений технической простоты путь, которому следует эта конструкция, отличен от хода приводимых интуитивных рассуждений.

**Интуитивные доводы.** Если дан пересчет в некотором порядке всюду определенной функции, мы можем исследовать принадлежность элемента к этой функции (см. следствие VI). Значит, из любого пересчета множества  $\tau(f)$  мы можем получить пересчет множества  $\tau(f)$  в стандартном порядке  $\langle 0, f(0) \rangle, \langle 1, f(1) \rangle, \dots$ . Применяя  $\Phi_z$  к этому стандартному пересчету, мы получаем множество  $\Phi_z(\tau(f))$  в фиксированном порядке. Выход  $\Phi_z(\tau(f))$  может быть „униформизован” в соответствии с этим порядком (как при доказательстве теоремы 5-XVI). Чтобы получить  $\Phi_{\sigma(z)}$ , мы сначала устраиваем композицию трех операторов: (i) преобразования входа к стандартному порядку, (ii) применения  $\Phi_z$ , (iii) „униформизации” выхода (это задает корректно определенный оператор из  $\tau\mathcal{F}$  в  $\tau\mathcal{F}$ ; а затем мы добавляем условие, что для любого неоднозначного входа выходом должно быть  $N$  (выход, таким образом, не зависит от порядка, в котором подаются входные значения, и мы имеем корректно определенный оператор из  $2^N$  в  $2^N$  с требуемыми свойствами).

**Детальная конструкция.** Пусть  $f''$  — фиксированная общерекурсивная функция, фигурирующая в следствии 5-V (d). Пусть дано некоторое  $z$ . Рассмотрим множество  $W_z$ , перечисляемое в стандартном порядке, порождаемом функцией  $\Phi_{f''(z)}$ . Если  $v \in W_z$ , мы скажем, что  $u$  предшествует  $v$  в  $W_z$ , если  $u \in W_z$ , и  $u$  встречается раньше  $v$  при этом стандартном порядке, т. е. если  $\varphi_{f''(z)}^{-1}(u)$  существует и  $\varphi_{f''(z)}^{-1}(u) < \varphi_{f''(z)}^{-1}(v)$ .

Рассмотрим

$$(*) \quad \{ \langle \langle x, y \rangle, t \rangle \mid D_t \text{ однозначно} \& (\exists s) [D_t \subset D_s \& \\ \& \langle \langle x, y \rangle, s \rangle \in W_z \& (\forall s') (\forall y') [\langle \langle x, y' \rangle, s' \rangle \text{ предшествует} \\ \& \langle \langle x, y \rangle, s \rangle \text{ в } W_z \Rightarrow D_s \cup D_s \text{ не однозначно}]]\}.$$

Это множество, очевидно, рекурсивно перечислимо с р. п. индексом, зависящим равномерно от  $z$ . Пусть  $\sigma$  — общерекурсивная функция, такая, что  $W_{\sigma(z)}$  есть это множество. Остается показать, что  $\Phi_{\sigma(z)}$  обладает требуемыми свойствами. Докажем прежде всего лемму.

**Лемма.**  $[\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)} \& D_t \subset D_{t_1} \& D_{t_1} \text{ однозначно}] \Rightarrow \langle \langle x, y \rangle, t_1 \rangle \in W_{\sigma(z)}$ .

**Доказательство.** Предположим, что множество  $D_{t_1}$  однозначно,  $D_t \subset D_{t_1}$ ,  $\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)}$  и  $\langle \langle x, y \rangle, t_1 \rangle \notin W_{\sigma(z)}$ .

Обозначим через  $D_s$  множество, полученное из  $D_t$  согласно (\*), и через  $D_{s'}$  множество, полученное из  $D_s$  и  $D_{t_1}$  согласно (\*) (с  $t_1$  вместо  $t$  в (\*)). Затем в силу (\*) множество  $D_{s'} \cup D_{t_1}$  однозначно, но  $D_{s'} \cup D_t$  не однозначно. Это противоречит предположению о том, что  $D_t \subset D_{t_1}$ , и лемма доказана.

Мы теперь покажем, что  $\Phi_{\sigma(z)}$  определяет рекурсивный оператор. Предположим противное. Тогда для некоторого однозначного множества  $A$   $\langle \langle x, y_1 \rangle, t_1 \rangle \in W_{\sigma(z)} \& D_{t_1} \subset A; \langle \langle x, y_2 \rangle, t_2 \rangle \in W_{\sigma(z)} \& D_{t_2} \subset A$  и  $y_1 \neq y_2$ . Пусть  $D_{s_1}$  получено из  $D_{t_1}$  согласно (\*) (с  $s_1$  вместо  $s$  и  $t_1$  вместо  $t$ ), и пусть  $D_{s_2}$  получено из  $D_{t_2}$  согласно (\*) (с  $s_2$  вместо  $s$  и  $t_2$  вместо  $t$ ). Без потери общности можно предположить, что  $\langle \langle x, y_1 \rangle, t_1 \rangle$  предшествует  $\langle \langle x, y_2 \rangle, t_2 \rangle$  в  $W_z$ . Тогда, согласно (\*), множество  $D_{s_1} \cup D_{t_2}$  не однозначно. Так как  $D_{s_1} \subset D_{t_1}, D_{t_1} \cup D_{t_2}$  не однозначно. Но  $D_{t_1} \cup D_{t_2} \subset A$  и, следовательно,  $A$  не однозначно; пришли к противоречию.

Наконец, покажем, что если множество  $\Phi_z(\tau(f))$ <sup>1)</sup> однозначно, то

$$\Phi_{\sigma(z)}(\tau(f)) = \Phi_z(\tau(f)).$$

Предположим, что дана функция  $f$  и множество  $\Phi_z(\tau(f))$  однозначно.

Тогда  $\langle x, y \rangle \in \Phi_{\sigma(z)}(\tau(f)) \Rightarrow (\exists t) [\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)} \& D_t \subset \tau(f)] \Rightarrow (\exists s) [\langle \langle x, y \rangle, s \rangle \in W_z \& D_s \subset \tau(f)]$  (согласно (\*))  $\Rightarrow \langle x, y \rangle \in \Phi_z(\tau(f))$ . Обратно, пусть  $\langle x, y \rangle \in \Phi_z(\tau(f))$ . Тогда должно существовать  $s$ , такое, что  $\langle \langle x, y \rangle, s \rangle \in W_z$  и  $D_s \subset \tau(f)$ . Возьмем первое такое  $s$ , появляющееся при „стандартном” порядке  $W_z$ . Пусть  $S = \{s_1, \dots, s_k\} = \{s' \mid (\exists y') [\langle \langle x, y' \rangle, s' \rangle \text{ предшествует} \langle \langle x, y \rangle, s \rangle \text{ в } W_z]\}$ . Так как  $\Phi_z(\tau(f))$  однозначно, то  $D_{s_i} \not\subset \tau(f)$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Определим  $D_t$  так, что  $D_t \subset \tau(f)$  и  $\text{Arg } D_t = \text{Arg } D_s \cup \bigcup_{i=1}^k (\bigcup \text{Arg } D_{s_i})$ . Так как  $D_{s_i} \not\subset \tau(f)$  ( $1 \leq i \leq k$ ), имеем, что множество  $D_{s_i} \cup D_t$  не однозначно ( $1 \leq i \leq k$ ). Отсюда, согласно (\*),  $\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)}$ . (Если  $S = \emptyset$ , определим  $D_t = D_s$  и вновь  $\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)}$ .) Таким образом,  $\langle x, y \rangle \in \Phi_{\sigma(z)}(\tau(f))$ .

Это завершает доказательство теоремы. ■

Следующий вопрос основная теорема оставляет открытым. Существуют ли функции  $\psi$  и  $\varphi$ , такие, что  $\varphi$  переводится в  $\psi$  частично рекурсивным, но не рекурсивным оператором? Мы ответим на этот вопрос утвердительно в § 13.6 (см. упр. 9-69).

В некоторой части литературы функциональные операторы изучаются только как отображения из  $\mathcal{F}$  в  $\mathcal{F}$  (а не как из  $\mathcal{F}'$  в  $\mathcal{F}'$ ). При таком ограничении всякий частично рекурсивный оператор может быть продолжен до рекурсивного оператора (согласно

<sup>1)</sup> Напомним, что  $f$  — всюду определенная функция.— Прим. перев.

теореме XXIII — в самом деле, стройность, обеспечиваемая теоремой XXIII, возможно, является главной причиной выбора такого ограничения), а термин „частичнорекурсивный оператор” иногда используется (когда нами употребляется термин „рекурсивный оператор”) применительно к отображениям из  $\mathcal{F}$  в  $\mathcal{B}$ , определенным на всем  $\mathcal{F}$ .

Мы теперь воспользуемся основной теоремой, чтобы установить взаимосвязь между функциональными операторами и различными видами сводимости, ранее рассматривавшимися.

**Теорема XXIV.**  $A$  рекурсивно в  $B \Leftrightarrow c_A \leq_e c_B$ .

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы XXIII, мы приведем сначала интуитивные доводы, а затем детальную конструкцию.

**Интуитивные доводы.**  $\Rightarrow$ . Предположим, что множество  $A$  рекурсивно в  $B$ . Любой пересчет множества  $c_B$  может быть использован для получения ответов на вопросы о принадлежности множеству  $B$ , следовательно, для получения ответов на вопросы о принадлежности множеству  $A$  и, следовательно, для пересчета множества  $c_A$ .

$\Leftarrow$ . Предположим, что  $c_A \leq_e c_B$  и что у нас есть оракул для  $B$ . С помощью оракула мы можем пересчитать  $c_B$ ; тогда мы сможем пересчитать  $c_A$  и, используя этот пересчет, ответить на вопросы о принадлежности множеству  $A$ .

**Детальная конструкция.**  $\Rightarrow$ . Предположим, что  $A$  рекурсивно в  $B$ . Тогда  $c_A = \varphi_z^B$  для некоторого  $z$ . То есть

$$c_A = \{\langle x, y \rangle \mid (\exists u)(\exists v)[\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)} \& D_u \subset B \& D_v \subset \bar{B}]\}.$$

Возьмем такую общерекурсивную функцию  $h$  двух переменных, что

$$D_{h(u, v)} = (D_u \times \{1\}) \cup (D_v \times \{0\}).$$

Возьмем общерекурсивную функцию  $g_1$ , такую, что

$$\begin{aligned} W_{g_1(z)} &= \{\langle w, t \rangle \mid (\exists x)(\exists y)(\exists u)(\exists v)[w = \langle x, y \rangle \& t = \\ &= h(u, v) \& \langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)}]\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\langle x, y \rangle \in c_A \Leftrightarrow (\exists t)[\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{g_1(z)} \& D_t \subset \tau(c_B)].$$

Отсюда  $c_A \leq_e c_B$  посредством  $g_1(z)$ .

$\Leftarrow$ . Предположим, что  $c_A \leq_e c_B$  посредством  $z$ . Тогда, согласно теореме XXIII,

$$\tau(c_A) = \Phi_{\sigma(z)}(\tau(c_B)),$$

где  $\Phi_{\sigma(z)}$  определяет рекурсивный оператор.

Пусть  $\Theta$  — общерекурсивная функция, такая, что  $W_{\Theta(z)} = \{\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \mid \langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)} \& D_t \subset N \times \{0, 1\}\}$ .

Множество  $W_{\Theta(z)}$  является бесконечным. Далее, пусть  $\langle \langle x_1, y_1 \rangle, t_1 \rangle, \langle \langle x_2, y_2 \rangle, t_2 \rangle, \dots$  — эффективный пересчет элементов  $W_{\Theta(z)}$ . Согласно лемме из доказательства теоремы XXIII, если  $\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)}$ , то  $\langle \langle x, y \rangle, t' \rangle \in W_{\sigma(z)}$  для всех  $t'$ , таких, что  $D_t \subset D_{t'}$  и  $D_{t'}$  однозначно. Мы зададим инструкцию для нового эффективного пересчета (без повторения) множества  $W_{\Theta(z)}$  следующим образом.

**Этап 1.** Поместите в пересчет  $\langle \langle x_1, y_1 \rangle, t_1 \rangle$ . Переийдите к этапу 2.

• • • •

**Этап  $n$ .** Поместите в пересчет  $\langle \langle x_n, y_n \rangle, t_n \rangle$ , а затем перечисляйте  $\langle \langle x_n, y_n \rangle, t' \rangle$  для всех  $t'$ , таких, что  $D_{t_n} \subset D_{t'}$ ,  $D_{t'} \subset N \times \{0, 1\}$ ,  $\text{Arg } D_{t'} = \bigcup_{k=1}^n \text{Arg } D_{t_k}$  и  $D_{t'}$  однозначно. Затем перейдите к этапу  $n + 1$ .

• • • •

Мы обозначим следующие один за другим элементы этого нового пересчета множества  $W_{\Theta(z)}$  через  $\langle \langle x'_1, y'_1 \rangle, t'_1 \rangle, \langle \langle x'_2, y'_2 \rangle, t'_2 \rangle, \dots$ . Пусть  $h_1$  и  $h_2$  — общерекурсивные функции, такие, что

$$D_{h_1(t)} = \{x \mid \langle x, 1 \rangle \in D_t\}$$

$$D_{h_2(t)} = \{x \mid \langle x, 0 \rangle \in D_t\}.$$

Пусть  $C = \{\langle x, y, u, v \rangle \mid (\exists t)[\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\Theta(z)} \& u = h_1(t) \& v = h_2(t)]\}$ . Рассмотрим эффективный пересчет  $C$ :  $\langle x'_1, y'_1, u'_1, v'_1 \rangle, \langle x'_2, y'_2, u'_2, v'_2 \rangle, \dots$ , где  $u'_i = h_1(t'_i)$  и  $v'_i = h_2(t'_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Заметим, что все четверки в этом пересчете совместны (т. е.  $D_{u'_1} \cap D_{v'_1} = \emptyset$ ).

Воспользуемся этим пересчетом, чтобы получить эффективный пересчет некоторого подмножества  $C^*$  множества  $C$  следующим образом.

**Этап 1.** Поместите  $\langle x'_1, y'_1, u'_1, v'_1 \rangle$  в  $C^*$ . Переийдите к этапу 2.

• • • •

**Этап  $n$ .** Проверьте, выполняется ли  $(\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle x'_n, y, u, v \rangle$  уже помещено в  $C^*$  и  $\langle x'_n, y'_n, u'_n, v'_n \rangle$  согласовано с  $\langle x'_n, y, u, v \rangle$  (т. е.  $D_{u'_n} \cap D_v = D_{v'_n} \cap D_u = \emptyset$ )]. Если выпол-

няется, переходим непосредственно к этапу  $n + 1$ . Если нет, помещаем  $\langle x'_n, y'_n, u'_n, v'_n \rangle$  в  $C^*$ , а затем переходим к этапу  $n + 1$ .

Очевидно, множество  $C^*$  рекурсивно перечислимо и индекс его равномерно зависит от  $z$ . Пусть  $g_2$  — общерекурсивная функция, такая, что  $W_{g_2(z)} = C^*$ . Остается показать, что  $c_A = \varphi_{g_2(z)}^B$ .

Заметим сначала, что из построения  $C^*$  по  $C$  следует регулярность  $C^*$ . Отсюда, согласно теореме II,  $W_{g_2(z)} = W_{\rho g_2(z)}$ . Если  $\langle x, y \rangle \in \varphi_{g_2(z)}^B$ , то для некоторых  $u$  и  $v$   $\langle x, y, u, v \rangle \in W_{g_2(z)}$  &  $D_u \subset B$  &  $D_v \subset \bar{B}$ . Тогда по построению  $\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)}$  &  $D_t \subset \tau(c_B)$ , где  $u = h_1(t)$  и  $v = h_2(t)$ . Следовательно,

$$\langle x, y \rangle \in \Phi_{\sigma(z)}(\tau(c_B)) \text{ и } \langle x, y \rangle \in c_A.$$

Обратно, предположим  $\langle x, y \rangle \in c_A$ . Тогда  $\langle \langle x, y \rangle, t \rangle \in W_{\sigma(z)}$  &  $D_t \subset \tau(c_B)$  для некоторого  $t$ . Следовательно, существует этап  $n$  в процедуре пересчета  $W_{\theta(z)}$ , используемой выше, на котором  $\langle \langle x, y \rangle, t' \rangle$  было помещено в  $W_{\theta(z)}$ ; здесь  $x = x_n, y = y_n, D_t \subset D_{t'}, D_{t'} \subset \tau(c_B)$  и  $\operatorname{Arg} D_{t'} = \bigcup_{k=1}^n \operatorname{Arg} D_{t_k}$ . Пусть этот  $\langle \langle x, y \rangle, t' \rangle$  является  $m$ -м элементом пересчета множества  $W_{\theta(z)}$ . Тогда

$$\langle \langle x'_m, y'_m \rangle, t'_m \rangle = \langle \langle x, y \rangle, t' \rangle,$$

$$\operatorname{Arg} D_{t'} = \bigcup_{k=1}^m \operatorname{Arg} D_{t_k}.$$

Если  $\langle x'_m, y'_m, u'_m, v'_m \rangle$  было помещено в  $C^*$  на этапе  $m$ , то  $\langle x, y, u'_m, v'_m \rangle \in W_{\rho g_2(z)} \& D_{u'_m} \subset B \& D_{v'_m} \subset \bar{B}$ , следовательно,  $\langle x, y \rangle \in \varphi_{g_2(z)}^B$ . Если  $\langle x'_m, y'_m, u'_m, v'_m \rangle$  не было помещено в  $C^*$  на этапе  $m$ , то должно существовать  $q < m$ , такое что  $\langle x'_q, y'_q, u'_q, v'_q \rangle$  было помещено в  $C^*$  на этапе  $q$ ,  $x'_m = x'_q$  и  $\langle x'_m, y'_m, u'_m, v'_m \rangle$  согласовано с  $\langle x'_q, y'_q, u'_q, v'_q \rangle$ . Эта согласованность вместе с условием  $\operatorname{Arg} D_{t'} = \bigcup_{k=1}^m \operatorname{Arg} D_{t_k}$  влечет за собой включения  $D_{u'_q} \subset D_{u'_m}$  и  $D_{v'_q} \subset D_{v'_m}$ . Тем самым  $\langle x'_q, y'_q \rangle = \langle x, y \rangle \in \varphi_{g_2(z)}^B$ . Отсюда, согласно предыдущему параграфу,  $\langle x, y \rangle \in c_A$ . Следовательно,  $y'_q = y$ , и мы имеем  $\langle x, y \rangle \in \varphi_{g_2(z)}^B$ , что и требовалось. ■

**Следствие XXIV.** Для любых всюду определенных функций  $f$  и  $g$   $f$  рекурсивно в  $g \Leftrightarrow f \leqslant_e g$ .

**Доказательство.** См. упр. 9-65. ■

Теоремы XX и XXIV вместе дают еще одно доказательство транзитивности отношения  $\leqslant_T$ .

Сводимость по перечислимости порождает упорядочение по сводимости семейства всех множеств (см. упр. 9-56). Согласно теореме XXIV, упорядочение по  $T$ -сводимости изоморфно подупорядочению упорядочения по  $e$ -сводимости; этот изоморфизм получается идентифицированием  $T$ -степени множества  $A$  с  $e$ -степенью  $c_A$ . Является ли это подупорядочение полным упорядочением по  $e$ -сводимости? Эквивалентный вопрос (см. упр. 9-61), существует ли для всякой функции  $\psi$  всюду определенная функция  $f$ , такая, что  $f \equiv_e \psi$ ? Мы ответим на этот вопрос отрицательно в § 13.6 (см. упр. 9-70).

Следующее описание сводимости по Тьюрингу очевидно.

**Теорема XXV.**  $A \leqslant_T B \Leftrightarrow$  существует рекурсивный оператор, переводящий  $c_B$  в  $c_A$ .

**Доказательство.** Следует из теорем XXIII и XXIV. ■

Если одна характеристическая функция переводится в другую рекурсивным оператором, должна ли она переводиться в нее общерекурсивным оператором? Следующая теорема отвечает на этот вопрос отрицательно, показывая, что существование общерекурсивного оператора совпадает с  $tt$ -сводимостью. Эта теорема является усилением теоремы XIX.

**Теорема XXVI (Нероуд).**  $A \leqslant_{tt} B \Leftrightarrow$  существует общерекурсивный оператор, переводящий  $c_B$  в  $c_A$ .

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Согласно теореме XIX, существует  $z$ , такое, что  $c_A = \varphi_z^B$  & ( $\forall X$ ) [ $\varphi_z^X$  есть характеристическая функция]. Возьмем  $\Phi_{g_1(z)}$ , как в доказательстве теоремы XXIV. Пусть  $\Phi$  — оператор перечисления, который определяет рекурсивный оператор  $\Psi$ , такой, что

$$[\Psi(\varphi)](x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x) > 0; \\ 0, & \text{если } \varphi(x) = 0; \\ \text{не определено,} & \text{если } \varphi(x) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Тогда  $\Phi_{g_1(z)}^*\Phi$  определяет искомый общерекурсивный оператор.

$\Leftarrow$ . Пусть  $\Phi_z$  определяет данный общерекурсивный оператор. Возьмем  $g_2$  как при доказательстве теоремы XXIV; тогда  $c_A = \varphi_{g_2(z)}^B$  и для всех  $X$  функция  $\varphi_{g_2(z)}^X$  всюду определена. Отсюда, согласно теореме XIX,  $A \leqslant_{tt} B$ . ■

**Следствие XXVI (а).**  $A \leqslant_{tt} B \Leftrightarrow$  существует общерекурсивный оператор, переводящий характеристические функции в характеристические, который переводит  $c_B$  в  $c_A$ .

**Доказательство.** Вытекает из построения для части „ $\Rightarrow$ “ теоремы.

**Следствие XXVI (b) ( $\exists f$ ) ( $\exists g$ ) [ $f$  переводится в  $g$  рекурсивным оператором, но  $f$  не переводится в  $g$  общерекурсивным оператором].**

**Доказательство.** Вытекает из теоремы I. ■

Другие изучавшиеся до сих пор виды сводимости соответствуют определенным типам рекурсивных операторов:  $A \leqslant_1 B \Leftrightarrow [c_A = c_B f$  для некоторой взаимно однозначной общерекурсивной функции  $f]$ ;  $A \leqslant_m B \Leftrightarrow [c_A = c_B f$  для некоторой общерекурсивной функции  $f]$ .

В § 13.6 и 15.3 мы займемся некоторыми топологическими аспектами теории операторов и рядом других вопросов, возникающих в связи с операторами.

## § 9.9. УПРАЖНЕНИЯ

### § 9.1

9-1. Пусть множество  $\tilde{K}$  — такое же, как в § 9.1. Является ли  $\tilde{K}$  рекурсивно перечислимым?

9-2. Покажите, что  $K \leqslant_1 \tilde{K}$ .

9-3. Пусть  $K^* = \{x \mid (\exists y) [\varphi_x(x) = y \text{ & } \text{tt-условие } y \text{ не выполняется на } K]\}$ . Какие отношения сводимости имеют место между  $K$  и  $K^*$ ? Выполняется ли  $K^* \leqslant_{\text{tt}} K$ ?

### § 9.2

9-4. Покажите, что множество  $W_{h(z)}$ , определенное как в § 9.2, регулярно.

9-5 (Блюм). Покажите, что множество  $A$  рекурсивно перечислимо и регулярно  $\Rightarrow (\exists z)[A = W_{h(z)}]$ . (В рамках этого упражнения каждое  $P'_z$  может быть идентифицировано с соответствующим эффективным способом порождения диаграмм.)

9-6. Пусть дано  $A$ . Покажите, как найти  $z$ , такое, что  $\varphi_z^A = c_A$ .

9-7. Предположим, что для всякого  $A$  функция  $\psi$   $A$ -частичнорекурсивна. Должна ли она быть частичнорекурсивной?

### § 9.3

9-8. Покажите, что  $K^A$  рекурсивно перечислимо в  $A$ .

Δ9-9. (a) Покажите, что отношение „ $A$  рекурсивно в  $B$ ” транзитивно. (Над этим утверждением следует подумать до чтения § 9.4. Оно вновь появляется в качестве упр. 9-14.)

(b) Покажите, что отношение „ $A$  рекурсивно перечислимо в  $B$ ” не транзитивно. (Указание. Используйте  $\emptyset$ ,  $K$  и  $\tilde{K}$ .)

Δ9-10. Опровергните следующее предположение:  $[A \text{ не рекурсивно} \& (\forall B)[A \text{ рекурсивно в } B \Leftrightarrow A \text{ рекурсивно перечислимо в } B]] \Rightarrow (\exists f)[A \equiv \equiv \tau(f)]$  (Указание. Найдите (неконструктивно) множество  $A$ , такое, что  $\bar{A}$  иммунно и  $(\forall x)[2x \in A \text{ или } 2x + 1 \in A, \text{ но не одновременно}]$ . Докажите и используйте тот факт, что  $(\exists f)[C \equiv \tau(f)] \Rightarrow \bar{C}$  не иммунно.)

9-11. Покажите, что множество  $K^A$  максимально относительно 1-сводимости среди всех множеств, рекурсивно перечислимых в  $A$ .

9-12. Сформулируйте и проверьте релятивизированные варианты теорем 5-III и 5-IV.

9-13. Пусть  $A$  фиксировано; обсудите существование трех типов  $A$ -простых множеств, упомянутых в § 9.3.

### § 9.4

9-14. Проведите строгое доказательство транзитивности, намеченное в теореме XII. Покажите, что транзитивность равномерна (в соответствующем подходящем смысле).

9-15. (a) Покажите, что всякая Т-степень содержит  $n_0$  множеств.

(b) Покажите, что всякая Т-степень имеет самое большое  $n_0$  Т-степеней, предшествующих ей при упорядочении по Т-сводимости.

9-16. Покажите, что семейство  $\{A \mid A \leqslant_T B\}$  образует (при любом  $B$ ) булеву алгебру.

9-17. Покажите, что для всякой Т-степени существует бесконечная последовательность Т-степеней, ее превосходящих, линейно упорядоченных относительно  $\leqslant_T$  по типу натуральных чисел  $(0, 1, 2, \dots)$ . (Указание. Воспользуйтесь теоремой X и упр. 9-11.)

9-18. (a) Пусть  $d$  есть Т-степень. Верно ли следующее:  $d$  имеет максимальную 1-степень  $\Leftrightarrow d$  имеет максимальную  $m$ -степень  $\Leftrightarrow d$  имеет максимальную  $tt$ -степень?

(b) Покажите, что  $K$  обладает следующими свойствами: для всякой рекурсивно перечислимой степени  $d$  существует рекурсивное множество  $A$ , такое, что  $K \cap A$  лежит в  $d$ . (Указание. Используйте  $K_0$ .)

Δ9-19. Покажите, что  $B$  рекурсивно перечислимо в  $A \Leftrightarrow (\exists f)[\tau(f) \equiv_T \equiv_T A \& B = \text{Val } f]$  или  $B$  имеет менее двух элементов.

Δ9-20. Пусть дано  $A$ , такое, что  $K \leqslant_T A$ . Пусть  $B = A \oplus \bar{A}$ , и пусть  $C = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ определено} \& \varphi_x(x) \notin B\}$ . Покажите, что  $A \leqslant_1 C$ ,  $C \leqslant_T A$ , но  $C \not\leqslant_1 A$ .

Δ9-21. (a) Покажите, что  $A \leqslant_{tt} B \Leftrightarrow (\exists \text{ общерекурсивная функция } f) (\exists \text{ общерекурсивная } g) (\forall x) [[x \in A \Leftrightarrow (\exists u) (\exists v) [(u, v) \in D_{f(x)} \& D_u \subset \subset B \& D_v \subset \subset \bar{B}]] \& [x \notin A \Leftrightarrow (\exists u) (\exists v) [(u, v) \in D_{g(x)} \& D_u \subset B \& D_v \subset \subset \bar{B}]]]$ .

(b) Покажите, что  $A \leqslant_{tt} B \Leftrightarrow (\exists \text{ общерекурсивная } f) (\exists \text{ общерекурсивная функция } g) (\forall x) [[x \in A \Leftrightarrow (\exists u) (\exists v) [(u, v) \in W_{f(x)} \& D_u \subset B \& D_v \subset \subset \bar{B}]] \& [x \notin A \Leftrightarrow (\exists u) (\exists v) [(u, v) \in W_{g(x)} \& D_u \subset B \& D_v \subset \subset \bar{B}]]]$ .

Δ9-22. Пусть  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы. Покажите, что  $A \leqslant_T B \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\exists x)[\bar{A} = W_x^B] \Leftrightarrow (\exists \text{ общерекурсивная функция } f) (\forall x)[x \notin A \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\exists y)[y \in W_{f(x)} \& D_y \subset \subset \bar{B}]]$ .

### § 9.5

9-23. Покажите, что  $A$  гипериммунно  $\Rightarrow A$  иммунно.

9-24. Выясните, является ли множество  $S^*$  теоремы 8-VIII гиперпростым.

9-25. Покажите, что конструкция теоремы Деккера равномерна в следующем смысле:  $(\exists \text{ общерекурсивная функция } g) (\forall x) [W_x \text{ не рекурсивно} \Rightarrow \Rightarrow [W_{g(x)} \text{ гиперпросто} \& W_{g(x)} \leqslant_{tt} W_x \& W_x \leqslant_T W_{g(x)}]]$ . Что можно сказать о  $W_{g(x)}$ , если  $W_x$  рекурсивно?

Δ9-26. (a) Определим максимальное множество как в упр. 8-40. Покажите, что  $A$  максимально  $\Rightarrow A$  гиперпросто.

(b) Покажите, что  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  и  $C_{13}$  лежат вдоль „спектра“ из § 8.7 (см. также упр. 8-46), установив, что если  $A \leqslant_1 B$ , то (i)  $B$  просто  $\Rightarrow A$  просто; (ii)  $B$  гиперпросто  $\Rightarrow A$  гиперпросто и (iii)  $B$  максимально  $\Rightarrow A$  максимально.

9-27. Пусть  $f$  общерекурсивна и взаимно однозначна. Исследуйте  $f(A)$  и  $f^{-1}(A)$  для гиперпростого множества  $A$  и для гипериммунного множества  $A$ .

9-28 (Пост). Получите следующее описание гипериммунных множеств.

**Теорема.**  $A$  гипериммунно  $\Leftrightarrow A$  бесконечно и  $\neg(\exists \text{ общерекурсивная функция } f) [(\forall u)[D_{f(u)} \cap A \neq \emptyset] \& (\forall z) (\exists u) [\text{всякий элемент из } D_{f(u)} \text{ больше, чем } z]]$ .

9-29. Воспользовавшись неконструктивным диагональным методом, покажите, что существует множество  $A$ , такое, что  $A$  и  $\bar{A}$  гипериммунны.

9-30. Покажите, что существует множество  $A$ , такое, что  $A$  и  $\bar{A}$  иммунны, и такое, что  $A \leq_t K$ . (Указание. Покажите, что конструкция из теоремы 8-III эффективна, если только есть оракул, который может решить любой случай проблемы остановки, т. е. оракул для  $K$ .)

$\triangle 9-31$ . (a) Покажите, что  $(\exists A)[A \text{ и } \bar{A} \text{ иммунны и } A \equiv_t K]$ . (Указание. Модифицируйте конструкцию из упр. 9-30 так, чтобы  $A$  кодировало (например, мощностью своих пробелов в порядке возрастания) информацию о принадлежности множеству  $K$ .)

(b) Покажите, что  $(\forall B)[K \leq_t B \Rightarrow (\exists A)[A \text{ и } \bar{A} \text{ иммунны и } A \equiv_t B]]$ .

9-32. Проделайте упр. 9-30 с заменой "иммунный" на "гипериммунный". (Указание. Воспользуйтесь конструкцией из упр. 9-29; последуйте указанию из упр. 9-30.)

$\triangle 9-33$ . Проделайте упр. 9-31 с "гипериммунным" вместо "иммунного". (Указание. Как в 9-31.)

9-34. (Деккер). Пусть  $A$  и  $B$  гиперпросты. Пусть  $C$  — любое рекурсивно перечислимое множество. Покажите, что

(i)  $A \cap B$  гиперпросто;

(ii)  $A \cup C$  гиперпросто или коконечно.

Отсюда заключите, что семейство гиперпростых или коконечных множеств образует дуальный идеал в решетке рекурсивно перечислимых множеств (о понятии *дуального идеала* см. § 12.1).

9-35. Пусть  $A$  — произвольное множество. Покажите, что существует множество, которое  $A$ -иммунно, но не гипериммунно. (Указание. Релятивизуйте теорему 8-II.)

$\triangle 9-36$ . Докажите существование гиперпростого, но не максимального множества. (Указание. Пусть  $A$  гиперпросто. Определим  $f$  так:  $f(2x) = 2x + 1$  и  $f(2x + 1) = 2x$ . Покажите, что  $f(A) \cap A$  гиперпросто, но не максимально; см. упр. 9-34.)

9-37. Определите для любого множества  $A$ :  $n_A(x) =$  [мощность множества  $A \cap \{0, 1, \dots, x\}$ ]. Определите  $A \leq_d B$  (" $B$  не менее густо, чем  $A$ "), если  $(\exists$  общерекурсивная функция  $f$ )  $(\forall x)[n_A(x) \leq n_B(f(x))]$ .

(i) Покажите, что  $\leq_d$  задает частичное упорядочение.

(ii) Существует максимальная "степень" при этом упорядочении. Какие множества ей принадлежат?

(iii) Пусть  $A$  гипериммунно. Пусть  $p \in A$  и  $q \notin A$ . Покажите, что  $A \cup \{q\} \not\leq_d A$  и  $A \not\leq_d A - \{p\}$ , в то время как  $A - \{p\} \leq_d A \leq_d A \cup \{q\}$ .

9-38. (Тенненбаум). Определите  $d(A, f)$  (*густоту*  $A$  относительно  $f$ ) как  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha_n}{n} \right)$ , где  $\alpha_n$  мощность множества  $\{0, 1, \dots, n\} \cap f^{-1}(A)$ .

(i) Покажите, что  $A$  гипериммунно  $\Rightarrow (\forall$  общерекурсивная взаимно однозначная функция  $f$ )  $[d(A, f) = 0]$ .

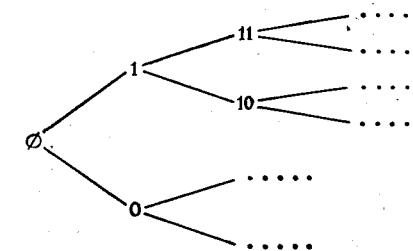
(ii) Покажите, что  $[f$  общерекурсивна &  $A$  гипериммунно &  $d(A, f) > 0] \Rightarrow (\exists x)[x \in A \text{ & } d(\{x\}, f) > 0]$ .

## § 9.6

9.39. Должно ли всякое нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество, которое не *tt*-полно, быть гиперпростым?

9.40. Пусть  $\mathcal{I}$  — множество всех конечных последовательностей нулей и единиц. Пусть  $a$  и  $b$  обозначают элементы из  $\mathcal{I}$ . Определим  $a \leq b$ , если  $a$  является начальным отрезком  $b$ . Это дает частичное упорядочение множества  $\mathcal{I}$ . При этом упорядочении  $\mathcal{I}$  иногда называют бинарным деревом. Оно

может быть изображено в виде диаграммы следующим образом:



$\mathcal{S}$  называется *поддеревом* дерева  $\mathcal{I}$ , если  $\mathcal{S} \subset \mathcal{I}$  и  $(\forall a \in \mathcal{S}) \Rightarrow \{b \mid b < a\} \subset \mathcal{S}$ . Пусть  $\mathcal{S}$  — любое поддерево; максимальное линейно упорядоченное подмножество множества  $\mathcal{S}$  назовем его *ветвью*.

(a) Докажите следующую основную теорему о компактности для деревьев. (Она иногда называется *теоремой о веере* или *Endlichkeitslemma*; она может рассматриваться как вариант в теории графов теоремы Больцано — Вейерштрасса для замкнутых интервалов числовой прямой.)

Теорема. Если поддерево дерева  $\mathcal{I}$  не имеет никакой бесконечной ветви, то это поддерево конечно.

(b) Докажите или опровергните следующее утверждение: если каждый элемент поддерева содержится в конечной ветви этого поддерева, то это поддерево конечно.

9-41.  $P_x$  есть машина Тьюринга с индексом  $x$  (см. § 1.8). Она может быть применена к входным лентам, отличным от лент специального вида ...BB11... ...1B... (которые использовались нами (§ 1.5) для задания входных значений при нашем основном описании частично рекурсивных функций). Входную ленту назовем *конечной*, если все ее, кроме конечного числа, ячейки пусты; в противном случае лента будет называться *бесконечной*. (Таким образом, лента конечна или бесконечна в зависимости от того, содержит ли она конечное или бесконечное число единиц.)

$\triangle$ (i) Предположим, что начальным состоянием всех машин Тьюринга является  $q_0$ . Покажите, что  $\{x \mid \text{для всех входных лент (конечных или бесконечных) и для всех начальных конфигураций машина } P_x \text{ заканчивает работу}\}$  рекурсивно перечислимо. (Указание. Воспользуйтесь теоремой о веере, упр. 9-40.)

$\triangle$ (ii) Предположим, что начальным состоянием всех машин Тьюринга является  $q_0$ . Покажите, что  $\{x \mid \text{для всех конечных входных лент и для всех начальных конфигураций машина } P_x \text{ заканчивает работу}\}$  не рекурсивно перечислимо и не имеет рекурсивно перечислимого дополнения. (Указание. Покажите, что как  $K$ , так и  $\bar{K}$  сводимы к этому множеству.)

(iii) Заключите из (i), что  $\{x \mid \text{для всех входных лент, всех начальных конфигураций и всех начальных состояний машина } P_x \text{ заканчивает работу}\}$  рекурсивно перечислимо<sup>1)</sup>.

9-42. См. упр. 9-40. Пусть  $\mathcal{I}^*$  — множество всех конечных последовательностей натуральных чисел. Пусть  $a$  и  $b$  обозначают элементы из  $\mathcal{I}^*$ . Скажем, что  $a \leq^* b$ , если  $a$  есть начальный отрезок последовательности  $b$ . При этом упорядочении  $\mathcal{I}^*$  иногда называют *функциональным деревом*. Определите поддерево и ветвь, как раньше.

(i) Имеет ли место *Endlichkeitslemma* для  $\mathcal{I}^*$ ?

(ii) Покажите, что (в качестве частичного упорядочения)  $\mathcal{I}^*$  может быть вложено в  $\mathcal{I}$ .

<sup>1)</sup>Хупер [1966] показал, что это множество нерекурсивно.

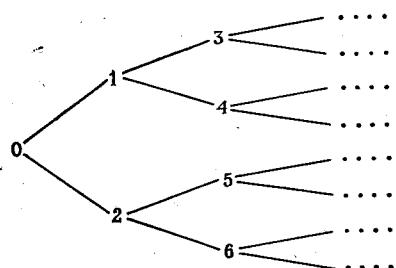
9-43. Объясните, почему в доказательстве теоремы XVIII  $t'_i$  и  $t'_j$  должны иметь различные производные истинностные таблицы, если  $i \neq j$  и  $T_i \cap \bar{A} = T_j \cap \bar{A}$ .

9-44. (Деккер, Майхилл, Тенненбаум). Определим:  $A$  ретрассириуемо, или прослеживаemo, если  $(\exists$  частичнорекурсивная функция  $\psi$ )  $(\forall x)[x \in A \Rightarrow \psi(x)$  определено;  $\psi(x) = x$ , если  $x$  есть наименьший элемент из  $A$ ; и  $\psi(x) =$  ближайший меньший элемент из  $A$ , если  $x$  не есть наименьший элемент  $A$ ]. Покажите следующее:

- (i)  $[A$  ретрассириуемо &  $B \supset A$  &  $B$  бесконечно]  $\Rightarrow A \leqslant_T B$ .
- (ii)  $A$  ретрассириуемо  $\Rightarrow A$  рекурсивно или иммунно.

$\triangle$ (iii)  $[A$  ретрассириуемо &  $\bar{A}$  рекурсивно перечислимо]  $\Rightarrow A$  рекурсивно или гипериммунно. (Указание. Произведите для каждого сегмента  $\{0, \dots, n\}$  вычисления, которые (a) порождают единую прослеженную цепь, а также (b) помешают все элементы, не принадлежащие этой цепи, в  $\bar{A}$ .)

$\triangle$ (iv) Существует множество, ретрассириуемое, но не рекурсивное и не гипериммунное. (Указание. Рассмотрите бинарное дерево (упр. 9-40), размеченное следующим образом:



Каждая ветвь задает ретрассириуемое множество. Никакая ветвь не гипериммунна.)

$\triangle$ (v) Существуют множества, которые гипериммунны и ретрассириуемы. (Указание. Используйте функциональное дерево упр. 9-42.)

$\triangle$ (vi) Множество  $B$ , конструируемое в теореме XVI (теорема Деккера), имеет ретрассириуемое дополнение.

$\triangle$ (vii) (Ейтс). Если  $\bar{A}$  рекурсивно перечислимо, то  $[A$  ретрассириуемо  $\Leftrightarrow (\exists$  общерекурсивная  $f$ )  $\{\bar{A} = \{x | (\exists y)[y > x \& f(y) \leq f(x)]\}\}$ . (Указание. См. указание для (iii) выше.) Эта теорема представимости является частичным обращением утверждения (vi). Из упр. 10-19 следует, что не всякое гиперпростое множество имеет ретрассириуемое дополнение.

(viii) Покажите, что свойство множеств содержать бесконечное ретрассириуемое подмножество рекурсивно инвариантно. (Мак-Лохлин показал, что свойство ретрассириуемости не есть рекурсивный инвариант.)

(ix) Определить:  $A$  регрессивно, если существует некоторый пересчет множества  $A$  (не обязательно эффективный) без повторений, такой, что  $(\exists$  частичнорекурсивная  $\psi$ )  $(\forall x)[x \in A \Rightarrow [\psi(x)$  определено;  $\psi(x) = x$ , если  $x$  есть первый элемент этого пересчета, и  $\psi(x)$  непосредственно предшествует  $x$  в пересчете, если  $x$  не есть первый элемент пересчета]]. Покажите, что существует регрессивное множество, которое не ретрассириуемо.

(x) Покажите, что  $A$  содержит бесконечное регрессивное подмножество  $\Leftrightarrow A$  содержит бесконечное ретрассириуемое подмножество. (О дальнейших результатах, касающихся ретрассириуемых и регрессивных множеств, см. Деккер [1962] и Аппель и Мак-Лохлин [1965].)

$\triangle$ 9-45. Введем слабую табличную сводимость ( $\leqslant_w$ ) следующим определением, которое легко может быть уточнено:  $A \leqslant_w B$ , если  $(\exists z)(c_A = \varphi_z^B$  и  $(\exists$  общерекурсивная  $f$ )  $(\forall x)D_{f(x)}$  содержит все числа, принадлежность или непринадлежность которых множеству  $B$  используется при вычислении  $\varphi_z^B(x)$ ] (см. рассуждение § 9.1).

(i) Покажите, что  $K \leqslant_{tt} B$  &  $A \leqslant_w B \Rightarrow A \leqslant_{tt} B$ . (Указание. Для  $tt$ -сведения  $A$  к  $B$  установите, используя  $K$ , какая комбинация вопросов о  $B$  делает процедуру  $w$ -сведения завершающейся.)

(ii) Установите с помощью теоремы I, что  $\leqslant_w$  отличается от  $\leqslant_t$ .

(iii) Покажите, что  $w$ -полнота отличается от  $T$ -полноты. (Указание. Покажите, что  $w$ -полное  $\Rightarrow$  не гиперпростое.) Лахлан [1965] показал, что  $\leqslant_w$  и  $\leqslant_{tt}$  различаются на рекурсивно перечислимых множествах.

9-46. Покажите при помощи неконструктивного диагонального метода, что гипергиперпростые множества существуют.

9-47 (Фридберг). Пусть  $A$  — максимальное рекурсивно перечислимое множество (упр. 8-40). Покажите, что  $A$  гипергиперпросто.

$\triangle$ 9-48 (а) (Пост). Покажите, что не существует множества  $A$  со следующим свойством:  $A$  рекурсивно перечислимо и  $\bar{A}$  бесконечно и  $(\exists$  общерекурсивная  $f$ )  $[(\forall u)[W_{f(u)} \text{ конечно} \& W_{f(u)} \cap \bar{A} \neq \emptyset] \& (\forall n)(\exists v)[$  каждый элемент  $W_{f(v)}$  больше  $n]$ . Таким образом, для гипергиперпростых множеств аналог упр. 9-28 не имеет места.

(b) (Ейтс). Покажите:  $A$  гипергиперпросто  $\Leftrightarrow A$  рекурсивно перечислимо и  $\bar{A}$  бесконечно и  $(\exists$  общерекурсивная  $f$ )  $[(\forall u)[W_{f(u)} \cap A \neq \emptyset] \& (\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow W_{f(u)} \cap W_{f(v)} = \emptyset]]$ .

9-49. Для любого  $A$  пусть  $A^* = \{x | (\exists u)(\exists v)[\langle u, v \rangle \in D_x \& D_u \subset A \& D_v \subset \bar{A}]\}$ . Покажите, что  $A^* \equiv A^{tt}$ .

$\triangle$ 9-50. Упр. 9-21 и 9-49 подсказывают следующий подход к вопросу о  $T$ -цилиндрах. Определим:  $A^T = \{x | (\exists u)(\exists v)[\langle u, v \rangle \in W_x \& D_u \subset A \& D_v \subset \bar{A}]\}$ . Покажите, что (i)  $A^T$  рекурсивно перечислимо в  $A$ ; (ii)  $A \leqslant_1 A^T$ ; (iii)  $A^T \not\leqslant TA$ .

(Указание. Покажите, что  $A^T \equiv K^A$ , где  $K^A$ , как в § 9.3.)

Таким образом, эта попытка получить аналог теорем 7-VIII и 8-IX успеха не возымела. Мы не получим  $A \leqslant_1 B^T \Rightarrow A \leqslant_T B$ . (Возьмите  $A = B^T$ .)

$\triangle$ 9-51. См. упр. 9-50. Покажите, что  $A \leqslant_T B \Leftrightarrow A^T \leqslant_B T$ . Это дает изоморфизм из  $T$ -упорядочения в 1-упорядочение (хотя образ  $T$ -степени не лежит в этой  $T$ -степени). Этот результат будет доказан в гл. 13.

9-52. Покажите, что не существует максимальной  $T$ -степени.

$\triangle$ 9-53. Назовем множество  $A$   $\forall$  $\exists$ -множеством, если  $A = \{x | (\forall y)(\exists z) R(x, y, z)\}$  для некоторого рекурсивного отношения  $R$ .  $\exists\forall$ -множества определяются подобным образом. Покажите, что  $A$  есть как  $\exists\forall$ , так и  $\forall\exists$ -множество  $\Leftrightarrow A \leqslant_T K$ .

$\triangle$ 9-54. Покажите, что  $\{x | W_x \text{ конечно}\}$  есть  $\exists\forall$ -множество и что  $\{x | W_x \text{ конечно}\} \equiv K^A$ . Это решает проблему, оставленную открытой Постом [1944]. В гл. 14 мы рассмотрим общий метод подхода к таким проблемам.

$\triangle$ 9-55. (Тенненбаум). Определите  $A \leqslant_Q B$ , если  $(\exists$  общерекурсивная функция  $f$ )  $(\forall x)[x \notin A \Leftrightarrow W_{f(x)} \cap \bar{B} \neq \emptyset]$ . Покажите, что  $\leqslant_Q$  не совпадает с  $\leqslant_T$  на рекурсивно перечислимых множествах (см. упр. 9-22). (Указание. Возьмите  $A$  и  $B$ , как в упр. 8-39. Пусть  $C$  — простое множество, такое, что  $C \leqslant_T A$  (по теореме Деккера). Предположите, что  $C \leqslant_Q A$  посредством  $f$ , и получите противоречие, рассматривая  $\{x | W_{f(x)} \cap B \neq \emptyset\}$  и  $\{x | W_{f(x)} \subset \bar{B} \& W_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset\}$ .)

## § 9.7

- 9-56. (a) Покажите, что  $\leq_e$  рефлексивно и транзитивно.  
 (b) Покажите, что упорядочение по  $e$ -сводимости образует полурешетку.  
 (c) Существует ли минимальная степень? Если да, то какова она?
- 9-57. Рассмотрите три отношения:  $A$  рекурсивно в  $B$ ,  $A \leq_e B$  и  $A$  рекурсивно перечислимо в  $B$ .

- (i) Установите импликации, всегда имеющие место.  
 (ii) Для импликаций, которые места не имеют, приведите контрпримеры.
- (Указание. Возьмите  $K$  и  $\emptyset$ ;  $K$  и  $K$ ;  $K^K$  и  $K$ .)
- 9-58. Пусть  $\Psi$  — оператор перечисления. Какие отношения включения должны иметь место для следующих пар:

$$\Psi(A \cup B), \Psi(A) \cup \Psi(B); \quad \Psi(A \cap B), \Psi(A) \cap \Psi(B)?$$

- 9-59. Покажите, что  $A$  рекурсивно перечислимо в  $B \Leftrightarrow A \leq_e \tau(c_B)$ .
- 9-60. Пусть  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы. Покажите, что  $A \leq_T B \Leftrightarrow \bar{A} \leq_e \bar{B}$ .

- 9-61. (a) Покажите:  $(\forall A)(\exists \phi)[A \equiv_e \tau(\phi)]$ .  
 (b) Покажите:  $(\forall A)(\exists f)[A \equiv_e \tau(f)] \Rightarrow (\exists B)[A \equiv_e \tau(c_B)]$  (ср. упр. 9-70).  
 9-62. Определите:  $A \leq_s B$ , если  $(\exists$  общерекурсивная  $f)(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \cap B \neq \emptyset]$ .  
 (i) Опишите  $s$ -степени рекурсивно перечислимых множеств.  
 (ii) Покажите, что  $s$ -сводимость  $\Rightarrow e$ -сводимость, но не обратно.  
 (Упр. 9-55 и 9-61 показывают, что  $s$ -сводимость отличается от  $e$ -сводимости нетривиальным образом.)

## § 9.8

- 9-63. (a) Приведите пример рекурсивного оператора, который не является общерекурсивным оператором.  
 (b) Могут ли два различных оператора перечисления определять один и тот же частичнорекурсивный оператор?  
 9-64. Определите отображение  $\Psi$  посредством

$$\Psi(\langle\langle 0, 0 \rangle\rangle) = \langle\langle 0, 0 \rangle\rangle; \quad \Psi(\langle\langle 1, 0 \rangle\rangle) = \langle\langle 0, 1 \rangle\rangle.$$

Покажите, что  $\Psi$  может быть продолжено до частичнорекурсивного оператора, но не до рекурсивного оператора.

- 9-65. Докажите следствие XXIV.  
 9-66. Выясните, рекурсивны ли следующие множества:  
 (i)  $\{z \mid \Phi_z$  определяет рекурсивный оператор};  
 (ii)  $\{z \mid \Phi_z$  определяет общерекурсивный оператор};  
 (iii)  $\{z \mid$  частичнорекурсивный оператор, определяемый  $\Phi_z$ , может быть продолжен до общерекурсивного оператора}.

- △9-67. Пусть  $\mathcal{C}$  — класс операторов перечисления. Покажите, что  $\{x \mid \Phi_x \in \mathcal{C}\}$  рекурсивно тогда и только тогда, когда  $\mathcal{C}$  пусто или  $\mathcal{C}$  состоит из всех операторов перечисления (ср. с упр. 2-39 (a)).

- ▲9-68. (a) Пусть  $\mathcal{C}$  — класс частичнорекурсивных функций. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Райса — Шапиро, приводимой в упр. 5-37.

- (b) Пусть  $\mathcal{C}$  — класс операторов перечисления. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Райса — Шапиро, приведенной в упр. 5-37.

- ▲9-69. Покажите, что если  $\psi \leq_e \varphi$ , то может и не существовать рекурсивного оператора, переводящего  $\varphi$  в  $\psi$ .

- ▲9-70. Воспользовавшись результатом упр. 9-69, покажите, что существует  $\varphi$ , такое, что для всех  $x$  определенных функций  $f$   $\varphi \not\equiv_e f$ . (Отсюда, согласно упр. 9-61, образ упорядочения по  $T$ -сводимости в упорядочении по  $e$ -сводимости (задаваемый теоремой XXIV) есть собственное подупорядочение упорядочения по  $e$ -сводимости.)

Глава 10. ПРОБЛЕМА ПОСТА;  
НЕПОЛНЫЕ МНОЖЕСТВА

- § 10.1. Конструктивные подходы 209  
 § 10.2. Фридбергово решение 212  
 § 10.3. Дальнейшие результаты и проблемы 217  
 § 10.4. Неотделимые множества произвольной рекурсивно перечислимой степени 220  
 § 10.5. Теории произвольной рекурсивно перечислимой степени 222  
 § 10.6. Упражнения 226

## § 10.1. КОНСТРУКТИВНЫЕ ПОДХОДЫ

Для всякого множества  $A$  пусть  $d_T(A)$  есть  $T$ -степень  $A$ . *Проблема Поста* состоит в следующем: существуют ли рекурсивно перечислимые  $T$ -степени, отличные от  $d_T(\emptyset)$  и от  $d_T(K)$ , т. е. существуют ли рекурсивно перечислимые множества, которые не рекурсивны и не полны? Поскольку  $d_T(\emptyset)$  минимальна, а  $d_T(K)$  максимальна среди всех рекурсивно перечислимых  $T$ -степеней, эта проблема может быть сформулирована следующим образом: существует ли промежуточная между  $d_T(\emptyset)$  и  $d_T(K)$  рекурсивно перечислимая  $T$ -степень? Нечто, относящееся к истории и значению проблемы Поста, уже обсуждалось в § 9.6.

В этой главе мы решим проблему Поста, показав, что существуют *несравнимые* (относительно  $\leq_T$ ) рекурсивно перечислимые множества. Таким образом, будет установлено, что существуют несравнимые рекурсивно перечислимые степени при каждом из четырех главных упорядочений по сводимости, т. е. при упорядочении по  $1$ -,  $m$ -,  $tt$ - и  $T$ -сводимости.

В настоящем разделе мы приведем некоторый результат (теорема II), проясняющий природу ряда трудностей, возникающих при попытках решить проблему Поста.

Пусть  $A$  — рекурсивно перечислимое множество. Рассмотрим утверждение о нерекурсивности  $A$ . Согласно теореме 5-II, оно может быть выражено так:

$$(\forall x)[\bar{A} \neq W_x],$$

или, эквивалентным образом,  $(\forall x)(\exists y)[y \in A \Leftrightarrow y \in W_x]$ . Если квантор существования в этом утверждении может быть заменен общерекурсивной функцией, т. е. если

$$(\exists \text{ общерекурсивная } f)(\forall x)[f(x) \in A \Leftrightarrow f(x) \in W_x],$$

мы скажем, что  $A$  *конструктивно нерекурсивно*. Для рекурсивно перечислимого множества  $A$  утверждение о конструктивной

нерекурсивности эквивалентно утверждению о том, что  $\bar{A}$  вполне продуктивно (см. § 7.7). Итак, мы имеем следующий результат.

**Теорема I.** *Если множество  $A$  рекурсивно перечислимо и конструктивно нерекурсивно, то  $A$  — творческое множество.*

**Доказательство.** Утверждение теоремы вытекает непосредственно из определения<sup>1)</sup>. ■

Теорема I показывает, что построение нетворческих нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств потребует специальных неконструктивных методов. Если бы творческие множества были единственными нерекурсивными рекурсивно перечислимими множествами, теорема I могла бы навести нас на мысль о том, что никаких других нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств и не существует. Разумеется, мы знаем, что в действительности другие такие множества существуют, а именно, таковыми являются все множества из классов  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  и  $\mathcal{C}_3$  § 8.7. В соответствии с теоремой I построение таких множеств должно использовать довольно изощренные методы. Первая такая непрямая конструкция была предложена Постом; она приведена в теореме 8-II. (Пример утверждения, которое истинно, но не “конструктивно истинно”, содержится у Клини [1943].)

Подобная же ситуация возникает в связи с проблемой Поста. Для того чтобы доказать, что существуют рекурсивно перечислимые множества, которые не рекурсивны и не полны, мы должны найти множество  $C$ , такое, что  $C$  рекурсивно перечислимо,  $C \not\subset \emptyset$  и  $C \not\subset A$ . Согласно теореме 9-IV, утверждение о том, что  $A \not\subset B$  для рекурсивно перечислимых множеств  $A$  и  $B$ , может быть выражено посредством

$$(\forall x) [\bar{A} \neq W_x^B],$$

или, эквивалентным образом,  $(\forall x) (\exists y) [y \in A \Leftrightarrow y \in W_x^B]$ . Если

( $\exists$  общерекурсивная  $f$ )  $(\forall x) [f(x) \in A \Leftrightarrow f(x) \in W_x^B]$ , мы скажем, что  $A$  конструктивно нерекурсивно в  $B$ .

**Теорема II.** *Если множества  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы и если  $A$  конструктивно нерекурсивно в  $B$ , то множество  $B$  рекурсивно.*

**Доказательство.** Пусть дано произвольное  $z$ . Определим  $B$ -частичнорекурсивную функцию  $\psi$  следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } z \notin B; \\ \text{расходится}, & \text{если } z \in B. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Обращение следует из гл. 11. Таким образом, мы имеем: для рекурсивно перечислимого множества  $A$ ,  $A$  — творческое множество  $\Leftrightarrow A$  конструктивно нерекурсивно.

Гёделев номер функции  $\psi$  может быть получен равномерно по  $z$ . Следовательно, существует общерекурсивная функция  $g$ , такая, что для всех  $z$

$$W_{g(z)}^B = \begin{cases} N, & \text{если } z \notin B; \\ \emptyset, & \text{если } z \in B. \end{cases}$$

По предположению существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $(\forall x) [f(x) \in A \Leftrightarrow f(x) \in W_x^B]$ . Рассмотрим  $fg(z)$  для произвольного  $z$ . Мы имеем

$$fg(z) \in A \Leftrightarrow fg(z) \in W_{g(z)}^B \text{ (в силу выбора } f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_{g(z)}^B = N \text{ (в силу выбора } g) \Leftrightarrow z \notin B.$$

Таким образом,

$$\bar{B} = g^{-1}f^{-1}(A).$$

По предположению  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы. Следовательно (согласно теореме 5-VII),  $\bar{B}$  рекурсивно перечислимо, и тем самым  $B$  рекурсивно. ■

Естественным подходом к решению проблемы Поста является попытка найти рекурсивно перечислимое множество  $C$ , такое, что  $C$  конструктивно нерекурсивно в  $\emptyset$  и множество  $K$  конструктивно нерекурсивно в  $C$ . Согласно теореме II, всякий такой конструктивный подход должен быть безуспешным. До окончательного решения проблемы Поста некоторые исследователи полагали, что существуют лишь две рекурсивно перечислимые Т-степени. Отчасти ответственность за эти ошибочные предположения лежит на утверждение теоремы II.

Из теоремы II может быть выведено следствие, показывающее, что возможна такая ситуация: множество  $A$  не рекурсивно в  $B$ , хотя  $A$  не является конструктивно нерекурсивным в  $B$ . Это следствие придает некоторую правдоподобность утверждению (которое будет доказано в § 10.2) о том, что существует более двух рекурсивно перечислимых Т-степеней.

**Следствие II (а).** *Если множества  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы и  $A$  конструктивно нерекурсивно в  $B$ , то  $B$  рекурсивно, а  $A$  — творческое множество.*

**(б)** *Существуют рекурсивно перечислимые множества  $A$  и  $B$ , такие, что  $A$  не рекурсивно в  $B$ , хотя множество  $A$  не является конструктивно нерекурсивным в  $B$ .*

**Доказательство.** (а) Утверждение о том, что множество  $A$  конструктивно нерекурсивно в  $B$ , является частичной релятивизацией утверждения о вполне-продуктивности  $\bar{A}$ , отсюда следует вполне-продуктивность  $\bar{A}$  (см. упр. 10-2).

(b) Пусть  $A$  — произвольное простое множество, а множество  $B = \emptyset$ . Тогда  $A$  не рекурсивно в  $B$ , но ввиду (а) множество  $A$  не является конструктивно нерекурсивным в  $B$ <sup>1)</sup>. ■

## § 10.2. ФРИДБЕРГОВО РЕШЕНИЕ

Проблема Поста была решена независимо и почти одновременно Мучником и Фридбергом в 1956 году (см. Мучник [1956] и Фридберг [1957]). В определенном смысле методы, примененные Мучником и Фридбергом, аналогичны<sup>2)</sup>. Мы приводим модифицированную форму фридбергова доказательства.

**Теорема III** (теорема Мучника — Фридберга). *Существуют рекурсивно перечислимые множества  $A$  и  $B$ , такие, что  $A$  и  $B$  несравнимы относительно  $\leq_t$ .*

**Доказательство.** Мы должны (1) дать инструкции для перечисления множеств  $A$  и  $B$  и (2) доказать существование двух всюду определенных функций  $f$  и  $g$ , таких, что  $(\forall x)[f(x) \in A \Leftrightarrow f(x) \in W_x^B]$  и  $(\forall x)[g(x) \in B \Leftrightarrow g(x) \in W_x^A]$ . (Из теоремы II следует, что функции  $f$  и  $g$  не могут быть рекурсивными.)

Из соображений наглядности мы зададим инструкции в терминах, до некоторой степени антропоморфических; эти инструкции будут тем не менее вполне точны. Начнем с двух идентичных бесконечных вертикальных списков, которые мы будем называть *A-списком* и *B-списком*. Каждый список состоит из всех натуральных чисел, расположенных в порядке возрастания сверху вниз. На любом этапе вычисления мы будем использовать лишь конечную часть каждого списка<sup>3)</sup>. В процессе вычисления мы в каждом списке рядом с некоторыми натуральными числами приписываем плюс (+). Множество натуральных чисел, получивших при этом плюс в *A-списке*, составляет множество  $A$ . Множество чисел, получивших плюс в *B-списке*, составляет множество  $B$ . Вычисление производится по этапам.

**Определение.**  $A_0 = B_0 = \emptyset$ .

$A_n = \{x \mid x \text{ получает плюс в } A\text{-списке к концу } n\text{-го этапа}\}$ ,  
 $n = 1, 2, \dots$ ;

$B_n = \{x \mid x \text{ получает плюс в } B\text{-списке к концу } n\text{-го этапа}\}$ ,  
 $n = 1, 2, \dots$ .

<sup>1)</sup> Обращение следствия II (а) также имеет место. См. упр. 10-2 и предшествующее примечание.

<sup>2)</sup> В своих исходных представлениях и Мучник, и Фридберг основывались на ранних идеях и результатах Клини и Поста. Мы не описываем и не используем эту зависимость здесь. Некоторые из этих результатов Клини — Поста будут приведены в гл. 13.

<sup>3)</sup> Каждый бесконечный список в некотором отношении аналогичен бесконечной ленте машины Тьюринга.

Тогда  $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ;  $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \dots$ ;  $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ ;

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

В процессе вычисления используются два бесконечных множества *подвижных маркеров*. Мы обозначим маркеры первой совокупности через  $[0]_1, [1]_1, [2]_1, \dots$ , маркеры второй совокупности через  $[0]_2, [1]_2, [2]_2, \dots$ . Маркеры первой совокупности будут относиться к числам *A-списка*, маркеры второй совокупности — к числам *B-списка*. Эти маркеры подвижны в следующем смысле: в момент введения маркера в процесс вычисления его соотносят с некоторым числом одного из списков; в более поздний момент вычисления связь маркера с этим числом может быть нарушена, и этот маркер соотносят с другим числом, находящимся ниже в этом списке; в еще более поздний момент он вновь может быть перемещен вниз и т. д. Данный маркер может перемещаться подобным образом несколько раз.

Нами движут следующие побуждения: мы хотим в конечном итоге соотнести каждый маркер  $[j]_1$  с числом  $x_j$ , таким, что  $x_j \in A \Leftrightarrow x_j \text{ имеет плюс} \Leftrightarrow x_j \in W_j^B$ . Если мы сможем успешно проделать это для каждого  $[j]_1$ , то будем иметь  $(\forall x)(\exists y)[y \in A \Leftrightarrow y \in W_x^B]$  и, следовательно,  $A \leq_t B$ . Аналогично для каждого маркера  $[j]_2$  и  $B \leq_t A$ .

Далее приводятся определение и лемма, используемые нашей конструкцией. Пусть даны  $z$  и конечное множество  $D$ . Тогда

$$W_z^D = \{x \mid (\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)} \text{ и } D_u \subset D \text{ и } D_v \subset \bar{D}]\},$$

согласно § 9.2. и 9.3. Следующая последовательность действий является (равномерным) алгоритмом для перечисления множества  $W_z^D$ : перечисляйте элементы множества  $W_{\rho(z)}$ ; как только появляется какой-либо элемент  $\langle x, y, u, v \rangle$ , проверяйте, будет ли  $D_u \subset D$  и  $D_v \subset \bar{D}$ ; если это выполняется, добавьте  $x$  к списку для  $W_z^D$ .

**Определение.** Пусть даны  $z$  и конечное множество  $D$ . Под  $n$  шагами при перечислении множества  $W_z^D$  мы будем понимать процесс применения описанного алгоритма, соответствующий  $n$  машинным шагам при перечислении множества  $W_{\rho(z)}$ .

**Лемма.** Для любой последовательности конечных множеств  $A_0, A_1, \dots$ , такой, что  $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A$ , если  $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  и если  $a \in W_z^A$ , то  $(\exists m) (\forall n) [m \leq n \Rightarrow a \text{ появляется за } n \text{ шагов при перечислении } W_z^{A_n}]$ .

Доказательство леммы очевидно (упр. 10-5).

Продолжая доказательство теоремы, приводим инструкции для основного вычисления.

**Определение.** Будем говорить, что натуральное число *свободно* в данном списке в данный момент времени, если ни само это число, ни любое другое число, находящееся ниже его в этом списке, не имеют никакой отметки или маркера, с ними соотнесенных. Будем говорить, что натуральное число *вакантно* в данном списке в данный момент времени, если оно не имеет *плюса* рядом с собой.

Этап 1. Соотнесите  $\boxed{0}_1$  с 0 в *A-списке*.

Этап 2. Соотнесите  $\boxed{0}_2$  с 0 в *B-списке*.

.....

Этап  $2n+1$ . Соотнесите  $\boxed{n}_1$  с первым свободным числом в *A-списке*. Пусть  $a_0^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$  — текущие позиции  $\boxed{0}_1, \boxed{1}_1, \dots, \boxed{n}_1$ . Предпримите по  $n$  шагов при перечислении каждого из множеств  $W_0^{B_{2n}}, \dots, W_n^{B_{2n}}$ . Пусть  $a_j^{(n)}$  есть наименьший элемент множества  $\{a_0^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}\}$ , такой, что число  $a_j^{(n)}$  вакантно и  $a_j^{(n)}$  встречается в выполненной части перечисления множества  $W_j^{B_{2n}}$ . (Если такого  $a_j^{(n)}$  не существует, переходите к этапу  $2n+2$ .) Поместите *плюс* рядом с элементом  $a_j^{(n)}$  в *A-списке* и *минус* рядом с каждым из тех вакантных чисел *B-списка*, принадлежность которых к множеству  $\bar{B}_{2n}$  использовалась при установлении того факта, что  $a_j^{(n)} \in W_j^{B_{2n}}$ <sup>1)</sup>. Затем, если  $j < n$ , переходите к *B-списку* и переместите все маркеры  $\boxed{i}_2, j \leq i \leq n$ , вниз на свободные числа в *B-списке*.

Этап  $2n+2$ . Соотнесите  $\boxed{n}_2$  с первым свободным числом в *B-списке*. Пусть  $b_0^{(n)}, \dots, b_n^{(n)}$  — текущие позиции  $\boxed{0}_2, \dots, \boxed{n}_2$ .

<sup>1)</sup> Иными словами, если  $a_j^{(n)} \in W_j^{B_{2n}}$  установлено на основании того, что  $\langle a_j^{(n)}, y, u, v \rangle$  обнаружено в  $W_{p(j)}$  (за  $n$  шагов), где  $D_u \subset B_{2n}$  и  $D_v \subset \bar{B}_{2n}$ , то поместите *минус* рядом с каждым вакантным элементом множества  $D_v$  в *B-списке*.

Предпримите  $n$  шагов в перечислении каждого из множеств  $W_0^{A_{2n+1}}, \dots, W_n^{A_{2n+1}}$ . Пусть  $b_j^{(n)}$  — наименьший элемент множества  $\{b_0^{(n)}, \dots, b_n^{(n)}\}$ , такой, что число  $b_j^{(n)}$  вакантно и  $b_j^{(n)}$  встречается в выполненной части перечисления множества  $W_j^{A_{2n+1}}$ . (Если такого  $b_j^{(n)}$  не существует, переходите к этапу  $2n+3$ .) Поместите *плюс* рядом с элементом  $b_j^{(n)}$  в *B-списке* и *минус* рядом с каждым из тех вакантных чисел в *A-списке*, принадлежность которых множеству  $\bar{A}_{2n+1}$  использовалась, чтобы установить, что  $b_j^{(n)} \in W_j^{A_{2n+1}}$ . Затем, если  $j < n$ , переходите к *A-списку* и переместите все маркеры  $\boxed{i}_1, j < i \leq n$ , вниз на свободные числа в *A-списке*.

(Заметим, что в каждом списке рядом с некоторым числом может появиться сначала *минус*, а затем *плюс*.)

Простое индуктивное соображение позволяет установить, что всякий маркер  $\boxed{n}_1$  и всякий маркер  $\boxed{n}_2$  может перемещаться лишь конечное число раз:  $\boxed{0}_1$  никогда не перемещается;  $\boxed{0}_2$  может перемещаться самое большое один раз;  $\boxed{1}_1$  может перемещаться не более одного раза при каждом положении маркера  $\boxed{0}_2$ ;  $\boxed{1}_2$  может перемещаться не более одного раза из-за маркера  $\boxed{0}_1$  и не более одного раза при каждом положении маркера  $\boxed{1}_1$  и т. д.<sup>1)</sup>.

Пусть  $f(x)$  — заключительное положение маркера  $\boxed{x}_1$ ,  $g(x)$  — заключительное положение маркера  $\boxed{x}_2$ . Предположим, что  $f(x) \in A$ . Тогда  $f(x)$  получает *плюс* на некотором этапе  $2n+1$ . Никакой *минус*, написанный (в *B-списке*) на этапе  $2n+1$ , не может быть заменен на *плюс*, поскольку все  $\boxed{k}_2, x \leq k$ , помечены ниже всех таких *минусов*, и если бы маркер  $\boxed{k}_2, k < x$ , изменил один из таких *минусов* на *плюс*, то маркер  $\boxed{x}_1$  был бы перемещен, вопреки нашему предположению, что  $f(x)$  есть заключительное положение маркера  $\boxed{x}_1$ . Отсюда заключаем, что  $f(x) \in W_x^B$ . Обратно, если  $f(x) \in W_x^B$ , то, согласно лемме, существует  $m$ , такое, что

<sup>1)</sup> Ограничения на число положений, которые могут занимать маркеры  $\boxed{0}_1, \boxed{0}_2, \boxed{1}_1, \boxed{1}_2, \boxed{2}_1, \dots$ , задаются последовательными значениями чисел Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, ... .

для всех  $n$ , больших  $m$ , множество  $W_x^{B_{2n}}$  выдает  $f(x)$  менее чем за  $n$  шагов; так как маркер  $\boxed{x}_1$  в конце концов достигает положения  $f(x)$ ,  $f(x)$  должно в конечном итоге получить плюс; и, значит,  $f(x) \in A$ . Таким образом,  $f(x) \in A \Leftrightarrow f(x) \in W_x^B$ . Аналогично получаем, что  $g(x) \in B \Leftrightarrow g(x) \in W_x^A$ . Отсюда  $A \not\leqslant_t B$  и  $B \not\leqslant_t A$ , и наше доказательство завершено. ■

Метод, подобный приведенному, иногда называют *методом приоритета*, а упорядочение, подобное упорядочению  $\boxed{0}_1, \boxed{0}_2,$

$\boxed{1}_1, \dots$  — *приоритетным упорядочением*. В приведенном доказательстве в тот момент, когда маркер ставит рядом с собой плюс, все маркеры более низкого ранга должны „сработать“, т. е. должны сместиться вниз так, чтобы они не могли впоследствии повлиять на минусы, которые появились к этому моменту. Основной чертой такого метода приоритета является тот факт, что всякий маркер перемещается лишь конечное число раз. Ниже, в упражнениях, приводится несколько других методов приоритета, в гл. 12 содержатся дальнейшие примеры.

Приведем следствия, из которых первые два очевидны, а третье получается обобщением конструкции теоремы.

**Следствие III (a) (решение проблемы Поста).** *Существуют более чем две рекурсивно перечислимые Т-степени.*

**Следствие III (b).** *Существуют два рекурсивно перечислимых множества, не сравнимых относительно упорядочения по сводимостям  $\leqslant_1, \leqslant_m$  и  $\leqslant_t$ .*

**Следствие III (c).** *Существует счетное бесконечное семейство рекурсивно перечислимых Т-степеней, такое, что любые два элемента этого семейства несравнимы относительно  $\leqslant_t$ .*

**Доказательство.** См. упр. 10-7. ■

**Следствие III (d).** *Существует  $\aleph_0$  рекурсивно перечислимых Т-степеней.*

*Существует  $\aleph_0$  рекурсивно перечислимых  $tt$ -степеней.*

*Существует  $\aleph_0$  рекурсивно перечислимых  $m$ -степеней.*

*Существует  $\aleph_0$  рекурсивно перечислимых 1-степеней.*

**Доказательство.** Все утверждения вытекают очевидным образом из следствия III (c). ■

Последние два утверждения следствия III (d) уже известны нам из § 8.6.

### § 10.3. ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ПРОБЛЕМЫ

Можно воспользоваться теоремой III и леммой теоремы 8-XIV, чтобы показать, что упорядочение по 1-сводимости не образует верхней полурешетки.

**Теорема IV (Янг).** *Существуют два рекурсивно перечислимых множества, не имеющих наименьшей верхней грани при упорядочении по 1-сводимости.*

**Доказательство.** Согласно теореме III и теореме 9-XVI (теорема Деккера), существуют два простых множества, не сравнимых относительно 1-сводимости. Назовем эти множества  $A$  и  $B$ . Наше доказательство проведем следующим образом. Мы покажем, во-первых, что  $A$  и  $B$  имеют верхнюю грань, являющуюся простым множеством; во-вторых, что любая наименьшая верхняя грань должна быть простым множеством. Наконец, мы воспользуемся леммой теоремы 8-XIV, чтобы показать, что никакая наименьшая верхняя грань простым множеством быть не может.

Пусть  $C = A \oplus B$ . Согласно упр. 8-1, множество  $C$  просто.  $A \leqslant_1 C$  посредством функции  $\lambda x[2x]$ , и  $B \leqslant_1 C$  посредством  $\lambda x[2x + 1]$ .

Предположим,  $D$  является наименьшей верхней гранью множеств  $A$  и  $B$ . Тогда  $D \leqslant_1 C$  и тем самым множество  $D$  должно быть просто (упр. 8-9). Пусть  $A \leqslant_1 D$  посредством функции  $f$  и  $B \leqslant_1 D$  посредством функции  $g$ . Функции  $f$  и  $g$  могут быть выбраны так, что  $f(A) = D$  и  $g(B) = D$  (упр. 10-10). Тогда  $\bar{D} - f(N) \neq \emptyset$  и  $\bar{D} - g(N) \neq \emptyset$  (в противном случае  $D = A$  или  $D = B$ , что противоречит нашему выбору множеств  $A$  и  $B$ , как несравнимых).

Возьмем  $m \in \bar{D} - f(N)$  и  $n \in \bar{D} - g(N)$ . Тогда  $A \leqslant_1 D \cup \{m\}$  посредством  $f$  и  $B \leqslant_1 D \cup \{m\}$  посредством  $h$ , где

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } g(x) \neq m; \\ n, & \text{если } g(x) = m. \end{cases}$$

Отсюда  $D \cup \{m\}$  есть верхняя грань  $A$  и  $B$ . Ввиду леммы теоремы 8-XIV,  $D \not\leqslant_1 D \cup \{m\}$ . Это противоречит нашему выбору  $D$  как наименьшей верхней грани. Тем самым множества  $A$  и  $B$  суть два рекурсивно перечислимых множества, не имеющие наименьшей верхней грани при упорядочении по 1-сводимости. ■

Дальнейшую информацию об упорядочении по Т-сводимости рекурсивно перечислимых Т-степеней содержит следующий результат, анонсированный Саксом. Мы приводим его здесь без доказательства. Этот результат представляет собой сильную версию нашего решения проблемы Поста. В доказательстве используется метод приоритета.

**Теорема (Сакс).** Пусть  $\Pi$  — счетное частичное упорядочение, и пусть  $A$  — произвольное рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество. Тогда существует совокупность рекурсивно перечислимых множеств, каждое из которых Т-сводимо к  $A$ , частичное упорядочение которых по Т-сводимости изоморфно  $\Pi$ .

Эта теорема немедленно приводит к такому конкретному результату: существует совокупность рекурсивно перечислимых степеней, линейно упорядоченных относительно Т-сводимости по типу рациональных чисел.

В упр. 10-11 мы получим специальный случай теоремы Сакса. Следствием его является результат, впервые аннонсированный Мучником: не существует нерекурсивного рекурсивно перечислимого множества, которое минимально (относительно  $\leq_T$ ) среди нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств.

Следующая теорема Сакса [1964 а] показывает, что не существует рекурсивно перечислимого множества, максимального (относительно  $\leq_T$ ) среди неполных рекурсивно перечислимых множеств.

**Определение.**  $A <_T B$ , если  $A \leq_T B$  и  $B \not\leq_T A$ .

**Теорема (Сакс).** Если множества  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы и  $A <_T B$ , то существует рекурсивно перечислимое множество  $C$ , такое, что  $A <_T C <_T B$ .

Интересный вопрос, относящийся к упорядочению по Т-сводимости рекурсивно перечислимых Т-степеней, связан с гипотезой Шёнфильда, которую мы сформулируем, введя несколько предварительных определений.

**Определение.**  $d_T(A) \oplus d_T(B) = d_T(A \oplus B)$ .

Согласно теореме 9-ХIII, эта операция сочленения корректно определена на Т-степенях и сочленение двух Т-степеней есть наименьшая верхняя грань их при упорядочении по Т-сводимости. Заметим, что сочленение двух рекурсивно перечислимых степеней рекурсивно перечислимо.

Упорядочение по Т-сводимости Т-степеней может рассматриваться как алгебраическая структура, включающая (i) некоторое бинарное отношение (отношение  $\leq_T$ ), (ii) некоторую бинарную операцию (операцию сочленения) и (iii) два различных элемента (рекурсивную и полную степени). Рассмотрим все алгебраические структуры (i) с бинарным отношением, (ii) с бинарной операцией и (iii) с двумя различными элементами. Мы обозначим бинарное отношение через  $\leq$ , бинарную операцию через  $\cup$  и два различных элемента через  $0$  и  $1$ . Скажем, что две такие структуры  $L$  и  $M$  алгебраически изоморфны, если существует взаимно однозначное отображение  $f$  структуры  $L$  на  $M$ , такое, что  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,

$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b),$$

а  $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$ . Если  $a_1, \dots, a_n$  суть элементы структуры  $L$ , то  $L(a_1, \dots, a_n)$  будет обозначать подструктуру структуры  $L$ , порожденную элементами  $a_1, \dots, a_n$  (пересечение всех подструктур, содержащих  $0, 1, a_1, \dots, a_n$  и замкнутых относительно  $\cup$ ). Если  $a_1, \dots, a_n$  — элементы структуры  $L$  и  $b_1, \dots, b_n$  — элементы структуры  $M$ , будем говорить, что  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  строго эквивалентно  $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ , если существует алгебраический изоморфизм  $f$  подструктуры  $L(a_1, \dots, a_n)$  на  $M(b_1, \dots, b_n)$ , такой, что  $f(a_i) = b_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Определение.** Пусть  $\mathcal{A}$  — любая совокупность структур. Назовем  $L$  плотной структурой (относительно  $\mathcal{A}$ ), если  $L$  — структура из  $\mathcal{A}$ , и для любой структуры  $M$  из  $\mathcal{A}$ , любого  $n$ , любых  $a_1, \dots, a_n$  из  $L$ , любых  $b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$  из  $M$   $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  строго эквивалентно  $\langle b_1, \dots, b_n \rangle \Rightarrow$  существует  $a_{n+1}$  в  $L$ , такое, что  $\langle a_1, \dots, a_{n+1} \rangle$  строго эквивалентно  $\langle b_1, \dots, b_{n+1} \rangle$ .

**Пример.** Пусть  $\mathcal{A}$  — совокупность всех структур, таких, что  $\leq$  есть плотное (в обычном смысле) линейное упорядочение,  $\cup$  есть операция взятия наименьшей верхней грани при этом упорядочении,  $0 \leq 1$  и  $1 \not\leq 0$ . Тогда рациональные числа при их обычном упорядочении образуют плотную (в выше определенном смысле) структуру относительно этой совокупности.

Нетрудно показать, что любые две счетные плотные структуры относительно одной и той же совокупности  $\mathcal{A}$  алгебраически изоморфны (урп. 10-12). (Это является обобщением теоремы Кантора, частный случай которой приведен выше в качестве примера.) Плотные структуры не обязательно существуют (урп. 10-13).

Мы можем теперь сформулировать гипотезу Шёнфильда. Пусть  $\mathcal{A}_T$  — совокупность всех структур, удовлетворяющих следующим условиям: (i)  $\leq$  есть частичное упорядочение, (ii)  $\cup$  дает наименьшую верхнюю грань относительно упорядочения  $\leq$ ; (iii)  $0$  есть минимальный элемент относительно упорядочения  $\leq$  и (iv)  $1$  есть максимальный элемент относительно упорядочения  $\leq$ . Нетрудно показать, что совокупность  $\mathcal{A}_T$  обладает счетной плотной структурой (см. урп. 10-14). Согласно урп. 10-12, эта счетная плотная структура единственна с точностью до изоморфизма.

**Гипотеза Шёнфильда.** Упорядочение по Т-сводимости рекурсивно перечислимых Т-степеней образует счетную плотную структуру относительно  $\mathcal{A}_T$  (с отношением  $\leq_T$  в качестве  $\leq$ , сочленением в качестве  $\cup$ , рекурсивной степенью в качестве  $0$  и полной степенью в качестве  $1$ ).

Два предложения непосредственно вытекают из гипотезы Шёнфильда (как было замечено Шёнфильдом).

**Предложение 1.** Для любых двух перекурсивных рекурсивно перечислимых множеств  $A$  и  $B$ , таких, что  $A <_T B$ , суще-

ствует рекурсивно перечислимое множество  $C$ , такое, что  $A \not\leq_t C$ ,  $C \not\leq_t A$  и  $d_t(B) = d_t(A) \oplus d_t(C)$ .

**Предложение 2.** Если  $A$  и  $B$  — рекурсивно перечислимые множества,  $A \not\leq_t B$  и  $B \not\leq_t A$ , то  $d_t(A)$  и  $d_t(B)$  не имеют наибольшей нижней грани при упорядочении по Т-сводимости.

Обе теоремы Сакса, приведенные выше, также непосредственно вытекают из гипотезы Шёнфильда (см. упр. 10-15 и 10-16). Гипотеза Шёнфильда, если бы она оказалась верной, была бы наименее формой решения проблемы Поста<sup>1)</sup>. В 1965 г. Лахлан опроверг предложение 1, Ейтс опроверг предложение 2 (построив два рекурсивно перечислимых Т-несправимых множества  $A$  и  $B$ , таких, что  $[C \leq_t A \& C \leq_t B] \Rightarrow C$  рекурсивно). Таким образом гипотеза Шёнфильда была опровергнута.

#### § 10.4. НЕОТДЕЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА ПРОИЗВОЛЬНОЙ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМОЙ СТЕПЕНИ

Мы теперь установим, что всякая нерекурсивная рекурсивно перечислимая Т-степень содержит пару рекурсивно неотделимых непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств. (Пары неотделимых множеств были введены и обсуждались в § 7.7.) Конструкция, используемая в доказательстве, представляет специальный интерес. Она перекликается с конструкцией, предлагаемой ниже в упр. 10-11. Этот результат принадлежит Шёнфильду [1958a].

**Теорема V (Шёнфильд).** Пусть множество  $C$  рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно. Тогда существует пара рекурсивно неотделимых непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств  $A$  и  $B$ , таких, что  $A \equiv_t B \equiv_t C$ .

**Доказательство.** Пусть  $f$  — общерекурсивная функция, пересчитывающая без повторений множество  $C$ . Определим функцию  $\psi$  следующим образом:

$$\psi(\langle x, y \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{если } (\exists z)(\exists w)[f(z) = x \& w < z \& P_y \text{ при} \\ & \text{входе } \langle x, y \rangle \text{ выдает } \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ в качестве выхода за } w \text{ шагов.}\end{cases}$$

<sup>1)</sup> Она могла бы также привести к решению следующих, все еще остающихся открытыми, проблем. (1) Является ли теория первого порядка отношения  $\leq_t$  над рекурсивно перечислимими Т-степенями аксиоматизируемой, т. е. рекурсивно перечислимой? (2) Разрешима ли эта теория, т. е. рекурсивна ли она? [Эта теория состоит из ин-формул, образованных из “ $\leq_t$ ” в логике предикатов (без свободных переменных), которые истинны относительно упорядочения по Т-сводимости.]

Согласно второй теореме о проекции, функция  $\psi$  частично рекурсивна. Пусть

$$A = \{x \mid \psi(x) = 1\}, \\ B = \{x \mid \psi(x) = 0\}.$$

Множества  $A$  и  $B$  не пересекаются и, согласно теоремам о проекции, рекурсивно перечислимы. Остается показать, что

$$A \equiv_t B \equiv_t C$$

и что  $A$  и  $B$  рекурсивно неотделимы.

1.  $A \leq_t C$ . Мы можем следующим образом выяснить, имеет ли место  $\langle x, y \rangle \in A$ . Выясняем, принадлежит ли  $x$  множеству  $C$ . Если нет, то  $\langle x, y \rangle \notin A$ . Если да, найдем  $z = f^{-1}(x)$ ; затем проверяем, выдает ли  $P_y$  при входе  $\langle x, y \rangle$  значение 0 менее чем за  $z$  шагов. Если да, то  $\langle x, y \rangle \in A$ . Если нет, значит,  $\langle x, y \rangle \notin A$ .

2.  $B \leq_t C$ . Аналогично.

3.  $C \leq_t A$ . Мы можем следующим образом выяснить, имеет ли место  $x \in C$ . Выберем  $y_0$ , такое, чтобы  $\Phi_{y_0}$  была тождественно равна нулю, т. е.  $\Phi_{y_0} = \lambda z[0]$ . Проверяя, будет ли  $\langle x, y_0 \rangle \in A$ . Если да, то  $x \in C$ . Если нет, путь  $u$  — число шагов, необходимых, чтобы получить  $\Phi_{y_0}(\langle x, y_0 \rangle) = 0$  из инструкций  $P_{y_0}$ ; выясняем, будет ли  $f(z) = x$  для некоторого  $z$ , такого, что  $z \leq u$ . Если да, то  $x \in C$ ; если нет, значит,  $x \notin C$ .

4.  $C \leq_t B$ . Аналогично.

5.  $A$  и  $B$  рекурсивно неотделимы. Предположим противное. Тогда мы можем найти такую общерекурсивную функцию  $h$ , для которой  $\text{Val } h = \{0, 1\}$ ,  $h(A) = 1$  и  $h(B) = 0$ . Пусть  $h = \Phi_{y_1}$ . При всяком  $x \in C$  для вычисления  $P_{y_1}$  при входе  $\langle x, y_1 \rangle$  должно быть проделано по меньшей мере  $z = f^{-1}(x)$  шагов; в противном случае мы имели бы (согласно исходной конструкции)  $\Phi_{y_1}(\langle x, y_1 \rangle) = 0 \Leftrightarrow \Phi_{y_1}(\langle x, y_1 \rangle) = 1$ , что противоречиво. Поскольку  $h$  всюду определена, должна существовать общерекурсивная функция  $g$ , такая, что для всех  $x$   $g(x) =$  (длина вычисления  $P_{y_1}$  при входе  $\langle x, y_1 \rangle$ ). Отсюда имеем

$$x \in C \Leftrightarrow (\exists z)[z < g(x) \& f(z) = x].$$

Тем самым имеем эффективный способ разрешения множества  $C$  в противоречие с предположением, что это множество нерекурсивно. ■

Мы увидим в теореме 11-V, что  $A$  и  $B$  не могут быть эффективно неотделимы, если  $C$  не полно.

### § 10.5. ТЕОРИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМОЙ СТЕПЕНИ<sup>1)</sup>

В § 7.8 мы определили *теорию* как совокупность ип-формул некоторой логической системы. Чтобы иметь возможность применить теорию рекурсивных функций, мы идентифицировали теорию с множеством соответствующих кодовых номеров при некотором выбранном способе кодирования ип-формул натуральными числами. Рассмотрим теперь теории некоторого специального вида.

**Определение.** Пусть  $\mathcal{K}$  — совокупность предикатных символов (например, „ $\leqslant$ ”), операторных символов (например, „ $\cup$ ”) и индивидуальных константных символов (например, „1”). Пусть  $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$  — совокупность всех выражений, образованных в элементарной логике предикатов из символов совокупности  $\mathcal{K}$  вместе с логическими символами логики предикатов („ $=$ ”, „ $\forall$ ”, „ $\exists$ ”, „ $\neg$ ”, „ $\vee$ ”, „ $\&$ ”, „ $\Rightarrow$ ”, „ $\Leftarrow$ ” и индивидуальными переменными „ $a$ ”, „ $a_1$ ”, „ $a_2$ ”, …, „ $b$ ”, „ $c$ ”, …), причем мы требуем, чтобы каждая переменная в выражении находилась в области действия некоторого квантора. Выражения из  $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$  называются *высказываниями первого порядка* в  $\mathcal{K}$ .

**Пример.** Пусть  $\mathcal{K}$  состоит из символов бинарных операций „ $+$ ” и „ $\times$ ” и индивидуальных константных символов „0”, „1”, „2”, … . Тогда  $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$  состоит из ип-формул *элементарной арифметики*, определенной в § 7.8.

**Определение.** Совокупность  $T$  есть *теория первого порядка* в  $\mathcal{K}$ , если (i)  $T$  есть подсовокупность совокупности  $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$  и (ii)  $T$  замкнута в  $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$  относительно выводимости, т. е. любое высказывание из  $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ , выводимое из высказываний совокупности  $T$ , является высказыванием из  $T$ <sup>2)</sup>.

**Определение.**  $T$  есть *теория первого порядка*, если для некоторого  $\mathcal{K}$   $T$  есть теория первого порядка в  $\mathcal{K}$ .

На протяжении всего параграфа мы ограничимся рассмотрением высказываний первого порядка и теорий первого порядка.

Зададимся двумя вопросами относительно теорий первого порядка. (1) Существует ли в каждой степени неразрешимости теория (множество кодовых чисел для теории) первого порядка? (2) Существует ли в каждой рекурсивно перечислимой степени

<sup>1)</sup> В § 10.5 мы предполагаем, что понятие *выводимости* и теоремы о семантической непротиворечивости и полноте для логики предикатов известны. Материал последующих глав не будет зависеть от § 10.5.

<sup>2)</sup> Определение выводимости может быть найдено в работах Куайна [1959] или Сапесса [1957].

неразрешимости аксиоматизируемая, т. е. рекурсивно перечислимая, теория?

Для 1-степеней ответы на оба вопроса, как легко видеть, отрицательны, так как никакая теория первого порядка не может иметь иммунного дополнения. (Если  $x$  вне этой теории, то вне ее и  $x \& x$ , и  $(x \& x) \& x$ , ….)<sup>1)</sup>.

Для m-степеней ответы на оба вопроса также отрицательны. Рассмотрим множество  $S^*$  из теоремы 8-VIII и предположим, что  $T \equiv_m S^*$  для некоторой теории  $T$  первого порядка. Пусть  $S^* \leq_m T$  посредством функции  $f$  и  $T \leq_m S^*$  посредством функции  $g$ . Тогда  $\langle x, y \rangle \in S^* \times S^* \Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle \in T \times T \Leftrightarrow (f(x) \& f(y)) \in T \Leftrightarrow g(f(x) \& f(y)) \in S^*$ ; но это дает  $S^* \times S^* \leq_m S^*$  в противоречие с доказательством теоремы 8-XIII.

Для btt-степеней оба вопроса открыты. (См. также упр. 10-24.)

Для tt-степеней (и, следовательно, для Т-степеней) ответы на оба вопроса утвердительны, как было показано Феферманом [1957].

**Теорема VI (Феферман).** Для всякого множества  $A$  существует теория  $T_A$ , такая, что  $A \leq_1 T_A$  и  $T_A \leq_{tt} A$ ; более того, если  $A$  рекурсивно перечислимо, то теория  $T_A$  аксиоматизируема.

**Доказательство.** Возьмем пустое  $\mathcal{K}$  и рассмотрим  $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ , которое мы с этого момента будем обозначать  $\mathcal{L}_0$  ( $\mathcal{L}_0$  иногда называют „чистым исчислением с равенством”). Типичными высказываниями  $\mathcal{L}_0$  являются

- (i)  $(\forall a)(\exists b)\neg a = b$ ,
- (ii)  $(\exists a)(\exists b)\neg a = b$ ,
- (iii)  $\neg(\exists a)(\forall b)[(\forall c)c = a \vee c = b] \Rightarrow b = a$ .

Для любого данного множества объектов кванторы в высказывании из  $\mathcal{L}_0$  могут быть интерпретированы как имеющие в качестве области действия это множество объектов. Поэтому для любого такого множества объектов данное высказывание из  $\mathcal{L}_0$  должно быть или истинным, или ложным. (Например, (i) истинно для любого множества, мощность которого больше 1.) Очевидно, истинность или ложность данного высказывания для множества объектов зависит лишь от мощности этого множества. В дальнейшем мы ограничимся непустыми множествами объектов<sup>2)</sup>. Мы определим спектр высказывания в  $\mathcal{L}_0$  как совокупность положительных конечных кардинальных чисел, для которых это высказывание истинно. Мы будем писать вместо „спектр  $x$ ” спектр  $(x)$ . Высказывания (i) и (ii), приведенные выше, имеют спектры  $\{x \mid 2 \leq x\}$ ,

<sup>1)</sup> Мы отождествляем высказывание с его кодовым числом (как в упр. 7-62) и используем „ $x$  &  $y$ ” для обозначения (кодового числа) конъюнкции элементов  $x$  и  $y$ .

<sup>2)</sup> Это ограничение необходимо для того, чтобы позже в доказательстве можно было применять теоремы о семантической непротиворечивости и полноте.

(iii) имеет спектр  $\{2\}$ . Некоторые фундаментальные свойства спектров (высказываний из  $\mathcal{L}_0$ ) устанавливаются в следующей лемме.

**Лемма.** (a) *Каждый спектр или конечен, или коконечен.*

(b) *Существует равномерная эффективная процедура перехода от высказывания к его спектру; более конкретно, существуют общерекурсивные функции  $f$  и  $g$ , такие, что для любого высказывания  $x$  если спектр  $(x)$  конечен, то  $g(x) = 0$  и  $D_{f(x)} = \{\text{спектр } (x)\}$ , а если спектр  $(x)$  коконечен, то  $g(x) = 1$  и  $D_{f(x)} = \{\text{спектр } (x)\}$ .*

(c) *Для всякого высказывания  $x$   $x$  истинно для некоторой бесконечной мощности  $\Leftrightarrow x$  истинно для всякой бесконечной мощности  $\Leftrightarrow x$  имеет коконечный спектр.*

(d) *Всякое конечное или коконечное множество натуральных чисел может служить спектром.*

(e) *Существует равномерная эффективная процедура перехода от данного конечного или коконечного множества натуральных чисел (заданного каноническим индексом) к высказыванию, спектром которого является это множество.*

**Доказательство.** Ниже, в упр. 10-21, приводится равномерный эффективный метод, позволяющий установить для данного числа, принадлежит ли оно спектру данного высказывания. Упражнение 10-22 показывает, что высказывание ровно с  $n$  кванторами имеет  $n$  в своем спектре тогда и только тогда, когда его спектр содержит  $\{m \mid n \leq m\}$ ; отсюда следуют (a) и (b). Упражнение 10-23, обобщающее упр. 10-22, доказывает (c).

Пусть  $F_1$  есть высказывание „ $(\exists a)a = a$ ”, и для каждого  $n > 1$  пусть  $F_n$  — высказывание

$$\text{„}(\exists a_1) \dots (\exists a_n)[[\neg a_1 = a_2] \& [\neg a_1 = a_3] \& \dots \& [\neg a_{n-1} = a_n]]\text{”}.$$

Для всякого  $n > 0$  пусть  $E_n$  есть конъюнкция высказывания  $F_n$  с отрицанием высказывания  $F_{n+1}$ . Для любого конечного множества натуральных чисел  $\{n_1, \dots, n_k\}$  пусть  $E_{n_1} \vee \dots \vee E_{n_k}$  обозначает дизъюнкцию высказываний  $E_{n_1}, E_{n_2}, \dots, E_{n_k}$  и пусть  $\neg(E_{n_1} \vee \dots \vee E_{n_k})$  обозначает отрицание этой дизъюнкции. Тогда  $E_{n_1} \vee \dots \vee E_{n_k}$  имеет спектр  $\{n_1, \dots, n_k\}$  и  $\neg(E_{n_1} \vee \dots \vee E_{n_k})$  имеет спектр  $\{0, n_1, \dots, n_k\}$ . Это доказывает (d) и (e). Тем самым доказательство леммы завершено.

Из семантической непротиворечивости логики предикатов следует, что любое высказывание  $x$ , выводимое (согласно логике предикатов) из совокупности высказываний  $B$ , истинных в данной непустой интерпретации, должно быть истинно в этой интерпретации. Отсюда вытекает, что если высказывание  $x$  выводимо из совокупности высказываний  $B$ , то  $\text{спектр } (x) \supset \bigcap_{y \in B} \text{спектр } (y)$ .

Из полноты логики предикатов следует, что если  $x$  истинно для всех тех непустых интерпретаций, для которых каждое выска-

зывание совокупности  $B$  истинно, то высказывание  $x$  выводимо из  $B$ . Отсюда получаем, что если  $\text{спектр } (x) \supset \bigcap_{y \in B} \text{спектр } (y)$ , то высказывание  $x$  выводимо из  $B$ .

Пусть теперь  $A$  — произвольное множество натуральных чисел. Мы можем предположить без потери общности, что  $0 \in A$ . Пусть  $E_0$  есть „ $(\forall a)\neg a = a$ “. Для всякого  $n > 0$  пусть  $E_n$  определяется, как в доказательстве леммы. Для всех  $n$  пусть  $\neg E_n$  обозначает отрицание высказывания  $E_n$ . Тогда для всех  $n$  высказывание  $\neg E_n$  имеет  $N - \{0, n\}$  в качестве спектра. Пусть  $B = \{\neg E_n \mid n \in A\}$ . Определим  $T_A$  как совокупность всех высказываний, выводимых из  $B$ . Тогда для любого высказывания  $x$   $x \in T_A \Leftrightarrow x$  выводимо из  $B \Leftrightarrow \text{спектр } (x) \supset \bigcap_{y \in B} \text{спектр } (y)$ .

Но  $\bigcap_{y \in B} \text{спектр } (y) = \bar{A}$ . Следовательно,

$$x \in T_A \Leftrightarrow \text{спектр } (x) \supset \bar{A}.$$

Используя общерекурсивные функции  $f$  и  $g$  части (b) леммы, имеем

$$\begin{aligned} x \in T_A \Leftrightarrow & [[g(x) = 0 \& D_{f(x)} \supset \bar{A}]] \text{ или} \\ & [g(x) = 1 \& D_{f(x)} \subset \bar{A}]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем два следствия: (1) для всех  $n \in A \Leftrightarrow \neg E_n$  в  $T_A$ ; тем самым  $A \leqslant_1 T_A$ ; (2) для всякого  $x$  существует tt-условие, такое, что  $x \in T_A$  тогда и только тогда, когда это tt-условие выполняется на  $\bar{A}$  (случаи, когда  $\bar{A}$  конечно и  $\bar{A}$  бесконечно, рассматриваются отдельно); тем самым  $T_A \leqslant_{tt} A$ .

Итак, по определению выводимости, если множество  $B$  рекурсивно перечислимо, то совокупность всех высказываний, выводимых из  $B$ , рекурсивно перечислима (пересчитываются все возможные доказательства из конечных множеств высказываний из  $B$ ). Отсюда имеем, что теория  $T_A$  аксиоматизируема, если множество  $A$  рекурсивно перечислимо. (В самом деле, так как  $A \leqslant_1 T_A$ , теория  $T_A$  аксиоматизируема тогда и только тогда, когда множество  $A$  рекурсивно перечислимо.) Этим завершается доказательство теоремы. ■

Ганф [1962] усилил этот результат, показав, что существует конечно аксиоматизируемая теория в каждой рекурсивно перечислимой tt-степени. (Теория конечно аксиоматизируема, если существует конечная совокупность высказываний этой теории, из которой выводимы все высказывания этой теории.) Шён菲尔д [1958а] использовал теорему V и некое усиление теоремы VI для того, чтобы показать, что существуют аксиоматизируемые, существенно неразрешимые теории в каждой нерекурсивной рекур-

сивно перечислимой Т-степени. (Теория первого порядка *существенно неразрешима*, если не существует непротиворечивой разрешимой теории первого порядка, ее содержащей.)

## § 10.6. УПРАЖНЕНИЯ

### § 10.1

**10-1.** Пусть дана аксиоматизируемая теория  $T$  (т. е. рекурсивно перечислимое множество шп-формул логической системы) и некоторая гёделева нумерация шп-формул (см. § 7.8). Предположим существование эффективной процедуры, такой, что для любого данного  $x$  может быть найдена шпФ  $F_x$ , удовлетворяющая соотношению  $F_x \in T \Leftrightarrow x \in K$ .

(i) Должна ли теория  $T$  быть полной степени неразрешимости при упорядочении по каждому виду сводимости?

(ii) Должны ли любые две такие теории быть рекурсивно изоморфными?

**10-2.** Пусть множества  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы. Покажите, что  $A$  конструктивно нерекурсивно в  $B \Leftrightarrow [A$  конструктивно нерекурсивно &  $B$  рекурсивно].

**10-3.** (i) Определите разумным образом: множество  $A$  конструктивно не- $m$ -сводимо к  $B$ .

(ii) Сформулируйте и докажите аналог теоремы II и следствия II.

(iii) Покажите, что множество  $A$  конструктивно нерекурсивно в  $B \Rightarrow A$  конструктивно не- $m$ -сводимо к  $B$ . (Указание. См. упр. 10-2.)

**10-4.** Дадим определение: множество  $A$  конструктивно бесконечно, если  $(\exists$  общерекурсивная  $f$ )  $(\forall x)[x \in A \Rightarrow [x < f(x) \& f(x) \in A]]$ .

(a) Покажите, что множество  $A$  конструктивно бесконечно тогда и только тогда, когда  $A$  не изолировано.

Дадим определение: множество  $A$  рекурсивно эквивалентно  $B$ , если  $(\exists$  частично рекурсивная взаимно однозначная функция  $\varphi$ )  $[A \subset \text{Arg } \varphi \text{ и } B = \varphi(A)]$  (см. упр. 8-32). Рекурсивная эквивалентность в теории рекурсивных функций является аналогом отношения равномощности в теории множеств (см. пояснение к теореме 8-V).

(b) Покажите, что множество  $A$  конструктивно бесконечно тогда и только тогда, когда  $A$  рекурсивно эквивалентно своему собственному подмножеству.

### § 10.2

**10-5.** Покажите, что алгоритм, описанный перед леммой § 10.2, обладает свойством, утверждаемым формулировкой этой леммы.

**10-6.** Сформулируйте и докажите релятивизованную версию теоремы III.

**10-7.** (a) Покажите, что существует семейство трех рекурсивно перечислимых Т-степеней, которые попарно не сравнимы относительно  $\leq_T$ . (Указание. Воспользуйтесь тремя списками и шестью совокупностями маркеров:

$[n]_{12}, [n]_{13}, [n]_{21}, [n]_{23}, [n]_{31}, [n]_{32}; n=0, 1, 2, \dots$ . Маркер  $[n]_{ij}$  используется в  $i$ -м списке. На этапе  $3n+i$  плюс помещается рядом с маркером  $[k]_{ij}$  на (наименьшем вакантном) положении  $x$ , если  $x$  появляется за  $n$  шагов

в пересчитывании множества  $W_k^{S_j^{(n)}}$ , где  $S_j^{(n)}$  — меняющееся множество отмеченных плюсом положений  $j$ -го списка. Используйте подходящее приоритетное упорядочение для перемещения маркеров.)

$\triangle(b)$  Обобщив (a), докажите следствие III (c).

**10-8.** Покажите, что множества  $A$  и  $B$ , построенные в теореме III, не прости. (Указание. Чтобы получить бесконечное рекурсивно перечислимое подмножество множества  $\bar{A}$ , возьмите рекурсивно перечислимую возрастающую последовательность  $x_0, x_1, \dots$ , такую, что для всех  $X$  и всех  $i$  имеет место  $W_{x_i}^X = \emptyset$ . Рассмотрите начальные положения  $[x_i]$  в  $A$ -списке.)

**10-9.** Покажите:  $(\exists f)(\exists A)[\text{Val } f = A \& f \not\leq_T A \& A \not\leq_T f]$ . (Указание. Возьмите  $A$  и  $B$ , как в теореме III. Возьмите  $n$  — (наименьший элемент  $A$ ). Определите функцию  $f$  так, чтобы  $f(B) = \{n\}$ ,  $f(\bar{B}) = A - \{n\}$  и  $f =_T B$ .)

### § 10.3

**10-10** (Тенненбаум). Покажите, что если множество  $A$  бесконечно, множество  $B$  бесконечно и рекурсивно перечислимо и  $A \leq_B B$ , то существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $B = f(A)$  и  $A \leq_B B$  посредством функции  $f$ .

$\triangle$  10-11. Докажите такой специальный случай первой теоремы Сакса. (Из него следует, что среди нерекурсивных рекурсивно перечислимых степеней не существует минимальной рекурсивно перечислимой степени.)

**Теорема.** Пусть  $C$  — любое нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество. Существуют рекурсивно перечислимые множества  $A$  и  $B$ , такие, что  $A \leq_C B$ ,  $B \leq_C C$ ,  $A \not\leq_T B$  и  $B \not\leq_T A$ . (Указание. Модифицируйте процедуру теоремы III следующим образом. Как  $A$ -, так и  $B$ -список состоит из всех натуральных чисел, но каждый из них упорядочен в виде двойного бесконечного ряда,  $n$ -я строка которого состоит из  $\langle n, 0 \rangle, \langle n, 1 \rangle, \dots$  в предложенном порядке. В каждый момент времени эта процедура привлекает из каждого списка лишь конечное число строк и столбцов.)

Как и раньше, подвижные маркеры  $[0]_1, [1]_1, \dots$  и  $[0]_2, [1]_2, \dots$  используются соответственно в  $A$ -списке и  $B$ -списке. В процессе вычисления в каждом списке некоторые столбцы могут быть сверху помечены звездочкой (\*). Говорят, что в данный момент времени число в данном списке специфицировано, если оно находится в столбце, уже помеченному звездочкой. В данный момент времени строку в данном списке назовем свободной, если ни в этой строке, ни в любой другой строке, лежащей ниже ее, не существует никакой отметки и никакого маркера. В дополнение к движущимся маркерам  $[n]_1$

и  $[n]_2$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , и к звездочке могут быть использованы следующие отметки: плюс, минус и кружок ( $\circ$ ). В любой строке эти отметки ставятся непосредственно под числом, с которым они связываются. Время от времени некоторые кружки стираются. Под числом могут появляться следующие комбинации отметок: кружок, минус, кружок-минус, кружок-плюс и кружок-минус-плюс (подвижный маркер также может появиться). Как и прежде, плюс никогда не стирается: те числа в  $A$ -списке, которые отмечены плюсом, составляют множество  $A$ , помеченные плюсом числа в  $B$ -списке составляют множество  $B$ . В процессе вычисления вводятся и соотносятся с числами подвижные маркеры. При определенных обстоятельствах подвижный маркер может перемещаться вправо в своей строке; при некоторых других обстоятельствах подвижный маркер может быть перемещен вниз в новую строку. Если в данный момент времени в данном списке какая-то строка содержит как плюс, так и маркер  $[j]$ , возможно в различных местах этой строки, мы скажем, что число  $j$  осуществлено. Если  $j$  осуществлено, в более поздний момент оно может стать неосуществленным, если  $[j]$  переместится вниз на новую строку.

Пусть  $f$  пересчитывает множество  $C$  без повторений. Процедура состоит в следующем. Множества  $A_0, A_1, \dots$  и  $B_0, B_1, \dots$  определены, как в теореме III. Маркеры задаются следующим приоритетным упорядочением:

$\boxed{0}_1, \boxed{0}_2, \boxed{1}_1, \boxed{1}_2, \dots$

Этап  $2n+1$ . (Если не оговорено противное, всюду речь идет об  $A$ -списке.) (i) Соотнесите  $\boxed{n}_1$  с первым неспецифицированным элементом первой свободной строки  $A$ -списка. (ii) Вычислите  $f(n)$ . (iii) Пометьте звездочкой  $f(n)$ -й столбец, т. е. столбец, содержащий  $\langle x, f(n) \rangle$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$  (iv) Напишите плюс в первом кружке, встречающемся в этом столбце, если таковой найдется. (Этот кружок уже может иметь минус.) Если такой кружок существует, пусть  $\boxed{j}_1$  есть маркер в строке этого кружка (там должен существовать один и только один такой маркер); переместите все маркеры  $\boxed{k}_2$  (  $k < n$  ), следующие, согласно приоритетному упорядочению, за  $\boxed{j}_1$ , вниз на свободные строки  $B$ -списка и соотнесите их с первыми неспецифицированными элементами этих новых строк; сотрите все кружки в старых строках (в  $B$ -списке), с которых эти маркеры  $\boxed{k}_2$  были перемещены. (v) Переместите все неосуществленные маркеры, оставшиеся в  $f(n)$ -м столбце, на первые неспецифицированные числа справа в соответствующих строках. (vi) Произведите  $n$  шагов в каждом из множеств  $W_0^{B_{2n}}, \dots, W_n^{B_{2n}}$ . Пусть текущие позиции маркеров  $\boxed{0}_1, \boxed{1}_1, \dots, \boxed{n}_1$  суть  $a_0^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ . Возьмите наименьшее неосуществленное  $j$ , если оно существует, такое, что  $a_j^{(n)}$  появляется в этой части пересчитывания множества  $W_j^{B_{2n}}$ . (Если такого  $j$  не существует, перейдите к этапу  $2n+2$ .) Поместите кружок под  $a_j^{(n)}$  и переместите  $\boxed{j}_1$  на первое неспецифицированное число справа в том же ряду. Напишите минус под каждым числом в  $B$ -списке, таким, принадлежность которого к  $B_{2n}$  была использована, чтобы показать, что  $a_j^{(n)} \in W_j^{B_{2n}}$ . (Некоторые из этих минусов могут оказаться внутри кружков.) Переместите все маркеры  $\boxed{k}_2$ , следующие после  $\boxed{j}_1$ , вниз на свободные строки  $B$ -списка, и соотнесите с ними первые неспецифицированные элементы этих строк. Сотрите все кружки в строках, с которых эти маркеры  $\boxed{k}_2$  были перемещены.

Этап  $2n+2$ . Аналогично (для  $B$ -списка).

Остается показать, что  $A$  и  $B$  обладают требуемыми свойствами.

1. Каждый маркер может перемещаться лишь конечное число раз. Если это не так, возьмите маркер высшего ранга из тех, что перемещаются бесконечно часто. В конечном счете он должен будет перемещаться бесконечно часто в пределах какой-то одной строки и никогда не будет осуществленным в этой строке. Пусть эта строка есть  $\langle m, 0 \rangle, \langle m, 1 \rangle, \dots$ . Из построения следует, что множество  $\{x \mid \langle m, x \rangle\}$  имеет кружок, должно быть  $\bar{C}$ . Но это делает  $C$  рекурсивно перечислимым в противоречие с предположением о нерекурсивности множества  $C$ .

2.  $A \leqslant C$ . Чтобы выяснить, будет ли  $\langle x, y \rangle \in A$ , посмотрим, будет ли  $y \in C$ . Если  $y \notin C$ , то  $\langle x, y \rangle \notin A$ . Если  $y \in C$ , вычислим  $m = f^{-1}(y)$  и посмотрим, получили ли  $\langle x, y \rangle$  плюс на  $(2m+1)$ -м этапе вычисления. Если да, то  $\langle x, y \rangle \in A$ ; если нет,  $\langle x, y \rangle \notin A$ .

3.  $B \leqslant C$ . Аналогично.

4.  $A \not\leqslant T B$ . В противном случае  $\bar{A} = W_n^B$  для некоторого  $n$ . Рассмотрим последнюю строку, в которой появляется  $\boxed{n}_1$ . В этой строке  $n$  или осуществляется, или нет. Предположим,  $n$  в конечном итоге осуществляется в этой строке. Пусть первый плюс, встречающийся в этой строке, приходится на  $a$ . Тогда по построению  $a \in W_n^B$  (приоритетное упорядочение гарантирует это, не допуская минусы, которые надлежало бы поместить рядом с  $a$ , в  $W_n^B$ ). Отсюда  $a \in A \cap W_n^B$  и  $\bar{A} \neq W_n^B$ . Предположим теперь, что  $n$  никогда не осуществляется на этой строке. Пусть  $a'$  — окончательное положение  $\boxed{n}_1$ . Тогда, согласно лемме теоремы III,  $a' \in \bar{A} \cap \bar{W}_n^B$ , и вновь  $\bar{A} \neq W_n^B$ . И в том и другом случаях имеем противоречие.

5.  $B \not\leqslant T A$ . Аналогично.

(Замечание. Сакс получил более сильную форму указанной теоремы, в которой  $A \cup B = C$  и  $A \cap B = \emptyset$ .)

10-12. Для данной совокупности структур  $\mathcal{A}$  покажите, что любые две счетные плотные структуры (относительно  $\mathcal{A}$ ) алгебраически изоморфны.

10-13. Приведите пример совокупности структур  $\mathcal{A}$ , для которой не существует никакой плотной структуры. (Указание. Возьмите структуру  $\mathcal{A}$ , состоящую из циклических групп порядков 2 и 3, имеющую в качестве  $\cup$  групповую операцию.)

△ 10-14. Покажите, что  $\mathcal{A}_T$  обладает счетной плотной структурой. (Указание. Заметим, что для всякого  $L$  в  $\mathcal{A}_T$  и любых  $a_1, a_2, \dots, a_n$  в  $L$   $L(a_1, \dots, a_n)$  конечна. Заметим далее, что если  $L, N_1$  и  $N_2$  в  $\mathcal{A}_T$  конечны,  $L$  алгебраически изоморфна подструктуре  $N_1$  и  $L$  алгебраически изоморфна подструктуре  $N_2$ , то существует структура  $M$  в  $\mathcal{A}_T$ , такая, что  $N_1$  алгебраически изоморфна подструктуре  $M$ ,  $N_2$  алгебраически изоморфна подструктуре  $M$  и образ  $L$  в  $M$  через  $N_1$  совпадает с образом  $L$  в  $M$  через  $N_2$ . Затем приведите индуктивное построение.)

10-15. В § 10.3 выведите предложения 1 и 2 и вторую теорему Сакса из гипотезы Шён菲尔льда.

△ 10-16. Выведите первую теорему Сакса из гипотезы Шён菲尔льда.

△ 10-17. Пусть  $B$  — гиперпростое множество, получаемое конструкцией теоремы Деккера (теорема 9-XVI). Покажите, что  $B$  не гипергиперпросто. (Указание (предложенное Саксом). Пусть  $f, A$  и  $B$  такие же, как в теореме 9-XVI. Воспользуйтесь методом приоритета следующим образом. Возьмите бесконечный список натуральных чисел. Соотнесите маркеры  $\boxed{0}, \boxed{1}, \dots$  с числами списка. Число свободно в данный момент, если оно не имеет и не имело никакого маркера, с ним соотнесенного.)

Этап  $n+1$ . Подшаг 1. Пусть  $z$  — наименьшее свободное число  $\geq n$ .

Вычислите  $f(z)$ . Пусть  $b_0, \dots, b_n$  — текущие позиции  $\boxed{0}, \dots, \boxed{n}$ . Возьмите наименьшее  $i \leq n$ , если такое существует, для которого выполняется  $b_i < z$  и  $f(z) < f(b_i)$ . Если такого  $i$  не существует, переходите к подшагу 2. Если такое  $i$  существует, переместите маркер  $\boxed{i}$  вниз на  $z$ , а все маркеры  $\boxed{j}$ ,  $i < j \leq n$ , вниз на свободные числа  $c_{i+1} < \dots < c_n$ , такие, что  $f(z) < f(c_{i+1}) < \dots < f(c_n)$ . Затем переходите к подшагу 2.

Подшаг 2. Пусть  $c$  — текущая позиция  $\boxed{n}$ . Соотнесите  $\boxed{n+1}$  с первым свободным числом  $d$  ниже  $c$ , таким, что  $f(c) < f(d)$ . Затем переходите к этапу  $n+2$ .

Определим функцию  $g$ , такую, что  $W_{g(x)} =$  (множество всех чисел, с которыми соотнесено  $\boxed{x}$  этой процедурой). Затем, взяв  $g$  в качестве  $f$  в определении гипергипериммунности из § 9.6, мы можем показать, что  $\bar{B}$  не гипергипериммунно. (Замечание. Это упражнение является непосредственным следствием упр. 9-44 (vi) и упр. 10-19, ниже.)

**▲10-18** (Янг). Покажите, что существует множество, которое btt-полно, но не m-полно. (Указание. Постройте  $A$ , такое, что  $A \subset K$ ,  $A \equiv K - A$  и  $A$  не есть цилиндр. Немедленно получим, что  $K \leqslant_{\text{btt}} A$  и тем самым, что  $A$  btt-полно;  $A$  не m-полно, поскольку  $A$  не есть цилиндр.  $A$  строится следующим образом. Определим рекурсивную перестановку  $p$  так, что  $p(K) = K$  и  $(\forall x)[p(x) \neq x \& pp(x) = x]$ , и общерекурсивную функцию  $g$  со множеством  $K$  значений, удовлетворяющую соотношению  $(\forall x)[g(2x + 1) = pg(2x)]$ . Заметим, что для любого цилиндра  $C$  существует общерекурсивная взаимно однозначная функция  $f$ , такая, что  $(\forall x)[f(x) \neq x \& [x \in C \Leftrightarrow f(x) \in C]]$ . Воспользуйтесь методом приоритета, согласно которому  $A$  может быть построено так, что такой функции  $f$  для  $A$  не существует, и так, что  $A \subset K$  и  $p(A) = K - A$ . Удобно трактовать (и порождать)  $A$  и  $K - A$  симметричным образом. Заметим кстати, что ввиду упр. 8-45  $A$  есть нецилиндр из  $\mathcal{C}_3$ , не имеющий никаких множеств из  $\mathcal{C}_1$  или  $\mathcal{C}_2$  в своей btt-степени.)

**▲10-19** (Ейтс [1962]). Покажите, что если множество  $A$  рекурсивно перечислимо и  $\bar{A}$  бесконечно, то  $[\bar{A} \text{ гипергипериммунно} \Leftrightarrow \bar{A} \text{ не имеет бесконечно-го ретрассирируемого подмножества}]$  (ур. 9-44). (Указание.  $\Leftarrow$ . Предположим,  $\bar{A}$  не гипергипериммунно. Построим частично рекурсивную функцию  $\psi$  следующим образом. Начнем одновременно перечислять непересекающиеся конечные множества  $W_{f(0)}, W_{f(1)}, \dots$ , в то же самое время порождая множество  $A$ . (Функция  $f$  берется из определения гипергипериммунности.) Более конкретно, на  $n$ -м этапе пересчитываем каждое  $W_{f(x)}$ ,  $x \leqslant n$ , до тех пор, пока первый элемент не появится в  $A$  к  $n$ -му шагу в пересчете множества  $A$ . Определим  $\psi$  на всех тех заключительных элементах  $W_{f(0)}, \dots, W_{f(n)}$ , которые были перечислены, но еще не появились в  $A$ , и для которых  $\psi$  ранее не была определена. Сделаем это таким образом, чтобы существовала максимальная цепь  $m > \psi(m) > \psi(\psi(m)) > \dots$  заключительных элементов, содержащая все заключительные элементы, на которых  $\psi$  не была определена. Тогда  $\psi$  будет ретрассирирующей функцией бесконечного подмножества  $\bar{A}$ .

$\Leftarrow$ . Это обобщает доказательство 10-17 (см. (vi) упр. 9-44). Рассмотрим ретрассирирующее „дерево“  $\psi$  (определенное очевидным образом). Соотнесем маркеры  $\boxed{0}, \boxed{1}, \dots$  с каждым уровнем этого дерева. Пересчитываем  $A$  и перемещаем маркеры (каждый в пределах своего уровня) соответственно приоритетной схеме, такой, что каждый маркер останавливается в конце концов на элементе  $\bar{A}$  и все маркеры останавливаются на одной и той же ветви. Эта ветвь есть тогда бесконечное ретрассирируемое подмножество множества  $\bar{A}$ , и для каждого  $n$  положения маркера  $\boxed{n}$  составляют рекурсивно перечислимое множество  $W_{f(n)}$ . (Это определяет  $f$ .) Это семейство рекурсивно перечислимых множеств свидетельствует о том, что  $\bar{A}$  не гипергипериммунно.) (Замечание. Целый ряд методов приоритета (включая теорему III) может быть представлен в этой форме; т. е. маркеры перемещаются, каждый в пределах своего собственного уровня по некоторому заданному дереву, так что все они в конце концов останавливаются на одной и той же ветви этого дерева.) (Упражнение 12-50 является усилением упр. 10-19 (см. упр. 9-48 (b), 12-48 и 12-49).)

#### § 10.4

**10-20.** Модифицировав доказательство теоремы V, покажите, что всякая перекурсивная рекурсивно перечислимая T-степень содержит

(i) три рекурсивно перечислимых множества, любые два из которых не пересекаются и рекурсивно неотделимы;

△(ii)  $\aleph_0$  рекурсивно перечислимых множеств, любые два из которых не пересекаются и рекурсивно неотделимы. (Указание. Используйте  $N$  вместо  $\{0, 1\}$  в конструкции теоремы V.)

#### § 10.5

**10-21.** Опишите равномерную эффективную процедуру, такую, что по любому данному высказыванию  $x$  из  $\mathcal{L}_0$  и любому  $n > 0$  мы можем установить, будет ли нет  $x$  истинно для мощности  $n$ . (Указание. Воспользуйтесь нумералами 1, 2, ...,  $n$ . Замените кванторы общности конечными конъюнциями и кванторы существования конечными дизъюнкциями, затем установите истинность или ложность, как проиллюстрировано в следующем примере для  $n = 3$  и  $x = (\exists a)(\forall b)\neg a = b$ :

$$\begin{aligned} &(\exists a)(\forall b)\neg a = b, \\ &(\exists a)[\neg a = 1 \& \neg a = 2 \& \neg a = 3], \\ &[1 \neq 1 \& 1 \neq 2 \& 1 \neq 3] \vee [2 \neq 1 \& 2 \neq 2 \& 2 \neq 3] \vee [3 \neq 1 \& 3 \neq 2 \& 3 \neq 3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[f \& t \& t] \vee [t \& f \& t] \vee [t \& t \& f], \\ &f \vee f \vee f, \\ &f. \end{aligned}$$

**△10-22.** Покажите, что для любого высказывания  $x$  из  $\mathcal{L}_0$  если  $x$  имеет ровно  $n$  кванторов и  $m \geqslant n$ , то  $[x$  истинно для мощности  $n \Leftrightarrow x$  истинно для мощности  $m]$ . (Указание. Рассмотрите процедуру упр. 10-21 и покажите, что для  $m$  она приводит к тому же, к чему и для  $n$ . Наиболее удобно это установить, предварительно эллиминировав  $\Leftrightarrow$  и  $\Rightarrow$ , выражая их через  $\neg$ ,  $\&$  и  $\vee$ ).

**△10-23.** Докажите пункт (c) леммы в теореме VI. (Указание. Обобщите доказательство из 10-22 на случай, когда  $m$  заменяется бесконечным кардинальным числом. Рассуждения, относящиеся к конечным дизъюнкциям и конъюнкциям, должны быть заменены более общими теоретико-множественными рассуждениями.)

**10-24** (Джокуш). Покажите, что  $A \times A \leqslant_m A \Leftrightarrow$  существует теория  $T$  первого порядка, такая, что  $A \equiv_m T$ .

- § 11.1 Введение 232
- § 11.2 Теорема о рекурсии 233
- § 11.3 Полнота творческих множеств; вполне продуктивные множества 236
- § 11.4 Другие применения и конструкции 239
- § 11.5 Другие формы теоремы о рекурсии 249
- § 11.6 Обсуждение 256
- § 11.7 Системы обозначений для ординалов 263
- § 11.8 Конструктивные ординалы 271
- § 11.9 Упражнения 274

### § 11.1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих главах были рассмотрены различные виды рекурсивно инвариантных структур. Были построены множества натуральных чисел с довольно специальными патологическими свойствами. Кульминацией нашего исследования патологических структур явилось построение в гл. 10 рекурсивно перечислимых множеств, которые не рекурсивны и не Т-полны.

Предложим теперь простой общий метод порождения различных патологических структур в теории рекурсивных функций. Хотя этот метод и не достаточен для того, чтобы получить теорему Мучника — Фридберга (гл. 10), он дает способ для ответа на ряд вопросов, которые оставались открытыми в предыдущих главах. В § 11.3 мы воспользуемся им, чтобы показать, что всякое творческое множество полно и что всякое продуктивное множество вполне продуктивно. В § 11.4—11.8 мы неоднократно будем применять этот метод для установления некоторых других результатов.

Метод будет сформулирован в виде теоремы, называемой обычно *теоремой о рекурсии или теоремой о неподвижной точке в теории рекурсивных функций*. Как уже было сказано, она является основным инструментом исследования. Это глубокий результат в том смысле, что он дает изящный и экономичный метод обращения с конструкциями, что в ином случае потребовало бы долгих и сложных рассуждений.

Эта теорема может быть приведена в нескольких формах и может, на интуитивном уровне, рассматриваться с нескольких точек зрения. В определенном смысле теорема суммирует некоторый класс диагональных методов, включая метод, используемый для построения рекурсивно перечислимых, но не рекурсивных множеств (теорема 5-VI). С другой стороны, эта теорема устанавливает некоторый результат о неподвижной точке и, подобно теоремам

анализа о неподвижной точке, может быть использована для доказательства существования многих неявно заданных функций.

Проиллюстрируем содержание и возможности применения теоремы о рекурсии, рассмотрев следующий вопрос. Существует ли  $m$ , такое, что  $W_m = \{m\}$ ? На первый взгляд, существование такого  $m$  может показаться случайным свойством, присущим конкретной нумерации рекурсивно перечислимых множеств. В самом деле, может казаться столь же вероятным, что при нашей нумерации такого  $m$  не существует. Однако в § 11.2, применив теорему о рекурсии, мы докажем, что такое  $m$  должно существовать как при нашей нумерации рекурсивно перечислимых множеств, так и при всякой другой допустимой нумерации рекурсивно перечислимых множеств.

Теорема о рекурсии (как и многие из ее известных приложений) была установлена Клини.

### § 11.2. ТЕОРЕМА О РЕКУРСИИ

Теорема о рекурсии в ее наиболее сильной и общей форме будет представлена теоремой IV. Из соображений наглядности сначала излагаются три более простых варианта этой теоремы. Эти результаты формулируются явно в теоремах II, III и IV и неявным образом содержатся в доказательстве теоремы I.

**Теорема I.** Пусть  $f$  — общерекурсивная функция; тогда существует  $n$ , такое, что

$$\Phi_n = \Phi_{f(n)}.$$

(Мы назовем  $n$  неподвижной точкой для  $f$  (a fixed-point value for  $f$ ).)

**Доказательство.** Пусть дано любое  $u$ . Определим частично рекурсивную функцию  $\psi$  следующими инструкциями: чтобы вычислить  $\psi(x)$ , привлеките сначала  $P_u$  с входным значением  $u$ ; как только вычисление закончится (если это произойдет) и на выходе будет  $w$ , воспользуйтесь  $P_w$  при входном значении  $x$ ; как только вычисление закончится (если это произойдет), возьмите его выход в качестве  $\psi(x)$ . Резюмируем сказанное:

$$\psi(x) = \begin{cases} \Phi_{\psi(u)}(x), & \text{если } \Phi_u(u) \text{ сходится;} \\ & \text{расходится,} \\ & \text{если } \Phi_u(u) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Инструкции для функции  $\psi$  равномерно зависят от  $u$ . Пусть  $\tilde{g}$  — общерекурсивная функция, отыскивающая по  $u$  гёделев номер этих инструкций для  $\psi$ . Таким образом,

$$\Phi_{\tilde{g}(u)}(x) = \begin{cases} \Phi_{\psi(u)}(x), & \text{если } \Phi_u(u) \text{ сходится;} \\ & \text{расходится,} \\ & \text{если } \Phi_u(u) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Пусть теперь дана произвольная общерекурсивная функция  $f$ . Тогда  $\tilde{fg}$  общерекурсивна. Пусть  $v$  — гёделев номер  $\tilde{fg}$ . Поскольку  $\Phi_v = \tilde{fg}$  всюду определена,  $\Phi_v(v)$  определено. Отсюда, заменив  $u$  на  $v$  в определении  $\tilde{g}$ , имеем

$$\Phi_{\tilde{g}(v)} = \Phi_{\Phi_v(v)} = \Phi_{\tilde{f}\tilde{g}(v)}.$$

Таким образом,  $n = \tilde{g}(v)$  — неподвижная точка, что и требовалось. ■

**Следствие I.** Пусть  $f$  — произвольная общерекурсивная функция; тогда существует  $n$ , такое, что  $W_n = W_{f(n)}$ .

Доказательство очевидно. ■

**Пример.** Рассмотрим вопрос, поставленный в § 11.1. Существует ли  $m$ , такое, что  $W_m = \{m\}$ ? Согласно тезису Чёрча (и  $s$ - $m$ - $n$ -теореме), существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для любого  $x$   $W_{f(x)} = \{x\}$ . Применив следствие I, имеем  $n$ , такое, что  $W_n = W_{f(n)}$ . Отсюда  $W_n = \{n\}$  и на поставленный в § 11.1 вопрос получаем положительный ответ. (Заметим, что это доказательство может быть проведено для любой гёделевой нумерации, допустимой в смысле упр. 2-10; см. также упр. 11-12.)

Теорема I может быть усиlena в трех направлениях: (1) можно показать, что  $n$  зависит равномерно от гёделева номера функции  $f$ ; (2) можно показать, что если  $f$  содержит другие параметры рекурсивно, то можно сделать, чтобы  $n$  зависело равномерно от этих параметров; (3) можно показать, что для любой функции  $f$  бесконечное множество неподвижных точек может быть рекурсивно перечислено. Мы посвятим направлениям (1) и (2) теоремы II и III соответственно. Направления (1), (2) и (3) объединены в наиболее общей формулировке в теореме IV, включающей в себя теоремы I, II и III. Теоремы I и III сформулированы в виде, используемом чаще всего в приложениях. ■

**Теорема II.** Существует общерекурсивная функция  $n$ , такая, что для всякого  $z$ , если функция  $\Phi_z$  всюду определена,

$$\Phi_n(z) = \Phi_{\Phi_z(n(z))}.$$

Доказательство. Пусть  $\Phi_z = f$ , рассмотрим доказательство теоремы I. Согласно теореме 1-VI,  $v$ , гёделев номер функции  $\tilde{fg}$ , может быть найден равномерно по  $z$ . Пусть  $\tilde{v}$  — общерекурсивная функция, такая, что  $\Phi_{\tilde{v}(z)} = \Phi_z \tilde{g}$ . Тогда искомая общерекурсивная функция  $n$  задается равенством  $n(z) = \tilde{g}v(z)$ . ■

**Следствие II.** Существует общерекурсивная функция  $n$ , такая, что для любого  $z$ , если функция  $\Phi_z$  всюду определена,

$$W_{n(z)} = W_{\Phi_z(n(z))}.$$

Доказательство очевидно. ■

**Теорема III.** Пусть  $f$  — общерекурсивная функция  $k+1$  переменных. Тогда существует общерекурсивная функция  $n_f$  от  $k$  переменных, такая, что для всех  $x_1, \dots, x_k$

$$\Phi_{n_f(x_1, \dots, x_k)} = \Phi_{f(n_f(x_1, \dots, x_k), x_1, \dots, x_k)}.$$

Доказательство. Конструкция повторяет конструкцию теоремы I. Определим функцию  $\tilde{g}$   $k+1$  переменных так, что

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{g}(u, x_1, \dots, x_k)}(y) &= \\ &= \begin{cases} \Phi_{\Phi_u^{(k+1)}(u, x_1, \dots, x_k)}(y), & \text{если } \Phi_u^{(k+1)}(u, x_1, \dots, x_k) \text{ сходится;} \\ \text{расходится,} & \text{если } \Phi_u^{(k+1)}(u, x_1, \dots, x_k) \text{ расходится.} \end{cases} \end{aligned}$$

Далее, пусть  $v$  есть гёделев номер функции

$$\lambda x_1 \dots x_k [f(\tilde{g}(u, x_1, \dots, x_k), x_1, \dots, x_k)]$$

от  $k+1$  переменных. Поскольку  $f$  и  $\tilde{g}$  всюду определены, функция  $\Phi_v^{(k+1)}$  всюду определена. Тем самым имеем

$$\Phi_{\tilde{g}(v, x_1, \dots, x_k)} = \Phi_{f(\tilde{g}(v, x_1, \dots, x_k), x_1, \dots, x_k)}.$$

Положив  $n_f = \lambda x_1, \dots, x_k [\tilde{g}(v, x_1, \dots, x_k)]$ , получаем требуемый результат. ■

**Следствие III.** Пусть  $f$  — общерекурсивная функция  $k+1$  переменных. Тогда существует общерекурсивная функция  $n_f$  от  $k$  переменных, такая, что для всех  $x_1, \dots, x_k$

$$W_{n_f(x_1, \dots, x_k)} = W_{f(n_f(x_1, \dots, x_k), x_1, \dots, x_k)}.$$

Доказательство очевидно. ■

Приведем теперь наиболее общую формулировку.

**Определение.** Функция  $f$  от  $n$  переменных *взаимно однозначна*, если для каждого  $y$  существует самое большое одна  $n$ -ка  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , такая, что  $f(x_1, \dots, x_n) = y$ .

**Теорема IV (Клини).** Каково бы ни было  $k$ , существует общерекурсивная функция  $n$  от  $k+2$  переменных, такая, что  $n$  взаимно однозначна, и для любого  $z$ , если  $\Phi_z^{(k+1)}$  всюду определена, то для

всех  $x_1, \dots, x_k, y$

$$\Phi_{n(z, x_1, \dots, x_k, y)} = \Phi_{\varphi_z^{(k+1)}(n(z, x_1, \dots, x_k, y), x_1, \dots, x_k)}.$$

**Доказательство.** Пусть  $t$  — общерекурсивная функция двух переменных, определенная в доказательстве теоремы 7-IV. Тогда  $t$  взаимно однозначна, и для всех  $x$  и  $y$   $\Phi_{t(x, y)} = \varphi_x$ . Возьмем функцию  $\tilde{g}$ , как в доказательстве теоремы III. Определим  $\tilde{g}$  посредством

$$\tilde{g}(u, x_1, \dots, x_k) = t(\tilde{g}(u, x_1, \dots, x_k), \langle u, x_1, \dots, x_k \rangle).$$

Функция  $\tilde{g}$  — взаимно однозначная, обладающая всеми свойствами функции  $g$ , о которых идет речь в доказательстве теоремы III. Пусть  $\tilde{v}$  — общерекурсивная функция, такая, что  $\tilde{v}(z)$  — гёделев номер функции

$$\lambda x_1 \dots x_k [\varphi_z^{(k+1)}(\tilde{g}(u, x_1, \dots, x_k), x_1, \dots, x_k)].$$

Положим

$$n = \lambda z x_1 \dots x_k y [\tilde{g}(t(\tilde{v}(z), y), x_1, \dots, x_k)].$$

Очевидно,  $n$  обладает требуемыми свойствами. ■

Можно привести следствие теоремы IV, подобно следствиям I, II и III. Мы опускаем его.

Основными объектами теорем I — IV были частичнорекурсивные функции одной переменной. В случае частичнорекурсивных функций  $k$  переменных для всякого  $k > 1$  формулировки и доказательства переносятся непосредственно.

Клиниева формулировка и доказательство теоремы I приведены в упр. 11-4. Клиниева формулировка слегка отличается несущественными деталями от нашей. Благодаря этому его доказательства в некотором отношении формально более просты.

### § 11.3. ПОЛНОТА ТВОРЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ; ВПОЛНЕ ПРОДУКТИВНЫЕ МНОЖЕСТВА

Воспользуемся теоремой о рекурсии, чтобы ответить на два вопроса, остававшиеся открытыми в предыдущих главах. (1) Всякое ли творческое множество  $m$ -полно (и, следовательно, согласно теореме 7-VII, 1-полно)? (2) Всякое ли продуктивное множество вполне продуктивно?

**Теорема V** (Майхилл [1955]).  $A$  — творческое множество  $\Rightarrow A$   $m$ -полно.

**Доказательство.** Пусть  $A$  — творческое множество. Тогда  $\bar{A}$  продуктивно и, согласно теореме 7-XI,  $\bar{A}$  обладает продуктивной всюду определенной функцией. Пусть  $h$  — такая продуктивная функция и  $B$  — рекурсивно перечислимое множество. Для фиксированных  $x$  и  $y$  определим частичнорекурсивную функцию  $\psi$  следующими инструкциями: получив вход  $z$ , пытайтесь обнаружить  $y$  в  $B$ ; как только  $y$  появится в  $B$  (если это произойдет), вычисляйте функцию  $h(x)$ ; если  $z = h(x)$ , выдайте 0 на выход; если  $z \neq h(x)$ , не выдавайте никакого выходного значения. Эти инструкции зависят равномерно от  $x$  и  $y$ . Значит, существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для любых  $x$  и  $y$

$$\psi = \Phi_{f(x, y)}.$$

Переходя к областям определения, имеем

$$W_{f(x, y)} = \begin{cases} \{h(x)\}, & \text{если } y \in B; \\ \emptyset, & \text{если } y \notin B. \end{cases}$$

Применив следствие III, получим общерекурсивную функцию  $n$ , такую, что

$$W_{n(y)} = W_{f(n(y), y)} = \begin{cases} \{hn(y)\}, & \text{если } y \in B; \\ \emptyset, & \text{если } y \notin B. \end{cases}$$

Тогда

$$y \in B \Rightarrow hn(y) \in W_{n(y)} \Rightarrow W_{n(y)} \subset \bar{A} \quad (\text{в силу продуктивности}) \Rightarrow hn(y) \in A$$

и

$$y \notin B \Rightarrow W_{n(y)} = \emptyset \Rightarrow hn(y) \in \bar{A} \quad (\text{в силу продуктивности}).$$

Таким образом, для любого  $y$ ,  $y \in B \Leftrightarrow hn(y) \in A$ . Отсюда  $B \leq_m A$ . Поскольку  $B$  есть произвольное рекурсивно перечислимое множество,  $A$   $m$ -полно. ■

**Следствие V.**  $A$  — творческое множество  $\Leftrightarrow A$  1-полно  $\Leftrightarrow A$   $m$ -полно.

**Доказательство.** Согласно теореме 7-VII,  $m$ -полнота  $\Leftrightarrow$  1-полнота. Согласно следствию 7-V,  $m$ -полнота  $\Rightarrow$  креативность. Тем самым следствие доказано. ■

Творческие множества, следовательно, составляют один изоморфный тип; с точки зрения теории рекурсивных функций любые два творческих множества идентичны.

**Теорема VI.**  $A$  продуктивно  $\Rightarrow A$  вполне продуктивно.

**Доказательство.** Пусть  $A$  продуктивно, и пусть  $h$  — всюду определенная продуктивная функция множества  $A$ , существующая в силу теоремы 7-XI. Конструкцией, подобной кон-

струкции теоремы V, получаем общерекурсивную функцию  $f$ , такую, что

$$W_{f(x, y)} = W_y \cap \{h(x)\}.$$

Применив следствие III, получим общерекурсивную функцию  $n$ , такую, что для всех  $y$

$$W_{n(y)} = W_{f(n(y), y)} = W_y \cap \{hn(y)\}.$$

Тогда

$$hn(y) \in W_y \Rightarrow W_{n(y)} = \{hn(y)\} \Rightarrow W_{n(y)} \subsetneq A \text{ (в силу продуктивности)} \Rightarrow hn(y) \in \bar{A}$$

$$hn(y) \notin W_y \Rightarrow W_{n(y)} = \emptyset \Rightarrow W_{n(y)} \subset A \Rightarrow hn(y) \in A \text{ (в силу продуктивности).}$$

Отсюда

$$hn(y) \in \bar{A} \Leftrightarrow hn(y) \in W_y.$$

Таким образом,  $A$  вполне продуктивно с  $hn$  в качестве вполне продуктивной функции. ■

Оба приведенных доказательства используют теорему 7-XI. При доказательстве теоремы VI вполне можно было бы обойтись без использования этой теоремы и получить ее как следствие теоремы VI (см. упр. 11-13). Может быть приведено также простое непосредственное доказательство теоремы 7-XI с применением теоремы о рекурсии.

**Еще одно доказательство теоремы 7-XI.** Пусть  $A$  — продуктивное множество с продуктивной функцией  $\psi$ . Возьмем общерекурсивную функцию  $f$ , такую, что

$$W_{f(x, y)} = \begin{cases} W_y, & \text{если } \psi(x) \text{ сходится;} \\ \emptyset, & \text{если } \psi(x) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Следствие III дает функцию  $n$ , такую, что

$$W_{n(y)} = W_{f(n(y), y)} = \begin{cases} W_y, & \text{если } \psi n(y) \text{ сходится;} \\ \emptyset, & \text{если } \psi n(y) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Тогда

$$\psi n(y) \text{ расходится} \Rightarrow W_{n(y)} = \emptyset \Rightarrow \psi n(y) \text{ определено}$$

(в силу продуктивности). Отсюда  $\psi n$  есть общерекурсивная функция. Тем самым для всех  $y$  выполняется  $W_{n(y)} = W_y$ . Следовательно,

$$W_y \subset A \Rightarrow W_{n(y)} \subset A \Rightarrow \psi n(y) \in A = W_{n(y)} \text{ (в силу продуктивности)} \Rightarrow \psi n(y) \in A = W_y.$$

Отсюда  $\psi n$  — (всюду определенная) продуктивная функция для  $A$ . ■

Теорема 7-VII использовалась также при получении следствия V. Можно было бы не привлекать теорему 7-VII, если при доказательстве теоремы V воспользоваться результатом упр. 7-50 для получения взаимно однозначной всюду определенной продуктивной функции  $h$  и теоремой IV для получения взаимно однозначной функции  $n$ . Непосредственно из модифицированного доказательства тогда получаем, что  $A$  — творческое множество  $\Rightarrow A$  1-полно, и следствие V вытекает только из следствия 7-V.

Таким образом, все результаты этого раздела, как и теоремы 7-VII и 7-XI, получаются с помощью простых конструкций, связанных с теоремой о рекурсии. Поучительно (в случаях, подобных теореме 7-XI) сравнить доказательства, использующие теорему о рекурсии, с доказательствами, к ней не прибегающими. Если читатель располагал доказательствами теорем V и VI до чтения этой главы (проделав упр. 7-32 и 7-52), он может сравнить свои доказательства с приведенными выше, использующими теорему о рекурсии. В процессе развития теории рекурсивных функций целый ряд результатов был установлен сначала путем сложных непосредственных доказательств, а затем, позднее, с помощью более коротких и элегантных конструкций с привлечением теоремы о рекурсии.

Хотя непосредственное назначение теоремы о рекурсии состоит в получении патологии, мы отметим, что в теоремах V и VI она дает возможность установить соотношения между ранее определенными понятиями.

#### § 11.4. ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ И КОНСТРУКЦИИ

Пять иллюстраций, приведенных ниже, дадут некоторое представление о возможности применения теоремы о рекурсии. Еще некоторое число их будет приведено в последующих разделах этой главы и в упражнениях. Первая иллюстрация относится к теории множеств, вторая — к логике, третья — к теории автоматов, четвертая и пятая касаются теории рекурсивных функций.

**Первая иллюстрация. Рекурсивно перечислимые множества и теория множеств**

Рассмотрим отношение  $E = \{\langle m, n \rangle \mid m \in W_n\}$ . Если  $\langle m, n \rangle \in E$ , мы пишем  $mEn$ . Между отношением  $E$  и отношением  $\in$  теории множеств можно усмотреть отдаленную аналогию<sup>1)</sup>. На мысль

<sup>1)</sup> Среди обычных аксиом теории множеств (в формулировке Цермело — Френкеля) имеют место аксиомы пары, суммы, выбора и бесконечности. Аксиомы степени, объемности (экстенсиональности) и фундирования места не имеют. Аксиомы свертывания и замещения (замены) в общем виде не верны

об этой аналогии наводит ряд вопросов: (1) Существует ли  $m$ , такое, что  $mEm$ ? Очевидно, что для любого элемента  $m$  из  $K$   $mEm$  по определению. Мы усложним вопрос (1) следующим образом. (2) Определим:  $m$  есть *унитарное множество*, если  $W_m = \{n\}$  для некоторого  $n$ . Существует ли унитарное множество  $m$ , такое, что  $mEm$ ? Этот вопрос совпадает со следующим: существует ли  $W_m = \{m\}$ ? Из § 11.2 мы знаем, что это возможно. (3) Возможно ли существование таких унитарных множеств  $m$  и  $n$ , что  $m \neq n$ ,  $mEn$  и  $nEm$ ? В упр. 11-24 мы покажем, что это возможно. (4) Существует ли бесконечная *восходящая* цепь унитарных множеств; иными словами, можно ли найти различные  $m_0, m_1, \dots$ , такие, что  $m_0Em_1, m_1Em_2, \dots$ ? Это может быть сделано следующим образом. Определим общерекурсивную функцию  $h$ , такую, что для всех  $y$

$$W_{h(y)} = \{y\} \text{ и } h(y) > y.$$

Положим

$$\begin{aligned} m_0 &= h(0), \\ m_{n+1} &= h(m_n). \end{aligned}$$

Последовательность  $m_0, m_1, \dots$  есть искомая последовательность (на самом деле она еще и рекурсивно перечислима). (5) Возможно ли существование бесконечной *нисходящей* цепи унитарных множеств? Это более сложный вопрос. Чтобы ответить на него, воспользуемся теоремой о рекурсии.

**Теорема VII.** Существует бесконечная последовательность различных натуральных чисел  $m_0, m_1, \dots$ , таких, что для всех  $i$   $W_{m_i} = \{m_{i+1}\}$ .

**Доказательство.** Предпринятое нами построение восходящей цепи могло бы навести на мысль о возможности существования такой общерекурсивной функции  $g$ , что для всех  $y$   $W_y = \{g(y)\}$ . Это, однако, невозможно, поскольку не все  $y$  являются унитарными множествами. Может ли быть достигнута более скромная цель — найти рекурсивную функцию  $g$ , такую, что для всех  $y$

$$W_{g(y)} = \{gg(y)\}?$$

и имеют место лишь в ограниченной форме. Справедлива *континuum-гипотеза* (не имеющая глубокого смысла, поскольку все множества конечны или счетны). При такой аналогии теорему, утверждающую, что  $\bar{K}(= \{x \mid \text{не } xEx\})$  не является рекурсивно перечислимым, можно считать аналогом *парадокса Рассела*. Это относится также к формулировке и доказательству *теоремы Кантора*. (В теории множеств теорема Кантора обнаруживает существование несчетных множеств; парадокс Рассела возникает, когда совокупность всех множеств, не являющихся элементами самих себя, рассматривается как множество.) См. упр. 11-23.

Зададим функцию  $g$  следующим образом. Определим общерекурсивную функцию  $f$  так, чтобы

$$W_{f(x, y)} = \begin{cases} \{\varphi_x \varphi_x(y)\}, & \text{если } \varphi_x \varphi_x(y) \text{ сходится;} \\ \emptyset, & \text{если } \varphi_x \varphi_x(y) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Затем определим общерекурсивную функцию  $f'$ , такую, что для всех  $x$  и  $y$   $W_{f'(x, y)} = W_{f(x, y)}$  и  $f'(x, y) > y$ . (Для этой цели можно воспользоваться функцией  $t$  из теоремы 7-IV, положив  $f'(x, y) = t(f(x, y), \text{uz}[t(f(x, y), z) > y])$ .) Определим общерекурсивную функцию  $h$  так, чтобы

$$\varphi_{h(x)}(y) = f'(x, y),$$

и заметим, что для всех  $x$  функция  $\varphi_{h(x)}$  всюду определена. Применив теорему I, получим  $n$ , такое, что

$$\varphi_n = \varphi_{h(n)}.$$

Функция  $\varphi_n$  всюду определена и для всякого  $y$

$$W_{\varphi_n(y)} = W_{\varphi_{h(n)}(y)} = W_{f'(n, y)} = \{\varphi_n \varphi_n(y)\}.$$

Кроме того, для всех  $y$  выполняется соотношение  $\varphi_n(y) > y$ . Тогда  $\varphi_n$  есть искомая функция  $g$ , поскольку

$$W_{g(y)} = \{gg(y)\}.$$

Положим

$$m_0 = g(0),$$

$$m_{n+1} = g(m_n);$$

последовательность  $m_0, m_1, \dots$  образует искомую нисходящую цепь. ■

В упр. 11-25 теорема VII используется для того, чтобы обнаружить существование насыщенных множеств, отличных от множеств специального вида, описанных в упр. 7-45 и 7-46.

**Вторая иллюстрация. Аксиомы, утверждающие свою собственную непротиворечивость**

Пусть задана логическая система вместе с кодированием символов на  $N$ . Предположим, что определено некоторое понятие „непротиворечивости“ (множеств пф) и что существует общерекурсивная функция  $c$ , такая, что для любого  $x$  пф ( $c$  кодовым номером)  $c(x)$  понимается как утверждение о непротиворечивости множества  $W_x$  пф. Пусть дано рекурсивно перечислимое множество  $W_p$  пф-формул. Можем ли мы добавить к  $W_p$  пф ( $c$  кодовым номером)  $q$ , которая будет утверждать непротиворечивость множества  $W_p \cup \{q\}$ ? Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой. Доказательство ее подобно доказательству теоремы VI.

**Теорема VIII.** Каковы бы ни были натуральное число  $p$  и общерекурсивная функция  $\hat{c}$ , существует натуральное число  $n$ , такое, что

$$W_n = W_p \cup \{\hat{c}(n)\}.$$

**Доказательство.** Возьмем общерекурсивную функцию  $f$ , такую, что для всякого  $x$  имеет место  $W_{f(x)} = W_p \cup \{\hat{c}(x)\}$ . Результат немедленно вытекает из следствия I. Более того, согласно следствию II,  $n$  может быть найдено равномерно по  $p$  и индексу  $\hat{c}$ . ■

Таким образом, при ранее упомянутых предположениях о  $\hat{c}$  теорема VIII показывает, что может быть найден р. п. индекс  $n$ , такой, что множество  $W_n$  состоит из  $W_p$  и ппф, утверждающей непротиворечивость  $W_n$ . Сделаем теперь три замечания.

**Замечание 1.** Очевидно, теорема может быть применена к свойствам множеств (пп-формул), отличным от непротиворечивости, например к свойствам противоречивости, полноты, независимости, если только свойство  $P$  таково, что существует общерекурсивная функция  $c_P$ , где  $c_P(x)$  понимается как утверждение о том, что множество  $W_x$  обладает свойством  $P$ .

**Замечание 2.** Среди различных р. п. индексов данного рекурсивно перечислимого множества одни индексы могут считаться более „естественными“ (в некотором смысле), чем другие. (Инструкции для фиксированного рекурсивно перечислимого множества могут значительно варьироваться по структуре; см. упр. 11-26.) Существует ли некоторый „естественный“ индекс  $n$ , такой, что  $W_n = W_p \cup \{\hat{c}(n)\}$ ? Например, при доказательстве теоремы VIII, если мы обусловим, что (для всякого  $x$ )  $f(x)$  есть индекс и при этом „естественный“ индекс множества  $W_{f(x)}$ , мы можем задаться вопросом: существует ли  $m$ , такое, что

$$W_{f(m)} = W_p \cup \{\hat{c}(m)\};$$

т. е. существует ли такое  $m$ , что  $W_{f(m)} = W_{f(m)}$ . Вообще говоря, ответ на этот вопрос отрицателен: такой естественный индекс не может быть найден (см. упр. 11-27). Однако для некоторых логических систем при некотором выборе множества  $W_p$  этот критерий естественности может быть так ослаблен (разумным образом), что станет возможным утвердительный ответ. Рассмотрим логическую систему, которая содержит пропозициональную связку „ $\Leftrightarrow$ “ и обычные пропозициональные правила, относящиеся к „ $\Leftrightarrow$ “. Для любых фиксированных  $x$  и  $y$  пусть  $[\hat{c}(x) \Leftrightarrow \hat{c}(y)]$  означает (в нашем рассмотрении) пп-формулу, полученную помещением „ $\Leftrightarrow$ “ между пп-формулами (с кодовыми номерами)  $\hat{c}(x)$  и  $\hat{c}(y)$ . Пусть

$f$  — функция, построенная выше, такая, что  $W_{f(x)} = W_p \cup \{\hat{c}(x)\}$ . Назовем  $p$ . п. индекс  $y$  множества  $W_{f(x)}$  естественным, если ппф  $[\hat{c}(y) \Leftrightarrow \hat{c}(f(x))]$  выводима (в данной логической системе) из пп-формул множества  $W_p$ . Рассмотрим, в частности, случай, когда логической системой является элементарная арифметика,  $W_p$  есть множество аксиом Пеано, а функция  $\hat{c}$  задана так, как это будет намечено в § 11.6. Если  $n$  — неподвижная точка функции для  $f$ , полученная применением следствия 1, то можно показать, что ппф  $[\hat{c}(n) \Leftrightarrow \hat{c}(f(n))]$  выводима из аксиом Пеано (прежде всего следует показать, что ппф, выражющая утверждение „ $n$  и  $f(n)$  суть р. п. индексы одного и того же множества“, выводима из аксиом Пеано). Следовательно, в доказательстве теоремы VIII  $n$  превращается в естественный индекс множества  $W_p \cup \{\hat{c}(n)\}$ , и выражение  $\hat{c}(n)$  может быть выведено из  $W_p \cup \{\hat{c}(n)\}$ , несмотря даже на то, что  $\hat{c}(n)$  может не быть элементом множества  $W_p \cup \{\hat{c}(n)\}$ .

**Замечание 3.** Будет ли в действительности множество  $W_n$  непротиворечиво? Для случая элементарной арифметики с функцией  $\hat{c}$ , заданной, как в § 11.6,  $W_n$  может быть или не быть непротиворечиво в зависимости от выбора множества  $W_p$  и индекса  $p$  для  $W_p$ . Если  $W_p$  выбрано пустым,  $W_n$  непротиворечиво; если  $W_p$  выбрано так, что оно есть множество аксиом Пеано, а  $p$  — индекс обычного пересчета аксиом Пеано, то множество  $W_n$  не может быть непротиворечиво. Это следует из второй теоремы Гёделя о неполноте (§ 11.6).

### Третья иллюстрация. Самовоспроизводящиеся машины

Существуют ли машины, способные воспроизводить себя? В литературе встречается несколько способов уточнения этого вопроса и ответов на него. (Первая теорема, отвечающая утверждительно на этот вопрос, принадлежит фон Нейману.) Такого рода конструкции часто в значительной степени напоминают доказательства теоремы о рекурсии. Воспользуемся теоремой о рекурсии для получения общей теоремы, из которой можно вывести различные известные результаты о самовоспроизводящихся машинах как частные случаи.

Пусть  $\mathcal{M}$  есть счетный класс объектов. Мы назовем элементы класса  $\mathcal{M}$  машинами. Пусть  $\mathcal{R}$  есть счетный класс объектов. Мы назовем элементы  $\mathcal{R}$  представлениями. Предположим, что всякой машине  $M$  класса  $\mathcal{M}$  поставлено в соответствие некоторое частичное отображение из  $N$  в  $\mathcal{R}$ , т. е. однозначное подмножество  $N \times \mathcal{R}$ . Для всякой машины  $M$  мы обозначим соответствующее ей частичное отображение также через  $M$  и воспользуемся обозначением  $M(x) = R$  для указания на то, что натуральное число  $x$

отображается на представление  $R$  посредством  $M$ . Предположим далее, что для всякой частичнорекурсивной функции  $\psi$  и всякой машины  $M$  существует машина  $M'$ , такая, что отображение  $M'$  совпадает с отображением  $M\psi$ . (Мы могли бы сказать, что „класс  $\mathcal{M}$  замкнут относительно композиции с машинами Тьюринга“.) Наконец, предположим, что задано фиксированное кодирование класса  $\mathcal{M}$  на  $N$  и что существует такая общерекурсивная функция  $h$ , что для всех  $x_1$  и  $x_2$   $M_{h(x_1, x_2)} = M_{x_1} \Phi_{x_2}$ , (где для любого  $z$   $M_z$  есть машина с кодовым номером  $z$ ).

**Теорема IX.** Пусть  $D$  — произвольная машина. Тогда существует такое натуральное число  $m$ , что при всех входных значениях машина  $M_m$  выдает  $D(m)$  в качестве выходного значения.

(На интуитивном уровне всякое представление из  $\mathcal{R}$  может мыслиться как, в некотором смысле, *репродукция машины из  $\mathcal{M}$* ,  $D$  — как специальная машина класса  $\mathcal{M}$ , которая по любому  $x$  строит репродукцию машины с кодовым номером  $x$ . Тогда теорема утверждает, что должна существовать машина, которая вне зависимости от входного значения производит свою собственную репродукцию.)

**Доказательство.** Пусть  $d$  есть кодовый номер машины  $D$ . Для любого данного  $x$  пусть  $\psi$  есть постоянная функция, значение которой (при любом входе) есть  $h(d, x)$ . Инструкции для  $\psi$  будут зависеть от  $x$ ; тем самым может быть найдена общерекурсивная функция  $f$ , такая, что

$$\varphi_{f(x)}(y) = h(d, x) \text{ для всех } y.$$

Применив теорему о рекурсии, мы получим такое  $n$ , что  $\varphi_n(y) = \varphi_{f(n)}(y) = h(d, n)$  для всех  $y$ . Отсюда  $D\varphi_n(y) = Dh(d, n)$  для всех  $y$ . Но  $D\varphi_n = M_{h(d, n)}$  (по определению  $h$ ).

Положив  $m = h(d, n)$ , имеем  $M_m(y) = D(m)$  для всех входных значений  $y$ . ■

Рассмотрим бегло два примера.

**Пример 1.** Возьмем в качестве  $\mathcal{M}$  класс машин Тьюринга, и пусть  $M_x$  обозначает машину с гёделевым номером  $x$  относительно нашей исходной нумерации машин Тьюринга. Пусть *представлением* данной машины Тьюринга будет последовательность единиц и  $B$ , кодирующая четверки этой машины в соответствии со следующими правилами:

$q_i$	$1 1 1 \dots 1 B$	$(i + 1 \text{ единиц})$
$1$	$1 1$	
$B$	$B B$	
$L$	$1 B$	
$R$	$B 1$	

Таким образом, машина  $\{q_1 R q_2, q_2 B 1 q_1\}$  имеет

$$1 1 B 1 1 B 1 1 1 1 B 1 1 1 B B B 1 1 1 1 B$$

в качестве представления. Пусть  $\mathcal{R}$  — класс всех таких представлений машин Тьюринга. Можно (и нетрудно) показать, что существует машина Тьюринга  $D$ , которая для любого входного значения  $x$  завершает работу, имея на ленте представление для машины  $M_x$  (и ничего более). Теорема IX показывает тогда, что существует некоторая машина Тьюринга, завершающая работу со своим собственным представлением (и ничем более) на ленте для любого ряда единиц в качестве входных значений<sup>1</sup>.

**Пример 2.** Возьмем в качестве  $\mathcal{M}$  более общий класс машин, некоторые из которых обладают способностью производить новые физические объекты, поглощая сырье из окружающей среды. Пусть  $\mathcal{R}$  — это само  $\mathcal{M}$ . Возьмем в качестве  $D$  некоторую „универсальную машину“, которая по любому данному кодовому номеру („синьке“) машины будет конструировать копию этой машины. В этом случае теорема IX утверждает, что существует некоторая машина, которая может сконструировать копию самой себя.

Разумеется, в обоих примерах должно быть доказано существование соответствующей машины  $D$ . В примере 2 в этом и заключена вся тонкость. Должно быть дано точное определение машины и среды и предпринято более детальное изучение возможных конфигураций среды. Тем не менее наше применение теоремы о рекурсии выявляет основные черты доказательства самовоспроизведения и имеет непосредственное отношение к ошибочным соображениям (основывающимся на „бесконечном регрессе“) по поводу невозможности существования самовоспроизводящихся машин<sup>2</sup>.

<sup>1)</sup> Это применение было предложено К. Ли.

<sup>2)</sup> В примере 2 мог бы возникнуть вопрос о пределах отклонений и постепенном внесении ошибки (для макроскопических машин). В конечном счете это вопрос о том, как мы определяем  $\mathcal{M}$  и конструируем  $D$ . Возможное решение состоит в том, чтобы ввести абсолютные стандарты (атомные часовые механизмы, длины волн спектральных линий и т. д.) в  $D$ .

Подход теоремы IX несколько отличается от наиболее распространенных конструкций, связанных с самовоспроизведением машин. В такого рода конструкциях самовоспроизводящиеся машины могут быть описаны в виде  $\langle D, C, E, \langle b, i \rangle \rangle$ , где  $D$  — „реализатор синьки“ (строящий объект по любой данной „синьке“),  $C$  — „устройство, копирующее программу“,  $E$  — дополнительное оборудование для обращения с входами и выходами устройств  $C$  и  $D$ ,  $\langle b, i \rangle$  есть „программа“, состоящая из  $b$  — синьки устройства  $\langle D, C, E \rangle$  и  $i$  — множества дополнительных инструкций. Машина получает команды из  $i$  и действует следующим образом. Синька  $b$  помещается в  $D$  и вырабатывается репродукции  $D'$ ,  $C'$  и  $E'$ . Затем программа  $\langle b, i \rangle$  помещается в  $C$ , где с нее снимается копия  $\langle b', i' \rangle$ . Затем монтируется „потомок“  $\langle D', C', E', \langle b', i' \rangle \rangle$ .

Теорема IX не использует такого последнего шага, при котором копируется синька. Вместо этого, как мы видели, самовоспроизводящаяся машина принимает вид  $\langle D, \varphi_n \rangle$ , где  $\varphi_n$  сначала вычисляет „общую синьку“ для  $\langle D, \varphi_n \rangle$ , а затем  $D$  реализует ее.

### Четвертая иллюстрация. Теорема о парной рекурсии

Можно ли найти общую неподвижную точку для любых двух данных общерекурсивных функций? Вообще говоря, это невозможно. Следующая теорема, однако, показывает, что в некотором (более слабом) смысле это может быть сделано. Эта теорема получена Шмульяном [1961]. Доказательство ее является четвертой иллюстрацией применения теоремы о рекурсии.

**Теорема X (а). (Шмульян).** Для любых общерекурсивных функций  $g$  и  $h$  существуют  $m$  и  $n$ , такие, что

$$\Phi_m = \Phi_g(\langle m, n \rangle) \text{ и } \Phi_n = \Phi_h(\langle m, n \rangle).$$

**Доказательство.** Возьмем общерекурсивную функцию  $f$ , такую, что

$$\Phi_f(x, y) = \Phi_g(\langle x, y \rangle).$$

Применив теорему III, найдем общерекурсивную функцию  $\hat{m}$ , для которой выполняется

$$\Phi_{\hat{m}(y)} = \Phi_f(\hat{m}(y), y) = \Phi_g(\langle \hat{m}(y), y \rangle).$$

Пусть  $k$  — общерекурсивная функция, такая, что

$$\Phi_k(y) = \Phi_h(\langle \hat{m}(y), y \rangle).$$

Применив теорему I, найдем  $\hat{n}$ , для которого имеет место

$$\Phi_{\hat{n}} = \Phi_{k(\hat{n})} = \Phi_h(\langle \hat{m}(\hat{n}), \hat{n} \rangle).$$

Положив  $n = \hat{n}$  и  $m = \hat{m}(\hat{n})$ , имеем

$$\Phi_m = \Phi_g(\langle m, n \rangle) \text{ и } \Phi_n = \Phi_h(\langle m, n \rangle),$$

что и требовалось. ■

Одно из применений теоремы X будет предложено в упр. 11-29.

### Пятая иллюстрация. Изоморфизм универсальных функций

Напомним, что функция  $\psi$  *универсальна*, если существует общерекурсивная функция  $f$  двух переменных, такая, что  $(\forall x)[\varphi_x = \lambda y[\psi f(x, y)]]$ . В теореме 4-III мы показали, что свойство функции быть универсальной рекурсивно инвариантно. Воспользуемся теперь теоремой о рекурсии, чтобы получить обратный результат.

**Теорема X (б). (Блюм).** Любые две универсальные функции рекурсивно изоморфны.

### Доказательство.

Определение.  $f$  есть *шифр* функции  $\psi$ , если  $f$  общерекурсивна и  $(\forall x)[\varphi_x = \lambda y[\psi f(x, y)]]$ .

Пусть  $\psi = \lambda x[\varphi_{\pi_1(x)}(\pi_2(x))]$ . Тогда функция  $\psi$  универсальна, причем имеет  $\lambda xy[\langle x, y \rangle]$  в качестве шифра. Пусть  $\theta$  — произвольная универсальная функция с  $h$  в качестве шифра. Для доказательства теоремы мы должны установить существование такой рекурсивной перестановки  $g$ , что  $g\theta = \psi g$ .

**Лемма.** Пусть функция  $\theta$  универсальна. Тогда существует равномерная эффективная процедура, позволяющая по любым заданным  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , таким, что  $\theta(v_1) = \theta(v_2) = \dots = \theta(v_k)$ , найти такое  $v_{k+1} \notin \{v_1, \dots, v_k\}$ , что  $\theta(v_1) = \dots = \theta(v_k) = \theta(v_{k+1})$ .

**Доказательство леммы.** Определим общерекурсивную функцию  $f'$  так, что

$$\Phi_{f'(t)}(x) = \begin{cases} \theta(v_1), & \text{если } h(t, 0) \notin \{v_1, \dots, v_k\}; \\ \text{расходится}, & \text{если } h(t, 0) \in \{v_1, \dots, v_k\}. \end{cases}$$

Применив теорему 1, получим  $n$ , такое, что  $\Phi_{f'(n)} = \varphi_n$ . Если  $h(n, 0) \notin \{v_1, \dots, v_k\}$ , положим  $v_{k+1} = h(n, 0)$ . Если  $h(n, 0) \in \{v_1, \dots, v_k\}$ , то  $\theta(v_1), \dots, \theta(v_k)$  должны быть не определены. Зададим общерекурсивную функцию  $f''$  так, что

$$\Phi_{f''(t)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } h(t, 0) \in \{v_1, \dots, v_k\}; \\ \text{расходится}, & \text{если } h(t, 0) \notin \{v_1, \dots, v_k\}. \end{cases}$$

Применив теорему I, получим  $n'$ , такое, что  $\Phi_{f''(n')} = \varphi_{n'}$ . Так как  $\theta(v_1), \dots, \theta(v_k)$  не определены, то  $\Phi_{f''(n')}(0)$  должно быть не определено и  $h(n', 0) \notin \{v_1, \dots, v_k\}$ . Положим  $v_{k+1} = h(n', 0)$ . Согласно теореме II, общая процедура равномерно эффективна по  $v_1, \dots, v_k$ . Это завершает доказательство леммы. (*Следствие из леммы.* всякая универсальная функция имеет взаимно однозначный шифр.)

Пусть  $z$  фиксировано. Возьмем  $z'$ , такое, что

$$\Phi_{z'} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in \varphi_z \& (\forall y')[[y' \neq y \& \langle y', x \rangle \in \varphi_z] \Rightarrow \langle y, x \rangle \text{ предшествует } \langle y', x \rangle \text{ (в стандартном пересчете } \varphi_z)]\}.$$

$z'$  может быть получено равномерно по  $z$ , и  $\varphi_{z'}$  есть однозначное „обращение“  $\varphi_z$ .

Приведем инструкцию для вычисления некоторой частично-рекурсивной функции  $\eta$ . Более точно, приведем инструкцию для пересчета упорядоченных пар функции  $\eta$ .

Этап 2t. Проверьте, появилось ли уже  $t$  в области определения функции  $\eta$ . Если появилось, переходите к этапу  $2t + 1$ . Если

нет, получите методом теоремы 7-IV последовательность различных индексов функции  $\varphi_z\theta$ . Пусть  $w$  есть первый индекс в этой последовательности, такой, что  $\langle w, t \rangle$  еще не было помещено в область значений  $\eta$ . Добавьте  $\langle t, \langle w, t \rangle \rangle$  к функции  $\eta$ , и переходите к этапу  $2t + 1$ .

Этап  $2t + 1$ . Посмотрите, появилось ли уже  $t$  в области значений  $\eta$ . Если появилось, переходите к этапу  $2t + 2$ . Если нет, пусть  $s$  есть индекс  $\varphi_z\psi$ . Воспользуйтесь леммой для порождения последовательности различных натуральных чисел  $v_1, v_2, \dots$ , таких, что

$$\theta(v_1) = \theta(v_2) = \dots = \varphi_s(t).$$

Пусть  $v$  — первый элемент этой последовательности, такой, что  $v$  еще не было помещено в область определения функции  $\eta$ . Добавьте  $\langle v, t \rangle$  к функции  $\eta$  и переходите к этапу  $2t + 2$ .

По построению  $\eta$  однозначно и является частично рекурсивной функцией.

Заметим, что, поскольку  $t$  добавлено к области определения функции  $\eta$  на этапе  $2t$ , то

$$\varphi_z\theta(t) = \varphi_w(t) = \psi(\langle w, t \rangle) = \psi\eta(t),$$

и поскольку  $v$  добавлено к области определения функции  $\eta$  на этапе  $2t + 1$ , то

$$\varphi_z\theta(v) = \varphi_z\varphi_s(t) = \varphi_z\varphi_z\psi(t) = \varphi_z\varphi_z\psi\eta(v).$$

Очевидно по построению, что для всякого  $z$   $\eta$  всюду определена, взаимно однозначна и есть отображение на  $A$ . Более того, индекс  $\eta$  зависит равномерно от  $z$ . Таким образом, мы имеем общерекурсивную функцию  $\hat{f}$ , такую, что для любого  $z$   $\eta = \varphi_{\hat{f}(z)}$  и  $\eta$  есть рекурсивная перестановка. Применив теорему I, получим  $m$ , такое, что  $\varphi_m = \varphi_{\hat{f}(m)}$ . Пусть  $g = \varphi_{\hat{f}(m)}$ . Тогда, взяв  $z = m$  в приведенной выше конструкции, имеем  $\eta = g$ ,  $\varphi_z = g$  и  $\psi_z = g^{-1}$ . Следовательно, поскольку  $t$  добавлено к области определения функции  $\eta$  на этапе  $2t$ ,

$$g\theta(t) = \varphi_z\theta(t) = \psi\eta(t) = \psi g(t),$$

и поскольку  $v$  добавлено к области определения  $\eta$  на этапе  $2t + 1$ ,

$$g\theta(v) = \varphi_z\theta(v) = \varphi_z\varphi_z\psi\eta(v) = gg^{-1}\psi g(v) = \psi g(v).$$

Таким образом,  $g\theta = \psi g$  и доказательство завершено. ■

Упражнения 11-30—11-33 содержат несколько иных применений теоремы о рекурсии. Упражнение 11-33 является простым прототипом соображения, используемого в § 11.7 и 11.8 и дальнейшей теории.

## § 11.5. ДРУГИЕ ФОРМЫ ТЕОРЕМЫ О РЕКУРСИИ

Строго говоря, теорема о рекурсии, сформулированная выше (в теореме IV), не есть теорема о неподвижной точке (a fixed-point theorem), хотя мы и использовали в связи с ней термин „неподвижная точка” („fixed-point value”). Мы теперь приведем настоящую теорему о неподвижной точке, тесно связанную с теоремой IV. Она, как мы увидим, несколько слабее и имеет меньше применений, нежели теорема IV.

**Теорема XI.** Пусть  $\Phi$  — оператор перечисления<sup>1)</sup>. Существует множество  $A$ , такое, что

- (i)  $\Phi(A) = A$ ,
- (ii)  $(\forall B)[\Phi(B) = B \Rightarrow A \subset B]$ ,
- (iii)  $A$  рекурсивно перечислимо.

**Доказательство**<sup>2)</sup>. Определим последовательность множеств  $A_0, A_1, \dots$  следующим образом:

$$\begin{aligned} A_0 &= \emptyset, \\ A_{n+1} &= \Phi(A_n). \end{aligned}$$

Возьмем

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Напомним, что, согласно теореме 9-XXI,  $\Phi$  обладает свойствами

- (a)  $A \subset B \Rightarrow \Phi(A) \subset \Phi(B)$  (монотонность);
- (b)  $x \in \Phi(A) \Rightarrow (\exists D)[D$  конечно &  $D \subset A \wedge x \in \Phi(D)]$  (непрерывность).

Докажем (i).

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow (\exists n)[n > 0 \wedge x \in A_n] \text{ (по определению } A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists n)[n > 0 \wedge x \in \Phi(A_{n-1}) \text{ (по определению } A_n) \Rightarrow \\ &\qquad\qquad\qquad \Rightarrow x \in \Phi(A) \text{ (в силу монотонности)}} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Операторы перечисления были определены в § 9.7. Оператор перечисления отображает  $2^N$  в  $2^N$ .

<sup>2)</sup> Пункты (i) и (ii) теоремы XI являются частным случаем теоремы Кнастера — Тарского, утверждающей, что если  $\mathcal{L}$  — полная решетка, то любое монотонное и непрерывное отображение  $F$  из  $\mathcal{L}$  в  $\mathcal{L}$  обладает неподвижной точкой; здесь монотонное означает, что  $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$ , а непрерывность рассматривается относительно естественной топологии, индуцируемой замыканием относительно естественной топологии, индуцируемой верхней гранью в решетке. Для теоремы XI следует взять в качестве решетки решетку всех множеств, упорядоченных по  $\subset$ . Монотонность и непрерывность утверждаются теоремой 9-XXI (см. упр. 11-35).

и  
 $x \in \Phi(A) \Rightarrow (\exists D) [D \text{ конечно} \& D \subset A \& x \in \Phi(D)]$  (в силу непрерывности)  $\Rightarrow (\exists D)(\exists n) [D \text{ конечно} \& D \subset A_n \& x \in \Phi(D)]$  (по определению  $A$ )  $\Rightarrow (\exists n)[x \in A_{n+1}]$  (в силу монотонности)  $\Rightarrow x \in A$  (по определению  $A$ ).

Следовательно,  $x \in A \Leftrightarrow x \in \Phi(A)$ , и мы имеем (i).

Чтобы доказать (ii), предположим  $\Phi(B) = B$ . Тогда

$$A_0 = \emptyset \subset B.$$

Если  $A_n \subset B$ , то, согласно монотонности,  $A_{n+1} = \Phi(A_n) \subset \Phi(B) = B$ . Следовательно, по индукции  $(\forall n)[A_n \subset B]$ . Отсюда  $A \subset B$ , и мы имеем (ii).

Чтобы установить (iii), положим  $\Phi = \Phi_z$ . Тогда для любого  $y$   $\Phi(W_y) = \{x \mid (\exists u)[\langle x, y \rangle \in W_z \& D_u \subset W_y]\}$  (по определению § 9.7).

Множество  $\Phi(W_y)$  рекурсивно перечислимо (согласно второй теореме о проекции), и мы имеем привычным образом общерекурсивную функцию  $f$ , такую, что для всех  $y$

$$W_{f(y)} = \Phi_z(W_y).$$

Пусть  $q$  — некоторый р. п. индекс пустого множества. Определим общерекурсивную функцию  $g$  следующим образом:

$$\begin{aligned} g(0) &= q, \\ g(n+1) &= fg(n). \end{aligned}$$

Тогда для всех  $i$   $A_i = W_{g(i)}$  и, следовательно,

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists y)[x \in W_{g(y)}].$$

Согласно второй теореме о проекции, множество  $A$  рекурсивно перечислимо. Это доказывает (iii). ■

В доказательстве (iii) функция  $f$  может быть сделана зависящей от  $z$  равномерно. Таким образом, имеет место

**Следствие XI (а).** *Существует общерекурсивная функция  $\tilde{f}$ , такая, что для всех  $z$  и  $y$*

$$W_{\tilde{f}(y, z)} = \Phi_z(W_y).$$

**Доказательство очевидно.** ■

Из доказательства пункта (iii) также следует, что р. п. индекс неподвижной точки  $A$  может быть получен равномерно по  $z$ . Таким образом, имеем следующую усиленную форму теоремы.

**Следствие XI (б).** *Существует общерекурсивная функция  $h$ , такая, что для всех  $z$*

- (i)  $\Phi_z(W_{h(z)}) = W_{h(z)}$ ;
- (ii)  $(\forall B)[\Phi_z(B) = B \Rightarrow W_{h(z)} \subset B]$ .

**Доказательство.** Р. п. индекс множества  $\{x \mid (\exists y)[x \in W_{g(y)}]\}$  зависит равномерно от индекса для  $g$ , который в свою очередь равномерно зависит от индекса для  $f$ , а тот в свою очередь зависит равномерно от  $z$  (из доказательства (iii) теоремы<sup>1)</sup>). ■

Теорема о неподвижной точке для рекурсивных операторов следует из теоремы XI.

**Теорема XII (Клини).** *Пусть  $\Psi$  — рекурсивный оператор. Тогда существует функция  $\varphi$ , такая, что*

- (i)  $\Psi(\varphi) = \varphi$ ;
- (ii)  $(\forall \psi)[\Psi(\psi) = \psi \Rightarrow \varphi \subset \psi]$ ;
- (iii)  $\varphi$  частичнорекурсивна.

**Доказательство.** Пусть  $\Phi_z$  — оператор перечисления, определяющий  $\Psi$ . Возвращаясь к доказательству теоремы XI и заменяя  $\Phi$  на  $\Phi_z$ , замечаем, что

$$A_0 = \emptyset \text{ есть однозначное множество}$$

и что  $A_n$  однозначно  $\Rightarrow A_{n+1}$  однозначно (так как оператор  $\Phi_z$  определяет рекурсивный оператор). Отсюда следует, что минимальная неподвижная точка  $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  должна быть однозначной.

Возьмем

$$\varphi = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in A\}.$$

Пункты (i), (ii), (iii) теперь следуют из (i), (ii) и (iii) теоремы XI. ■

Могут быть приведены, аналогично следствиям XI (а) и XI (б), два следствия.

**Следствие XII (а).** *Существует общерекурсивная функция  $\tilde{f}$ , такая, что для всех  $z$  и  $y$  если функция  $\Phi_z(\tau(\varphi_y))$  однозначна, то*

$$\varphi_{\tilde{f}(y, z)} = \tau^{-1}\Phi_z(\tau(\varphi_y)).$$

*В частности, если  $\Phi_z$  определяет рекурсивный оператор  $\Psi$ , то для всех  $y$*

$$\varphi_{\tilde{f}(y, z)} = \Psi(\varphi_y).$$

<sup>1)</sup> Естественно возникает вопрос, что произойдет, если мы применим теорему III к следствию XI (а). Неподвижная точка будет получена, но будет ли она минимальной? Мы займемся выяснением этого вопроса в теоремах XIII и XIV.

**Доказательство.** Рассмотрим следующую последовательность шагов для любых  $y$  и  $z$ . Взяв  $\varphi_y$ , перейдем к рекурсивно перечислимому множеству  $W_{y'} = \tau(\varphi_y)$ , применив теорему 5-IX. Получим, согласно следствию XI (а), множество  $W_{\tilde{f}(y', z)}$ ; множество  $W_{\tilde{f}(y', z)}$  однозначно, согласно теореме 5-XVI; затем применим теорему 5-IX, чтобы получить частичнорекурсивную функцию. Эта последовательность шагов равномерна и, следовательно, исходная функция  $\tilde{f}$  существует. ■

**Следствие XII (б).** Существует общерекурсивная функция  $h$ , такая, что для любого  $z$  если  $\Phi_z$  определяет рекурсивный оператор  $\Psi$ , то

- (i)  $\Psi(\varphi_{h(z)}) = \varphi_{h(z)}$ ;
- (ii)  $(\forall \psi)[\Psi(\psi) = \psi \Rightarrow \varphi_{h(z)} \subseteq \psi]$ .

**Доказательство.** Утверждение вытекает из следствия XII (а), см. доказательство следствия XI (б). ■

Для частичнорекурсивного оператора теорема XII может не иметь места, поскольку неподвижная точка определяющего оператора перечисления не обязательно есть однозначное множество. В случае общерекурсивного оператора минимальная неподвижная точка может оказаться не всюду определенной; более того, общерекурсивный оператор может не иметь всюду определенной неподвижной точки (см. упр. 11-36). Теорема XI может быть выведена из теоремы XII (см. упр. 11-39).

Следствия XI (а) и XII (а) не зависят от каких-либо соображений, связанных с неподвижной точкой. Коль скоро установлено следствие XI (а), п. (i) следствия XI (б) и тем самым пункты (i) и (iii) теоремы XI непосредственно вытекают из следствия III (теоремы о рекурсии). Аналогично, коль скоро установлено следствие XII (а), п. (i) следствия XII (б) и п. (i) и (iii) теоремы XII непосредственно вытекают из теоремы III (теоремы о рекурсии). Однако п. (ii) — результат о минимальности, ни в теореме XI, ни в теореме XII не может быть получен непосредственно. По этой причине теоремы XI и XII обычно приводятся и доказываются (как это и сделано выше) независимо от теоремы IV. Теоремы XI и XII сами обычно называются *теоремами о рекурсии*. В самом деле, как мы покажем ниже, название „теорема о рекурсии“ ведет свое происхождение от определенных приложений теоремы XII. Теоремы XI и XII вместе иногда называют „первой теоремой о рекурсии“, а теорему IV — „второй теоремой о рекурсии“<sup>1)</sup>.

Отныне, как и ранее, термин „теорема о рекурсии“ сам по себе будет связываться с теоремой IV или с одним из ее частных случаев (теоремами I, II и III). На конкретные теоремы о неподвиж-

<sup>1)</sup> В обратном порядке следования по сравнению с нашим изложением.

ной точке, теоремы XI и XII, мы будем ссылаться как на *слабую теорему о рекурсии*. В любом контексте, где могла бы возникнуть неясность, на теорему о рекурсии (теорему IV) мы будем ссылаться как на *сильную теорему о рекурсии*. Сильная теорема о рекурсии не вытекает непосредственно из слабой теоремы о рекурсии, так как, например, применения, приведенные в § 11.3 и 11.4, не могут быть непосредственно получены из слабой теоремы.

Что еще можно утверждать о соотношении между сильной и слабой теоремами о рекурсии? С целью дальнейшего рассмотрения этого вопроса сформулируем теорему, принадлежащую Майхиллу и Шепердсону [1955].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *f* **экстенсиональна**, если для всех  $x$  и  $y$   $\varphi_x = \varphi_y \Rightarrow \varphi_{f(x)} = \varphi_{f(y)}$ .

**Теорема** (Майхилл и Шепердсон). (а) *Всякий рекурсивный оператор  $\Psi$  определяет экстенсиональную функцию  $f$ , такую, что  $\varphi_{f(x)} = \Psi(\varphi_x)$  для всех  $x$ .*

(б) *Всякая экстенсиональная функция  $f$  определяет единственный рекурсивный оператор  $\Psi$ , такой, что  $\varphi_{f(x)} = \Psi(\varphi_x)$  для всех  $x$ <sup>1)</sup>.*

Утверждение (а) немедленно вытекает из следствия XII (а). Утверждение (б) будет доказано в теореме 15-XXIX. В упр. 11-43 доказательство будет намечено.

Если задана экстенсиональная функция  $f$ , должна ли конструкция теоремы II давать (по каждому индексу  $f$ ) неподвижную точку  $n$ , такую, что  $\varphi_n$  есть минимальная неподвижная точка соответствующего рекурсивного оператора  $\Psi$ ? Следующая теорема показывает, что это не так. В роли  $\Psi$  будет выступать тождественный оператор, для которого, очевидно, минимальной неподвижной точкой является нигде не определенная функция. Доказательство использует теорему о рекурсии.

**Теорема XIII.** Пусть  $n$  — общерекурсивная функция, построенная в теореме II. Существует общерекурсивная функция  $f$  с индексом  $z$ , такая, что  $\varphi_{f(x)} = \varphi_x$  при всех  $x$ , но при этом  $\varphi_{f(n)} = \varphi_{n(z)} \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Пусть  $t$  — некоторый фиксированный индекс постоянной функции 0, т. е.  $\varphi_t = \lambda y[0]$ . Для любого  $z$  определим частичнорекурсивную функцию  $\psi$  следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq n(z); \\ t, & \text{если } x = n(z). \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Отображение частичнорекурсивных функций на частичнорекурсивные функции, определяемое экстенсиональной функцией  $f$ , названо Майхиллом и Шепердсоном *эффективной операцией*.

Гёделев номер  $\psi$  может быть найден равномерно по  $z$ , т. е. существует общерекурсивная функция  $h$ , такая, что

$$\psi = \Phi_{h(z)}.$$

С помощью теоремы I найдем неподвижную точку функции  $h$ , назовем ее  $m$ . Тогда имеем

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq n(m); \\ t, & \text{если } x = n(m). \end{cases}$$

Возьмем  $f = \varphi_m$ , тогда

$$f(x) = x \quad \text{при } x \neq n(m)$$

и, согласно теореме II,

$$\varphi_{f(x)} = \varphi_x \quad \text{при } x = n(m).$$

Отсюда

$$\varphi_{f(x)} = \varphi_x \quad \text{для всех } x.$$

Теперь неподвижная точка, определяемая теоремой II, есть  $n(m)$  и

$$\varphi_{n(m)} = \varphi_{f(n(m))} = \varphi_t = \lambda y[0] \neq \emptyset^1.$$

Означает ли это, что слабая теорема о рекурсии (теорема XII) не является прямым следствием сильной теоремы о рекурсии (теоремы IV)? Следующая теорема показывает, что, несмотря на теорему XIII, теорема XII следует из теоремы IV. Существует равномерная процедура перехода от индекса любой экстенсиональной функции  $f$  к индексу экстенсиональной функции  $h$ , такой, что функция  $h$  определяет тот же рекурсивный оператор, что и  $f$ , и такой, что теорема II, примененная к индексу  $h$ , дает минимальную неподвижную точку этого рекурсивного оператора. Теорема формулируется в виде, не предполагающем знакомства с теоремой Майхилла — Шепердсона.

**Теорема XIV.** Пусть  $n$  — рекурсивная функция, построенная в теореме II. Существует общерекурсивная функция  $g$ , такая, что для любой общерекурсивной функции  $f$  и любого рекурсивного оператора  $\Psi$  если  $(\forall x)[\varphi_{f(x)} = \Psi(\varphi_x)]$  и если  $z$  — индекс  $f$ , то  $\varphi_{g(z)}$  есть всюду определенная функция, назовем ее  $h$ , такая, что

$$(i). (\forall x)[\varphi_{h(x)} = \varphi_{f(x)}]$$

и

(ii)  $\varphi_{g(z)}$  есть минимальная неподвижная точка рекурсивного оператора  $\Psi$ .

**Доказательство.** Доказательство теоремы XIV будет дано в § 11.6.

<sup>1)</sup> Заметим, что это доказательство проходит для любой общерекурсивной функции  $n$ , удовлетворяющей условию теоремы II.

Теоремы XI и XII, таким образом, превращаются в прямые следствия теоремы IV, а сильная теорема о рекурсии оказывается более общей и фундаментальной, чем эти две теоремы о рекурсии.

Пусть  $\Psi$  — рекурсивный оператор. Рассмотрим возможную функцию  $\varphi$ , такую, что выполняется неявное соотношение

$$\varphi = \Psi(\varphi).$$

Теорема XII указывает тогда на существование частичнорекурсивной функции  $\varphi$ , удовлетворяющей этому неявному соотношению. Такие неявные соотношения могут быть частными случаями того, что иногда называется *определениями по рекурсии*. Отсюда термин „теорема о рекурсии”.

**Пример.** Следующее множество равенств задает определение по рекурсии:

$$(E) \quad \begin{aligned} \varphi(1) &= 2, \\ \varphi(2x) &= 2\varphi(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим равенства

$$(E^*) \quad \begin{aligned} \varphi(1) &= 2, \\ \varphi(2x) &= 2\varphi(x). \end{aligned}$$

определяющие  $\varphi$  через  $\hat{\varphi}$ . Эти равенства задают рекурсивный оператор  $\Psi$ , такой, что  $\varphi = \Psi(\varphi)$ . Мы можем применить теорему XII непосредственно к этому оператору или можем, как в теореме XIV, взять  $h$  таким образом, что  $\varphi_{h(x)} = \Psi(\varphi_x)$ , и применить теорему IV. Каждый из этих способов приводит к минимальной частичнорекурсивной функции  $\varphi$ , удовлетворяющей (E). Эта минимальная частичнорекурсивная функция есть  $\hat{\varphi}$ , где

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \text{ есть степень числа 2;} \\ \text{расходится,} & \text{если } x \text{ не есть степень числа 2.} \end{cases}$$

(В силу теоремы XIV несущественно, применялась ли для решения этого неявного соотношения сильная или слабая теорема о рекурсии <sup>1)</sup> <sup>2)</sup>.)

<sup>1)</sup> О процессе нахождения объекта, удовлетворяющего данному неявному соотношению, часто говорят как о *решении* этого соотношения. Таким образом, функция  $\hat{\varphi}$ , определенная выше, есть *решение* (E). Теорема о рекурсии тем самым служит *теоремой существования* частичнорекурсивных решений рекурсивных равенств некоторого типа. Это применение теоремы о рекурсии подобно использованию в анализе теорем о неподвижной точке для получения существования решений дифференциальных уравнений некоторого типа или использованию „теорем о рекурсии” в теории множеств для определения функций на ординалах.

<sup>2)</sup> Не всякое множество рекурсивных равенств вида

$$\varphi = \dots \varphi \dots$$

В § 11.7 и 11.8 так же, как в последующих главах, на основании теоремы о рекурсии будут получены методы для задания частично рекурсивных функций на вполне упорядоченных множествах. При этом, как и в большинстве других приложений, будет использована сильная (предпочтительнее, чем слабая) теорема о рекурсии (см. упр. 11-33).

## § 11.6. ОБСУЖДЕНИЕ

В § 11.5 мы выделили и обсудили (в теоремах XI, XII и XIV) некоторые аспекты теоремы о рекурсии, связанные с понятием *неподвижной точки*. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые особенности теоремы о рекурсии, связанные с *самовыразимостью*. Например, если  $W_m = \{m\}$ , то число  $m$  в некотором смысле называет себя. Самовыразимость тесно связана с диагонализацией, и, как мы указывали в § 11.1, теорема о рекурсии включает в себя и суммирует широкий класс диагональных методов. Рассмотрим прежде всего теорему I и исследуем несколько более подробно детали механизма получения неподвижной точки  $n$ . Напомним, что  $\tilde{g}$  было определено следующим образом:

$$\varphi_{\tilde{g}(u)} = \begin{cases} \varphi_{\varphi_u(u)}, & \text{если } \varphi_u(u) \text{ сходится;} \\ \text{всюду расходится,} & \text{если } \varphi_u(u) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Более подробно, для всякого  $u$   $\tilde{g}(u)$  есть *имя* (гёделев номер) мно-

может быть представлено как

$$\psi = \Psi(\varphi),$$

где  $\Psi$  — рекурсивный оператор. В некоторых случаях левая часть определяется правой частью не единственным образом; в других случаях может не существовать *никакого* решения. В случаях неединственности решения единственность может быть достигнута введением дополнительных условий. Например, равенства

$$\begin{aligned} \psi(4x) &= 2\psi(2x); \\ \psi(2) &= 2 \end{aligned}$$

могут быть выражены рекурсивным оператором  $\Psi$ , где  $\psi = \Psi(\varphi)$  задается следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x = 2; \\ 2\varphi(z), & \text{если } z \text{ четно и } x = 2z \\ \text{расходится} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Дополнительные условия могут тогда исключить некоторые функции, удовлетворяющие первоначальным рекурсивным равенствам; в рассмотренном примере исключается функция  $\psi = \lambda x[x]$ ; может оказаться, что множество рекурсивных равенств имеет единственное всюду определенное решение, но такое решение не рекурсивно (см. упр. 11-41).

жества инструкций. По существу это означает:

$\tilde{g}(u) = [„\text{по любому данному входному значению воспользуйтесь } P_u \text{ для вычисления } \varphi_u(u), \text{ как только вычисление завершится (если это произойдет), примените инструкции } \varphi_u(u) \text{ к данному входному значению}“]$

или, более кратко,

$\tilde{g}(u) = [„\text{вычисляйте } \varphi_u(u); \text{ как только выяснится, что } \varphi_u(u) \text{ определено (если это произойдет), выполните } \varphi_u(u)“]$

(„ $u$ “ здесь представляет собой номера для числа  $u$ ). Заметим, что  $\tilde{g}(u)$  может быть вычислено непосредственно (как имя) безотносительно к тому, определено или нет  $\varphi_u(u)$ . Далее, используя функцию  $f$  теоремы I и бера гёделевы номера функций  $f$  и  $g$ , имеем, согласно теореме 1-VI, гёделев номер функции  $\tilde{f}\tilde{g}$ ; назовем его  $v$ . Тогда

$\tilde{g}(v) = [„\text{вычисляйте } \varphi_v(v); \text{ как только выяснится, что } \varphi_v(v) \text{ определено (если это произойдет), выполните } \varphi_v(v)“]$

Зададим теперь то же имя несколько иным способом.

$\tilde{g}(v) = [„\text{вычисляйте } f\tilde{g}(v); \text{ как только выяснится, что } f\tilde{g}(v) \text{ определено (если это произойдет), выполните } f\tilde{g}(v)“]$ <sup>1)</sup>.

Поскольку функция  $f$  всюду определена и  $\tilde{g}(v)$  есть имя, приведенное выше,  $f\tilde{g}(v)$  может быть вычислено. Имя  $\tilde{g}(v)$  предписывает сначала вычислить  $\tilde{f}\tilde{g}(v)$ , а затем применить  $\tilde{f}\tilde{g}(v)$ . Таким образом,  $f\tilde{g}(v)$  и  $\tilde{g}(v)$  суть инструкции одной и той же частично рекурсивной функции, но вычисление этой функции, согласно  $\tilde{g}(v)$ , будет несколько длиннее вычисления, согласно  $f\tilde{g}(v)$ , поскольку  $\tilde{g}(v)$  требует экстраэтапа вычисления  $\tilde{f}\tilde{g}(v)$ .

Имя  $\tilde{g}(v)$ , таким образом, включает не себя (что просто невозможно), а имя инструкций для вычисления себя (как части инструкций для вычисления  $f\tilde{g}(v)$ ). Это и характеризует самовыразимые конструкции в логике и теории рекурсивных функций. При рассмотрении таких конструкций мы должны иметь дело не только с именами некоторых объектов, но также и с именами инструкций для вычисления имен этих объектов (см. ниже рассуждение о гёделевой функции подстановки.)

Мы теперь в состоянии наметить в общих чертах доказательство теоремы XIV.

<sup>1)</sup> Разумеется,  $\tilde{g}(v)$  представляет собой конкретное натуральное число. Мы употребляем два различных неформальных выражения для задания одного и того же числа.

**ТЕОРЕМА XIV.** Пусть  $n$  — общерекурсивная функция теоремы II. Существует общерекурсивная функция  $g$ , такая, что для любой общерекурсивной функции  $f$  и любого рекурсивного оператора  $\Psi$  если  $(\forall x)[\Phi_{f(x)} = \Psi(\Phi_x)]$  и если  $z$  — индекс функции  $f$ , то  $\Phi_{g(z)}$  — всегда определенная функция, назовем ее  $h$ , такая, что

- (i)  $(\forall x)[\Phi_{h(x)} = \Phi_{f(x)}]$  и
- (ii)  $\Phi_{ng(z)}$  — минимальная неподвижная точка рекурсивного оператора  $\Psi$ .

**Доказательство.** Пусть даны  $f$  и  $\Psi$ , удовлетворяющие всем посылкам, и пусть  $z$  — индекс функции  $f$ . Мы опишем, как должно быть вычислено  $g(z)$ .

Любая конечная функция  $\varphi$  частично рекурсивна. Если множество  $D_u$  однозначно, то инструкции для вычисления  $\{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in D_u\}$  могут быть получены равномерно по  $u$ . Иными словами, существует общерекурсивная функция  $d$ , такая, что  $(\forall u)[D_u$  однозначно  $\Rightarrow \tau(\Phi_{d(u)}) = D_u]$ .

Определим множество  $F$  следующим образом:

$$F = \{ \langle \langle x, t \rangle, u \rangle \mid D_u \text{ однозначно} \& \langle x, t \rangle \in \Phi_{fd(u)} \}.$$

Очевидно, множество  $F$  рекурсивно перечислимо с индексом, зависящим равномерно от  $z$ . Пусть  $w$  — общерекурсивная функция, такая, что  $F = W_{w(z)}$ . Из основных свойств операторов перечисления следует, что  $\Phi_{w(z)}$  — оператор перечисления, определяющий  $\Psi$ . (Это доказано в упр. 11-42.) Далее (см. следствие XII (a)),  $w(z)$  определяет общерекурсивную функцию  $h$ , такую, что  $\Phi_{h(y)} = \Psi(\Phi_y)$ . (Возьмем  $h = \lambda y[\tilde{f}(y, w(z))]$ , где  $\tilde{f}$  есть функция следствия XII (a).) Индекс функции  $h$  может быть найден равномерно по  $z$ . Пусть  $g(z)$  — такой индекс  $h$ <sup>1</sup>. Заметим, что  $h$  обладает следующим специальным свойством, которым  $f$ , вообще говоря, может и не обладать: для всякого  $y$  инструкции  $h(y)$  предписывают вычислять  $\Phi_{h(y)}$ , применяя к  $\tau(\Phi_y)$  некоторый оператор перечисления, а именно  $\Phi_{w(z)}$ . Более конкретно,  $h(y) (= \tilde{f}(y, w(z)))$  предписывает следующее: „Получив входное значение  $x$ , начинайте пересчитывать упорядоченные пары из  $\Phi_y$ . Одновременно начинайте пересчитывать  $W_{w(z)}$  и отыскивать элемент вида  $\langle \langle x, t \rangle, u \rangle$ , такой, что  $\tau^{-1}(D_u)$  есть подмножество упорядоченных пар из  $\Phi_y$ , уже перечисленных. Как только такой элемент встретится (если это произойдет), выдайте  $t$  в качестве выходного значения“. Мы опишем это более кратко: „Получив входное значение  $x$ , применяйте к упорядоченным парам из  $\Phi_y$  оператор перечисления  $\Phi_{w(z)}$  и отыскивайте выходное значение

<sup>1)</sup> С использованием второй теоремы о проекции можно показать, что в конечном счете определение  $\tilde{f}$  основывается на  $s_n^m$ -функциях. Аналогично предполагается (но не описывается) конкретный выбор функции  $g$ , основывающейся естественным образом на  $s_n^m$ -функциях.

$\langle x, t \rangle$ ; как только (и если) это произойдет, выдайте  $t$  в качестве выходного значения“.

Остается показать, что  $ng(z)$  — минимальная неподвижная точка. Из доказательства теоремы II следует, что  $ng(z) = \tilde{g}(v)$ , где  $v$  — индекс  $hg$ . Согласно предыдущим рассуждениям, имеем

$$\tilde{g}(v) = [„вычисляйте hg(v); как только выяснится, что hg(v) определено (если это произойдет), выполните hg(v)“.]$$

В чем же состоят инструкции  $hg(v)$ ? Неформально они могут быть сформулированы так: „Получив входное значение  $x$ , перечисляйте упорядоченные пары из  $\Phi_{g(v)}$ , применяйте к ним оператор  $\Phi_{w(z)}$  и отыскивайте выходное значение вида  $\langle x, t \rangle$ . Возьмите такое  $t$  в качестве окончательного выходного значения“. Таким образом, инструкции  $\tilde{g}(v)$  предписывают найти и следовать инструкциям  $hg(v)$ , эти последние инструкции в свою очередь предписывают применять к упорядоченным парам  $\Phi_{g(v)}$  оператор  $\Phi_{w(z)}$ . Инструкции для пересчитывания  $\Phi_{g(v)}$ , таким образом, требуют, чтобы само  $\Phi_{g(v)}$  пересчитывалось в процессе подвычисления. Ситуация непротиворечива, так как, вообще говоря, подвычисление  $\Phi_{g(v)}$  будет встречаться на более низком уровне, чем общее вычисление  $\Phi_{g(v)}$ <sup>1)</sup>.

Пусть  $\langle x_0, t_0 \rangle, \langle x_1, t_1 \rangle, \dots$  — пересчет функции  $\Phi_{g(v)}$ . Согласно инструкциям для  $\Phi_{g(v)}$ ,

$$\begin{aligned} \langle x_0, t_0 \rangle &\in \Phi_{w(z)}(\emptyset), \\ \langle x_{n+1}, t_{n+1} \rangle &\in \Phi_{w(z)}(\{\langle x_0, t_0 \rangle, \dots, \langle x_n, t_n \rangle\}). \end{aligned}$$

Отсюда, если

$$A_0 = \Phi_{w(z)}(\emptyset)$$

и если

$$A_{n+1} = \Phi_{w(z)}(A_n),$$

<sup>1)</sup> Вычисление для пересчитывания  $\Phi_{g(v)}$  аналогично нетривиальной последовательности натуральных чисел, содержащей бесконечно много собственных подпоследовательностей, идентичных ей самой. Например, последовательность  $x_0, x_1, \dots$ , задаваемая рекурсивными равенствами

$$x_{2n} = n^2,$$

$$x_{2n+1} = x_n,$$

начинается числами

$$0, 0, 1, 0, 4, 1, 9, 0, 16, 4, 25, 1$$

и имеет структуру подпоследовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 9 & 0 & 16 & 4 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & & & & & & & 1 \\ 0 & 0 & & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

мы имеем в силу монотонности, что  $\langle x_n, t_n \rangle \in A_n$  для всех  $n$ . Отсюда

$$\tau(\varphi_{\tilde{g}(v)}) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Но, согласно конструкции теоремы XI,  $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  — минимальная неподвижная точка оператора  $\Phi_w(z)$ ; тем самым  $\varphi_{\tilde{g}(v)}$  содержится в минимальной неподвижной точке оператора  $\Psi$ . С другой стороны, согласно теореме II,  $\varphi_{\tilde{g}(v)}$  — неподвижная точка оператора  $\Psi$ . Тем самым  $\varphi_{\tilde{g}(v)}$  совпадает с минимальной неподвижной точкой  $\Psi$  и наше доказательство завершено. ■

Остается открытым следующий вопрос. Назовем общерекурсивную функцию  $\hat{n}$  *неподвижной функцией*, если для всех  $z$

$$\varphi_{\hat{n}(z)} = \begin{cases} \varphi_{\varphi_z(\hat{n}(z))}, & \text{если } \varphi_z(\hat{n}(z)) \text{ сходится;} \\ \text{всюду расходится, если } \varphi_z(\hat{n}(z)) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Имеет ли место теорема XIV для всякой неподвижной функции  $\hat{n}$  (вместо  $n$ )? Утвердительный ответ может быть получен модификацией доказательства теоремы XIV.

### Гёделева функция подстановки

Рассмотрим логическую систему, формулируемую внутри обычной логики предикатов. Предположим, что среди *термов* (т. е. выражений для индивидов) системы встречаются нумералы для всех натуральных чисел. Говоря о подстановках, будем обозначать нумерал для любого натурального числа  $x$  через  $x$ . Таким образом, если  $Fa$  — выражение со свободной переменной  $a$ ,  $Fx$  будет результатом подстановки нумерала для  $x$  вместо  $a$  в это выражение. Предпримем некоторое кодирование всех выражений системы (включая термы и утверждения со свободными индивидуальными переменными) на  $N$ .

Определим функцию  $\sigma$  двух переменных, такую, что для всех  $x$  и  $y$

$$\sigma(x, y) = [\text{кодовый номер выражения, которое является результатом подстановки нумерала для } x \text{ вместо всех входящих свободных переменных (если такие имеются) в выражение, кодовым номером которого является } y.]$$

Поскольку такое кодирование выражений является кодированием в смысле § 1.10,  $\sigma$  — общерекурсивная функция, называемая *гёделевой функцией подстановки* для данной системы и данного кодирования.

Гёделева функция подстановки полезна, когда система достаточно сильна, чтобы допускать утверждения о  $\sigma$  внутри системы. Эта функция тогда может быть использована для построения ряда самовыразимых утверждений. Например, предположим, что система содержит символ  $\sigma$ , служащий для обозначения  $\sigma$ . Если  $a$  — индивидуальная переменная, а  $x$  — кодовый номер терма  $\sigma(a, a)$ , то  $\sigma(x, x)$  — выражение, обозначающее свой собственный кодовый номер<sup>1)</sup>.

Более точно, рассмотрим элементарную арифметику. Примем обычные понятия *истинности* и *ложности* пп-формул (не содержащих свободных переменных), как в § 7.8. Как показал Дэвис [1958], существует выражение  $Mabcd$  со свободными переменными  $a, b, c$  и  $d$ , такое, что  $Mxhxw$  истинно тогда и только тогда, когда  $P_z$  при входном значении  $x$  выдает выходное значение  $y$  менее чем за  $w$  шагов (см. § 14.4 и 14.7). Пусть  $s$  — индекс общерекурсивной функции  $\lambda x[\sigma(x, x)]$ . Приведем несколько примеров построения самовыразимых утверждений.

**Пример 1.** Выберем фиксированный эффективный метод пересчитывания всех логических следствий (по правилам элементарной логики) из пп-формул, встречающихся в некотором заданном рекурсивно перечислимом множестве  $W_x$ . Иными словами, выберем общерекурсивную функцию  $f$ , такую, что для всех  $x$   $W_{f(x)}$  есть множество всех логических следствий из пп-формул множества  $W_x$ . Пусть  $k$  есть индекс функции  $f$ . Пусть дано множество  $W_p$  пп-формул (назовем их *аксиомами*). Утверждение о том, что ппф (с кодовым номером)  $y$  выводима из множества  $W_p$ , есть утверждение о том, что  $y \in W_{f(p)}$ , т. е. что

$$(\exists a)(\exists b)Mkrab \& (\exists c)(\exists d)Maycd]$$

истинно. Мы будем сокращенно записывать эту последнюю ппф как  $P_p(y)$ . Если имеется символ  $\sigma$  гёделевой подстановочной функции, мы можем произвести следующее. Пусть  $u$  — кодовый номер формулы  $\neg P_p(\sigma(b, b))$ . Тогда  $\neg P_p(\sigma(u, u))$  утверждает свою собственную недоказуемость.

Хотя мы и не имеем символа  $\sigma$  в нашей системе, легко осуществить соответствующую конструкцию, используя  $s$ . Пусть  $u$  —

<sup>1)</sup> Примеры этого явления могут быть приведены в обычном русском языке. Выражение

„результат подстановки „25” в „х просто”“

означает, конечно,

„25 есть простое число”.

Выражение

„результат подстановки „результат подстановки „x” в „x”“ в „результат подстановки „x” в „x”““

означает, как можно убедиться, самое себя.

кодовый номер формулы

$$(\exists b) [(\exists d) M_{subd} \& \neg P_p(b)].$$

Тогда  $(\exists b) [(\exists d) M_{subd} \& \neg P_p(b)]$  истинно в том и только в том случае, когда оно невыводимо из множества  $W_p$ . Мы получаем пп-формулу, утверждающую свою собственную недоказуемость.

**Пример 2.** Пусть формула  $\neg P_p(b)$  такая же, как и в примере 1. Пусть  $q$  — кодовый номер фиксированной ппф вида  $[F \& \neg F]$ , например „0 = 0 &  $\neg 0 = 0$ “. Тогда выражение  $\neg P_p(q)$  истинно тогда и только тогда, когда множество  $W_p$  непротиворечиво. Вместо  $\neg P_p(q)$  будем писать сокращенно  $Con(p)$ . Результат замены  $p$  индивидной переменной  $c$  будем записывать в виде  $Con(c)$ . (Если для всех  $x$   $\hat{c}(x)$  есть кодовый номер  $Con(x)$ , то  $\hat{c}$  есть общерекурсивная функция того же типа, что и рассматривавшаяся во второй иллюстрации § 11.4.) Может ли быть получена ппф, утверждающая свою собственную непротиворечивость? Согласно теореме VIII, такая ппф существует. Она может быть получена следующим образом:

Пусть  $m$  — индекс общерекурсивной функции  $h$ , такой, что  $W_{h(x)} = \{x\}$  для всех  $x$ . Пусть  $u$  — кодовый номер формулы

$$(\exists b) [(\exists d) M_{subd} \& (\exists c) [(\exists d) M_{mbcd} \& Con(c)]].$$

В этом случае ппф

$$(\exists b) [(\exists d) M_{subd} \& (\exists c) [(\exists d) M_{mbcd} \& Con(c)]]$$

истинна тогда и только тогда, когда она, рассматриваемая как единственная аксиома, непротиворечива<sup>1)</sup>.

Таким образом, существует целый ряд синтаксических свойств, с привлечением каждого из которых может быть построена самовразимая ппф элементарной арифметики<sup>2)</sup><sup>3)</sup>. (Общая трактовка содержится в работе Феффермана [1960].)

<sup>1)</sup> На интуитивном уровне ход наших рассуждений таков: пусть  $u$  — кодовый номер выражения „ $\sigma(a, a)$  непротиворечиво“; тогда образовываем „ $\sigma(u, u)$  непротиворечиво“.

<sup>2)</sup> Теорема VIII также допускает такой подход. Однако подход, связанный с теоремой о рекурсии и изложенный в § 11.4, требует меньших предложений относительно системы.

<sup>3)</sup> Примеры, соответствующие приведенным, могут также быть построены в обычном русском языке. Рассмотрим утверждение

„следующее недоказуемо: результат подстановки  
„следующее недоказуемо: результат подстановки „ $x$ “ в „ $x$ ““ в „ $x$ ““.  
„следующее недоказуемо: результат подстановки „ $x$ “ в „ $x$ ““.

Это утверждение утверждает свою собственную недоказуемость.

По существу рассмотрение этого примера и демонстрация того, что понятия подстановки и доказуемости (так же, как и имена для выражений) могут быть выражены в элементарной арифметике, и было тем, что сделал Гёдель при доказательстве своей первой теоремы о неполноте. (Он еще, конечно, устранил предположения, касающиеся истины, как это описано в упр. 7-64).

Идея использования функции подстановки как эвристический принцип и как формальный технический прием восходит к Гёделю. Если в качестве фиксированного множества аксиом принят аксиомы Пеано (или любое множество, выводимое из аксиом Пеано), то могут быть получены некоторые дальнейшие результаты относительно выражения  $Mabcd$  (см. упр. 7-64)<sup>1)</sup>. Из этих результатов и из ппф примера 1, приведенного выше, может быть выведена первая теорема Гёделя о неполноте в обычной форме (без каких бы то ни было ссылок на истинность или ложность). В упр. 7-64 подстановочная функция в явном виде не используется. Однако в первоначальном доказательстве Гёделя (см. упр. 11-44) она фигурировала. Подобным же образом функция подстановки могла бы быть использована, чтобы показать, что понятие  $n$  есть кодовый номер истинной ппф элементарной арифметики не выражимо в рамках элементарной арифметики. Эта теорема принадлежит Тарскому (см. упр. 11-45).

Теорема о рекурсии тесно связана с гёделевой функцией подстановки. Определим общерекурсивную функцию  $\hat{\sigma}$  следующим образом:

$$\Phi_{\hat{\sigma}(x,y)} = \begin{cases} \Phi_{\varphi_x}(y), & \text{если } \varphi_x(y) \text{ определено;} \\ & \text{нигде не определена в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть  $n$  — индекс функции  $\lambda x[f\hat{\sigma}(x, x)]$ .

Тогда

$$\Phi_{\hat{\sigma}(n, n)} = \Phi_{f\hat{\sigma}(n, n)}.$$

Это превращает доказательство теоремы о рекурсии в доказательство, по форме весьма сходное с рассуждениями, связанными с функцией  $\sigma$ .

Заметим, что функции  $s_n^m$  имеют вид функций подстановки. Например,  $s_1^1(x, y)$  представляет собой индекс множества унарных инструкций, получающихся при подстановке  $y$  в качестве первого входного значения в бинарные инструкции с индексом  $x$  (см. упр. 11-4 и 11-5).

## § 11.7. СИСТЕМЫ ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ОРДИНАЛОВ<sup>2)</sup>

Клини и Чёрч являются создателями общей теории систем обозначений для ординальных чисел (Чёрч и Клини [1937], Клини [1938] и Чёрч [1938]). В § 11.7 и 11.8 мы приведем несколько

<sup>1)</sup> Приведенные в упр. 7-64 факты могут быть доказаны, если принято некоторое конечное множество аксиом (более слабых, чем аксиомы Пеано). Этот результат принадлежит Тарскому, Мостовскому и Р. М. Робинсону [1953].

<sup>2)</sup> Материал последующих глав не зависит от § 11.7 и 11.8, за исключением тех случаев, когда оговорено противное.

основных результатов этой теории. Теорема о рекурсии будет играть важную роль при получении этих результатов.

Мы предполагаем известными понятие ординального числа и основные понятия и обозначения, с этим понятием связанные. (Обзор этого материала содержится в упр. 11-46—11-53.) Значительная часть традиционной теории ординалов может быть сформулирована как теория обозначений для ординалов. Рассмотрим в качестве примера ординалы, которые выражаются экспоненциальными полиномами от  $\omega$ . Такие ординалы образуют важный и широкий класс. Естественно, что результаты, относящиеся к этому классу, могут быть сформулированы в виде результатов, полученных для соответствующих экспоненциальных полиномиальных выражений.

Изучение различных известных систем обозначений наводит нас на мысль о следующем общем определении.

**Определение.** Система обозначений  $S$  есть отображение  $v_S$  множества натуральных чисел  $D_S$  на отрезок ординальных чисел, удовлетворяющее условиям:

(i) существует частично рекурсивная функция  $k_S$ , такая, что<sup>1)</sup>

$$v_S(x) = 0 \Rightarrow k_S(x) = 0,$$

$$v_S(x) \text{ есть последователь} \Rightarrow k_S(x) = 1,$$

$$v_S(x) \text{ есть предельный ординал} \Rightarrow k_S(x) = 2;$$

(ii) существует частично рекурсивная функция  $p_S$ , такая, что  $v_S(x)$  есть последователь  $\Rightarrow [p_S(x) \text{ определено} \&$

$$\& v_S(x) = v_S(p_S(x)) + 1];$$

(iii) существует частично рекурсивная функция  $q_S$ , такая, что

$$v_S(x) \text{ есть предельный ординал} \Rightarrow [q_S(x)$$

определен &  $\Phi_{q_S(x)}$  всюду определена &

&  $\{v_S(\Phi_{q_S(x)}(n))\}_{n=0}^{\infty}$  есть возрастающая последовательность, имеющая  $v_S(x)$  своим пределом].

(Это определение принадлежит Клини<sup>2)</sup>). Элементы множества  $D_S$  называются обозначениями системы обозначений  $S$ . Все обычные способы обозначения отрезков счетных ординалов становятся (при кодировании в  $N$ ) системами в этом смысле. Может быть показано (по индукции), что если система  $S$  наделяет обозначением ординал  $\alpha$ , то  $S$  наделяет обозначением все ординалы, меньшие  $\alpha$ .

<sup>1)</sup> Мы используем греческие буквы для обозначения ординальных чисел. Чтобы избежать путаницы, мы отступаем от нашего соглашения обозначать греческими буквами частичные функции. От функции  $k_S$  требуется, чтобы она была определена на  $D_S$ . Определенность или неопределенность на  $D_S$  не обусловливается. Аналогично для частичных функций  $p_S$  и  $q_S$ .

<sup>2)</sup> Клини называет такие системы обозначений *r-системами*.

**Определения.** Система обозначений  $S$

(a) *унивалентна*, если  $v_S$  взаимно однозначна;

(b) *рекурсивна*, если  $D_S$  рекурсивно;

(c) *рекурсивна по упорядочению*, если

$$R_S = \{(x, y) \mid x \in D_S \& y \in D_S \& v_S(x) \leq v_S(y)\}$$

рекурсивно.

Поскольку мы имеем  $D_S = \{x \mid (x, x) \in R_S\}$ , рекурсивная по упорядочению система должна быть рекурсивной. В упр. 11-54 мы увидим, что унивалентная рекурсивная система должна быть рекурсивной по упорядочению. Система экспоненциальных полиномов, упоминавшаяся выше, является рекурсивной по упорядочению.

**Определение.** Будем говорить, что  $\alpha$  есть *конструктивный ординал*, если существует система обозначений, ставящая в соответствие ординалу  $\alpha$  по крайней мере одно обозначение.

Конструктивные ординалы были определены и исследовались Чёрчем. (Определение Чёрча несколько отличается от приведенного здесь.)

Каждая система обозначений охватывает не более счетного отрезка ординалов; следовательно, всякий конструктивный ординал счетен. Мы увидим, что не всякий счетный ординал конструктивен.

**Определение.** Система обозначений  $S$  *максимальна*, если  $S$  дает обозначение всякому конструктивному ординалу.

Следующие теорема и следствие говорят об одном явном препятствии на пути изучения максимальных систем.

**Теорема XV.** Пусть  $S$  — рекурсивная по упорядочению система обозначений, и пусть  $\alpha$  — наименьший ординал, для которого  $S$  не дает обозначения. Тогда существует рекурсивная по упорядочению система  $S'$ , дающая обозначение ординалу  $\alpha$ .

**Доказательство.** Предположим,  $\alpha$  есть предельный ординал. Для  $\alpha$ , являющегося последователем, доказательство аналогично. (Для  $\alpha = 0$  доказательство очевидно.)

Определим  $S'$  следующим образом:

$$D_{S'} = \{x \mid x = 1 \text{ или } (\exists y) [x = 2y \& y \in D_S]\}.$$

$$v_{S'}(x) = \begin{cases} v_S(y), & \text{если } x = 2y \& y \in D_S; \\ \alpha, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

$$k_{S'}(x) = \begin{cases} k_S(y), & \text{если } x = 2y; \\ 2, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

$$p_{S'}(x) = 2p_S(y), \quad \text{если } x = 2y.$$

<sup>1)</sup> В каждом из определений  $k_{S'}$ ,  $p_{S'}$  и  $q_{S'}$ , предполагается пункт „расходится в остальных случаях”.

$$q_{S'}(x) = \begin{cases} \text{индекс функции } 2\Phi_{q_S(y)}, \text{ если } x = 2y; \\ m, & \text{если } x = 1, \text{ где } m \text{ получается следующим образом. Пусть } n_0 \text{ есть обозначение для } 0 \text{ в } S. \text{ Определим } \psi \text{ так, чтобы } \psi(0) = n_0, \\ & \psi(j+1) = \text{мн}[u \in D_S \& v_S(u) \not\leq v_S(\psi(j))]. \text{ Индекс функции } 2\psi \text{ берется в качестве } m. \end{cases}$$

Поскольку система  $S$  является рекурсивной по упорядочению и  $\alpha$  представляет собой предельный ординал, то  $\psi$  есть общерекурсивная функция и  $\{v_{S'}(2\psi(n))\}_{n=0}^{n=\infty}$  есть возрастающая последовательность, имеющая пределом  $\alpha$ .

Таким образом, мы имеем систему обозначений, которая дает ординалу  $\alpha$  обозначение 1. Далее,

$$R_{S'} = \{\langle x, y \rangle \mid [x = 2x' \& y = 2y' \& \langle x', y' \rangle \in R_S] \text{ или } [x = 2x' \& y = 1 \& \langle x', x' \rangle \in R_S], \text{ или } [x = 1, y = 1]\},$$

и это множество, очевидно, рекурсивно. Следовательно, система  $S'$  является рекурсивной по упорядочению. ■

**Следствие XV.** *Не существует максимальной рекурсивной по упорядочению системы обозначений.*

**Доказательство** очевидно. ■

**Определение.** Система обозначений  $S$  *универсальна*, если для любой системы  $S'$  существует частичнорекурсивная функция  $\varphi$ , отображающая  $D_{S'}$  в  $D_S$ , такая, что  $x \in D_{S'} \Rightarrow v_{S'}(x) \leq v_S(\varphi(x))$ .

Очевидно, универсальная система должна быть максимальной.

Если мы опустим предположение о рекурсивности по упорядочению (сделанное в теореме XV), то может быть показано, что существуют максимальные системы; в действительности может быть показано даже, что существуют универсальные системы. Этот замечательный результат установлен Клини и требует привлечения теоремы о рекурсии.

**Определение.** Система  $S_1$  определяется следующим образом: 0 получает обозначение 1.

Предположим, все ординалы  $<\gamma$  получили обозначения, тогда

(i) если  $\gamma = \beta + 1$ , то  $\gamma$  получает  $\{2^x \mid x \text{ есть обозначение для } \beta\}$  в качестве обозначений;

(ii) если  $\gamma$  — предельный ординал,  $\gamma$  получает  $\{3 \cdot 5^\gamma \mid \{\Phi_y(n)\}_{n=0}^{n=\infty}$  суть обозначения для возрастающей последовательности ординалов с пределом  $\gamma\}$  в качестве обозначений.

Эти условия определяют  $v_{S_1}$  и  $D_{S_1}$  с помощью трансфинитной индукции. Тогда  $k_{S_1}$ ,  $p_{S_1}$  и  $q_{S_1}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} k_{S_1}(1) &= 0, \\ k_{S_1}(2^x) &= 1, \\ k_{S_1}(3 \cdot 5^\gamma) &= 2^1, \\ p_{S_1}(2^x) &= x, \\ q_{S_1}(3 \cdot 5^\gamma) &= y. \end{aligned}$$

Это завершает определение и показывает, что  $S_1$  является системой. Пусть  $\alpha$  — наименьший ординал, не получивший обозначения;  $\alpha$  должен быть предельным и не может существовать никакого  $y$ , обладающего тем свойством, что  $\{v_{S_1}(\Phi_y(n))\}_{n=0}^{n=\infty}$  есть возрастающая последовательность с  $\alpha$  в качестве предела<sup>2)</sup>.

**Теорема XVI (Клини).**  *$S_1$  является универсальной системой обозначений. Более того, если дана произвольная система  $S$ , то существует частичнорекурсивная функция  $\varphi$ , отображающая  $D_S$  в  $D_{S_1}$ , такая, что  $x \in D_S \Rightarrow v_S(x) = v_{S_1}(\varphi(x))$ .*

**Доказательство.** Пусть дана система  $S$  с частичнорекурсивными функциями  $k_S$ ,  $p_S$  и  $q_S$ . Для любого  $z$  определим частичнорекурсивную функцию  $\psi$  следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } k_S(x) = 0; \\ 2^{\Phi_z p_S(x)}, & \text{если } k_S(x) = 1; \\ 3 \cdot 5^y, & \text{если } k_S(x) = 2 \text{ и } q_S(x) \text{ сходится, где } \\ & y \text{ есть индекс функции } \lambda n [\varphi_z \Phi_{q_S(x)}(n)]; \\ & \text{расходится в остальных случаях.} \end{cases}$$

Индекс функции  $\psi$  зависит равномерно от  $z$ ; следовательно, существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $\varphi_{f(z)} = \psi$ . Применив теорему I, получим число  $m$ , такое, что  $\varphi_{f(m)} = \varphi_m$ , т. е. та-

<sup>1)</sup> Вновь подразумевается пункт „не определено в остальных случаях”.

<sup>2)</sup> Клини [1938] определяет  $S_1$  несколько иным способом. Он вводит обозначения  $3 \cdot 5^\gamma$  так, что  $\Phi_y$ , определенная на  $1, 2, 2^2, 2^{2^2}, \dots$ , дает возрастающую последовательность обозначений (с целью сделать допустимым вложение системы  $S_1$  в обобщенные системы обозначений, рассматриваемые как аналоги более высоких классов ординалов.) Множитель 3 в выражении  $3 \cdot 5^\gamma$  также встречается по этой причине. Мы сохранили множитель 3, следуя традиции, хотя для наших целей было бы достаточно одного лишь 5<sup>y</sup>. Существует сохраняющая ординалы рекурсивная перестановка между системой  $S_1$ , определенной Клини, и  $S_1$ , введенной здесь.

кое, что

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } k_s(x) = 0; \\ 2^{\varphi_m p_S(x)}, & \text{если } k_s(x) = 1; \\ 3 \cdot 5^{y'}, & \text{если } k_s(x) = 2 \text{ и } q_s(x) \text{ сходится,} \\ & \text{где } y' \text{ есть индекс } \lambda n [\varphi_m \varphi_{q_S(x)}(n)]; \\ & \text{расходится в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно,  $\varphi_m$  есть искомая частично рекурсивная функция  $\varphi$ , поскольку  $\varphi_m$  определена на всем множестве  $D_s$  и  $x \in D_s \Rightarrow \varphi_m(\varphi_m(x)) = \varphi_s(x)$  (в противном случае возьмем наименьший ординал, имеющий  $S$ -обозначение, для которого или  $\varphi_m$  не определена, или это равенство несправедливо; немедленно придет к противоречию). ■

**Следствие XVI.** Существуют счетные ординалы, не являющиеся конструктивными.

**Доказательство.** Ординалы, обозначения которых задаются системой  $S_1$ , образуют счетный отрезок. Отсюда наименьший ординал, не принадлежащий этому отрезку, счетен. ■

Определим теперь универсальную систему с некоторыми дополнительными свойствами. Наше определение попутно введет некоторое частичное упорядочение на множестве обозначений.

**Определение.** Система  $O$  определяется следующим образом. Мы определяем как  $v_O$ , так и частичное упорядочение  $<_O$  на  $D_O$ .  $O$  получает обозначение 1.

Предположим, что все ординалы  $<_\gamma$  получили обозначения и что упорядочение  $<_o$  определено на этих обозначениях.

(i) если  $\gamma = \beta + 1$ , то для каждого  $x$ , такого, что  $\beta$  имеет  $x$  в качестве обозначения,  $\gamma$  получает  $2^x$  в качестве обозначения и упорядоченная пара  $\langle z, 2^x \rangle$  добавляется к отношению  $<_o$  для всех  $z$ , для которых или  $z = x$ , или  $\langle z, x \rangle$  уже принадлежит отношению  $<_o$ .

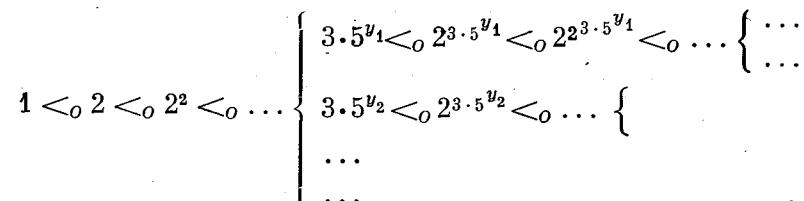
(ii) если  $\gamma$  — предельный ординал, то для каждого  $y$ , такого, что  $\{\varphi_y(n)\}_{n=0}^{n=\infty}$  суть обозначения возрастающей последовательности ординалов с пределом  $\gamma$ , и такого, что  $(\forall i)(\forall j)[i < j \Rightarrow \langle \varphi_y(i), \varphi_y(j) \rangle$  уже принадлежит  $<_o]$ ,  $\gamma$  получает  $3 \cdot 5^y$  в качестве обозначения и упорядоченные пары  $\langle z, 3 \cdot 5^y \rangle$  добавляются к отношению  $<_o$  для всех  $z$ , для которых  $(\exists n)[\langle z, \varphi_y(n) \rangle$  уже принадлежит  $<_o]$ .

Частично рекурсивные функции  $k_O$ ,  $p_O$  и  $q_O$  совпадают с частично рекурсивными функциями  $k_{S_1}$ ,  $p_{S_1}$  и  $q_{S_1}$ . Это завершает определение системы  $O$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Предыдущее примечание относится к системе  $O$  в той же мере, что и к  $S_1$ .

Множество  $D_O$  также будем обозначать через  $O$ . Для  $v_O(x)$  будет употребляться обозначение  $|x|_O$ . Если  $\langle x, y \rangle \in <_O$ , будем писать  $x <_O y$ . Заметим, что  $|x|_O < |y|_O$  не влечет за собой, вообще говоря,  $x <_O y$  (см. диаграмму ниже).

Система  $O$ , очевидно, является подсистемой  $S_1$ . Она обладает рядом полезных свойств. Для любого  $y \in O$   $\{x \mid x <_O y\}$  составляет университетную систему обозначений. Более того, множество  $\{x \mid x <_O y\}$  рекурсивно перечислимо равномерно по  $y$ , т. е. существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $(\forall y)[y \in O \Rightarrow \Rightarrow W_{f(y)} = \{x \mid x <_O y\}]$  (см. упр. 11-55). Частичное упорядочение  $<_O$  есть бесконечно ветвящееся дерево, задаваемое следующей диаграммой:



где последовательные ветвления встречаются на обозначениях последовательных предельных чисел. В этой диаграмме  $3 \cdot 5^{y_1}$  и  $3 \cdot 5^{y_2}$  суть два (из бесконечного множества) обозначения для  $o$ . Заметим, что если  $3 \cdot 5^{y_1} <_O z$ , то  $z$  и  $3 \cdot 5^{y_2}$  несравнимы относительно  $<_O$ . Определение  $D_O$  и  $<_O$  в терминах натуральных чисел и множеств натуральных чисел (без ссылки на ординалы) может быть дано без труда (см. упр. 16-6).

Следующий результат демонстрирует еще одно применение теоремы о рекурсии. Он относится к некоторой общерекурсивной функции двух переменных. Мы обозначим эту функцию через  $+_O$  и будем писать  $x +_O y$  вместо  $+_O(x, y)$ .

**Теорема XVII (Клини).** Существует общерекурсивная функция  $+_O$  двух переменных, такая, что для всех  $x$  и  $y$  из  $O$

- (i)  $x +_O y \in O$ ;
- (ii)  $|x +_O y|_O = |x|_O + |y|_O$ ;
- (iii)  $y \neq 1 \Rightarrow x <_O x +_O y$ .

**Доказательство.** Пусть даны  $x$  и  $z$ , определим  $\psi$  следующим образом:

$$\psi(y) = \begin{cases} x, & \text{если } y = 1; \\ 2^{\varphi_z(u)}, & \text{если } y = 2^u; \\ 3 \cdot 5^{v'}, & \text{если } y = 3 \cdot 5^v, \text{ где } v' \text{ есть индекс} \\ & \text{функции } \lambda n [\varphi_z \varphi_v(n)]; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда  $\psi$  частичнорекурсивна и индекс  $\psi$  может быть получен равномерно по  $x$  и  $z$ . Иными словами, существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что

$$\psi = \Phi_{f(z, x)}.$$

Применив теорему III, получим общерекурсивную функцию  $n$ , такую, что

$$\Phi_n(x) = \Phi_{f(n(x), x)}.$$

Положим теперь

$$+_o = \lambda xy[\Phi_n(x)(y)].$$

Тогда (i), (ii) и (iii) должны быть справедливы для функции  $+_o$ . В противном случае возьмем наименьшее  $x$  (среди ординалов) и для такого  $x$  наименьшее  $y$  (среди ординалов), такие, что или (i), или (ii), или (iii) места не имеет; немедленно придет к противоречию. В упр. 11-57 мы заметим, что  $+_o$  есть всюду определенная функция. ■

Функция  $+_o$  может быть использована при еще одном применении теоремы о рекурсии для доказательства универсальности (и, следовательно, максимальности) системы  $O$ .

**Теорема XVIII (Клини).** Система  $O$  есть универсальная система обозначений.

**Доказательство.** Пусть  $S$  — произвольная система обозначений. Пусть  $z$  дано; определим  $\psi$  следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } k_S(x) = 0; \\ 2^{\Phi_z p_S(x)}, & \text{если } k_S(x) = 1; \\ 3 \cdot 5^{y'}, & \text{если } k_S(x) = 2 \text{ и } q_S(x) \text{ сходится, где } y' \text{ есть} \\ & \text{индекс для } \eta \text{ и } \eta \text{ определяется посредством} \\ & \eta(0) = \varphi_z \varphi_{q_S(x)}(0), \\ & \eta(n + 1) = \eta(n) +_o \varphi_z \varphi_{q_S(x)}(n + 1); \\ & \text{расходится в остальных случаях.} \end{cases}$$

Взяв общерекурсивную функцию  $f$ , такую, что  $\psi = \Phi_{f(z)}$ , и, применив теорему I, получим частичнорекурсивную функцию  $\Phi_n = \Phi_{f(n)}$ , которая будет служить в качестве функции  $\varphi$ , требуемой определением универсальности. Чтобы показать, что  $\Phi_n$  обладает нужными свойствами, предположим противное; возьмем наименьший ординал, на котором что-то нарушается, и немедленно получим противоречие. ■

**Следствие XVIII (а).** Система  $O$  максимальна; т. е. она каждому конструктивному ординалу ставит в соответствие обозначение.

**Доказательство очевидно. ■**

Система  $O$  оказывается полезной в дальнейших приложениях в значительной мере благодаря следующему следствию, устанавливающему, что для унивалентных систем теорема имеет место в более сильной форме.

**Следствие XVIII (б).** Пусть дана унивалентная система  $S$ , тогда существует частичнорекурсивная функция  $\varphi$ , отображающая  $D_S$  в  $O$  так, что

- (i)  $x \in D_S \Rightarrow v_S(x) = |\varphi(x)|_O$ ;
- (ii)  $x, y \in D_S \Rightarrow [x < y \Leftrightarrow \varphi(x) <_O \varphi(y)]$ .

**Доказательство.** Доказательство аналогично доказательству теоремы, но функция  $\eta$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta(0) &= \varphi_z \varphi_{q_S(x)}(0); \\ \eta(n + 1) &= \varphi_z \varphi_{q_S(x)}(n + 1). \end{aligned}$$

## § 11.8. КОНСТРУКТИВНЫЕ ОРДИНАЛЫ

Приведем еще несколько свойств конструктивных ординалов. Следующая теорема имеет место, несмотря на то что существование максимальной рекурсивной по упорядочению системы обозначений невозможно.

**Теорема XIX.** Для всякого конструктивного ординала существует рекурсивная по упорядочению унивалентная система, наделяющая этот ординал обозначением.

**Доказательство.** Пусть  $\alpha$  — конструктивный ординал. Согласно следствию XVIII, существует  $z \in O$ , такое, что  $|z|_O = \alpha$ . Пусть  $A_z = \{y \mid y <_o z \text{ или } y = z\}$ . Множество  $A_z$  рекурсивно перечислимо (см. упр. 11-55);  $A_z$  линейно упорядочено отношением  $<_o$ , и каждый ординал, не превосходящий  $\alpha$ , имеет одно и только одно обозначение в  $A_z$ . Если множество  $A_z$  конечно, то ординал  $\alpha$  конечен и результат следует немедленно. Если множество  $A_z$  бесконечно, пусть  $f$  есть взаимно однозначная общерекурсивная функция, имеющая  $A_z$  в качестве множества значений. Определим систему обозначений  $S$  следующим образом:

$$\begin{aligned} D_S &= N, \\ v_S(x) &= |f(x)|_O, \\ k_S(x) &= k_o(f(x)), \\ p_S(x) &= f^{-1}p_O f(x), \\ q_S(x) &= y', \end{aligned}$$

где  $y'$  есть индекс функции  $\lambda n[f^{-1}\varphi_{q_{O^f}(x)}(n)]$ . Система  $S$  является рекурсивной по упорядочению, так как для любых  $x$  и  $y$  или  $f(x) = f(y)$ , или  $f(x) <_o f(y)$ , или  $f(y) <_o f(x)$ . Поскольку  $\{u \mid u <_o v\}$  рекурсивно перечислимо равномерно по  $v$ , мы можем установить, какой из этих трех случаев имеет место.

Система  $S$  есть искомая рекурсивная по упорядочению универсальная система, наделяющая ординал  $\alpha$  обозначением  $f^{-1}(z)$ .

**Определение.** Назовем  $\alpha$  *рекурсивным ординалом*, если существует отношение  $R$ , такое, что: (i)  $R$  есть вполне-упорядочение (некоторого множества натуральных чисел); (ii)  $R$  рекурсивно и (iii) вполне-упорядочение, задаваемое  $R$ , подобно  $\alpha$ .

**Следствие XIX.** *Всякий конструктивный ординал рекурсивен.*

**Доказательство.** Универсальная система обозначений, построенная при доказательстве теоремы XIX, обеспечивает искомое рекурсивное вполне-упорядочение.

Обращение следствия XIX также имеет место (Марквальд [1954], Спектор [1955]).

**Теорема XX** (Марквальд, Спектор). *Всякий рекурсивный ординал конструктивен.*

**Доказательство.** Пусть  $\alpha$  есть рекурсивный ординал. Пусть  $R$  есть рекурсивное вполне-упорядочение, подобное  $\alpha$ . Заметим, что для всякого  $u$  и при этом упорядочении множество  $\{z \mid \langle z, u \rangle \in R\}$  рекурсивно перечислимо равномерно по  $u$ . Определим новое отношение линейной упорядоченности следующим образом:

$$\hat{R} = \{\langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \mid \langle x_1, x_2 \rangle \in R \text{ и } [x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 \leqslant y_2]\}.$$

Очевидно,  $\hat{R}$  рекурсивно. Это упорядочение, как легко видеть, подобно  $\beta = \omega \cdot \alpha$ . Пусть  $m$  — первое натуральное число в упорядочении  $R$ .  $\hat{R}$  задает систему обозначений  $S$  следующим образом:

$$D_S = \{x \mid \langle x, x \rangle \in \hat{R}\},$$

$$k_S(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = \langle m, 0 \rangle; \\ 1, & \text{если } x = \langle u, v \rangle \text{ и } v > 0; \\ 2, & \text{если } x = \langle u, 0 \rangle \text{ и } u \neq m. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p_S(x) &= \langle u, v - 1 \rangle, & \text{если } x = \langle u, v \rangle \text{ и } k_S(x) = 1; \\ q_S(x) &= y, & \text{если } x = \langle u, 0 \rangle \text{ и } u \neq m, \text{ где } y \\ && \text{есть индекс частично-рекурсивной функции } h, \text{ определенной следующим образом:} \\ && h(0) = \langle m, 0 \rangle, \text{ и если } h(n) = \langle s, t \rangle, \text{ то} \end{aligned}$$

$$h(n+1) = \begin{cases} \langle w, 0 \rangle, & \text{где } w = \mu x [x \text{ появляется за } n \text{ шагов пересчета } \{z \mid \langle z, u \rangle \in R \text{ и } z \neq u\} \text{ и } s \text{ появляется за } n \text{ шагов пересчета } \{z \mid \langle z, x \rangle \in R \text{ и } z \neq x\}], \\ \langle s, t + 1 \rangle, & \text{если такого } x \text{ не существует.} \end{cases}$$

Эти определения, очевидно, задают отображение  $\nu_S$  однозначно, и мы имеем рекурсивную по упорядочению систему, приписывающую обозначения всем ординалам, меньшим чем  $\omega \cdot \alpha$ . Согласно теореме XV, существует система, приписывающая обозначение ординалу  $\omega \cdot \alpha$ . Следовательно,  $\omega \cdot \alpha$  конструктивен. Так как  $\alpha \leqslant \omega \cdot \alpha$ , то и  $\alpha$  конструктивен.

**Следствие XX.** *Ординал рекурсивен тогда и только тогда, когда он конструктивен.*

**Доказательство** очевидно.

Конструктивные ординалы можно рассматривать как рекурсивный аналог второго числового класса. Ординалы второго числового класса могут быть описаны или правилами порождения, или как представители счетных вполне-упорядочений (упр. 11-46). Определения конструктивных или рекурсивных ординалов являются соответственно аналогами этих двух теоретико-множественных описаний. Следствие XX есть рекурсивный аналог результата упр. 11-46, состоящего в том, что эти два теоретико-множественных описания задают один и тот же класс ординалов.

Конструктивные ординалы и универсальная система  $O$  часто встречаются в литературе по теории рекурсивных функций и логике. Теорема о рекурсии является полезным, гибким и весьма существенным инструментом при применениях конструктивных ординалов и системы  $O$ . В качестве последней иллюстрации рассмотрим множества  $S_\alpha$  и  $B$ , определенные, как в упр. 7-46 (если  $\varphi$  есть взаимно однозначная продуктивная функция некоторого продуктивного множества).

**Теорема XXI** (Парики). (а) Для всякого конструктивного ординала  $\beta$   $B \neq \bigcup_{\alpha \leqslant \beta} S_\alpha$ .

$$(b) B = \bigcup_{\alpha \text{ конструктивен}} S_\alpha.$$

**Доказательство.** Пусть  $q$  есть индекс  $\emptyset$ . Пусть  $f$  — общерекурсивная функция, такая, что  $(\forall y)[y \in O \Rightarrow W_{f(y)} = \{x \mid x <_o y\}]$ . Применив теорему о рекурсии, получим частично-рекурсивную функцию  $\varphi'$ , отображающую  $O$  в  $B$ , такую, что

$$\begin{aligned} \varphi'(1) &= \psi(q); \\ \varphi'(2^x) &= \psi(y), \end{aligned}$$

где  $y$  — р. п. индекс для  $\varphi'(W_{f(x)})$ ;

$$\varphi'(3 \cdot 5^x) = \psi(y),$$

где  $y$  есть р. п. индекс для  $\varphi'(W_{f(3 \cdot 5^x)})$ . Отсюда, привлекая простое индуктивное соображение, получаем, что для всякого  $x \in O$   $\varphi'(x) \in S_{|x|_0+1} - S_{|x|_0}$  и  $\varphi'(x) \in B$ .

Это доказывает (а).

Далее воспользуемся теоремой о рекурсии, чтобы определить частично рекурсивную функцию  $\varphi''$ , отображающую  $B$  в  $O$ , такую, что если  $x \in S_{\alpha+1} - S_\alpha$ , то  $\alpha < |\varphi'(x)|_0$ . Это доказывает (б). Определим  $\varphi''$  посредством

$$\varphi''(x) = 3 \cdot 5^y,$$

где  $y$  есть индекс частично рекурсивной функции  $\eta$ , которая может быть задана следующим образом. Вычисляйте  $\psi^{-1}(x)$ . Как только выяснится, что  $\psi^{-1}(x)$  определено (если это произойдет), пересчитывайте  $W_{\psi^{-1}(x)}$ . Положите  $\eta(0) = 1$ ,

$$\eta(n+1) = \begin{cases} \eta(n) + {}_0\varphi''(m), & \text{если } m \text{ есть новый элемент } W_{\psi^{-1}(x)}, \\ & \text{встречающийся на } n\text{-м шаге в пересчете } W_{\psi^{-1}(x)}; \\ \eta(n) + {}_02, & \text{если никакой такой новый элемент на } n\text{-м шаге не встретился.} \end{cases}$$

Привлекая простое индуктивное соображение, получаем, что  $\varphi''$  обладает требуемыми свойствами. Это завершает доказательство. ■

В упр. 11-63 мы заметим, что любое такое  $B$  должно быть рекурсивно изоморфно  $O$ .

## § 11.9. УПРАЖНЕНИЯ

### § 11.2

**△11-1.** (а) Покажите, что существует общирекурсивная функция  $f$ , множество неподвижных точек для которой не является рекурсивно перечислимым.

(б) Покажите, что если множество неподвижных точек для общирекурсивной функции  $f$  рекурсивно, то множество  $\{\varphi_x \mid \varphi_x = \varphi_{f(x)}\}$  содержит все частично рекурсивные функции. (*Указание.* Покажите, что в противном случае может быть найдена общирекурсивная функция, для которой не существует неподвижных точек.)

**11-2.** Сформулируйте и докажите теорему II в виде, применимом ко всем  $\varphi_x$ , как всюду определенным, так и прочим.

**11-3.** Теорема I может быть релятивизована, если (i) взять  $f$  общирекурсивной относительно  $A$  или (ii) заменить  $\varphi$  на  $\varphi^A$ , или (iii) сделать и то, и другое. Какой из этих трех релятивизованных вариантов имеет место? Докажите или приведите контрпримеры.

**11-4.** Пусть  $\psi$  — частично рекурсивная функция двух переменных.

(i) Покажите, что существует число  $n$ , такое, что  $\varphi_n = \lambda y[\psi(n, y)]$ .

(ii) Покажите, что результат (i) эквивалентен теореме I.

(iii) Пусть  $v$  — гёделев номер функции  $\lambda xy[\psi(s_1^1(x, x), y)]$ . Покажите, что в качестве  $n$  в (i) можно взять  $s_1^1(v, v)$ .

Часть (i) есть клиниев вариант теоремы I, часть (iii) — его доказательство.

**11-5.** Пусть  $f$  — общирекурсивная функция. Пусть  $v$  — гёделев номер функции  $\lambda xy[\varphi_{f(v)}(x, x)(y)]$ . Пусть  $n = s_1^1(v, v)$ . Покажите, что  $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$ . (Это еще один вариант доказательства теоремы I.)

**11-6.** Покажите, что следующее утверждение эквивалентно следствию I. Для каждого рекурсивно перечислимого множества  $A$  существует  $n$ , такое, что  $W_n = \{x \mid \langle x, n \rangle \in A\}$ .

**11-7.** Воспользовавшись теоремами 5-IX и 5-XVI, покажите, что теорема I вытекает непосредственно из следствия I.

**11-8.** Докажите или опровергните следующее утверждение. Пусть  $f$  — общирекурсивная функция, такая, что для всех  $x$  функция  $\varphi_x$  всюду определена  $\Rightarrow \varphi_{f(x)}$  всюду определена; тогда существует  $n$ , такое, что  $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$  и функция  $\varphi_n$  всюду определена.

**11-9.** (а) В каждом из следующих случаев докажите или опровергните существование  $m$ , при котором должно выполняться соответствующее свойство:

- (i)  $W_m = \{m^2\}$ ;
- (ii)  $W_m = \{10^m\}$ ;
- (iii)  $W_m = N - \{m\}$ ;
- (iv)  $W_m = \{x \mid x \text{ есть квадратичный вычет по модулю } m\}$ ;
- (v)  $W_m = \{x \mid \varphi_m(x) \text{ расходится}\}$ ;
- (vi)  $\emptyset \neq W_m = \{x \mid (\exists y)[x = 2y \& \varphi_m(y) \text{ сходится}]\}$ ;
- (vii)  $W_m = \{3\} \cup \{x \mid (\exists y)[x = 2y \& \varphi_m(y) \text{ сходится}]\}$ .

(б) Докажите или опровергните существование общирекурсивной функции  $f$ , такой, что

$$W_{f(x)} = \{f(x) + x\}.$$

**11-10** (Вольпин). С помощью теоремы I может быть получено короткое и простое доказательство теоремы упр. 2-39 (а).

(а) Пусть  $\mathcal{C}$  — произвольный класс частично рекурсивных функций. Пусть  $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{C}\}$ . Выведите из теоремы I, что  $A \not\leq_m \bar{A}$ .

(б) Выведите теорему упр. 2-39 (а).

**11-11.** Воспользовавшись теоремами I и 5-IV, докажите последнюю часть теоремы 5-XIV (о замкнутости относительно операции взятия дополнения). (*Указание.* Предположите противное и найдите  $n$ , такое, что  $W_n \supset \bar{W}_n$  и  $W_n \neq N$ .)

**△11-12.** Пусть  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  — последовательность частично рекурсивных функций. Предположим, что существуют общирекурсивные функции  $h$  и  $g$ , такие, что  $\varphi_{h(x)} = \varphi_x$  и  $\varphi_{g(x)} = \varphi_x$ , т. е. что последовательность  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  задает допустимую в смысле упр. 2-10 нумерацию. Покажите, что для этой нумерации имеет место теорема о рекурсии; иными словами, покажите, что для всякой общирекурсивной функции  $f$  существует  $n$ , такое, что  $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$ . (*Указание.* Воспользуйтесь теоремой I для получения  $m$ , такого, что  $\varphi_m = \varphi_{gfh(m)}$ .)

### § 11.3

**11-13.** Проведите доказательство теоремы VI с продуктивной (не обязательно всюду определенной) функцией  $\psi$  вместо всюду определенной продуктивной функции  $h$ .

**11-14.** Пусть  $A$  и  $B$  — пара эффективно неотделимых непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств. Покажите, что всякое рекурсивно перечислимое множество  $C$ , такое, что  $A \subset C \subset \bar{B}$ , должно быть 1-полным.

11-15. Покажите в качестве следствия теоремы V, что для всех  $A$ ,  $A$  продуктивно  $\Leftrightarrow \bar{K} \leqslant_A \bar{A} \Leftrightarrow \bar{K} \leqslant_{m A}$ . (Указание. См. теорему 7-V (b).)

$\triangle 11-16$  (Крайдер). (a) Назовем  $A$  *унипродуктивным*, если существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для всех  $x$  [ $W_x \subset A$  &  $W_x$  содержит самое большое один элемент]  $\Rightarrow f(x) \in A - W_x$ . Покажите:  $A$  унипродуктивно  $\Leftrightarrow A$  продуктивно.

(b) Выполните части (d) и (e) упр. 7-39.

11-17. (a) В доказательстве теоремы VI покажите, что  $\text{center}_{hn} A \subset h(\{x \mid W_x = \emptyset\})$  (см. в. упр. 7-42 определение понятия  $\text{center}_{hn} A$ ).

(b) Воспользовавшись теоремой IV, покажите, что множество  $A$  имеет бесконечно много попарно непересекающихся центров (если варьируются продуктивные функции), содержащихся в  $h(\{x \mid W_x = \emptyset\})$ .

$\triangle 11-18$  (Шёнфильд). См. упр. 8-26 и 8-27. Покажите, что  $A$  q-креативно  $\Rightarrow A$  q-полно. (Указание. Доказательство может быть проведено аналогично доказательству теоремы V. Можно также показать, что множество q-креативно тогда и только тогда, когда его q-цилиндр креативен, а затем непосредственно применить теорему V.) (В упр. 8-44 также исследовалась q-креативность. Ейтс доказал существование полуторческих множеств, не являющихся T-полными, и тем самым существование полуторческих множеств, не являющихся q-творческими.)

11-19. Определим:  $A$  q-продуктивно, если существует частичнорекурсивная функция  $\psi$ , такая, что для всех  $x$ ,  $W_x \subset A \Rightarrow [\psi(x)]$  определено &  $\& D_{\psi(x)} \subset A$  &  $D_{\psi(x)} \not\subset W_x$ . Покажите, что частичнорекурсивная функция может быть в этом определении заменена общерекурсивной функцией.

$\triangle 11-20$ . Определите подходящим образом полную q-продуктивность. Докажите аналог теоремы VI.

$\triangle 11-21$ . Определим:  $A$  T-продуктивно, если существует общерекурсивная функция  $g$ , такая, что для всех  $x$

$$(\exists y)[y \in W_{g(x)} \& D_y \subset A] \Leftrightarrow \neg(\exists y)[y \in W_{g(x)} \& D_y \subset W_x].$$

Определим:  $A$  T-креативно, если  $A$  рекурсивно перечислимо и  $\bar{A}$  T-продуктивно.

Покажите:  $A$  T-креативно  $\Leftrightarrow A$  T-полно. (Указание. Чтобы установить  $\Leftarrow$ , следует воспользоваться сводимостью множества  $K$  и упр. 9-22; для установления  $\Rightarrow$  следует применить теорему о рекурсии, с тем чтобы получить для всякого рекурсивно перечислимого множества  $B$  общерекурсивную функцию  $n$ , такую, что

$$W_{n(y)} = \begin{cases} \{x \mid (\exists z)[z \in W_{g^n(y)} \& x \in D_z]\}, & \text{если } y \in B; \\ \emptyset, & \text{если } y \notin B, \end{cases}$$

и воспользоваться упр. 9-22.)

$\triangle 11-22$ . Покажите, что для всякой универсальной функции (в смысле § 4.5)  $\psi$  существует  $m$ , такое, что  $\psi(m) = m$ .

#### § 11.4

11-23. Рассмотрите следующие аксиомы (Цермело — Френкель) для теории множеств (Френкель [1928]; см. также Куайн [1963] и Бернайс и Френкель [1958, часть I]).

- (i)  $(\forall x)(\forall y)[(\forall z)[z \in x \Leftrightarrow z \in y] \Rightarrow x = y]$  (экстенсиональность);
- (ii)  $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)[u \in z \Leftrightarrow [u = x \vee u = y]]$  (пара);
- (iii)  $(\forall x)(\exists x)(\forall u)[u \in z \Leftrightarrow (\exists y)[u \in y \& y \in x]]$  (сумма);
- (iv)  $(\forall x)(\exists z)(\forall u)[u \in z \Leftrightarrow (\forall y)[y \in u \Rightarrow y \in x]]$  (степень);

- (v)  $(\forall x)(\exists z)(\forall u)[u \in z \Leftrightarrow [u \in x \& S(u)]]$  (свертывание);
- (vi)  $(\forall u)(\forall v)(\forall w)[[R(w, u) \& R(w, v)] \Leftrightarrow u = v] \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \Leftrightarrow (\exists t)[t \in x \& R(t, z)]]$  (замещение);
- (vii)  $(\forall x)(\exists z)[x \in z \& (\forall u)[u \in z \Rightarrow (\exists v)[v \in z \& (\forall y)[y \in v \Leftrightarrow y = u]]]]$  (бесконечность);
- (viii)  $(\forall x)(\forall u)(\forall v)[[u \in x \& v \in x \& (\exists r)[r \in u \& r \in v]] \Rightarrow u = v] \Rightarrow (\exists y)(\forall z)[[z \in x \& (\exists w)[w \in z]] \Rightarrow (\exists t)(\forall s)[[s \in y \& s \in z] \Leftrightarrow s = t]]$  (выбор);
- (ix)  $(\exists x)S(x) \Rightarrow (\exists y)[S(y) \& (\forall z)[z \in y \Rightarrow \neg S(z)]]$  (функцирование).

Покажите, что для отношения  $E (= \{(x, y) \mid x \in W_y\})$  имеют место утверждения (ii), (iii), (vii) и (viii), но не (i) и (iv). Покажите, что (v), (vi) и (ix), вообще говоря, места не имеют, поскольку в качестве  $S$  и  $R$  могут выступать любые множества и отношения. Покажите, что если на  $S$  и  $R$  наложено ограничение быть рекурсивно перечислимыми, то утверждения (v) и (vi) имеют место, а (ix) нет.

$\triangle 11-24$ . Воспользовавшись теоремой о рекурсии, покажите, что существуют  $m$  и  $n$ , такие, что  $m \neq n$ ,  $m \in W_n$  и  $n \in W_m$ .

$\triangle 11-25$ . (a) Покажите, что для любой общерекурсивной функции  $h$  существует бесконечная последовательность различных натуральных чисел  $m_0, m_1, \dots$ , такая, что для всех  $i$   $W_{m_i} = \{h(m_{i+1})\}$ . (Указание. Модифицируйте доказательство теоремы VII.)

(b) Определите *насыщенность* относительно  $\psi$ , как в упр. 7-45. Покажите, что существует более чем счетное число продуктивных множеств, которые насыщены относительно тождественной функции. (Указание. Воспользуйтесь теоремой VII и затем конструкцией, подобной конструкции из упр. 7-46.)

(c) Пусть  $h$  — произвольная взаимно однозначная общерекурсивная функция. Покажите, что существует более чем счетное число продуктивных множеств, насыщенных относительно  $h$ . (Указание. Воспользуйтесь (a).)

$\triangle 11-26$ . Объясните, почему никакая аксиоматизируемая формальная теория не может содержать все истинные утверждения и не содержать никаких ложных утверждений вида  $x$  и  $y$  суть р. п. индексы одного и того же множества. (Считаем, что гёделев номер этого утверждения равномерно зависит от  $x$  и  $y$ .)

$\triangle 11-27$ . Возьмем функции  $f$  и  $\hat{f}$ , как при доказательстве теоремы VIII. Предположим,  $\hat{f}$  взаимно однозначно и для всех  $x$   $f(x) \neq x$ . При каких обстоятельствах может существовать  $m$ , такое, что  $W_{f(m)} = W_{\hat{f}(m)}$ ? (Комментарий. В естественно возникающих ситуациях  $\hat{f}$  почти всегда взаимно однозначна и функция  $f$  (построенная методом теоремы 5-XIII) почти всегда обладает тем свойством, что  $(\forall x)[f(x) \neq x]$ .)

$\triangle 11-28$ . Машина, описываемая в примере 1, следующем за теоремой IX, обладает тем свойством, что по любой цепочке единиц, подаваемых на вход, она выдает в качестве выходного значения свою собственную четверку. Покажите, что существует нетривиальная машина, обладающая тем свойством, что если на вход подается чистая лента, она выдает свою собственную четверку в качестве выходного значения.

$\triangle 11-29$  (Шмульян). (a) Пусть  $\{A_1, A_2\}$  и  $\{B_1, B_2\}$  суть пары непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств. Мы скажем, что  $\{A_1, A_2\}$  сильно сводимо к  $\{B_1, B_2\}$ , если существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что  $f(A_1) \subset B_1$ ,  $f(A_2) \subset B_2$  и  $f(A_1 \cup A_2) \subset B_1 \cup B_2$ . Пусть  $\{C_1, C_2\}$  — пара эффективно неотделимых непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств. Покажите, что для любой пары непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств  $\{A_1, A_2\}$  пара  $\{A_1, A_2\}$  сильно сводима к  $\{C_1, C_2\}$ .

(Это является аналогом теоремы V для пар множеств.) (*Указание.* Определите

$$W_{g(x)} = \begin{cases} C_1 \cup \{\psi(\pi_1(z), \pi_2(z))\}, & \text{если } x \in A_2; \\ C_1, & \text{если } x \notin A_2, \end{cases}$$

и определите  $W_{h(x)}$  подобным образом, используя  $C_2$  и  $A_1$ . Здесь  $\psi$  — продуктивная функция пары  $\langle C_1, C_2 \rangle$ . Примените теорему X.)

(b) Получите в качестве следствия, что продуктивная функция любой пары эффективно неотделимых множеств может быть заменена всюду определенной продуктивной функцией.

$\Delta 11-30$ . (a) (Парикх). Пусть  $g$  — любая общерекурсивная функция. Покажите, что существует  $n$ , такое, что

- (i)  $W_n$  рекурсивно;
- (ii)  $\mu y[W_y = \bar{W}_n] > g(n)$ .

(*Указание.* Определите множество  $W_{f(x)}$  как пересекающееся со всяким непустым  $W_i$ ,  $i \leq g(x)$ , и конечное. Примените теорему о рекурсии. Заметьте, что это дает конечное множество  $W_n$ .)

(b) Пункт (a) подчините требованию, чтобы множество  $W_n$  было коконечным.

$\Delta 11-31$ . Пусть  $h$  — любая общерекурсивная функция. Покажите, что существуют  $m$  и  $u$ , такие, что  $W_m = D_u$  и  $u > h(m)$ . (*Указание.* Воспользуйтесь пунктом (a) предыдущего упражнения.) Мы, таким образом, имеем конечные множества с р. п. индексами, „сколь угодно меньшими“ их канонических индексов.

$\Delta 11-32$  (Парикх). Пусть  $g$  — произвольная общерекурсивная функция. Покажите, что существует  $m$ , такое, что

- (i)  $m = \mu y[W_y = \bar{W}_m]$ ;
- (ii)  $m > g(\mu y[W_y^K = W_m])$ .

(*Указание.* Возьмите общерекурсивную функцию  $h$ , такую, что  $W_{h(x)}^K = \bar{W}_x$  для всех  $x$ . Примените упр. 11-30 (a) с  $gh$  вместо  $g$ . Заметьте, что это дает коконечность множества  $W_m$ .)

$\Delta 11-33$ . Пусть множество  $A$  вполне упорядочено (при некотором заданном отношении упорядочения). Для любого  $y$  из  $A$  пусть  $S_y$  есть множество элементов множества  $A$ , предшествующих  $y$  относительно этого вполне-упорядочения. Предположим, что задана функция  $\psi$  и что существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для любого  $x$  и любого элемента  $y$  множества  $A$  если  $\varphi_x$  совпадает с  $\psi$  на  $S_y$ , то  $\Phi_{f(x), y}$  совпадает с  $\psi$  на  $S_y \cup \{y\}$ . Покажите, что существует частичнорекурсивная функция, совпадающая с  $\psi$  на множестве  $A$ . (*Указание.* Примените теорему о рекурсии к функции  $\Phi_{g(x)} = \lambda y[\varphi_{f(x), y}(y)]$ .)

Это упражнение предполагает аналог в теории рекурсивных функций принципа трансфинитной индукции, с помощью которого определяются функции над ординальными числами. Заметим, что явно не требуется наличия какой бы то ни было рекурсивной структуры ни для  $A$ , ни для упорядочения множества  $A$ . Этот результат обобщается в лемме о рекурсии § 16.4.

### § 11.5

$\Delta 11-34$ . (a) Докажите теорему о рекурсии для операторов перечисления, т. е. покажите, что для любой общерекурсивной функции  $f$  существует  $n$ , такое, что

$$\Phi_n = \Phi_{f(n)}.$$

(b) Существует ли  $m$ , такое, что для всех  $A$

$$\Phi_m(A) = \{m\}?$$

$\Delta 11-35$ . Пусть  $\mathcal{N} = 2^N$ . (a) Для всякого конечного множества  $D$  рассмотрим множество (множество)

$$\mathcal{D}_D = \{A \mid D \subset A\}.$$

(i) Покажите, что семейство всех таких множеств (множеств) замкнуто относительно конечного пересечения и, следовательно, образует базис топологии на  $\mathcal{N}$ .

(ii) Покажите, что замкнутыми подмножествами множества  $\mathcal{N}$  относительно этой топологии являются в точности множества (множеств), замкнутые относительно подмножеств и возрастающего объединения<sup>1</sup>.

(iii). Пусть  $\Phi$  есть отображение из  $\mathcal{N}$  в  $\mathcal{N}$ . Покажите, что  $\Phi$  непрерывно относительно этой топологии тогда и только тогда, когда отображение  $\Phi$  „монотонно“ и „непрерывно“ в смысле теоремы 9-ХХ. (*Указание.* Напомним, что отображение  $f$  топологического пространства  $X$  непрерывно тогда и только тогда, когда для любого  $x \in X$  и любого  $\mathcal{A} \subset X$   $x \in \text{замыкание}(\mathcal{A}) \Rightarrow f(x) \in \text{замыкание}(f(\mathcal{A}))$ )

(b) Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ . Назовем множество  $\mathcal{A}$  замкнутым, если  $\mathcal{A}$  замкнуто относительно возрастающего объединения.

(i) Покажите, что это задает топологию на  $\mathcal{N}$ .

(ii) Пусть  $\Phi$  есть монотонное отображение из  $\mathcal{N}$  в  $\mathcal{N}$ . Покажите, что  $\Phi$  непрерывно относительно этой топологии тогда и только тогда, когда отображение  $\Phi$  „непрерывно“ в смысле теоремы 9-ХХ.

(c) Для всякой пары  $\langle D_1, D_2 \rangle$  конечных множеств рассмотрим множество (множество)

$$\mathcal{D}_{D_1 D_2} = \{A \mid D_1 \subset A \& D_2 \subset \bar{A}\}.$$

(i) Покажите, что семейство всех таких множеств (множеств) образует базис топологии на  $\mathcal{N}$ . (Это топология канторова множества, часто задаваемая на  $\mathcal{N}$ .)

(ii) Покажите, что замкнутые подмножества  $\mathcal{N}$  в этой топологии замкнуты относительно возрастающего объединения.

(iii) Пусть  $\Phi$  есть отображение из  $\mathcal{N}$  в  $\mathcal{N}$ . Покажите, что если  $\Phi$  непрерывно относительно этой топологии, то отображение  $\Phi$  „непрерывно“ в смысле теоремы 9-ХХ.

(iv) Постройте оператор перечисления, который не является непрерывным в этой топологии. (*Указание.* Рассмотрите отображение  $\Phi$ , такое, что

$$\Phi(A) = \begin{cases} N, & \text{если } A \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{если } A = \emptyset. \end{cases}$$

$\Delta 11-36$ . Приведите примеры

(i) частичнорекурсивного оператора, не имеющего неподвижной точки;

(ii) частичнорекурсивного оператора с непустой областью определения, не имеющего неподвижной точки;

(iii) рекурсивного оператора, не имеющего всюду определенной неподвижной точки;

(iv) рекурсивного оператора, обладающего всюду определенными неподвижными точками, но такого, что его минимальная неподвижная точка всюду определенной не является;

(v) рекурсивного оператора, имеющего ровно три неподвижные точки.

<sup>1</sup>) Множество  $\mathcal{A}$  замкнуто относительно подмножеств, если  $A \in \mathcal{A} \& B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{A}$ . Множество  $\mathcal{A}$  замкнуто относительно возрастающего объединения, если  $[(\forall i)[A_i \in \mathcal{A}]] \& (\forall j)[\forall i[i \leq j \Rightarrow A_i \subset A_j]] \Rightarrow \Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

11-37. Покажите, что если рекурсивный оператор имеет только всюду определенные неподвижные точки, то он имеет в точности одну неподвижную точку.

11-38. Определим

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Определим оператор перечисления  $\Phi$  как

$$\Phi(A) = \{\langle f(x), f(y) \rangle \mid \langle x, y \rangle \in A\}.$$

Рассмотрим частичнорекурсивный оператор, определяемый оператором  $\Phi$ . Назовем его  $\Psi$ .

(i) Является ли  $\Psi$  рекурсивным оператором?

(ii) Опишите неподвижные точки оператора  $\Psi$ .

11-39. Положим  $\iota_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$ . Каждому оператору перечисления  $\Phi$  может быть поставлен в соответствие рекурсивный оператор  $\Psi$ , такой, что

$$\Psi(\iota_A) = \iota_{\Phi(A)}.$$

Воспользовавшись этой конструкцией, получите теорему XI непосредственно из теоремы XII.

11-40. Опишите все решения системы равенств

$$\begin{aligned} \psi(4x) &= 2\psi(2x), \\ \psi(2) &= 2. \end{aligned}$$

△11-41. (а) (Крейсел). Рассмотрим функцию  $g$ , задаваемую следующим образом:

$$g(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } P_x \text{ при входном значении } x \\ & \text{выдаёт результат менее чем за} \\ & \text{y шагов;} \\ 2z & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция  $g$  общерекурсивна, и, согласно § 1.5, может быть найдена система рекурсивных равенств, однозначным образом задающая функцию  $g$ . Назовем эту систему (E). Возьмем систему рекурсивных равенств, получаемую при соединением к (E) равенства

$$f(x, y) = g(x, y, f(x, y + 1)),$$

где  $f$  — функциональный символ, не встречающийся в (E).

Покажите, что функция  $f$  определяется однозначно (как всюду определенная функция), но что  $f$  не является общерекурсивной функцией. (Всюду определенные функции, однозначно определяемые системой равенств, называются *рекурсивными по Эрбрану* функциями. Как мы заметим позднее, они образуют естественный класс, который выходит за рамки класса общерекурсивных функций.)

(b) Приведите пример общерекурсивного оператора  $\Psi$ , такого, что

(i) оператор  $\Psi$  обладает одной и только одной всюду определенной неподвижной точкой;

(ii) всюду определенная неподвижная точка не рекурсивна. (Указание. См. (a).) (Заметим, что оператор  $\Psi$  должен по теореме XII обладать не всюду определенной неподвижной точкой, являющейся частичнорекурсивной.)

## § 11.6

11-42. В доказательстве теоремы XIV покажите, что оператор перечисления  $\Phi_w(z)$  определяет оператор  $\Psi$ . (Указание. Воспользуйтесь монотонностью и непрерывностью.)

△11-43. Докажите теорему Майхилла и Шепердсона, сформулированную в § 11.5. [Указание. Пункт (а) вытекает из следствия XII (а). Для доказатель-

ства пункта (а) покажите, что отображение частичнорекурсивных функций, задаваемое функцией  $f$ , монотонно и непрерывно (в противном случае была бы разрешима проблема остановки). Затем постройте оператор  $\Phi_w(z)$ , как в доказательстве теоремы XIV, и воспользуйтесь упр. 11-42 для установления единственности.]

△11-44. Рассмотрим арифметику Пеано и примем предположения, касающиеся  $Mabcd$ , сделанные в упр. 7-64. Пусть построена формула  $(\exists b)[(\exists d)Msubd \& \neg P_p(b)]$ , утверждающая свою собственную недоказуемость, как в § 11.6. Покажите, что если арифметика Пеано  $\phi$ -непротиворечива, то ни эта шиф, ни ее отрицание не доказуемы. (Это ближе первоначальному доказательству Гёделя, нежели упр. 7-64.)

△11-45 (Тарский). (а) Примем свойства множества  $M$ , описанные в § 11.6. Покажите, что не может существовать выражения  $Ta$  элементарной арифметики с единственной свободной переменной  $a$ , такого, что для всех шиф (с кодовым номером)  $x$

$Tx$  истинно тогда и только тогда, когда  $x$  истинно.

(Указание. Воспользуйтесь соображениями, связанными с подстановочной функцией, чтобы показать, что в противном случае могла бы быть построена шиф, которая утверждала бы свою собственную ложность и, следовательно, была бы истинной в том и только в том случае, когда она ложна<sup>1)</sup>.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество  $A$  вполне арифметически продуктивно, если существует общерекурсивная функция  $f$ , такая, что для всякого выражения  $Fa$  элементарной арифметики, имеющего кодовый номер  $x$  и единственную свободную переменную  $a$ ,

$$f(x) \in (A \leftarrow \{y \mid Fy \text{ истинно}\}) \cup (\{y \mid Fy \text{ ложно}\} - A).$$

(b) Покажите, что множество (кодовых номеров) всех истинных шиф-формул элементарной арифметики вполне арифметически продуктивно.

## § 11.7

В упр. 11-46—11-53 приведены основные определения и результаты, относящиеся к ординальным числам. Удовлетворительная трактовка этих вопросов потребовала бы аксиоматизации теории множеств, поскольку должно было бы быть проведено тонкое различие между *множествами* (которые всегда могут быть элементами) и *свойствами* множеств (которые иногда могут ими не быть). Если, например, мы рассматриваем семейство всех ординалов (т. е. *свойство* быть ординалом) как множество, мы придем к противоречию (парадокс Бурали — Форти). В приводимом здесь обзоре мы не привлекаем аксиоматизацию; мы попытаемся избегать ситуаций, в которых могут встретиться парадоксы, и просто примем принципы, которые потребовали бы при аксиоматическом изложении более детального обоснования. Все наши результаты могут быть получены из аксиом упр. 11-23.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейно упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если всякое его непустое подмножество имеет наименьший элемент.

<sup>1)</sup> Конструкция, аналогичная этой, может быть приведена в обычном русском языке, если заменить „доказуемая“ на „истинная“ в примере, приведенном в примечании на стр. 262. Существование таких утверждений (которые не могут быть ни истинными, ни ложными) является тем непреодолимым препятствием, вследствие которого обычный русский язык не может быть интерпретируемой формальной системой. В качестве таковой системы обычный русский язык противоречив.



(с) Покажите, что существует  $\alpha$ , такое, что

$$\alpha = \omega \cdot \alpha.$$

Рассмотрим ординалы, которые могут быть получены из конечных ординалов и  $\omega$  применением в конечном числе операций сложения, умножения и возведения в степень. Назовем этот класс  $C_p$  („экспоненциальные полиномы от  $0, 1, 2, \dots, \omega$ “).

11-52. (а) Покажите, что ординалы из класса  $C_p$  образуют начальный сегмент  $C_{\Pi}$ .

$\triangle$ (б) Покажите, что для всякого ординала  $\alpha$  из  $C_p$  существует единственная конечная последовательность меньших ординалов  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  и единственная конечная последовательность ненулевых конечных ординалов  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , таких, что  $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_k$  и  $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \omega^{\beta_2} \cdot n_2 + \dots + \omega^{\beta_k} \cdot n_k$ . (Теорема о нормальной форме.)

11-53. (а) (Беблен). Покажите, что всякая монотонная непрерывная на  $C_{\Pi}$  функция имеет неподвижную точку (этот результат является частным случаем теоремы Кнастера — Тарского; см. примечание на стр. 249).

(б) Найдите выражение в нормальной форме (см. упр. 11-52 (б)) для наименьшей неподвижной точки функции

- (i)  $\lambda\beta[\omega + \beta]$ ;
- (ii)  $\lambda\beta[\omega \cdot \beta]$ .

(с) Покажите, что наименьшая неподвижная точка функции  $\lambda\beta[\omega^\beta]$  есть наименьший ординал, не принадлежащий классу  $C_p$ .

(д) Пусть  $\varepsilon_0$  — наименьший ординал, не принадлежащий классу  $C_p$ .

Ординал  $\varepsilon_0$  есть предел последовательности  $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots$ , и, согласно упр. 11-53,  $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$ . (Последовательные неподвижные точки функции  $\lambda\beta[\omega^\beta]$  обычно обозначаются  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ ) Увеличивающиеся отрезки класса  $C_{\Pi}$  могут быть наделены обозначениями систематическим образом путем обобщения определения класса  $C_p$ . Например, мы можем образовать класс  $C_p$ , взяв все ординалы, представимые в виде экспоненциальных полиномов от  $\varepsilon_0$  и его предшественников. Это дает все ординалы, меньшие наименьшей неподвижной точки функции  $\lambda\beta[\varepsilon_0^\beta]$ .

Определим теперь

$$\gamma_0 = \varepsilon_0,$$

$\gamma_{\alpha+1}$  — наименьший ординал, не представимый в виде экспоненциального полинома от  $\gamma_\alpha$  и его предшественников (или, что эквивалентно, наименьшая неподвижная точка функции  $\lambda\beta[\gamma_\alpha^\beta]$ ),

$$\gamma_{\lim \beta_n} = \lim_n \gamma_{\beta_n}.$$

Это порождает обозначения для всех ординалов вплоть до наименьшей неподвижной точки функции  $\lambda\beta[\gamma_\beta]$ . Конструктивны ли эти ординалы?

### § 11.8

11-54. (а) Покажите, что универсальная и рекурсивная система обозначений должна быть рекурсивной по упорядочению.

(б) Покажите, что рекурсивная система может не быть рекурсивной по упорядочению.

11-55. Покажите, что существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что

$$(\forall x)[x \in O \Rightarrow W_{f(x)} = \{y \mid y <_O x\}].$$

(Указание (Московакис). Определите оператор перечисления  $\Phi$ , такой, что  $A \subset O \Rightarrow \Phi(A) = A \cup B$ , где  $B$  состоит из предшественников первого уровня элементов  $A$  (в подходящем смысле). Примените слабую теорему о рекурсии.)

11-56. Покажите, что нормальные формы упр. 11-52 задают универсальную систему обозначений в смысле § 11.7.

11-57. Покажите, что  $+_O$  в теореме XVII есть общерекурсивная функция.

11-58. (а) Существует ли частичнорекурсивная функция  $m$ , такая, что

$$\begin{aligned}[x \in O \text{ и } y \in O] \Rightarrow [m(x, y) \in O \text{ и} \\ |m(x, y)|_O = |x|_O \cdot |y|_O]?\end{aligned}$$

(б) Существует ли частичнорекурсивная функция  $e$ , такая, что

$$\begin{aligned}[x \in O \text{ и } y \in O] \Rightarrow [e(x, y) \in O \text{ и} \\ |e(x, y)|_O = |x|_O^{|y|_O}]?\end{aligned}$$

$\triangle$ 11-59 (Спектор). Покажите, что существует максимальная универсальная система обозначений. (Указание. Возьмите  $O = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  (в любом порядке) и рассмотрите ветвь отношения, определяемую последовательностью  $x_0, x_0 +_O x_1, (x_0 +_O x_1) +_O x_2, \dots$ )

11-60. Покажите, что существуют ветви отношения  $<_O$ , которые не могут простираться за  $\omega^2$ . (Указание. Воспользуйтесь мощностными соображениями.)

$\triangle$ 11-61. Пусть  $W = \{z \mid \varphi_z^{(2)} \text{ есть характеристическая функция вполне-упорядочения } (\leq) \text{ некоторого множества натуральных чисел}\}$ . (Множество  $W$  может мыслиться как совокупность обозначений для рекурсивных ординалов.) Покажите, что  $W \equiv O$ . (Указание. См. доказательства теорем XIX и XX.)

11-62. Назовем  $\alpha$  рекурсивно перечислимым ординалом, если  $\alpha$  подобен некоторому рекурсивно перечислимому вполне-упорядочению множества натуральных чисел. Покажите, что всякий рекурсивно перечислимый ординал рекурсивен.

$\triangle$ 11-63 (Парикх). Пусть множество  $B$  такое, как в теореме XXI. Покажите, что  $B \equiv O$ .

## Глава 12. РЕШЕТКА РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

§ 12.1. Решетки множеств	286
§ 12.2. Разложение	294
§ 12.3. Сжатые множества	296
§ 12.4. Максимальные множества	300
§ 12.5. Подмножества максимальных множеств	303
§ 12.6. Свойства почти-конечности	308
§ 12.7. Упражнения	316

### § 12.1. РЕШЕТКИ МНОЖЕСТВ

В предыдущих главах для изучения рекурсивно инвариантных свойств множеств натуральных чисел мы использовали понятия *сводимости* и *степени неразрешимости*. Рассмотрение совокупности рекурсивно перечислимых множеств как решетки представляет собой иной, несколько отличный от предыдущих подход к их изучению. Мы описываем здесь этот подход. Впервые он изучался Деккером и Майхиллом (см. Майхилл [1956]).

**Определение.** Решеткой называется частичное упорядочение, при котором любые два элемента имеют наименьшую верхнюю и наибольшую нижнюю грани<sup>1)</sup>.

Объекты, которые участвуют в этом отношении, будем называть *элементами* решетки. Мы используем для них буквы  $a, b, \dots$ . Если  $a$  меньше или равно  $b$  в решетке, мы пишем „ $a \leqslant b$ “;  $a < b$  обозначает  $[a \leqslant b \text{ и } a \neq b]$ . Если  $a$  — элемент решетки  $\mathcal{L}$ , мы пишем „ $a \in \mathcal{L}$ “.

**Определение.** Если  $a$  и  $b$  — элементы решетки  $\mathcal{L}$ , то  $a \cup b$  обозначает наименьшую верхнюю грань („сумму“ или „объединение“) элементов  $a$  и  $b$ ;  $a \cap b$  обозначает наибольшую нижнюю грань („произведение“ или „пересечение“) элементов  $a$  и  $b$ .

Совокупность всех подмножеств любого фиксированного множества образует решетку относительно включения множеств ( $\subseteq$ )

1) Частичным упорядочением называется здесь такое отношение  $R$  (на некотором множестве), что для любых  $a, b$  и  $c$  (из этого множества)

$$(i) [(a, b) \in R \& (b, c) \in R] \Rightarrow (a, c) \in R,$$

$$(ii) [(a, b) \in R \& (b, a) \in R] \Leftrightarrow a = b.$$

Условимся читать „ $(a, b) \in R$ “ как „ $a$  меньше или равно  $b$ “. Элемент  $c$  есть *наименьшая верхняя грань* для  $a$  и  $b$ , если (i)  $(a, c) \in R$  и  $(b, c) \in R$  и (ii) для любого  $d$  (из данного множества)  $[(a, d) \in R \& (b, d) \in R] \Rightarrow (c, d) \in R$ . Аналогично определяется *наибольшая нижняя грань*. Для более подробного рассмотрения решеток см. Биркгоф [1940].

с суммами и произведениями, совпадающими с обычными объединениями и пересечениями соответственно. В частности,  $\mathcal{N} = \{A \mid A \subseteq N\} (= 2^N)$  есть структура относительно  $\subseteq$ . Отметим, что во всякой решетке

$$a \leqslant b \Leftrightarrow b = a \cup b \Leftrightarrow a = a \cap b.$$

Таким образом, частичное упорядочение  $\leqslant$  может быть определено с помощью операций  $\cup$  и  $\cap$ . В действительности определение решетки можно сформулировать с помощью лишь операций  $\cup$  и  $\cap$ , накладывая на  $\cup$  и  $\cap$  подходящие аксиоматические ограничения (см. упр. 12-1).

**Определение.** Пусть  $\mathcal{L}$  — решетка.  $\mathcal{M}$  называется *подрешеткой* решетки  $\mathcal{L}$ , если

- (i)  $\mathcal{M}$  есть решетка;
- (ii) (частичное упорядочение решетки)  $\mathcal{M}$  содержится в (частичном упорядочении)  $\mathcal{L}$ ;
- (iii)  $\mathcal{M}$  замкнуто относительно операций  $\cup$  и  $\cap$  в  $\mathcal{L}$  ((iii) не следует из (i) и (ii), см. упр. 12-2).

**Примеры.** Пусть  $\mathcal{E}$  — частичное упорядочение рекурсивно перечислимых множеств с помощью включения,  $\mathcal{R}$  — частичное упорядочение рекурсивных множеств с помощью включения. Согласно теоремам 5-XIII и 5-XIV,  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{E}$  являются подрешетками решетки  $\mathcal{N}$ , а  $\mathcal{R}$  есть подрешетка решетки  $\mathcal{E}$ .

**Определения.** Решетка называется *дистрибутивной*, если выполняются тождества

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c),$$

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c).$$

Ясно, что всякая подрешетка дистрибутивной решетки дистрибутивна. Дальше мы будем иметь дело только с дистрибутивными решетками.

Если решетка содержит минимальный элемент, то этот (обязательно единственный) элемент называется ее *нулевым элементом*. Если решетка содержит максимальный элемент, то этот (обязательно единственный) элемент называется *единичным*. Мы иногда обозначаем нулевой элемент решетки через  $0$ , а единичный — через  $1$ . (Отметим, что если  $\mathcal{M}$  есть подрешетка решетки  $\mathcal{L}$ , то нулевой и единичный элементы решетки  $\mathcal{M}$  могут не совпадать с нулевым и единичным элементами решетки  $\mathcal{L}$ .)

Пусть  $a$  и  $b$  — элементы решетки, содержащей нулевой элемент ( $0$ );  $a$  и  $b$  называются *дизъюнктными*, если  $a \cap b = 0$ .

Пусть  $a$  и  $b$  — элементы решетки, содержащей нулевой элемент ( $0$ ) и единичный элемент ( $1$ ). Элемент  $b$  называется *дополнением* элемента  $a$ , если  $a \cap b = 0$  и  $a \cup b = 1$ .

Если решетка  $\mathcal{L}$  содержит нулевой и единичный элементы и любой элемент  $\mathcal{L}$  имеет дополнение, то  $\mathcal{L}$  называется *решеткой с дополнениями*.

Дистрибутивная решетка с дополнениями называется *булевой алгеброй*. В булевой алгебре каждый элемент  $a$  имеет одно и только одно дополнение, которое обозначается через  $\bar{a}$  (см. упр. 12-3).

**Примеры.** Решетка  $\mathcal{N}$  является булевой алгеброй. Решетка  $\mathcal{E}$  содержит нулевой и единичный элементы, но не является решеткой с дополнениями.  $\mathcal{R}$  является булевой алгеброй.

**Теорема Стоуна о представлении** (упр. 12-9) утверждает, что для всякой булевой алгебры  $\mathcal{B}$  существует такое множество  $\Sigma$ , что  $\mathcal{B}$  изоморфна некоторой подрешетке решетки всех подмножеств множества  $\Sigma$ . Из теоремы Стоуна следует, что всякая булева алгебра (а потому и всякая подрешетка любой булевой алгебры) должна удовлетворять всем тождествам (содержащим символы операций  $\cup$ ,  $\cap$  и  $\neg$ ), верным в решетках множеств (см. упр. 12-5).

**Определения.** Пусть  $\mathcal{L}$  — решетка,  $\mathcal{J}$  — непустое множество элементов решетки  $\mathcal{L}$ . Будем говорить, что  $\mathcal{J}$  — идеал в  $\mathcal{L}$ , если

- (i)  $[c_1 \in \mathcal{J} \& c_2 \in \mathcal{J}] \Rightarrow c_1 \cup c_2 \in \mathcal{J}$ ;
- (ii)  $[a \in \mathcal{L} \& c \in \mathcal{J}] \Rightarrow a \cap c \in \mathcal{J}$ .

Пусть  $\mathcal{L}$  — решетка,  $\mathcal{D}$  — непустое множество элементов из  $\mathcal{L}$ . Назовем  $\mathcal{D}$  *дуальным идеалом* (или *фильтром*), если

- (i)  $[c_1 \in \mathcal{D} \& c_2 \in \mathcal{D}] \Rightarrow c_1 \cap c_2 \in \mathcal{D}$ ;
- (ii)  $[a \in \mathcal{L} \& c \in \mathcal{D}] \Rightarrow a \cup c \in \mathcal{D}$ .

Всякий идеал, как и дуальный идеал решетки  $\mathcal{L}$ , очевидно, является ее подрешеткой.

**Примеры.** Семейство  $\mathcal{F}$  всех конечных множеств образует идеал в  $\mathcal{N}$ .

Семейство  $\mathcal{S}$  всех простых множеств и множеств с конечными дополнениями образует дуальный идеал в  $\mathcal{E}$ , согласно упр. 8-11.

Для дальнейшего обсуждения основной является следующая

**Теорема I.** (a) Пусть  $\mathcal{L}$  — дистрибутивная решетка, и пусть  $\mathcal{J}$  — идеал в  $\mathcal{L}$ . Положим  $a \approx_{\mathcal{J}} b$ , если  $(\exists c_1)(\exists c_2)[c_1 \in \mathcal{J} \& c_2 \in \mathcal{J} \& [a \cup c_1 = b \cup c_2]]$ . Тогда  $\approx_{\mathcal{J}}$  является отношением эквивалентности на множестве элементов решетки  $\mathcal{L}$ . Операции  $\cup$  и  $\cap$  корректно определены на классах эквивалентности, и классы эквивалентности образуют дистрибутивную решетку относительно  $\cup$  и  $\cap$ . Будем называть эту решетку классов эквивалентности факторрешеткой  $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ . Сам идеал  $\mathcal{J}$  является классом эквивалентности и служит нулевым элементом в  $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ .

(b) Пусть  $\mathcal{L}$  — дистрибутивная решетка и  $\mathcal{D}$  — дуальный идеал в  $\mathcal{L}$ . Положим  $a \approx_{\mathcal{D}} b$ , если  $(\exists c_1)(\exists c_2)[c_1 \in \mathcal{D} \& c_2 \in \mathcal{D} \& [a \cap c_1 = b \cap c_2]]$ . Тогда  $\approx_{\mathcal{D}}$  есть отношение эквивалентности

на  $\mathcal{L}$ . Операции  $\cup$  и  $\cap$  корректно определены на его классах эквивалентности, и классы эквивалентности образуют дистрибутивную решетку относительно  $\cup$  и  $\cap$ . Мы называем эту решетку классов эквивалентности факторрешеткой  $\mathcal{L}/^*\mathcal{D}$  (где  $*$  означает, что использовался дуальный идеал). Сам  $\mathcal{D}$  является классом эквивалентности и служит единичным элементом в  $\mathcal{L}/^*\mathcal{D}$ .

(c) Пусть  $\mathcal{L}$  — булева алгебра. Если  $\mathcal{J}$  — идеал в  $\mathcal{L}$ , то  $\mathcal{L}/\mathcal{J}$  есть булева алгебра. Если  $\mathcal{D}$  — дуальный идеал в  $\mathcal{L}$ , то  $\mathcal{L}/^*\mathcal{D}$  есть булева алгебра. Пусть  $\mathcal{J}$  — некоторое множество элементов решетки  $\mathcal{L}$ , и пусть  $\mathcal{D} = \{a \mid \bar{a} \in \mathcal{J}\}$ . Тогда  $\mathcal{J}$  есть идеал в том и только том случае, когда  $\mathcal{D}$  — дуальный идеал; если  $\mathcal{J}$  есть идеал, то  $\mathcal{L}/\mathcal{J}$  и  $\mathcal{L}/^*\mathcal{D}$  совпадают.

(d) Пусть  $\mathcal{L}$  — дистрибутивная решетка,  $\mathcal{J}$  — идеал в  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$  — подрешетка в  $\mathcal{L}$ . Тогда классы эквивалентности относительно  $\approx_{\mathcal{J}}$ , каждый из которых содержит по крайней мере по одному элементу из  $\mathcal{M}$ , образуют подрешетку в  $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ . Мы обозначаем эту подрешетку через „ $\mathcal{M}/\mathcal{J}$  в  $\mathcal{L}$ “. (Заметим, что  $\mathcal{J}$  не обязательно содержится в  $\mathcal{M}$ .) Подобным же образом вводится обозначение „ $\mathcal{M}/^*\mathcal{D}$  в  $\mathcal{L}$ “, где  $\mathcal{D}$  — дуальный идеал в  $\mathcal{L}$ <sup>1</sup>).

**Доказательство.** (a) Легко проверяется, что  $\approx_{\mathcal{J}}$  есть отношение эквивалентности (упр. 12-6).

Пусть  $a_1 \approx_{\mathcal{J}} a_2$  и  $b_1 \approx_{\mathcal{J}} b_2$ . Тогда  $a_1 \cup c_1 = a_2 \cup c_2$  и  $b_1 \cup c_3 = b_2 \cup c_4$ , где  $c_1, c_2, c_3$  и  $c_4$  принадлежат  $\mathcal{J}$ . Соединяя эти равенства с помощью  $\cup$ , получаем

$$(a_1 \cup c_1) \cup (b_1 \cup c_3) = (a_2 \cup c_2) \cup (b_2 \cup c_4),$$

а потому  $(a_1 \cup b_1) \cup (c_1 \cup c_3) = (a_2 \cup b_2) \cup (c_2 \cup c_4)$ . Поэтому  $a_1 \cup b_1 \approx_{\mathcal{J}} a_2 \cup b_2$ , так как  $c_1 \cup c_3, c_2 \cup c_4 \in \mathcal{J}$ . Аналогично, объединяя наши равенства с помощью  $\cap$ , получим

$$(a_1 \cup c_1) \cap (b_1 \cup c_3) = (a_2 \cup c_2) \cap (b_2 \cup c_4),$$

откуда в силу дистрибутивности

$$\begin{aligned} (a_1 \cap b_1) \cup (a_1 \cap c_3) \cup (c_1 \cap b_1) \cup (c_1 \cap c_3) &= \\ &= (a_2 \cap b_2) \cup (a_2 \cap c_4) \cup (c_2 \cap b_2) \cup (c_2 \cap c_4). \end{aligned}$$

Так как  $a_1 \cap b_1, c_1 \cap b_1, c_1 \cap c_3, a_2 \cap c_4, c_2 \cap b_2$  и  $c_2 \cap c_4$  все должны принадлежать  $\mathcal{J}$ , а значит, и  $(a_1 \cap c_3) \cup (c_1 \cap b_1) \cup (c_1 \cap c_3)$  и  $(a_2 \cap c_4) \cup (c_2 \cap b_2) \cup (c_2 \cap c_4)$  оба должны содержаться в  $\mathcal{J}$ , получаем, что  $a_1 \cap b_1 \approx_{\mathcal{J}} a_2 \cap b_2$ .

Итак,  $\cup$  и  $\cap$  корректно определяют операции на классах эквивалентности. Отсюда следует, что любое тождество, верное для

<sup>1</sup>) Иногда при использовании (d) решетка  $\mathcal{L}$  не будет явно упоминаться. Что она собой представляет, всегда будет ясно из контекста или из предыдущего обсуждения.

операций в  $\mathcal{L}$ , должно выполняться и для операций на классах эквивалентности. Поэтому (в силу упр. 12-1)  $\mathcal{L}/\mathcal{I}$  является дистрибутивной решеткой. В упр. 12-8 мы показываем, что  $\mathcal{I}$  образует класс эквивалентности, который является нулевым элементом в  $\mathcal{L}/\mathcal{I}$ .

(b) Доказательство аналогично доказательству пункта (a).

(c) Чтобы показать, что  $\mathcal{L}/\mathcal{I}$  есть булева алгебра, достаточно убедиться, что операция взятия дополнения в  $\mathcal{L}$  корректно переносится на классы эквивалентности. Пусть  $a \cup c_1 = b \cup c_2$ , где  $c_1, c_2 \in \mathcal{I}$ . Тогда  $\bar{a} \cup \bar{c}_1 = \bar{b} \cup \bar{c}_2$ . Поэтому (упр. 12-5)  $\bar{a} \cap \bar{c}_1 = \bar{b} \cap \bar{c}_2$ . Значит,

$$(\bar{a} \cap \bar{c}_1) \cup (\bar{a} \cap \bar{c}_1) \cup (\bar{b} \cap \bar{c}_2) = (\bar{b} \cap \bar{c}_2) \cup (\bar{b} \cap \bar{c}_2) \cup (\bar{a} \cap \bar{c}_1).$$

Применяя упр. 12-5, получим

$$\bar{a} \cup (\bar{b} \cap \bar{c}_2) = \bar{b} \cup (\bar{a} \cap \bar{c}_1).$$

Отсюда следует, что  $\bar{a} \approx_{\mathcal{I}} \bar{b}$ , так как  $\bar{b} \cap \bar{c}_2, \bar{a} \cap \bar{c}_1 \in \mathcal{I}$ .

Аналогично проходит доказательство для  $\mathcal{L}/*\mathcal{D}$ , когда  $\mathcal{D}$  — дуальный идеал.

Пусть  $\mathcal{I}$  — множество элементов  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{D} = \{a \mid \bar{a} \in \mathcal{I}\}$ . Тогда  $c \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \bar{c} \in \mathcal{D}$ . Возьмем  $c_1$  и  $c_2$  из  $\mathcal{I}$ ; тогда  $c_1 \cup c_2 \in \mathcal{I} \Leftrightarrow c_1 \cup c_2 \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \bar{c}_1 \cap \bar{c}_2 \in \mathcal{D}$ . Возьмем теперь  $c \in \mathcal{I}$  и  $a \in \mathcal{L}$ ; тогда  $c \cap a \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \bar{c} \cap \bar{a} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \bar{c} \cup \bar{a} \in \mathcal{D}$ . Поэтому, если  $\mathcal{D}$  — дуальный идеал, то  $\mathcal{I}$  — идеал. Сходное рассуждение показывает, что  $\mathcal{D}$  — дуальный идеал, если  $\mathcal{I}$  — идеал. Предположим теперь, что  $\mathcal{I}$  — идеал. Тогда  $a \approx_{\mathcal{I}} b \Leftrightarrow \bar{a} \approx_{\mathcal{I}} \bar{b}$  (так как операция взятия дополнения корректно определена на классах эквивалентности)  $\Leftrightarrow \bar{a} \cup c_1 = \bar{b} \cup c_2 \Leftrightarrow a \cap \bar{c}_1 = b \cap \bar{c}_2 \Leftrightarrow a \cap \bar{c}_1 = b \cap \bar{c}_2$  (так как дополнения единственны в  $\mathcal{L}$ )  $\Leftrightarrow a \approx_{\mathcal{D}} b$ . Поэтому отношения  $\approx_{\mathcal{I}}$  и  $\approx_{\mathcal{D}}$  совпадают, а значит, совпадают и  $\mathcal{L}/\mathcal{I}$  и  $\mathcal{L}/*\mathcal{D}$ .

(d) Это непосредственно следует из (a), определения подрешетки и упр. 12-1. ■

Утверждение, обратное к (c), и частичное обращение (a) приведены в упр. 12-42.

Мы уже упоминали следующие решетки, идеалы и дуальные идеалы:

$\mathcal{N}$  — решетка всех множеств натуральных чисел,

$\mathcal{E}$  — решетка всех рекурсивно перечислимых множеств,

$\mathcal{R}$  — решетка всех рекурсивных множеств,

$\mathcal{F}$  — идеал (в  $\mathcal{N}$ ) конечных множеств,

$\mathcal{S}$  — дуальный идеал (в  $\mathcal{E}$ ) простых множеств и коконечных множеств.

В силу упр. 9-34 мы имеем также, что

$\mathcal{K}$  — дуальный идеал (в  $\mathcal{E}$ ) коконечных и гиперпростых множеств. (Коконечные и гипергиперпростые множества также образуют дуальный идеал в  $\mathcal{E}$ ; см. упр. 12-55.)

Теорема I позволяет нам строить различные факторрешетки:  $\mathcal{N}/\mathcal{F}, \mathcal{E}/\mathcal{F}, \mathcal{R}/\mathcal{F}, \mathcal{E}/*\mathcal{S}, \mathcal{E}/*\mathcal{K}, \mathcal{R}/*\mathcal{S} \text{ и } \mathcal{R}/*\mathcal{K}$ . (Упражнение 12-13 показывает, что  $\mathcal{R}/*\mathcal{K} = \mathcal{R}/*\mathcal{S} = \mathcal{R}/\mathcal{F}$ .) Любой элемент решетки  $\mathcal{N}/\mathcal{F}$ , содержащий рекурсивно перечислимое множество, состоит только из рекурсивно перечислимых множеств. Мы называем такие элементы *рекурсивно перечислимими*. Аналогично определяются *рекурсивные элементы* в  $\mathcal{N}/\mathcal{F}$ . Решетка  $\mathcal{R}/\mathcal{F}$  является подрешеткой в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , а  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  — подрешеткой в  $\mathcal{N}/\mathcal{F}$ . В этой главе главным образом рассматривается факторрешетка  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ .

В каком смысле решетка  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  инвариантна? Любые два множества натуральных чисел,  $\neq \emptyset$  и  $\neq N$ , принадлежащие одному и тому же элементу из  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , т-эквивалентны. С другой стороны, рекурсивно изоморфные множества могут попасть в различные элементы решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  (например, множества четных и нечетных чисел). Так что сами по себе элементы из  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  (отличные от  $0$  и  $1$ ) так же, как и элементы из  $\mathcal{E}$  (отличные от  $\emptyset$  и  $N$ ), не являются рекурсивно инвариантными объектами. Тем не менее в некотором важном отношении решетка  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  рекурсивно инвариантна. Мы определим сначала понятие *теоретико-решеточного свойства*.

**Определение.** Свойство, т. е. некоторое множество элементов решетки  $\mathcal{L}$ , называется *теоретико-решеточным* в  $\mathcal{L}$ , если оно инвариантно относительно всех автоморфизмов решетки  $\mathcal{L}$ . (Мотивировка: свойство должно называться теоретико-решеточным в  $\mathcal{L}$ , если оно „определимо“ в терминах решеточной структуры в  $\mathcal{L}$ ).<sup>1)</sup>

**Определение.** Пусть решетка  $\mathcal{L}$  содержит подрешетку  $\mathcal{M}$ . Свойство элементов из  $\mathcal{L}$  называется *теоретико-решеточным* в  $\mathcal{L}$  по отношению к  $\mathcal{M}$ , если оно инвариантно относительно всех автоморфизмов решетки  $\mathcal{L}$ , отображающих  $\mathcal{M}$  на себя. (Мотивировка: свойство должно называться теоретико-решеточным в  $\mathcal{L}$  по отношению к  $\mathcal{M}$ , если оно „определимо“ в терминах решеточной структуры на  $\mathcal{L}$  и принадлежности к  $\mathcal{M}$ .)

Мы сокращаем выражение „теоретико-решеточное в  $\mathcal{N}$  по отношению к  $\mathcal{E}$ “ до „теоретико-решеточное по отношению к  $\mathcal{E}$ “. Так как каждый автоморфизм решетки  $\mathcal{E}$  продолжается до автоморфизма решетки  $\mathcal{N}$  (оба определяются индуцированным автоморфизмом на  $\mathcal{F}$ ), свойство рекурсивно перечислимых множеств теоретико-

<sup>1)</sup>  $f$  называется *автоморфизмом* решетки  $\mathcal{L}$ , если  $f$  — такое взаимно однозначное отображение  $\mathcal{L}$  на  $\mathcal{L}$ , что  $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$  и  $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$  для всех  $a, b \in \mathcal{L}$ .

решеточно по отношению к  $\mathcal{E}$  тогда и только тогда, когда оно теоретико-решеточно в  $\mathcal{E}$ .

**П р и м е р ы.** Свойство конечности теоретико-решеточно в  $\mathcal{E}$ . Свойство иммунности теоретико-решеточно по отношению к  $\mathcal{E}$ .

**Определение.** Свойство рекурсивно перечислимых множеств называется *теоретико-решеточным в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$* , если оно есть множество-сумма для свойства (т. е. множества) элементов  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , теоретико-решеточного в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ <sup>1)</sup>.

**П р и м е р ы.** Рекурсивность — теоретико-решеточное свойство в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , так как  $A$  рекурсивно тогда и только тогда, когда  $A$  принадлежит элементу из  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , обладающему дополнением.

Простота — теоретико-решеточное свойство в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , потому что множество  $A$  просто тогда и только тогда, когда оно принадлежит неединичному элементу факторрешетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , для которого нет ненулевого элемента, дизъюнктного к нему.

Отношения на множествах также могут быть теоретико-решеточными (в очевидном смысле: инвариантность в  $\mathcal{L}^n$  относительно автоморфизмов решетки  $\mathcal{L}$ ). Например, рекурсивная неотделимость и сильная неотделимость (упр. 8-39) — теоретико-решеточные свойства в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ .

**Теорема II. Теоретико-решеточные в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  свойства рекурсивно инвариантны.**

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Каждое рекурсивное преобразование  $f$  индуцирует автоморфизм решетки  $\mathcal{E}$ , именно отображение, переводящее  $A$  в  $f(A)$ . Этот автоморфизм отображает  $\mathcal{F}$  на  $\mathcal{F}$  и потому индуцирует автоморфизм факторрешетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ . Поэтому свойство, инвариантное относительно всех автоморфизмов послед-

<sup>1)</sup> Назовем свойство множеств *элементарно теоретико-решеточным* в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , если существует такая формула логики предикатов с единственным предикатным символом  $\leqslant$  и единственной свободной индивидной переменной, что если ограничить кванторы областью  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , а  $\leqslant$  интерпретировать как имеющееся в решетке  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  упорядочение, то множества с рассматриваемым свойством суть в точности те множества, которые принадлежат элементам  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , удовлетворяющим этой формуле. Например, формула  $(\forall b)[a \leqslant b]$  определяет элементарно теоретико-решеточное свойство *конечности*.

Теория первого порядка решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  состоит из всех формул, содержащих только предикатный символ  $\leqslant$ , без свободных переменных, истинных в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ . Не известно, будет ли эта теория разрешимой или хотя бы аксиоматизируемой. С помощью разрешающей процедуры для этой теории можно было бы прямо получить теоремы IV, XI и XIV (ниже) и решить некоторые открытые проблемы. Пусть  $\mathcal{K}$  — дуальный идеал (в  $\mathcal{E}$ ) коконечных и гиперпростых множеств. Лахлан показал, что теории первого порядка решеток  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{K}/\mathcal{F}$  и  $\mathcal{R}/\mathcal{F}$  разрешимы. Он доказал также, что проблема разрешения теории первого порядка  $\mathcal{E}$  сводится к проблеме разрешения теории первого порядка  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ .

ней, должно быть инвариантным относительно всех рекурсивных преобразований. ■

Должно ли рекурсивно инвариантное свойство (рекурсивно перечислимых множеств), корректно определенное на  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , быть теоретико-решеточным в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ ? Это обращение теоремы II представляет собой открытый вопрос. Вероятным кажется отрицательный ответ. Креативность, гиперпростота, сводимость (для множеств, отличных от  $N$  и  $\emptyset$ ) и слабые сводимости служат примерами рекурсивно инвариантных свойств, корректно определенных на  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , однако не известно, будут ли они теоретико-решеточными в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ . В оставшейся части этой главы (и особенно в § 12.6) мы будем изучать различные связанные между собой рекурсивно инвариантные свойства, про некоторые из которых известно, что они теоретико-решеточны в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ <sup>1)</sup>.

Отметим, что решетка  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  обладает следующим свойством однородности: для всякого ее ненулевого элемента  $a$  множество  $\{b \mid b \leqslant a\}$  представляет собой подрешетку, изоморфную  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  (упр. 12-18).

Мы рассмотрим ниже некоторые вопросы о строении  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ .

1. Всякий ли элемент решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , не имеющий дополнения, является объединением дизъюнктных элементов без дополнений? Этот вопрос можно сформулировать и более привычным образом: всякое ли рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество есть объединение двух непересекающихся рекурсивно перечислимых нерекурсивных множеств? Решение этой проблемы дано в § 12.2. Принадлежит оно Фридбергу.

2. Плотно ли упорядочена  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ ? То есть, если  $a < b$ , обязательно ли существует такое  $c$ , что  $a < c$  и  $c < b$ ? Решетки  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{R}$ , конечно, не плотно упорядочены. Легко показать, что решетки  $\mathcal{N}/\mathcal{F}$  и  $\mathcal{R}/\mathcal{F}$  упорядочены плотно. Следующие определение и теорема ставят вопрос о плотности факторрешетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  в несколько иной форме.

**Определение.** Элемент решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  называется *максимальным*, если он максимальен среди неединичных элементов этой решетки.

<sup>1)</sup> Следующий вопрос связан с обращением теоремы II. Обязано ли теоретико-решеточное в  $\mathcal{E}$  и корректно определенное на  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  свойство быть теоретико-решеточным в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ ? Это в свою очередь связано с вопросом: всякий ли автоморфизм решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  индуцируется некоторым рекурсивным преобразованием? Оба вопроса открыты; утвердительный ответ на второй влечет за собой утвердительный ответ на первый.

Легко показать, что верны следующие импликации (упр. 12-17): „теоретико-решеточное в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ “  $\Rightarrow$  „корректно определенное на  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  и теоретико-решеточное в  $\mathcal{E}$ “  $\Rightarrow$  „корректно определенное на  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  и рекурсивно инвариантное“. Истинны ли обратные импликации — открытый вопрос. Он связан с также открытым вопросом: всякий ли автоморфизм факторрешетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  индуцируется некоторым автоморфизмом решетки  $\mathcal{E}$ ? Упражнение 12-32 показывает, что рекурсивно инвариантное свойство не обязательно теоретико-решеточно в  $\mathcal{E}$ .

(Легко показать, что среди ненулевых элементов решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  нет минимальных.)

**Теорема III** (Майхилл).  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  плотно упорядочена в том и только том случае, когда  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  не имеет максимальных элементов.

Доказательство.  $\Rightarrow$ . Очевидно.

$\Leftarrow$ . Допустим, что  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  не плотно упорядочена. Тогда найдутся такие  $a$  и  $b$ , что  $a < b$ , но ни для какого  $c$  не выполнено  $a < c$  и  $c < b$  одновременно. Переходя к представителям, получим множества  $A$  и  $B$ , такие, что  $A \in a$ ,  $B \in b$  и  $A \subset B \cup D$ , где  $D$  конечно (см. упр. 12-7). Пусть  $f$  — взаимно однозначная общерекурсивная функция с областью значений  $B \cup D$  (что возможно, так как  $b \neq 0$ ). Возьмем  $A' = f^{-1}(A)$ . Тогда класс эквивалентности множества  $A'$  есть искомый максимальный элемент, что легко проверяется. ■

В § 12.4 мы решим проблему плотности, показав, что в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  существует максимальный неединичный элемент. Эта конструкция принадлежит Фридбергу.

3. Всякий ли неединичный элемент решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  содержится в некотором максимальном элементе? В § 12.5 мы дадим отрицательный ответ на этот вопрос. Это построение принадлежит Мартину.

В § 12.3 мы рассматриваем некоторый идеал в  $\mathcal{N}$ , именно идеал, порожденный сжатыми множествами, и изучаем некоторые свойства его членов. Сжатые множества „почти конечны“ в том смысле, что они не могут быть расщеплены на меньшие бесконечные части с помощью рекурсивно перечислимых множеств.

В § 12.6 рассматривается еще несколько других понятий „почти-конечности“, например гипергипериммунность, и обсуждаются некоторые открытые проблемы.

## § 12.2. РАЗЛОЖЕНИЕ

Следующая теорема отвечает на вопрос 1 из § 12.1.

**Теорема IV** (Фридберг [1958b]). Пусть  $A$  — произвольное рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество. Тогда существуют такие множества  $B_1$  и  $B_2$ , что

- (i)  $B_1 \cup B_2 = A$ ,
- (ii)  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ,
- (iii)  $B_1$  и  $B_2$  рекурсивно перечислимы, но не рекурсивны.

Доказательство. Пусть  $f$  — взаимно однозначная общерекурсивная функция с областью значений  $A$ . Мы опишем процедуру перечисления  $B_1$  и  $B_2$ . Обозначим через  $B_1^{(n)}$  совокупность элементов множества  $B_1$ , перечисленных к концу  $n$ -го шага. Аналогично определим  $B_2^{(n)}$ .

Этап 0. Отнесем  $f(0)$  к  $B_1$ .

Этап  $n+1$ . Выполним по  $n$  шагов в перечислении каждого из множеств  $W_0, W_1, \dots, W_n$ . Обозначим получившиеся множества через  $W_0^{(n)}, W_1^{(n)}, \dots, W_n^{(n)}$ . Посмотрим, существует ли такой  $x$ ,  $x \leq n$ , что  $f(n+1) \in W_x^{(n)}$  и или  $B_1^{(n)} \cap W_x^{(n)} = \emptyset$ , или  $B_2^{(n)} \cap W_x^{(n)} = \emptyset$ . Если это так, возьмем наименьший такой  $x$  и назовем его  $x_n$ . Если

$$B_1^{(n)} \cap W_{x_n}^{(n)} = \emptyset,$$

отнесем  $f(n+1)$  к  $B_1$ . Если  $B_1^{(n)} \cap W_{x_n}^{(n)} \neq \emptyset$ , отнесем  $f(n+1)$  к  $B_2$ . Если же такого  $x$  нет, отнесем  $f(n+1)$  к  $B_1$ .

Ясно, что множества  $B_1$  и  $B_2$  рекурсивно перечислимы,  $B_1 \cup B_2 = A$  и  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . Остается доказать, что ни  $B_1$ , ни  $B_2$  не может быть рекурсивным.

Предположим, что множество  $B_1$  рекурсивно. Тогда  $\bar{B}_1$  рекурсивно перечислимо. Пусть  $\bar{B}_1 = B_2 \cup \bar{A} = W_m$ . Тогда  $W_m \cap B_1 = \emptyset$  и  $\bar{A} \subset W_m$ . Заметим, что, когда  $n$  пробегает натуральный ряд,  $x_n$  принимает каждое значение самое большое дважды. Поэтому должно найтись такое  $n_0$ , что для всех  $n > n_0$  имеем  $x_n > m$  (если только  $x_n$  существует). Тогда  $n > n_0 \Rightarrow f(n+1) \notin W_m^{(n)}$  (в противном случае на этапе  $n+1$  пришлось бы отнести  $f(n+1)$  к  $B_1$  и  $W_m \cap B_1$  оказалось бы непустым). Поэтому после этапа  $n_0$  каждый элемент из  $B_2$ , который появляется в качестве значения функции  $f$ , должен сделать это до того, как он появится в множестве  $W_m$ . С другой стороны, так как  $\bar{A} \subset W_m$ , всякий элемент из  $\bar{A}$  должен оказаться в  $W_m$  до того, как он появится в качестве значения  $f$  (поскольку он вовсе не может быть значением функции  $f$ ). Поэтому множество  $\{z \mid (\exists n)[z \in W_m^{(n)} \& z \notin \{f(0), \dots, f(n+1)\}]\}$  должно отличаться от  $\bar{A}$  самое большое на конечное множество. Поэтому, согласно второй теореме о проекции,  $\bar{A}$  должно быть рекурсивно перечислимым. Значит,  $A$  должно быть рекурсивным в противоречие с условием. Таким образом,  $B_1$  не может быть рекурсивным.

Сходное рассуждение показывает, что и множество  $B_2$  не рекурсивно. ■

Сакс объединил теорему IV с результатом упр. 10-11 (о чем упоминалось в конце упр. 10-11). Он показал, что всякое нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество  $A$  есть объединение двух непересекающихся множеств, причем эти непересекающиеся множества имеют несравнимые Т-степени неразрешимости, и Т-степень каждого из них меньше, чем Т-степень множества  $A$ . Мы не приводим здесь доказательство Сакса.

Прямое обобщение доказательства теоремы IV показывает, что всякое нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество может

быть разложено в равномерно перечислимую бесконечную совокупность попарно не пересекающихся нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств (см. упр. 12-22).

### § 12.3. СЖАТЫЕ МНОЖЕСТВА

Понятия *иммунности* и *гипериммунности* могут быть усилены следующим образом.

**Определение.** Множество  $A$  называется *сжатым*, если

- (i)  $A$  бесконечно;
- (ii)  $(\forall B)[B \text{ рекурсивно перечислимо} \Rightarrow [A \cap B \text{ конечно или } A \cap \bar{B} \text{ конечно}]]$ <sup>1)</sup>.

Таким образом, бесконечное множество сжато тогда и только тогда, когда оно не может быть разделено рекурсивно перечислимым множеством на две бесконечные части. Иными словами, множество сжато тогда и только тогда, когда оно принадлежит такому элементу  $a$  решетки  $\mathcal{N}/\mathcal{F}$ , что  $a \neq 0$  и  $a$  дизъюнктен со всяkim рекурсивно перечислимым элементом, не превосходящим  $a$ .

**Теорема V.**  $A$  сжато  $\Rightarrow A$  гипериммунно.

**Доказательство.** Допустим, что  $A$  не гипериммунно. Тогда по теореме 9-XV существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что

$$(\forall x)(\forall y)[x \neq y \Rightarrow D_{f(x)} \cap D_{f(y)} = \emptyset] \& (\forall x)[D_{f(x)} \cap A \neq \emptyset].$$

Рассмотрим  $B = \bigcup_{x \text{ четно}} D_{f(x)}$ . Тогда и  $B \cap A$ , и  $\bar{B} \cap A$  бесконечны. Значит,  $A$  не сжато. ■

(Аналогичное рассуждение показывает, что  $A$  сжато  $\Rightarrow A$  гипергипериммунно.)

Следующая теорема устанавливает существование сжатых множеств.

**Теорема VI** (Деккер и Майхилл). *Каждое бесконечное множество содержит сжатое подмножество.*

**Доказательство.** Пусть  $A$  — данное бесконечное множество. Определим последовательность  $A_0, A_1, \dots$  следующим

<sup>1)</sup> Это понятие введено Роузом Юллианом [1963]. Оно связано с понятием *бесконечно неразложимого* множества, определенным Деккером и Майхиллом [1960]. В § 12.6 мы покажем, что эти два понятия различны. Иногда со значением „сжатый” используется также термин „почти конечный”.

образом:

$$A_0 = A,$$

$$A_{n+1} = \begin{cases} A_n \cap W_n, & \text{если } A_n \cap W_n \text{ бесконечно;} \\ A_n \cap \bar{W}_n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно,  $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$

Предположим, что  $A$  не содержит ни одного сжатого подмножества. Тогда для каждого  $n$  существует такое  $z$ , что  $z \geq n$  и  $W_z$  разделяет  $A_n$  на две бесконечные части. Отсюда следует, что последовательность  $A_0, A_1, A_2, \dots$  содержит строго убывающую подпоследовательность  $B_0, B_1, B_2, \dots$ . Определим последовательность чисел  $x_0, x_1, \dots$ , полагая

$$x_n = \mu y[y \in B_n - B_{n+1}].$$

Пусть  $C$  — множество всех членов этой последовательности, т. е.  $C = \{x_0, x_1, \dots\}$ . Пусть дано произвольное  $z$ . Как известно из построения,  $A_{z+1} \subset W_z$  или  $A_{z+1} \subset \bar{W}_z$ . Поэтому  $B_{z+1} \subset W_z$  или  $B_{z+1} \subset \bar{W}_z$ . Так как все, кроме конечного числа, элементы множества  $C$  должны лежать в  $B_{z+1}$ , то либо  $C \cap W_z$ , либо  $C \cap \bar{W}_z$  конечно. Это верно для любого  $z$ , а потому  $C$  — сжатое подмножество множества  $A$ , что противоречит нашему предположению об отсутствии у  $A$  сжатого подмножества. ■

(Приведенное выше доказательство может быть сделано несколько более конструктивным. Единственная информация о рекурсивно перечислимых множествах, используемая здесь, заключается в том, что они образуют не более чем счетное семейство. Будет заметно, что и многие другие доказательства, приводимые ниже, являются по своей природе, подобно этому, чисто теоретико-множественными (во всяком случае более, нежели относящимися к теории рекурсивных функций), используя лишь счетность семейства рекурсивно перечислимых множеств и иногда вдобавок его замкнутость относительно пересечений или тот факт, что оно содержит все конечные и коконечные множества. Доказательство теоремы VI обобщается в упр. 12-24 и 12-31.)

Так как всякое бесконечное подмножество сжатого множества сжато, понятно, что имеется  $2^{\aleph_0}$  сжатых множеств. Будем говорить, что сжатое множество  $C$  относится к рекурсивно перечислимому множеству  $B$ , если  $C \cap B$  бесконечно, т. е. если элемент решетки  $\mathcal{N}/\mathcal{F}$ , содержащий  $C$ , лежит под элементом множества  $B$ . Назовем два сжатых множества *с-эквивалентными*, если они относятся к одним и тем же рекурсивно перечислимым множествам.

**Определение.** Пусть  $A$  и  $B$  сжаты. Множество  $A$  называется *с-эквивалентным*  $B$ , если  $(\forall x)[A \cap W_x \text{ бесконечно} \Leftrightarrow B \cap W_x \text{ бесконечно}]$ .

**Теорема VII.** Пусть  $A$  и  $B$  сжаты. Тогда

- (i)  $A$  с-эквивалентно  $B \Leftrightarrow A \cup B$  сжато;
- (ii)  $A \cap B$  бесконечно  $\Rightarrow A \cup B$  сжато.

**Доказательство.** Непосредственно из определения. См. упр. 12-23. ■

Если взять произвольный фиксированный класс с-эквивалентных сжатых множеств вместе с конечными множествами, то получится идеал в  $\mathcal{N}$ , факторизация которого относительно  $\mathcal{F}$  дает идеал в  $\mathcal{N}/\mathcal{F}$ . Каждый класс с-эквивалентности содержит  $2^{\aleph_0}$  элементов. Как много существует классов с-эквивалентности? Следующая теорема отвечает на этот вопрос.

**Теорема VIII.** Сжатые множества распадаются на  $2^{\aleph_0}$  классов с-эквивалентности.

**Доказательство.** Можно доказать эту теорему, пользуясь только простыми понятиями теории рекурсивных функций и теории множеств. Однако для сокращения доказательства удобно и полезно воспользоваться известными свойствами действительных и рациональных чисел.

Заметим, что натуральные числа можно в следующем смысле эффективно отобразить на рациональные: существуют такие взаимно однозначное отображение  $\zeta$  множества  $N$  на рациональные числа и общерекурсивная функция  $f$ , что для всех  $n$   $\zeta(n) = \pi_1 f(n)/\pi_2 f(n)$ . (Можно воспользоваться любой из обычных нумераций множества рациональных чисел, чтобы получить такое отображение.)

Зафиксируем некоторое такое отображение. Множества рациональных чисел могут быть теперь отождествлены с множествами натуральных чисел. В частности, всякий замкнутый интервал рациональных чисел с рациональными концами образует рекурсивное множество.

Для каждого действительного числа выберем бесконечную сходящуюся последовательность рациональных чисел, имеющую данное действительное число пределом. Каждая из выбранных нами сходящихся последовательностей, рассматриваемая как множество сопоставленных ее элементам натуральных чисел, бесконечна, а потому по теореме VI каждая содержит сжатое подмножество. Выберем по одному сжатому подмножеству в каждой сходящейся последовательности. Сжатые множества, появившиеся из разных последовательностей, не могут быть с-эквивалентными, потому что их объединение может быть разделено на две бесконечные части подходящим интервалом с рациональными концами. Поскольку существует  $2^{\aleph_0}$  последовательностей (действительных чисел ведь существует  $2^{\aleph_0}$ ), найдется по крайней мере  $2^{\aleph_0}$  сжатых множеств, никакие два из которых не с-эквивалентны. Но классов

с-эквивалентности не может быть более  $2^{\aleph_0}$ , потому что в  $N$  имеется всего  $2^{\aleph_0}$  подмножеств. ■

**Понятие сжатого множества** доставляет средства для доказательства следующей теоремы.

**Теорема IX (Кент).** Существует такая перестановка  $f$ , что

- (i) для всех рекурсивно перечислимых множеств  $B$  множества  $f(B)$  и  $f^{-1}(B)$  рекурсивно перечислимы (а потому для всех рекурсивных множеств  $A$  множества  $f(A)$  и  $f^{-1}(A)$  рекурсивны);
- (ii)  $f$  не рекурсивна.

**Доказательство.** Возьмем сжатое множество  $D$ . Рассмотрим

$$\mathcal{D} = \{f \mid f \text{ — перестановка} \& (\forall x)[x \in D \Rightarrow f(x) = x]\}.$$

Так как  $f$  из  $\mathcal{D}$  может быть определено на  $D$  произвольным образом,  $\mathcal{D}$  содержит  $2^{\aleph_0}$  членов. Так как класс общерекурсивных функций счетен,  $\mathcal{D}$  содержит нерекурсивную перестановку. Остается проверить, что для любой  $f$  из  $\mathcal{D}$  множества  $f(A)$  и  $f^{-1}(A)$  рекурсивны при любом рекурсивном множестве  $A$  и  $f(B)$  и  $f^{-1}(B)$  рекурсивно перечислимы при любом рекурсивно перечислимом множестве  $B$ . Это непосредственно следует из сжатости множества  $D$  (см. упр. 12-23). ■

**Следствие IX.** Решетка  $\mathcal{E}$  обладает автоморфизмами, отличными от индуцированных рекурсивными перестановками натурального ряда.

**Доказательство.** Непосредственно. ■

Следствие IX усилено в упр. 12-32, где показано, что существуют такие рекурсивно перечислимые множества  $A$  и  $B$ , что  $A$  переводится в  $B$  некоторым автоморфизмом решетки  $\mathcal{E}$ , но  $A$  не рекурсивно изоморфно  $B$ . Отсюда следует, что рекурсивно инвариантное свойство не обязательно теоретико-репеточно в  $\mathcal{E}$ .

**Определение.** Назовем сжатое множество  $A$  *наполненным*, если  $(\forall B)$   $[B$  сжато  $\&$   $A$  и  $B$  с-эквивалентны]  $\Rightarrow B \cap \bar{A}$  конечно. Таким образом, класс с-эквивалентности содержит наполненное множество тогда и только тогда, когда идеал решетки  $\mathcal{N}/\mathcal{F}$ , определенный этим классом эквивалентности, содержит максимальный элемент<sup>1)</sup>.

В § 12.4 мы покажем, что наполненные множества существуют. В § 12.6 будет установлено, что не всякий класс с-эквивалентности содержит наполненное множество. В упр. 12-56 мы покажем, далее, что существует только счетное число наполненных мно-

<sup>1)</sup> То есть является *главным* идеалом.

жеств. В упр. 12-60 мы увидим, что  $A$  — наполненное сжатое множество  $\Rightarrow \bar{A}$  рекурсивно перечислимо. Следующее понятие введено Роузом и Юллианом [1963].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $A$  называется *квазисжатым*, если  $A$  — объединение конечного (ненулевого) числа сжатых множеств.

Если  $A$  квазисжато, то всякое разложение множества  $A$  на сжатые множества определяет некоторую совокупность соответствующих классов с-эквивалентности. Из теоремы VII следует, что это множество классов с-эквивалентности однозначно определено независимо от выбранного разложения (см. упр. 12-27).

Квазисжатые множества вместе с конечными множествами образуют идеал  $\mathcal{F}_1$  в  $\mathcal{N}$ ; это идеал, порожденный сжатыми множествами. Можно построить факторрешетки  $\mathcal{N}/\mathcal{F}_1, \mathcal{E}/\mathcal{F}_1, \mathcal{R}/\mathcal{F}_1$ .

Квазисжатые множества гипериммунны (и даже гипергипериммунны; см. упр. 12-26). В упр. 12-30 мы увидим, что множество может быть гипергипериммунным, не будучи квазисжатым.

#### § 12.4. МАКСИМАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

Теперь мы рассмотрим рекурсивно перечислимые множества со сжатыми дополнениями.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество  $A$  называется *максимальным*, если

- (i)  $A$  рекурсивно перечислимо;
- (ii)  $\bar{A}$  сжато.

**ТЕОРЕМА X.** Множество  $A$  максимально  $\Leftrightarrow A$  принадлежит элементу решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , максимальному среди неединичных элементов этой решетки.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Если  $A \in a$  и  $a$  не максимальен среди неединичных элементов решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , то найдется такой элемент  $b$ , что  $a < b < 1$ . Возьмем такое  $B \in b$ , что  $A \subset B$ . Множества  $N - B$  и  $B - A$  должны быть бесконечными. Поэтому  $\bar{A} \cap B$  бесконечно и  $\bar{A} \cap \bar{B}$  бесконечно. Значит,  $\bar{A}$  не сжато и  $A$  не может быть максимальным.

$\Leftarrow$ . Если  $A$  рекурсивно перечислимо, но не максимально, то  $\bar{A}$  не сжато. Пусть  $C$  — такое рекурсивно перечислимое множество, что  $\bar{A} \cap C$  и  $\bar{A} \cap \bar{C}$  бесконечны. Положим  $B = A \cup C$ . Пусть  $b$  — содержащий  $B$  элемент решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ . Тогда  $a < b < 1$ , где  $A \in a$ . ■

Существование максимальных множеств доказывается в следующей теореме, принадлежащей Фридбергу. При доказательстве мы воспользуемся одним изящным упрощением конструкции Фридберга [1958 b], принадлежащим Ейтсу [1965]. Существование

полных максимальных множеств (Ейтс) и неполных максимальных множеств (Сакс) может быть установлено с помощью подходящих видоизменений этой конструкции; см. упр. 12-59.

**Теорема XI.** Существует максимальное множество.

**Доказательство.** Сначала мы опишем процедуру перечисления некоторого множества  $A$ , а затем докажем, что  $A$  максимально.

Перечисление  $A$  происходит по этапам. Начнем с двух определений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $W_z^{(n)} = \{x \mid x \text{ появляется за первые } n \text{ шагов в перечислении без повторений множества } W_z\}$ <sup>1)</sup>.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Для любого  $z$ , произвольного этапа  $n+1$  и любого натурального  $x$  определим *z-штат* числа  $x$  на этапе  $n+1$  как конечную последовательность  $b_0 b_1 \dots b_z$  нулей и единиц, такую, что

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in W_i^{(n+1)} \text{ и } i \leq n; \\ 0, & \text{если } x \notin W_i^{(n+1)} \text{ или } n < i, \end{cases}$$

где  $0 \leq i \leq z$ .

Понятно, что имеется  $2^{z+1}$  возможных *z-штатов*. Мы упорядочим их лексикографически (от „меньших“ к „большим“); например, 10111 считается *меньше* чем 11000 (в упорядочении 4-штатов).

Отметим два важных свойства *z-штатов* и их упорядочения:

- (i) для фиксированных  $z$  и  $x$  при  $n < m$  *z-штат* элемента  $x$  на этапе  $m$  должен быть не меньше *z-штата* элемента  $x$  на этапе  $n$ ;
- (ii) если при фиксированном этапе  $n$ , фиксированных  $x$  и  $y$  и  $z < z'$  *z'-штат* элемента  $y$  больше, чем *z-штат* элемента  $x$ , то *z'-штат* элемента  $y$  будет больше, чем *z'-штат* элемента  $x$ .

Процедура перечисления множества  $A$  такова. Мы начинаем со списка всех натуральных чисел и считаем, что сопоставили каждому числу  $x$  в этом списке маркер  $\boxed{x}$ . Мы опишем инструкции, в соответствии с которыми некоторые из этих маркеров будут сдвигаться. Если число из списка на каком-либо этапе окажется без маркера, оно уже останется без маркера навсегда. Числа из списка, (в конце концов) остающиеся без маркера, образуют множество  $A$ . (Хотя в нашем описании мы имеем в начальный момент бесконечно много маркеров и на данном этапе говорим о перемещении бесконечно многих маркеров, будет ясно, что мы

<sup>1)</sup> Под „ $n$  шагами перечисления без повторений множества  $W_z$ “ мы подразумеваем  $n$  машинных тактов в следующей процедуре: вычисляйте  $\Phi_{f''(z)}(0)$ ; если и когда это вычисление закончится, вычисляйте  $\Phi_{f''(z)}(1)$ ; если и когда...;  $f''$  здесь определяется, как в следствии 5-V (d).

получим эффективный способ порождения  $A$ . Можно за счет некоторого увеличения сложности восприятия привести нашу процедуру к такому виду, в котором используется только конечное число маркеров на каждом этапе.)

**Этап  $n+1$ .** Пусть для каждого  $m$   $x_m^{(n)}$  — положение маркера  $\boxed{m}$  к концу этапа  $n$ . Вычислим  $W_z^{(n+1)}$  для всех  $z \leq n$ . Найдем наименьшее из таких  $m$  (если такие существуют), что для некоторого  $q' > m$  число  $x_q^{(n)}$  находится в большем  $m$ -штате (на этапе  $n+1$ ), чем  $x_m^{(n)}$ . Если таких  $m$  нет, переходим к этапу  $n+2$ . Если же мы выбрали наименьшее такое  $m$ , то пусть  $q$  — наименьшее из соответствующих ему  $q'$ ; перемещаем маркер  $\boxed{m}$  на  $x_q^{(n)}$ , для всех  $p > m$  сдвигаем маркер  $\boxed{p}$  на  $x_{p+q-m}^{(n)}$ . Относим к  $A$  все элементы множества  $\{y \mid x_m^{(n)} \leq y < x_q^{(n)}\}$ , которые еще не попали в  $A$ . (Названные числа — единственные в списке, теряющие маркер на этапе  $n+1$ .) Затем переходим к этапу  $n+2$ .

Следующие две леммы показывают, что  $A$  максимально.

**Лемма 1.**  $\bar{A}$  бесконечно.

**Доказательство леммы 1.** Как нетрудно заметить, достаточно показать, что каждый маркер сдвигается только конечное число раз. (Окончательное положение каждого маркера есть элемент множества  $\bar{A}$ .) Допустим противное. Пусть  $m$  — наименьший из тех  $m'$ , для которых  $\boxed{m'}$  сдвигается бесконечно много раз. В соответствии со свойством (i)  $z$ -штатов, после того как  $\boxed{m-1}$  достигнет своего окончательного положения,  $\boxed{m}$  должно перемещаться в положения со все большими  $m$ -штатами. Но  $m$ -штатов имеется только конечное число. Получилось противоречие, и лемма доказана.

**Лемма 2.** Для всякого  $z$  либо  $W_z \cap \bar{A}$ , либо  $\bar{W}_z \cap \bar{A}$  конечно.

**Доказательство леммы 2.** Зафиксируем  $z$ . Каждое число  $x$  из  $A$  должно достигнуть окончательного  $z$ -штата  $\beta$  по мере того, как  $n$  возрастает. Скажем в этом случае, что  $x$  остановится в  $\beta$ . Поскольку  $\bar{A}$  бесконечно, хотя бы в одном  $z$ -штате остановится бесконечно много элементов множества  $\bar{A}$ . Покажем, что не может быть больше одного  $z$ -штата, в котором останавливается бесконечно много элементов из  $\bar{A}$ . Допустим противное. Пусть  $\beta$  — наименьший из таких  $z$ -штатов, а  $\beta'$  — другой  $z$ -штат, в котором также останавливается бесконечно много элементов из  $\bar{A}$ . Отсюда следует,

что существуют такие числа  $m, n, x$  и  $y$ , что  $z < m < n$ ,  $x$  — окончательное положение маркера  $\boxed{m}$ ,  $y$  — окончательное положение маркера  $\boxed{n}$ ,  $x$  окончательно останавливается в  $z$ -штате  $\beta$ , а  $y$  останавливается в  $z$ -штате  $\beta'$ . По свойству (ii)  $z$ -штатов  $y$  добирается до и останавливается в большем  $m$ -штате, чем  $x$ . Но это означает, согласно нашему построению, что маркер  $\boxed{m}$  должен в конце концов сдвинуться, в противоречие с нашим предположением о том, что  $x$  — его окончательное положение. Этим доказана лемма 2.

Леммы 1 и 2 показывают, что  $\bar{A}$  — сжатое множество. Значит,  $A$  — максимальное множество. ■

**Следствие XI (a).** Решетка  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  не плотно упорядочена.

**Доказательство.** В силу теорем III и X. ■

**Следствие XI (b).** Существует наполненное сжатое множество.

**Доказательство.** Пусть множество  $A$  максимально. Тогда  $\bar{A}$  сжато. Если  $\bar{A}$  — не наполненное множество, мы получим противоречие с теоремой VII, причем в роли разделяющего рекурсивно перечислимого множества выступит  $A$ . ■

Необычные свойства максимальных множеств бывают полезны при построении различных примеров и контрпримеров (см. упр. 12-35 и 12-37 и § 12.6).

$\{A \mid A \text{ максимально или коконечно}\}$  не является дуальным идеалом в  $\mathcal{E}$  (ур. 12-36). В этом отношении максимальные множества отличаются от простых и гиперпростых множеств.

**Определение.** Множество  $A$  называется *квазимаксимальным*, если  $A$  рекурсивно перечислимо, а  $\bar{A}$  квазисжато. Ниже, в ур. 12-36, мы показываем, что существуют квазимаксимальные, но не максимальные множества и что  $\{A \mid A \text{ квазимаксимально или коконечно}\}$  есть дуальный идеал в  $\mathcal{E}$ .

## § 12.5. ПОДМНОЖЕСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Всякий ли неединичный элемент решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  содержится в некотором максимальном элементе? Иначе говоря, всякое ли рекурсивно перечислимое множество с бесконечным дополнением содержит в некотором максимальном множестве? Ответ на этот вопрос дает теорема XIV. Сначала, однако, мы докажем некоторые родственные результаты.

**Теорема XII.** (a) Если рекурсивно перечислимое множество не просто и не коконечно, то оно содержится в некотором максимальном множестве.

(b) Если рекурсивно перечислимое множество не коконечно, то оно содержится в некотором гиперпростом множестве.

**Доказательство.** (a) Пусть  $A$  — рекурсивно перечислимое множество, причем  $\bar{A}$  не конечно и не иммунно. Тогда  $\bar{A}$  содержит некоторое бесконечное рекурсивное множество  $B$ . Пусть  $f$  — рекурсивная функция, взаимно однозначно отображающая  $N$  на  $B$ , и пусть  $C$  — образ в  $B$  (при отображении  $f$ ) некоторого максимального множества. Тогда  $\bar{B} \cup C$  — искомое максимальное множество, содержащее  $A$ .

(b) Пусть  $A$  — рекурсивно перечислимое множество с бесконечным дополнением  $\bar{A}$ . Предположим, что  $A$  не гиперпросто (в противном случае нечего доказывать). Воспользовавшись упр. 12-39, возьмем такую общерекурсивную функцию  $f$ , что  $D_{f(0)}, D_{f(1)}, \dots$  — последовательность попарно не пересекающихся конечных множеств, каждое из которых пересекается с  $\bar{A}$  и объединение которых есть  $N$ . Пусть  $B$  — некоторое гиперпростое множество. Положим  $C = A \cup \bigcup_{i \in B} D_{f(i)}$ . Тогда  $C$  — искомое гиперпростое множество, содержащее  $A$  (упр. 12-40). ■

**Определения.**  $|A| = [\text{мощность множества } A]$ .

$\overline{\lim}(f, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m > n} |W_{f(m)} \cap A|)$ . (Таким образом, неравенство  $\overline{\lim}(f, A) \geq p$  означает, что для бесконечно многих значений  $m$   $W_{f(m)} \cap A$  содержит по крайней мере  $p$  элементов.)

Функция  $f$  называется *рекурсивно перечислимой последовательностью без пересечений*, если  $f$  общерекурсивна и

$$(\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow W_{f(u)} \cap W_{f(v)} = \emptyset].$$

$\overline{\lim}(A) = \sup_{f \in \mathcal{D}} (\overline{\lim}(f, A))$ , где  $\mathcal{D}$  — совокупность всех рекурсивно перечислимых последовательностей без пересечений. (Так что неравенство  $\overline{\lim}(A) \geq p$  означает, что  $\overline{\lim}(f, A) \geq p$  для некоторой рекурсивно перечислимой последовательности  $f$  без пересечений.) Отсюда получаем, например, что  $\overline{\lim}(A) = 0 \Leftrightarrow A$  конечно.

Следующие теоремы, доказанные Мартином [1963], отвечают на наш первоначальный вопрос.

**Теорема XIII (Мартин).**  $A$  максимально  $\Rightarrow \overline{\lim}(\bar{A}) = 1$ .

**Доказательство.** По определению множество  $\bar{A}$  сжато. Допустим, что  $\overline{\lim}(\bar{A}) \geq 2$ . Тогда для некоторой последова-

тельности  $f$  без пересечений  $\overline{\lim}(f, \bar{A}) \geq 2$ . Определим рекурсивно перечислимое множество  $B$  следующим образом.

Перечисляем  $A$ ; в то же время начинаем перечислять множества  $W_{f(0)}, W_{f(1)}, \dots$ . На каждом этапе для каждого  $i$  относим некоторые элементы множества  $W_{f(i)}$  к  $B$  по следующему правилу. Каждое число, появившееся и в  $A$ , и в  $W_{f(i)}$ , зачисляем в  $B$ , а также относим к  $B$  первое число, которое появилось в  $W_{f(i)}$ , но еще не появилось в  $A$  (если такие найдутся)<sup>1)</sup>. Поскольку для бесконечно многих  $i$  множество  $W_{f(i)}$  содержит хотя бы два элемента из  $\bar{A}$ , бесконечно много элементов из  $\bar{A}$  попадет в  $B$  и бесконечно много элементов  $\bar{A}$  никогда не попадет в  $B$ . Но, значит,  $B$  разделяет  $\bar{A}$  на две бесконечные части, что противоречит сжатости множества  $\bar{A}$ . Поэтому  $\overline{\lim}(\bar{A}) \leq 1$ . Так как  $\bar{A}$  бесконечно,  $\overline{\lim}(\bar{A}) > 0$ . Значит,  $\overline{\lim}(\bar{A}) = 1$ . ■

**Теорема XIV (Мартин).** Существует такое рекурсивно перечислимое множество  $A$ , что  $\bar{A}$  бесконечно и  $A$  не содержится ни в каком максимальном множестве.

**Доказательство.** Мы укажем такое рекурсивно перечислимое множество  $A$ , что  $\bar{A}$  бесконечно и для всякого рекурсивно перечислимого  $B$  имеем  $B \supset A \Rightarrow \overline{\lim}(\bar{B}) \neq 1$ . Отсюда будет следовать искомый результат в силу теоремы XIII. Дадим инструкции для перечисления множества  $A$ .

Определим последовательность попарно не пересекающихся конечных множеств

$$\begin{aligned} S_0 &= \{0\}, \\ S_1 &= \{1, 2\}, \\ S_2 &= \{3, 4, 5\}, \\ &\dots, \end{aligned}$$

где при каждом  $n$  множество  $S_n$  содержит  $n+1$  элементов. Будем перечислять множества  $W_0, W_1, W_2, \dots$ . На каждом этапе для каждого  $i$  проверяем, нет ли такого  $j < i$ , чтобы точно  $i$  из  $i+1$  членов множества  $S_i$  были уже перечислены в  $W_j$ ; для каждого такого  $j$  относим к  $A$  тот элемент  $S_i$ , который еще не попал в  $W_j$ .

Так как  $S_i$  содержит  $i+1$  элементов и не более  $i$  из них может попасть в  $A$  (по одному для каждого  $j < i$ ),  $\bar{A}$  должно быть беско-

<sup>1)</sup> Это предложение надо понимать так: пусть  $x_0$  — первое (в порядке перечисления множества  $W_{f(i)}$ ) число, появившееся в  $W_{f(i)}^{(n)}$ , но не попавшее в  $A^{(n)}$ ; относим  $x_0$  к  $B$ ; если  $x_0$  позже попадет в  $\bar{A}$ , то зачисляем в  $B$  число  $x_1$  — первое (в порядке перечисления  $W_{f(i)}$ ) из отличных от  $x_0$  и не попавших в  $A$  к моменту своего появления в  $W_{f(i)}$ ; если  $x_1$  позже попадет в  $A$ , то ... и т. д. — *Прим. перев.*

нечным. (Ясно, что по теореме 9-XV  $A$  не гиперпросто.) Пусть  $B$  — такое рекурсивно перечислимое множество, что  $B \supset A$ . Тогда  $B = W_j$  для некоторого  $j$  и, согласно построению, для всех  $i > j$  либо  $S_i \subseteq B$ , либо  $S_i \cap \bar{B}$  содержит хотя бы два элемента. Поэтому или  $\bar{B}$  конечно (и  $\lim(\bar{B}) = 0$ ), или для бесконечно многих  $i$  множество  $S_i \cap \bar{B}$  содержит хотя бы два элемента (и  $\lim(\bar{B}) \geq 2$ ). В обоих случаях  $\lim(B) \neq 1$ , и теорема доказана. ■

За счет небольших изменений в построении этот результат может быть следующим образом усилен.

**Следствие XIV** (Мартин). (а) *Если рекурсивно перечислимое множество не гиперпросто и не коконечно, то оно содержится в таком простом негиперпростом множестве  $C$ , что  $C$  не содержится ни в каком максимальном множестве.*

(б) *Если рекурсивно перечислимое множество не гиперпросто и не коконечно, то оно содержится в таком гиперпростом множестве  $D$ , что  $D$  не содержится ни в каком максимальном множестве.*

**Доказательство.** (а) Пусть рекурсивно перечислимое множество  $B$  не является ни коконечным, ни гиперпростым. Возьмем (по теореме 9-XV) некоторую эффективно занумерованную каноническими индексами последовательность попарно не пересекающихся конечных множеств, каждое из которых пересекается с  $\bar{B}$ . Беря объединения этих конечных множеств, построим эффективную последовательность попарно не пересекающихся конечных множеств  $S'_0, S'_1, \dots$ , для которой при каждом  $n$  множество  $S'_n \cap \bar{B}$  содержит хотя бы  $n + 1$  элементов и  $(\forall x)(\exists i)[x \in S'_i]$ . Построим множество  $A$  по последовательности  $S'_0, S'_1, \dots$  так же, как это было сделано при доказательстве теоремы XIV. Положим  $C = A \cup B$ . В силу построения из теоремы XIV  $C$  не коконечно и не содержит ни в каком максимальном множестве. Поэтому по теореме XII(а)  $C$  просто. Последовательность  $S'_0, S'_1, \dots$  указывает (с помощью теоремы 9-XV), что  $C$  не гиперпросто.

(б) Немедленно следует из (а) и теоремы XII (б). ■

Известно, что обращение теоремы XIII (для рекурсивно перечислимых множеств) неверно. Всякое ли не коконечное рекурсивно перечислимое множество содержится в некотором гипергиперпростом множестве? Мартин [1963] усилил следствие XIV, заменив в нем „максимальный” на „гипергиперпростой”.

Рассмотрим для произвольного элемента  $a$  решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  максимальные цепи неединичных элементов, лежащих между  $a$  и единичным элементом. (Существование таких максимальных цепей легко доказывается.) Теорема XIV показывает, что существуют такие неединичные элементы, что ни одна из этих максимальных цепей не может иметь наибольшего элемента. Существуют ли

в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  неединичные элементы, обладающие плотными максимальными цепями<sup>1)</sup>? Существуют ли неединичные элементы, у которых все максимальные цепи плотны? Эти вопросы пока открыты<sup>2)</sup>.

Можно ли высказать предположение о строении решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ , аналогичное гипотезе Шёнфильда о строении совокупности Т-степеней, упорядоченной отношением Т-сводимости (§ 10.3)? Нерегулярности, определяемые существованием максимальных элементов и элементов, не содержащихся в максимальных, делают затруднительным выдвижение такой гипотезы.

Насколько широко распространены максимальные множества среди степеней неразрешимости? Ниже мы приводим в этой связи теорему XV. (Мы сформулируем более общий результат, принадлежащий Мартину, в гл. 13.) Существуют ли Т-полные максимальные множества? Существуют ли максимальные множества неполных Т-степеней? Существуют ли рекурсивно перечислимые нерекурсивные Т-степени, не содержащие максимальных множеств? Положительные ответы на эти три вопроса были получены Ейтсон [1965], Саксом [1964b] и Мартином [1965].

**Теорема XV** (Янг). *Если  $A$  рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно, а  $B$  максимально и  $A \leq_m B$ , то  $A =_m B$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f$  т-сводит  $A$  к  $B$ . Множество  $f(\bar{A})$  должно быть бесконечным (иначе  $\bar{A}$  было бы рекурсивно перечислимым). Поэтому  $C = \bar{B} - f(\bar{A})$  должно быть конечным (иначе рекурсивно перечислимое множество  $f(N)$  разделяло бы сжатое множество  $\bar{B}$ ). Пусть  $m$  — некоторый фиксированный элемент из  $A$ , а  $n$  — фиксированный элемент из  $\bar{A}$ . Определим рекурсивную функцию  $g$  следующим образом. Для вычисления  $g(y)$  проверим, верно ли, что  $y \in C$ ; если это так, положим  $g(y) = n$ ; если нет, начинаем перечислять  $B$  и в то же время начинаем поиски такого  $x$ , что  $f(x) = y$ ; если  $y$  появится в  $B$  прежде, чем такой  $x$  будет найден, полагаем  $g(y) = m$ ; в противном случае найдется такой  $x$  (так как  $\bar{B} - C \subset f(N)$ ), и мы полагаем  $g(y)$  равным первому такому  $x$ . Функция  $g$  т-сводит  $B$  к  $A$ . ■

<sup>1)</sup> Цепью в решетке называют линейно упорядоченное подмножество. Цепь, лежащая между двумя элементами, называется максимальной, если не существует другой цепи между теми же элементами, полученной из данной добавлением нового элемента. Цепь называется плотной, если между любыми двумя ее элементами лежит третий элемент цепи.

<sup>2)</sup> На второй (а следовательно, и на первый) из этих вопросов дал утвердительный ответ М. М. Арсланов [1969]. Именно, он показал, что если взять множество  $A$  со свойствами, описанными в теореме XIV, то для содержащего это множество элемента решетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  всякая максимальная цепь является плотной. Как сообщил редактору М. М. Арсланов, содержащиеся в его тезисах [1969] утверждение, что все максимальные цепи являются плотными лишь для множеств  $A$  со свойствами, описанными в теореме XIV, неверно. — Прим. ред.

## § 12.6. СВОЙСТВА ПОЧТИ-КОНЕЧНОСТИ

Решетки, идеалы и факторрешетки, упоминавшиеся в этой главе, (и их обобщения) не очень подробно изучены. Не ясно, насколько глубокое проникновение в строение рекурсивно перечислимых множеств (в связи с конечной целью получить некоторую теорему о представлении рекурсивно перечислимых множеств) могут дать такие исследования. Значительное число довольно легко формулируемых вопросов остается открытым.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства, определяющие подклассы класса иммунных множеств. Имея в виду сходство между иммунными и конечными множествами, мы называем их *свойствами почти-конечности*. Сначала мы рассмотрим свойства, про которые известно, что они теоретико-решеточные в  $\mathcal{N}$  по отношению к  $\mathcal{E}$ , затем рассмотрим рекурсивно инвариантные свойства, не известно, теоретико-решеточные по отношению к  $\mathcal{E}$  или нет, и, наконец, изучим ограничения этих свойств на совокупности множеств с рекурсивно перечислимыми дополнениями. Мы рассматриваем все свойства только на совокупности бесконечных множеств.

### Теоретико-решеточные свойства

Введем следующие определения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество  $A$  называется *неразложимым*, если не существует таких двух рекурсивно перечислимых множеств  $B_1$  и  $B_2$ , что  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ,  $A \subset B_1 \cup B_2$  и  $B_1 \cap A$  и  $B_2 \cap A$  бесконечны.

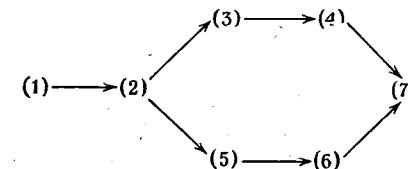
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Назовем  $A$  *рекурсивно неразложимым*, если не существует такого рекурсивного множества  $B$ , что  $B \cap A$  и  $\bar{B} \cap A$  бесконечны.

Перечислим некоторые свойства множеств, каждое из которых является, очевидно, теоретико-решеточным по отношению к  $\mathcal{E}$ :

- (1) быть сжатым и с-эквивалентным некоторому наполненному множеству;
- (2) быть сжатым;
- (3) быть квазисжатым;
- (4) быть квазисжатым или обобщенно сжатым (см. упр. 12-30);
- (5) быть бесконечным и неразложимым;
- (6) быть бесконечным и рекурсивно неразложимым;
- (7) быть иммунным.

Следующие импликации очевидны: (1)  $\Rightarrow$  (2), (2)  $\Rightarrow$  (3), (3)  $\Rightarrow$  (4), (4)  $\Rightarrow$  (7), (2)  $\Rightarrow$  (5), (5)  $\Rightarrow$  (6) и (6)  $\Rightarrow$  (7). Ни одна из обратных импликаций не верна. Согласно теореме VIII, (3)  $\not\Rightarrow$  (2).

Упражнение 12-30 показывает, что (4)  $\not\Rightarrow$  (3). Существование простого, но не гиперпростого множества показывает, что (7)  $\not\Rightarrow$  (4). Упражнение 12-46 показывает, что (7)  $\not\Rightarrow$  (6). Теоремы XVI, XVII и XVIII, приводимые ниже, означают соответственно, что (2)  $\not\Rightarrow$  (1), (5)  $\not\Rightarrow$  (2) и (6)  $\not\Rightarrow$  (5). В добавок упр. 12-46 показывает, что (3)  $\not\Rightarrow$  (6), а из упр. 12-57 следует, что (5)  $\not\Rightarrow$  (4) (см. ниже обсуждение рекурсивно инвариантных свойств). Мы объединяем эту информацию в следующей диаграмме (в которой никакие другие импликации не имеют места) и затем доказываем относящиеся к ней теоремы:



**Теорема XVI (Янг).** Существует сжатое множество, не с-эквивалентное никакому наполненному множеству.

**Доказательство.** Построение из теоремы VI модифицируется следующим образом:

$$A_0 = N,$$

$$A_{n+1} = \begin{cases} A_n \cap W_n, & \text{если } A_n \cap W_n \text{ и } A_n \cap \bar{W}_n \text{ бесконечны;} \\ A_n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что  $A_0 \supset A_1 \supset \dots$  и что для любого  $n$  множество  $A_n$  рекурсивно перечислимо. Так как всякое бесконечное рекурсивно перечислимое множество разделяется на две бесконечные части некоторым другим рекурсивно перечислимым множеством, мы можем заключить, что  $A_{m+1} \neq A_m$  для бесконечно многих  $m$ . Поэтому мы можем так определить строго убывающую подпоследовательность:

$$B_0 = A_0,$$

$$B_{n+1} = A_m,$$

где  $m = \mu y [A_y \text{ строго содержит } \in B_n]$ . По построению  $B_n - B_{n+1}$  бесконечно при каждом  $n$ .

Положим  $x_n = \mu y [y \in B_n - B_{n+1}]$ , и пусть  $C = \{x_0, x_1, \dots\}$ . Пусть дано произвольное множество  $W_z$ . Согласно нашему построению, все, кроме конечного числа, элементы множества  $C$  находятся в  $A_{z+1}$ . Если  $A_{z+1} = A_z$ , то или  $A_z \cap W_z$ , или  $A_z \cap \bar{W}_z$  конечно, а потому конечно или  $C \cap W_z$ , или  $C \cap \bar{W}_z$ . Если  $A_{z+1} \neq A_z$ , то  $A_{z+1} \cap \bar{W}_z = \emptyset$  и  $C \cap \bar{W}_z$  конечно. В обоих случаях либо

$C \cap W_z$ , либо  $C \cap \bar{W}_z$  конечно. Поскольку  $C$  бесконечно, заключаем, что  $C$  — сжатое множество.

Допустим, что существует некоторое наполненное множество  $D$ , с-эквивалентное множеству  $C$ . Тогда по теореме VII никакое рекурсивно перечислимое множество не может разделить  $D \cup C$  на две бесконечные части. Отсюда следует, что при каждом  $n$  множество  $D \cap (B_n - B_{n+1})$  должно быть конечным. Поэтому  $(B_n - B_{n+1}) - D \neq \emptyset$ . Положим

$$y_n = \mu y [y \in (B_n - B_{n+1}) - D],$$

$$D' = \{y_0, y_1, \dots\}.$$

Тогда для каждого  $z$  или  $(C \cup D') \cap W_z$ , или  $(C \cup D') \cap \bar{W}_z$  конечно. Поэтому  $C \cup D'$  сжато. В силу теоремы VII множество  $C$  оказывается с-эквивалентным  $D'$ . Значит,  $D$  в свою очередь с-эквивалентно  $D'$ . Но  $D \cap D' = \emptyset$  в противоречие с нашим предположением о наполненности  $D$ . ■

**Следствие XVI.** *Всякое бесконечное рекурсивно перечислимое множество содержит сжатое множество, не с-эквивалентное никакому наполненному множеству.*

**Доказательство.** Если дано бесконечное рекурсивно перечислимое множество  $B$ , положим  $A_0 = B$  в построении из доказательства теоремы. ■

**Теорема XVII.** *Существует бесконечное неразложимое множество, не являющееся сжатым.*

**Доказательство.** Пусть  $D$  — наполненное сжатое множество. Пусть  $x_0, x_1, \dots$  — пересчет в порядке возрастания всех номеров таких рекурсивно перечислимых множеств  $W_x$ , что  $D \subset W_x$ . Положим

$$A_0 = W_{x_0},$$

$$A_{n+1} = A_n \cap W_{x_n}.$$

Последовательность  $A_0, A_1, \dots$  должна содержать строго убывающую подпоследовательность; иначе  $D$  было бы рекурсивно перечислимым. Определим

$$B_0 = A_0,$$

$$B_{n+1} = A_m,$$

где  $m = \mu y [A_y \text{ строго содержит } B_n]$ .

Пусть  $y_n = \mu y [y \in B_n - B_{n+1}]$ . Образуем множество  $C = \{y_0, y_1, \dots\}$ . Пусть  $D'$  — сжатое подмножество множества  $C$  (существующее в силу теоремы VI). Тогда  $D' \cap D = \emptyset$  и, сле-

довательно,  $D' \cup \bar{D}$  бесконечно. Так как  $D$  — наполненное множество,  $D'$  и  $D$  не могут быть с-эквивалентными. Значит, по теореме VII множество  $D' \cup D$  не сжато.

С другой стороны,  $D' \cup D$  неразложимо. Допустим противное. Тогда, так как и  $D'$ , и  $D$  сжаты, мы получим, что при некотором выборе двух непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств  $B_1$  и  $B_2$  множества  $D' \cap B_1$  и  $D \cap B_2$  бесконечны. Далее,  $D \cap \bar{B}_2$  должно быть конечным. Поэтому  $B'_2 = B_2 \cup (D \cap \bar{B}_2)$  рекурсивно перечислимо и  $D \subset B'_2$ . По построению множества  $D'$  множество  $D' \cap B'_2$  должно быть бесконечным. Но тогда получается, что  $D'$  разделено на две бесконечные части с помощью  $B'_2$ , что противоречит сжатости  $D'$ . Значит,  $D' \cup D$  — бесконечное неразложимое множество, не являющееся сжатым. ■

**Теорема XVIII (Мак-Лохлин).** *Существует рекурсивно неразложимое множество, не являющееся неразложимым.*

**Доказательство.** Пусть  $A$  — максимальное множество. Разложим  $A$  в силу теоремы IV на два рекурсивно перечислимых нерекурсивных подмножества  $A_1$  и  $A_2$ . Пусть  $\mathcal{B}$  — семейство всех рекурсивно перечислимых множеств  $B$ , таких, что  $B \supseteq \bar{A}$ . Понятно, что семейство  $\mathcal{B}$  замкнуто относительно  $\sqcup$ . Далее, для каждого  $B \in \mathcal{B}$  множества  $B \cap A_1$  и  $B \cap A_2$  бесконечны, так как если бы, скажем,  $B \cap A_1$  было конечным, то  $B \cup \bar{A}_2$  оказалось бы дополнением к  $A_1$  в  $\mathcal{EF}$ , что противоречит нерекурсивности множества  $A_1$ .

Пусть  $B_0, B_1, \dots$  — все элементы  $\mathcal{B}$ . Положим

$$C_0 = B_0,$$

$$C_{n+1} = C_n \cap B_{n+1}.$$

Так как все коконечные множества, содержащие  $\bar{A}$ , находятся в  $\mathcal{B}$ , каждая из последовательностей  $C_0 \cap A_1, C_1 \cap A_1, C_2 \cap A_1, \dots$ , и  $C_0 \cap A_2, C_1 \cap A_2, C_2 \cap A_2, \dots$  содержит по строго убывающей подпоследовательности. Поэтому последовательность  $C_0, C_1, \dots$  содержит такую подпоследовательность  $C'_0, C'_1, \dots$ , что при каждом  $n$  выполняется  $(C'_{n+1} - C'_n) \cap A_1 \neq \emptyset$  и  $(C'_{n+1} - C'_n) \cap A_2 \neq \emptyset$ . Выберем  $\{x_0, x_1, \dots\}$  так, что  $x_n \in (C'_{n+1} - C'_n) \cap A_1$ , и  $\{y_0, y_1, \dots\}$  так, что  $y_n \in (C'_{n+1} - C'_n) \cap A_2$ . Пусть  $E_1$  — некоторое сжатое подмножество множества  $\{x_0, x_1, \dots\}$ , а  $E_2$  — сжатое подмножество множества  $\{y_0, y_1, \dots\}$ . Рассмотрим множество  $E_1 \cup E_2$ . Это множество, очевидно, разложимо (посредством  $A_1$  и  $A_2$ ). Оно, однако, не будет рекурсивно разложимым. Пусть, напротив, рекурсивное множество  $B$  разлагает его. Пусть  $E_1$  относится к множеству  $B$  (в смысле § 12.3). Тогда, поскольку имеет место разложение,  $E_2$  относится

к  $\bar{B}$ . Но  $\bar{A}$  относится либо к  $B$ , либо к  $\bar{B}$ , а по построению если  $\bar{A}$  относится к какому-либо множеству, то и  $E_1$ , и  $E_2$  относятся к тому же множеству. Это — противоречие. ■

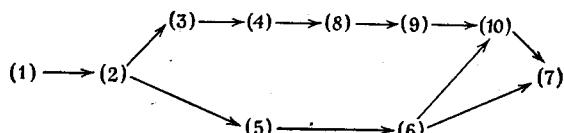
Это доказательство обобщается в упр. 12-47.

### Рекурсивно инвариантные свойства

Про следующие свойства не известно, являются ли они теоретико-решеточными по отношению к  $\mathcal{E}$ :

- (8) быть бесконечным, но не содержать ретрассируемых подмножеств (см. упр. 9-44),
- (9) быть гипергипериммунным,
- (10) быть гипериммунным.

Следующие импликации очевидны:  $(9) \Rightarrow (10)$  и  $(10) \Rightarrow (7)$ . В упр. 12-48 и 12-49 мы увидим, что  $(4) \Rightarrow (8)$  и  $(8) \Rightarrow (9)$ . Используя множество  $S$  из теоремы 8-II, мы обнаружим, что  $(7) \not\Rightarrow (10)$ . Упражнение 10-17 показывает, что  $(10) \not\Rightarrow (9)$ . Упражнения 12-51 и 12-52 показывают, что  $(9) \not\Rightarrow (8)$  и  $(8) \not\Rightarrow (4)$ . В упр. 12-53 показывается, что  $(6) \Rightarrow (10)$ . Из следствия XIX, приводимого ниже, и упр. 12-45 и 12-62 вытекает, что  $(5) \not\Rightarrow (9)$ . Мы объединяем эти сведения в следующую диаграмму (в которой никакие другие импликации не имеют места):



Значительное число других свойств также представляют интерес. В частности, мы имеем в виду свойства строгой гипергипериммунности (совпадающее с (8), см. упр. 12-48 и 12-50) и строгой гипериммунности (см. упр. 12-54) и такие свойства данного множества  $A$ , как  $\overline{\lim}(A) = 1$ , конечность  $\overline{\lim}(A)$  и конечность  $\overline{\lim}(f, A)$  для всех рекурсивно перечислимых последовательностей  $f$  без пересечений. (Можно определить также аналогичные  $\overline{\lim}$ -свойства с использованием последовательностей конечных множеств или используя последовательности конечных множеств, задаваемых их каноническими индексами.)

### Дополнения рекурсивно перечислимых множеств

Довольно много интересных вопросов возникает, если рассматривать свойства с (1) по (10) на совокупности только тех множеств, чьи дополнения рекурсивно перечислимы. Будем обозначать эти ограниченные свойства  $(1)^*$ ,  $(2)^*$ , ...,  $(10)^*$ .

Все выписанные нами импликации остаются верными. Выполняются также некоторые обратные импликации, не имевшие места ранее. Доказательство следствия XI (b) показывает, что  $(2)^* \Rightarrow (1)^*$ . В упр. 10-19 установлено, что  $(9)^* \Rightarrow (8)^*$ . В упр. 12-45 мы покажем, что  $(6)^* \Rightarrow (5)^*$ . Полученные ранее контрпримеры показывают, что (как и прежде)  $(7)^* \not\Rightarrow (10)^*$  (а потому и  $(7)^* \not\Rightarrow (6)^*$ ),  $(10)^* \not\Rightarrow (9)^*$ ,  $(3)^* \not\Rightarrow (2)^*$  и  $(3)^* \not\Rightarrow (6)^*$ . Ниже, в следствии XIX, мы получим принадлежащий Лахлану результат, утверждающий, что никакое множество из  $(2)^*$  не может находиться одновременно в  $(6)^*$  и  $(9)^*$ . В упр. 12-62 мы найдем множество, лежащее в  $(6)^*$ , но не в  $(2)^*$ . Поэтому  $(6)^* \not\Rightarrow (9)^*$ . Этот результат впервые получен Р. В. Робинсоном. Отсюда следует, что  $(6)^* \not\Rightarrow (2)^*$ ,  $(6)^* \not\Rightarrow (3)^*$  и  $(6)^* \not\Rightarrow (4)^*$ . Робинсон также показал, что  $(4)^* \not\Rightarrow (3)^*$ , см. упр. 12-63. Не известно, верна ли импликация  $(9)^* \Rightarrow (4)^*$ . Множества из  $(6)^*$  известны под названием *г-максимальных*. Ниже, в теореме XX, мы покажем, что гипергиперпростота — теоретико-решеточное свойство в  $\mathcal{EF}$ . Там приводится их замечательная характеристика, найденная Лахланом. Это первый результат, где доказана теоретико-решеточность свойства, не содержащаяся явно в определении. Доказательство импликации  $(9)^* \Rightarrow (4)^*$  дало бы иную теоретико-решеточную характеристику множеств из  $(9)^*$ . Мы предполагаем, однако, что импликация  $(9)^* \Rightarrow (4)^*$  неверна<sup>1)</sup>.

**Теорема XIX (Лахлан).** Пусть  $A$  и  $B$  — такие рекурсивно перечислимые множества, что  $A \subset B$ . Если  $B - A$  гипергипериммунно, то найдется такое рекурсивное множество  $C$ , что  $B - A \subset C \subset B$ .

**Доказательство.** Построим семейство рекурсивно перечислимых множеств  $S_0, S_1, S_2, \dots$  следующим образом. Обозначим через  $S_i^{(n)}$  совокупность элементов множества  $S_i$ , порожденных за  $n$  этапов.  $A^{(n)}$  и  $B^{(n)}$  будут обозначать множества, полученные за  $n$  шагов при перечислении множеств  $A$  и  $B$  соответственно.

**Этап  $n+1$ .** Найдем наименьшее  $y$ , если такие существуют, для которого  $y \in B^{(n+1)} - A^{(n+1)}$ , причем  $(\forall i)[y \notin S_i^{(n)}]$  и для некоторого  $j'$ , удовлетворяющего условию  $S_{j'}^{(n)} \subset A^{(n+1)}$ ,  $y > \max_{i < j'} |S_i^{(n)}|$ . Если такого  $y$  нет, переходим к этапу  $n+2$ . Если же удается найти требуемый  $y$ , то пусть  $j$  — наименьшее

<sup>1)</sup> Как показал М. М. Арсланов [1968], эта гипотеза подтверждается: существует такое гипергиперпростое множество, дополнение к которому не является ни квазижатым, ни обобщенно сжатым. — Прим. ред.

из соответствующих ему  $j'$ . Полагаем  $S_j^{(n+1)} = S_j^{(n)} \cup \{y\}$  и  $S_i^{(n+1)} = S_i^{(n)}$  для всех  $i \neq j$ . Затем переходим к этапу  $n + 2$ .

Заметим, что на каждом этапе при любом  $i$  множество  $S_i$  содержит не более одного элемента множества  $B - A$ . Предположим, что при всех  $i$  множества  $S_i$  конечны. Тогда, так как  $B - A$  бесконечно, наше построение поместит по одному элементу из  $B - A$  в каждое  $S_i$ . Но тогда последовательность  $\{S_i\}_{i=0}^{\infty} (= \{W_{f(i)}\}_{i=0}^{\infty}$  для некоторой общерекурсивной  $f$ ) опровергает условие гипергипериммунности  $B - A$ . Пусть теперь  $k$  — наименьшее из тех  $i$ , при которых  $S_i$  бесконечно. По построению  $S_k \subset A$ . Пусть  $m = \max_{i < k} |S_i|$ . Начиная с того момента, когда все конечные множества  $S_i$ ,  $i < k$ , будут полностью перечислены, всякое новое число  $y$ , для которого  $y > m$  и  $y \in B - A$ , будет попадать в некоторое  $S_j$  при  $j > k$ . (Иначе  $y$  попал бы в  $S_k$ .) Положим  $C' = \bigcup_{i=k}^{\infty} S_i$ . Тогда  $C' \subset B$  и  $(B - A) - C'$  конечно. Покажем, что  $C'$  рекурсивно. Чтобы проверить, принадлежит ли произвольное данное  $z$  множеству  $C'$ , поступаем следующим образом. Смотрим, содержится ли  $z$  в конечном множестве  $\bigcup_{i < k} S_i$ . Если да, то  $z \in C'$ . Если нет, начинаем перечислять множества  $S_i$ , пока хотя бы  $z$  элементов не попадут в  $S_k$ . Если к этому времени  $z$  окажется в некотором  $S_j$ ,  $j > k$ , то мы имеем  $z \in C'$ . Если нет, то по построению  $z \notin C'$ . Положим теперь  $C = (B - A) \cup C'$ . Этим доказательство заканчивается. ■

**Следствие XIX.** *Если  $A$  рекурсивно перечислимо, но не максимально, то  $\bar{A}$  не может быть одновременно гипергипериммунным и рекурсивно неразложимым.*

**Доказательство.** Пусть  $A$  рекурсивно перечислимо, но не максимально, и предположим, что  $\bar{A}$  гипергипериммунно. Так как  $A$  не максимально, найдется, согласно определению, такое рекурсивно перечислимое множество  $B$ , что  $A \subset B$ ,  $B - A$  бесконечно и  $N - B$  тоже бесконечно. Так как  $B - A \subset \bar{A}$ ,  $B - A$  гипергипериммунно. По предыдущей теореме найдется такое рекурсивное множество  $C$ , что  $B - A \subset C \subset B$ . Очевидно, что  $C$  осуществляет рекурсивное разложение множества  $\bar{A}$  на две бесконечные части. ■

Ниже, в упр. 12-60, мы используем теорему XIX, чтобы показать, что всякое наполненное сжатое множество комаксимально. Приведенное выше доказательство теоремы XIX принадлежит Мартину. Отметим, что ((6)\*, (10)\*), и ((3)\*, (4)\*, (9)\*, (10)\*)) дают два различных (и в силу следствия XIX несравнимых) способа

далее деления класса  $\mathcal{C}_{12}$  (из § 9.5) в спектре из § 8.7 и 9.5. В упр. 12-55 мы обнаружим, что гипергиперпростые и коконечные множества образуют дуальный идеал в  $\mathcal{E}$ .

Теорема XX характеризует гипергиперпростые множества теоретико-решеточным образом (сразу и в  $\mathcal{E}$ , и в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ ).

**Теорема XX (Лахлан).**  *$A$  гипергиперпросто  $\Leftrightarrow A$  рекурсивно перечислимо,  $\bar{A}$  бесконечно, и для любого рекурсивно перечислимого  $B$  множество  $A \cup (N - B)$  рекурсивно перечислимо, если только  $A \subset B$ .*

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Пусть множество  $A$  гипергиперпросто,  $A \subset B$  и  $B$  рекурсивно перечислимо. Мы хотим доказать, что  $A \cup (N - B)$  тоже рекурсивно перечислимо. Если  $B - A$  конечно, то  $A \cup (N - B)$  коконечно и потому рекурсивно перечислимо. Если же  $B - A$  бесконечно, то оно и гипергипериммунно, потому что является бесконечным подмножеством гипергипериммунного множества. По теореме XIX найдется такое рекурсивное множество  $C$ , что  $B - A \subset C \subset B$ . Тогда  $A \cup (N - B) = A \cup \bar{C}$  и, значит,  $A \cup (N - B)$  рекурсивно перечислимо.

$\Leftarrow$ . Пусть  $A$  — рекурсивно перечислимое множество с бесконечным  $\bar{A}$ , но  $\bar{A}$  не гипергипериммунно. Мы хотим найти такое рекурсивно перечислимое  $B$ , чтобы  $A \subset B$ , а  $A \cup (N - B)$  не было бы рекурсивно перечислимым. По определению гипергипериммунности существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что  $(\forall x)[W_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset]$  и  $(\forall x)(\forall y)[x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset]$ . Положим  $B = A \cup (\bigcup_{x \in N} (W_x \cap W_{f(x)})$ ). Допустим, что

$A \cup (N - B) = W_y$ . В силу выбора функции  $f$  имеем  $W_{f(y)} \cap \bar{A} \neq \emptyset$ . Возьмем  $z \in W_{f(y)} \cap \bar{A}$ . Тогда  $z \in N - B \Rightarrow$  (в силу выбора  $y$ )  $z \in W_y \cap W_{f(y)} \Rightarrow$  (в силу определения  $B$ )  $z \in B - A$ . Обратно,  $z \in B - A \Rightarrow$  (так как  $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$ )  $z \in W_y \cap W_{f(y)} \Rightarrow$  (благодаря выбору  $y$ )  $z \in N - B$ . Так как  $z \in \bar{A}$ , это противоречие. ■

Заметим, что из доказательства теоремы вытекает как непосредственное следствие упр. 9-48 (b). Мы получим также такое

**Следствие XX (Лахлан).** *Множество  $A$  коконечно или гипергиперпросто  $\Leftrightarrow$  совокупность всех рекурсивно перечислимых множеств, содержащих  $A$ , образует булеву алгебру относительно упорядочения  $\subset$ .*

**Доказательство** очевидно. ■

## § 12.7. УПРАЖНЕНИЯ

### § 12.1

**△12-1.** (a) Пусть  $\mathcal{L}$  — множество с двумя бинарными (алгебраическими) операциями  $\cup$  и  $\cap$ , такими, что  
 (i) и  $\cup$ , и  $\cap$  коммутативны;  
 (ii) и  $\cup$ , и  $\cap$  ассоциативны;  
 (iii) и  $\cup$ , и  $\cap$  идемпотентны (т. е.  $a \cup a = a$ ,  $a \cap a = a$ );  
 (iv) для всех  $a$  и  $b$  ( $a \cup b$ )  $\cap a = a$  и ( $a \cap b$ )  $\cup a = a$ . Положим  $a \leqslant b$ , если  $a \cup b = b$ . Докажите, что  $\mathcal{L}$  образует решетку относительно упорядочения  $\leqslant$  с  $\cup$  и  $\cap$  в качестве операций объединения и пересечения в этой решетке.

(b) Докажите, что операции объединения и пересечения в любой решетке удовлетворяют условиям (i) — (iv).

**12-2.** Приведите пример таких двух решеток  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{L}$ , чтобы  $\mathcal{M}$  была бы подмножеством решетки  $\mathcal{L}$  с индуцированным решеткой  $\mathcal{L}$  упорядочением, но не подрешеткой решетки  $\mathcal{L}$ . (Указание. Возьмите  $\mathcal{L} = \mathcal{N}$ , а  $\mathcal{M}$  — решетка, полученная упорядочением множества  $\{A \mid A \in \mathcal{N} \text{ & } \{1 \in A \text{ & } 2 \in A\} \Rightarrow \exists \in A\}$  отношением  $\subseteq$ .)

**12-3.** Докажите, что всякий элемент булевой алгебры имеет не более одного дополнения. (Указание. Пусть  $b$  и  $c$  — дополнения элемента  $a$ . Рассмотрите  $(a \cup b) \cap c$  и  $(a \cup c) \cap b$ .)

**12-4.** Докажите, что каждое из тождеств, входящих в определение дистрибутивной решетки, влечет за собой другое.

**12-5.** Докажите (без помощи теоремы Стоуна о представлении), что следующие тождества верны в любой булевой алгебре:

$$\bar{\bar{a}} = a,$$

$$a \cup 1 = 1, \quad a \cap 1 = a,$$

$$a \cup 0 = a, \quad a \cap 0 = 0,$$

$$\overline{a \cup b} = \overline{a} \cap \overline{b}, \quad \overline{a \cap b} = \overline{a} \cup \overline{b},$$

$$(a \cap b) \cup (a \cap \overline{b}) = a.$$

**12-6.** Докажите, что  $\approx_{\mathcal{J}}$  из части (a) теоремы I является отношением эквивалентности.

**12-7.** Пусть  $a$  и  $b$  — элементы решетки  $\mathcal{L}$  и выполняются предположения части (a) теоремы I. Пусть  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  — классы эквивалентности, определяемые  $a$  и  $b$  соответственно. Докажите, что  $\hat{a} \leqslant \hat{b}$  в  $\mathcal{L}/\mathcal{J}$  тогда и только тогда, когда  $a \leqslant b \cup c$  в  $\mathcal{L}$ , где  $c \in \mathcal{J}$ .

**12-8.** В предположениях части (a) теоремы I докажите, что  $\mathcal{J}$  образует класс эквивалентности, служащий нулевым элементом в  $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ .

**△12-9** (теорема Стоуна о представлении). Назовем дуальный идеал  $\mathcal{D}$  в решетке  $\mathcal{L}$  *собственным*, если  $\mathcal{D} \neq \mathcal{L}$ . Дуальный идеал  $\mathcal{D}$  в решетке  $\mathcal{L}$  называется *максимальным*, если  $\mathcal{D}$  — собственный дуальный идеал, не содержащийся ни в каком собственном дуальном идеале, отличном от него самого.

Допущение: в каждой булевой алгебре каждый собственный дуальный идеал содержится в некотором максимальном дуальном идеале.

Докажите теорему Стоуна о представлении.

(Указание. Пусть  $\mathcal{B}$  — данная булева алгебра. Пусть  $\Sigma$  — совокупность всех максимальных дуальных идеалов алгебры  $\mathcal{B}$ . Сопоставьте каждому  $b \in \mathcal{B}$  следующее подмножество  $\Sigma$ :  $\{\mathcal{D} \mid \mathcal{D}$  — максимальный дуальный идеал, содержащий  $b\}$ .)

**12-10.** См. упр. 12-9. Назовем дуальный идеал  $\mathcal{D}$  в решетке  $\mathcal{L}$  *простым*, если  $\mathcal{D} \neq \mathcal{L}$  и для всех  $a$  и  $b$  из  $\mathcal{L}$   $a \cup b \in \mathcal{D} \Rightarrow [a \in \mathcal{D}$  или  $b \in \mathcal{D}]$ .

Докажите: (a) в дистрибутивной решетке всякий максимальный дуальный идеал является простым;  
 (b) в каждой булевой алгебре любой простой идеал максимальен.

**12-11.** Лемма Цорна утверждает, что если  $\mathcal{P}$  — частичное упорядочение, в котором каждое линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань, принадлежащую  $\mathcal{P}$ , то  $\mathcal{P}$  содержит максимальный элемент.

С помощью леммы Цорна докажите, что всякий собственный дуальный идеал содержится в максимальном дуальном идеале. (Это утверждение принято в упр. 12-9 в качестве допущения.) (Указание. Пусть  $\mathcal{D}$  — данный собственный дуальный идеал. Рассмотрите совокупность всех собственных дуальных идеалов, содержащих  $\mathcal{D}$ ). (Замечание. Если принять все аксиомы теории множеств (см. упр. 11-23), отличные от аксиомы выбора, то лемма Цорна может быть выведена из аксиомы выбора (и на самом деле эквивалентна ей).)

**12-12.** Пусть  $\mathcal{L}$  — решетка, а  $\mathcal{M}$  — решетка с нулевым элементом. Пусть дан гомоморфизм (относительно  $\cup$  и  $\cap$ ) решетки  $\mathcal{L}$  на  $\mathcal{M}$ . Пусть  $\mathcal{J}$  — множество всех элементов из  $\mathcal{L}$ , отображаемых этим гомоморфизмом в нулевой элемент из  $\mathcal{M}$ .

(i) Докажите, что  $\mathcal{J}$  — идеал в  $\mathcal{L}$ .

(ii) Докажите, что если  $\mathcal{L}$  — булева алгебра, то  $\mathcal{L}/\mathcal{J}$  изоморфна  $\mathcal{M}$ .

(iii) Докажите, что если  $\mathcal{L}$  дистрибутивна, то  $\mathcal{L}/\mathcal{J}$  не обязательно изоморфна  $\mathcal{M}$ . (Указание. Возьмите в качестве  $\mathcal{L}$  линейное упорядочение трех элементов, а в качестве  $\mathcal{M}$  — линейное упорядочение двух элементов.)

**12-13.** Пусть  $\mathcal{L}$  — дистрибутивная решетка,  $\mathcal{M}$  — подрешетка  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{J}$  — такой идеал в  $\mathcal{L}$ , что  $\mathcal{M} \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ .

(a) Докажите, что  $\mathcal{M} \cap \mathcal{J}$  — идеал в  $\mathcal{M}$ .

(b) Покажите, что равенство  $\mathcal{M}/\mathcal{J} = \mathcal{M}/\mathcal{M} \cap \mathcal{J}$  не обязательно выполняется.

(c) Пусть  $\mathcal{M}$  — булева алгебра и нулевые и единичные элементы решеток  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$  совпадают. Докажите, что  $\mathcal{M}/\mathcal{J} = \mathcal{M}/\mathcal{M} \cap \mathcal{J}$ .

(d) Докажите, что  $\mathcal{R}/*\mathcal{J} = \mathcal{R}/*\mathcal{K} = \mathcal{R}/\mathcal{F}$ .

**12-14.** (a) Покажите, что  $\mathcal{J}$  и  $\mathcal{K}$  не являются дуальными идеалами в  $\mathcal{M}$ .

(b) Покажите, что ни совокупность всех конечных и иммунных множеств, ни совокупность всех конечных и гипериммунных множеств не являются идеалами в  $\mathcal{M}$ .

**12-15** (Майхилл). См. § 8.7. Покажите, что следующие свойства являются теоретико-решеточными в  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ :  $A \in \mathcal{C}_1$ ,  $A \in \mathcal{C}_2$ ,  $A \in \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$ . (Неизвестно, будут ли теоретико-решеточными  $A \in \mathcal{C}_3$  и  $A \in \mathcal{C}_4$ .)

**12-16.** Докажите, что решетка  $\mathcal{R}/\mathcal{F}$  плотно упорядочена.

**12-17.** Докажите, что всякий автоморфизм решетки  $\mathcal{E}$  индуцирует некоторый автоморфизм факторрешетки  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ .

**12-18.** Докажите, что для всякого ненулевого  $a \in \mathcal{E}/\mathcal{F}$   $\{b \mid b \leqslant a\}$  есть подрешетка, изоморфная  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ . (Указание. Пусть  $A \in a$ ; используйте взаимно однозначную обще рекурсивную функцию  $f$ , область значений которой есть  $A$ .)

**12-19.** (а) Завершите доказательство теоремы III.

(б) Покажите, что  $\mathcal{E}/*\mathcal{J}$  не содержит максимальных неединичных элементов. (Вопрос о плотности  $\mathcal{E}/*\mathcal{J}$  этим не снимается.)

**12-20.** (а) (Майхилл). Покажите, что для любого ненулевого  $a \in \mathcal{E}/\mathcal{F}$  существуют такие  $b$ ,  $c \in \mathcal{E}/\mathcal{F}$ , что  $a = b \cup c$ , причем  $b$  состоит из рекурсивных множеств, а  $c$  — из креативных. (Указание. Примените теорему 5-IV.)

(б) (Мак-Лохлин). Пусть  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_1$  и  $\mathcal{C}_2$  такие же, как в § 8.7. Докажите, что  $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  есть подрешетка в  $\mathcal{E}$ .

### § 12.2

**△12-21** (а) (К. Охапи). Докажите, что построенные в теореме IV множества  $B_1$  и  $B_2$  не являются рекурсивно отдельными. (Указание. С помощью рассуждения, сходного с заключительной частью доказательства теоремы IV, пока-

жите, что их рекурсивная отделимость влечет рекурсивную перечислимость множества  $\bar{A}$ .)

(b) (Ейтс). Докажите, что эти же множества  $B_1$  и  $B_2$  обладают следующим свойством:  $(\forall z)[W_z \cap B_1 = \emptyset \text{ или } W_z \cap B_2 = \emptyset] \Rightarrow W_z - A$  рекурсивно перечислимо] (где  $A$  — то же, что и в теореме IV).

$\triangle 12-22$  (Мак-Лохлин [1962]). Пусть  $A$  рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно. Постройте такую общерекурсивную функцию  $f$ , что  $(\forall u)[W_{f(u)} \text{ не рекурсивно}], (\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow W_{f(u)} \cap W_{f(v)} = \emptyset]$  и  $A = \bigcup_{u \in N} W_{f(u)}$ .

(Указание. Вместо  $B_1$  и  $B_2$  перечислите бесконечную последовательность  $B_0, B_1, B_2, \dots$ )

### § 12.3

12-23. (a) Докажите теорему VII.

(b) Завершите доказательство теоремы IX.

$\triangle 12-24$  (Деккер). Пусть  $\mathcal{A}$  — произвольная счетная совокупность ненулевых элементов решетки  $N/\mathcal{F}$ , замкнутая относительно  $\sqcap$ . Покажите, что существует ненулевой  $c \in N/\mathcal{F}$ , удовлетворяющий условию  $(\forall a)[a \in \mathcal{A} \Rightarrow c \leqslant a]$ . (Указание. Примените общие методы теоремы VI.)

12-25. Докажите, что  $N$  может быть представлено в виде объединения счетной совокупности попарно не пересекающихся сжатых множеств, принадлежащих одному и тому же классу с-эквивалентности. (Указание. Возьмите произвольное сжатое множество  $A$ . Разложите  $A$  в бесконечную совокупность бесконечных множеств. Элементы  $A$  подходящим образом присоедините к этим множествам.)

12-26. Докажите, что  $A$  квазисжато  $\Rightarrow A$  гипериммунно (на самом деле, даже гипергипериммунно). (Указание. См. доказательство теоремы V.)

12-27. Покажите, что разложение квазисжатого множества на сжатые единственно с точностью до с-эквивалентности.

12-28. Плотно ли упорядочена решетка  $N/\mathcal{F}_1$ ?

12-29. Докажите, что конечные множества вместе со всеми конечными объединениями сжатых множеств, с-эквивалентных наполненным множествам, образуют идеал в  $N$ . (Заметим, что всякая совокупность сжатых множеств порождает (таким образом) некоторый идеал, содержащийся в  $\mathcal{F}_1$ .)

$\triangle 12-30$ . Назовем  $A$  обобщенно сжатым, если  $A \notin \mathcal{F}_1$ , но при любом  $x$  либо  $W_x \cap A$ , либо  $\bar{W}_x \cap A$  лежит в  $\mathcal{F}_1$ . Покажите, что обобщенно сжатые множества существуют и обязательно гипериммунны (даже гипергипериммунны). (Это обобщение можно итерировать; см. упр. 12-31.)

$\triangle 12-31$ . Пусть  $\mathcal{C}$  — конечный или счетный подкласс решетки  $N$ .

Пусть  $\mathcal{J}_0$  — некоторый идеал в  $\mathcal{N}$ .

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \{A \mid A \in \mathcal{J}_0 \& (\forall B)[B \in \mathcal{C} \Rightarrow [A \cap B \in \mathcal{J}_0 \text{ или} \\ &\quad A \cap \bar{B} \in \mathcal{J}_0]]\} \text{ („почти-}\mathcal{J}_0\text{-множества“),} \end{aligned}$$

$\mathcal{J}_1$  — идеал, порожденный  $\mathcal{J}_0$ . Предположим, что

(i)  $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}_1$ ;

(ii) всякое множество, не входящее в  $\mathcal{J}_0$ , содержит подмножество, входящее в  $\mathcal{J}_0$ .

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \{A \mid A \in \mathcal{J}_1 \& (\forall B)[B \in \mathcal{C} \Rightarrow [A \cap B \in \mathcal{J}_1 \text{ или} \\ &\quad A \cap \bar{B} \in \mathcal{J}_1]]\} \end{aligned}$$

(„почти- $\mathcal{J}_1$ -множества“).

Докажите, что всякое множество, не входящее в  $\mathcal{J}_1$ , содержит подмножество, принадлежащее  $\mathcal{J}_1$ .

(Указание. Обобщите доказательство теоремы VI.)

(В том частном случае, когда  $\mathcal{C}$  — совокупность рекурсивно перечислимых множеств, а  $\mathcal{J}_0 = \{\emptyset\}$ , это упражнение влечет за собой теорему VI, так как  $\mathcal{J}_1 = \mathcal{F}$ , а  $\mathcal{J}_4$  — совокупность всех сжатых множеств. Повторяемое индуктивно, это упражнение позволяет построить цепь идеалов, как отмечалось в упр. 12-30. Построение может быть продолжено по трансфинитам.)

$\triangle 12-32$ . Докажите, что существуют такие рекурсивно перечислимые множества  $A$  и  $B$  и автоморфизм  $f$  решетки  $\mathcal{C}$ , что  $f(A) = B$ , но  $A$  не рекурсивно изоморфно  $B$ . Таким образом, свойство „быть рекурсивно изоморфным множеству  $A$ “ — рекурсивно инвариантное, но не теоретико-решеточное в  $\mathcal{C}$  свойство. (Указание. Пусть  $A$  — простое множество,  $m \in A$  и  $B = A \cup \{m\}$ . По лемме к теореме 8-XIV  $B \not\models A$ . Чтобы получить автоморфизм  $f$ , примените технику теоремы IX, использовав два сжатых множества, одно из  $A$ , а другое из  $\bar{A}$ .)

$\triangle 12-33$  (Роуз и Юллиан). Если даны функции  $f$  и  $g$  и частичная функция  $\varphi$ , определим  $\text{еггог}_{f, g, \varphi}(n)$  как число таких натуральных  $m$ ,  $m \leq n$ , что  $\varphi(g(m)) \neq f(g(m))$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция  $f$  называется *рекурсивно аппроксимируемой*, если для любой взаимно однозначной общерекурсивной функции  $g$  существует такая частично рекурсивная функция  $\varphi$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \text{еггог}_{f, g, \varphi}(n) \right) = 0.$$

(a) Докажите, что существуют рекурсивно аппроксимируемые, но не рекурсивные функции. (Указание. Пусть  $A$  — сжатое множество. Существует  $2^{\aleph_0}$  функций  $f$ , таких, что  $f(A) = \{0\}$ . Покажите, что все они рекурсивно аппроксимируемые. Для доказательства возьмите  $\varphi = \lambda x[0]$  и заметьте, что для любого  $r$  множество  $\{m \mid g(m) \in A\}$  должно попадать (с точностью до конечного множества) в не более чем один класс остатков по  $\text{mod } r$ .)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.  $f$  называется *конструктивно нерекурсивной*, если существует такая общерекурсивная функция  $h$ , что

$$(\forall z)[f(h(z)) \neq \varphi_z(h(z))].$$

(b) Докажите, что конструктивно нерекурсивные функции существуют. (Указание. Воспользуйтесь обычной диагонализацией.)

(c) Докажите, что конструктивно нерекурсивная функция не может быть рекурсивно аппроксимируемой. (Указание. (i) Покажите, что существует равномерно эффективный метод для нахождения по заданным  $z$  и  $m$  такого  $w$ , что  $w > m$  и  $f(w) \neq \varphi_z(w)$  (рассмотрите всевозможные функции, совпадающие с  $\varphi_z$  справа от  $m$  всюду, где они определены, и примените  $h$  к их индексам). Затем (ii) воспользуйтесь этим, чтобы построить рекурсивно перечислимую последовательность  $(g)$  все более длинных отрезков, на которых  $f$ , напротив, не согласована с  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ . Сделайте это так, чтобы одновременно для всех частично рекурсивных функций  $\varphi$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \text{еггог}_{f, g, \varphi}(n) \right) = 1.$$

$\triangle 12-34$ . Пусть  $I = \{0, 1\}$ . Рассмотрим всюду определенные функции  $f$  со значениями в  $I$ . Для каждой такой  $f$  определим  $s_f(0) = 0, s_f(n+1) = \tau^*(f(0), f(1), \dots, f(n))$ , где  $\tau^*$  такое же, как в § 5.6. Пусть  $\psi$  — функция, область значений которой содержится в  $I \times I$ . Назовем  $\psi$  удовлетвори-

тельной для  $f$ , если  $\lambda x[\psi_f(x)]$  — всюду определенная функция и  $\pi_1\psi_f(x) = 1$  для бесконечно многих значений  $x$ . Если даны  $f$  и  $\psi$  и  $\psi$  удовлетворительна для  $f$ , определим  $g$  посредством формул  $g(0) = \mu u[\pi_1\psi_f(u) = 1]$  и  $g(n+1) = \mu u[u > g(n) \& \pi_1\psi_f(u) = 1]$ , и пусть  $\varphi = \lambda x[\pi_2\psi_f(x)]$ . Для данных  $f$  и  $\psi$  положим  $e_{f, \psi}(n) = \text{егор}_{f, g, \varphi}(n)$  (см. упр. 12-33).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** (Чёрч). Функция  $f$  называется *случайной*, если для всякой частично рекурсивной функции  $\psi$ , удовлетворительной для  $f$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} e_{f, \psi}(n) \right) = \frac{1}{2}.$$

(Функцию  $\psi$  можно представить себе как „систему игры”;  $\pi_1\psi$  говорит, делать ставку или нет, а  $\pi_2\psi$  говорит, на что ставить. Функция  $f$  „случайна”, если нет эффективной системы, которая бы выигрывала против  $f$  (в среднем больше половины времени).)

Введем меру  $m(\{0\}) = m(\{1\}) = \frac{1}{2}$  на  $I$  и рассмотрим декартову степень  $I^N$  пространства с мерой. (Всякая функция  $f$  со значениями в  $I$  есть элемент из  $I^N$ .) Докажите следующую теорему о невозможности системы игры.

**ТЕОРЕМА.** *Мера множества  $\{f \mid f$  случайна $\}$  равна 1.* (**Указание.** Эта задача не связана со сжатыми множествами и может быть решена методами чистой теории меры. См. методы доказательства усиленного закона больших чисел у Лоэва [1955].)

#### § 12.4

**12-35.** Покажите, что существование сильно неотделимых пар множеств (см. упр. 8-39) прямо вытекает из теорем IV и XI.

**12-36** (Ейтс). (i) Покажите, что пересечение двух максимальных множеств не обязательно максимально.

(ii) Докажите, что пересечение двух максимальных множеств квазимаксимально.

(iii) Покажите, что  $A = \{A \text{ квазимаксимально или конечнно}\}$  есть дуальный идеал в  $\mathcal{C}$ .

$\triangle 12-37$ . Покажите, что  $N$  есть объединение некоторой совокупности попарно не пересекающихся наполненных сжатых множеств.

**12-38.** Покажите, что существуют два максимальных не рекурсивно изоморфных множества. (**Указание.** Примените построение из теоремы 8-XIV.)

#### § 12.5

**12-39.** Докажите следующий усиленный вариант теоремы 9-XV.  $A$  гипериммунно  $\Leftrightarrow A$  бесконечно и не существует такой общерекурсивной функции  $f$ , чтобы

$$(\forall u)[D_{f(u)} \cap A \neq \emptyset], \quad (\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow D_{f(u)} \cap D_{f(v)} = \emptyset] \text{ и } (\forall x)(\exists u)[x \in D_{f(u)}].$$

**12-40.** Завершите доказательство пункта (b) из теоремы XII.

**12-41.** Пусть  $A$  квазимаксимально и  $q$  — число классов с-эквивалентности, представленных в  $\bar{A}$ . Докажите, что  $\overline{\lim}(A) \leqslant q$ . (**Указание.** Доказательство аналогично доказательству теоремы XIII.)

$\triangle 12-42$ . Пусть  $A$  — максимальное множество и  $f$  — взаимно однозначная общерекурсивная функция, область значений которой есть  $A$ . Положим  $f^0(A) = N$ ,  $f^{n+1}(A) = f(f^n(A))$ . Докажите, что (i) для всякого  $q > 0$  множество

$f^q(A)$  квазимаксимально, причем точно  $q$  классов с-эквивалентности представлены в его дополнении; (ii)  $\overline{\lim}(f^q(A)) = q$  для всякого  $q$ . (**Указание.** Используйте сплинтеры функции  $f$ , см. упр. 7-37.)

$\triangle 12-43$  (Мартин). Обобщая доказательство теоремы XIV, покажите, что существует такое рекурсивно перечислимое множество  $A$  с бесконечным  $\bar{A}$ , что для всех рекурсивно перечислимых множеств  $B$  если  $B \sqsupseteq A$ , то либо  $\overline{\lim}(B) = 0$ , либо для некоторой общерекурсивной функции  $f$   $\overline{\lim}(f, B)$  бесконечен.

**12-44.** Рассмотрим совокупность классов  $\mathcal{C}_{11}, \dots, \mathcal{C}_4$  из § 8.7 и 9.5. Согласно упр. 8-46 и 9-26 (b), эта совокупность линейно упорядочена относительно  $\leqslant_1$ . Будет ли она линейно упорядоченной относительно  $\sqsupseteq$ ? Иными словами, если  $A$  и  $B$  — нерекурсивные рекурсивно перечислимые множества и  $A \sqsupseteq B$ , обязательно ли  $B$  окажется не левее  $A$  в этой классификации?

#### § 12.6

**12-45** (Янг). Докажите, что если  $A$  рекурсивно перечислимо и  $\bar{A}$  рекурсивно неразложимо, то  $\bar{A}$  неразложимо.

**12-46.** (a) Приведите пример рекурсивно разложимого иммунного множества. (**Указание.** Рассмотрите  $A \oplus A$  для некоторого иммунного множества  $A$ .)

(b) Приведите пример рекурсивно разложимого квазисжатого множества. (**Указание.** Возьмите  $f^2(A)$ , как это определено в упр. 12-42. Используйте сплинтеры функции  $f$  для разложения  $f^2(A)$ . В силу упр. 12-45 это дает рекурсивное разложение.)

$\triangle 12-47$  (Мак-Лохлин). Приведите пример рекурсивно неразложимого множества, не являющегося ни конечным, ни квазисжатым. (**Указание.** Используйте упр. 12-22, обобщите доказательство теоремы XVIII.)

**12-48.** Назовем  $A$  строго гипергипериммунным, если  $A$  бесконечно и ни для какой общерекурсивной функции  $f$  не выполнено условие  $(\forall u)[W_{f(u)} \cap A \neq \emptyset] \& (\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow W_{f(u)} \cap W_{f(v)} = \emptyset]$ .

(a) Докажите, что строго гипергипериммунное  $A$  не содержит бесконечных ретрассириемых подмножеств. (**Указание.** Пусть  $A$  содержит бесконечное ретрассирируемое подмножество и  $\psi$  — его ретрассирирующая функция; определите  $\bar{W}_{f(n)}$  как  $n$ -й ярус дерева прослеживания  $\psi$ , т. е.  $\bar{W}_{f(n)} = \{x \mid \psi^n(x) = m\}$ , где  $m$  — наименьший элемент ретрассирируемого подмножества.)

(b) Докажите, что обобщенно сжатое множество  $A$  строго гипергипериммунно. (**Указание.** Обобщите доказательство теоремы V.)

$\triangle 12-49$  (Ейтс). Покажите, что если  $A$  бесконечно и не гипергипериммунно, то  $A$  содержит бесконечное ретрассирируемое подмножество. (**Указание.** Пусть  $W_{f(0)}, W_{f(1)}, \dots$  — рекурсивно перечислимая последовательность попарно не пересекающихся конечных множеств, каждое из которых пересекается с  $A$ . Построим из  $W_{f(0)}, W_{f(1)}, \dots$  рекурсивно перечислимое дерево и с помощью этого дерева определим ретрассирирующую функцию  $\psi$ . Точнее, устроим следующую процедуру. По ходу этой процедуры некоторые числа будут покрыты (в определяемом ниже смысле); позднее они могут переставать быть покрытыми, однако все рассматриваемые числа в конце концов делаются и остаются покрытыми. Пусть  $x_0, x_1, \dots$  — рекурсивный пересчет множества  $B = W_{f(0)} \cup W_{f(1)} \cup \dots$ . Как говорилось, мы будем перечислять упорядоченные пары графика функции  $\psi$ . Вначале ни одно число из  $B$  не покрыто.

*Этап 1.* Поставим  $W_{f(0)}$  в соответствие  $x_0$ ; теперь  $x_0$  по определению считается покрытым. По мере того как элементы  $W_{f(0)}$  появляются при перечислении множества  $B$ , упорядоченные пары, отображающие эти элементы в  $x_0$ , зачисляются в график  $\psi$ .

*Этап n + 1.* Сопоставим  $W_{f(n)}$  первому непокрытому элементу из  $x_0, x_1, \dots$ . Теперь этот элемент считается покрытым. По мере того как элементы  $W_{f(n)}$  появляются... и т. д. Если в некоторый момент упорядоченная пара  $(x, y)$ , в которой  $x \leqslant y$ , будет зачислена в график  $\psi$  (т. е. определено  $\psi(x) = y$ ), то  $y$  перестает быть покрытым).

▲12-50 (Ейтс). Покажите, что если  $A$  бесконечно и не строго гипергипериммунно, то  $A$  содержит бесконечное ретрассирируемое подмножество. Таким образом, для всякого множества  $A$  справедлива эквивалентность:  $A$  строго гипергипериммунно  $\Leftrightarrow A$  бесконечно и не содержит бесконечных ретрассирируемых подмножеств. (Указание. Метод, предложенный в упр. 12-49, прямо обобщается и на этот случай.)

△12-51. Приведите пример гипергипериммунного множества, обладающего бесконечным ретрассирируемым подмножеством. (Указание. Возьмите эффективное разложение  $N$  в бесконечную совокупность бесконечных рекурсивных множеств, например  $\{0\} \times N, \{1\} \times N, \dots$ . Затем постройте (с помощью неконструктивной диагонализации) множество  $A$ , содержащее по элементу из каждого из этих рекурсивных множеств, но не пересекающиеся хотя бы с одним множеством из каждой рекурсивно перечислимой последовательности попарно не пересекающихся конечных множеств. Тогда  $A$  будет гипергипериммунным, но не строго гипергипериммунным. В силу упр. 12-50 оно содержит бесконечное ретрассирируемое подмножество.)

△12-52. Приведите пример бесконечного множества, не содержащего бесконечных ретрассирируемых подмножеств, но не являющегося обобщенно скатым<sup>1)</sup>. (Указание. Обобщите теорему V на итерации построения из упр. 12-31.)

12-53. Докажите, что если  $A$  бесконечно, но не гипериммунно, то  $A$  рекурсивно разложимо. (Указание. Построение из теоремы V дает искомое рекурсивное разложение.)

△12-54. (Янг). Назовем  $A$  строго гипериммунным, если  $A$  бесконечно и ни для какой общерекурсивной функции  $f$  не выполняются условия  $(\forall u)[W_{f(u)} \cap \bar{A} \neq \emptyset]$ ,  $(\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow W_{f(u)} \cap W_{f(v)} = \emptyset]$  и  $(\forall x)[x \in A \Rightarrow \Rightarrow (\exists u)[x \in W_{f(u)}]]$ . Назовем  $A$  строго гиперпростым, если  $A$  рекурсивно перечислимо и  $A$  строго гипериммунно.

(а) Докажите, что  $A$  гипергиперпросто  $\Rightarrow A$  строго гиперпросто. (Указание. См. упр. 9-48 (б).)

(б) Докажите, что  $A$  строго гиперпросто  $\Rightarrow A$  гиперпросто (Указание. См. упр. 12-39.)

(с) Покажите, что никакое множество с ретрассирируемым дополнением не может быть строго гиперпростым. (Указание. См. указание к упр. 12-48 (а).)

(д) Выберите отсюда, что существуют гиперпростые множества, не являющиеся строго гиперпростыми. (Указание. См. (vi) из упр. 9-44.) (Существование строго гиперпростых множеств, не являющихся гипергиперпростыми, будет установлено в упр. 12-64.)

△12-55. (Мак-Лохлин, Мартин). Докажите, что конечные и гипергиперпростые множества образуют дуальный идеал в  $\mathcal{E}$ . (Указание. Покажите, что  $[A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы &  $\bar{A} \cap \bar{B}$  содержит бесконечное ретрассирируемое подмножество]  $\Rightarrow \bar{A}$  или  $\bar{B}$  содержит бесконечное ретрассирируемое подмножество. Результат следует из эквивалентности (8)\*  $\Leftrightarrow$  (9)\*, т. е. из упр. 10-19.)

△12-56. (Мак-Лохлин). Докажите, что существует не более  $n_0$  наполненных скатых множеств. (Указание. Достаточно доказать, что если  $C$  — напол-

<sup>1)</sup> Чтобы это упражнение опровергло импликацию (8)  $\Rightarrow$  (4) (как это объявлено на стр. 243), надо еще потребовать, чтобы соответствующее множество не было квазискатым.—Прим. ред.

ненное скатое множество, то для некоторого  $z$  имеем  $C \subset W_z$  и  $W_z - C$  рекурсивно перечислимо. Допустим противное. Рассмотрим  $\mathcal{B} = \{B \mid (\exists z)(\exists y)[B = W_z - (W_y \cup C) \& C \subset W_z \& W_y \subset W_z - C]\}$ . Оно замкнуто относительно пересечения, и все множества из  $\mathcal{B}$  бесконечны. Применяя метод доказательства теоремы XVII (см. упр. 12-24), найдите такое скатое множество  $C'$ , что  $C' - B$  конечно для всех  $B \in \mathcal{B}$ . Отсюда заключаем, что  $C \cup C'$  скато, что противоречит наполненности  $C$ .)

△12-57. (Мак-Лохлин). Покажите, что существует неразложимое множество, обладающее бесконечным ретрассирируемым подмножеством. (Указание. Пусть  $A$  — рекурсивно перечислимое перекурсивное множество. (i) Как в упр. 12-22, существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что  $W_{f(x)}, x = 0, 1, 2, \dots$ , — последовательность попарно не пересекающихся множеств, объединение которых есть  $A$ . (ii) Заметим, что для этой последовательности справедливо свойство 12-21 (b). (iii) Найдем такое скатое  $C$ , что  $C \subset \bar{A}$  и  $(\forall x)[W_x \subset \bar{A} \Rightarrow W_x \cap C \text{ конечно}]$  (см. упр. 12-24). (iv) Рассмотрим  $\mathcal{B} = \{B \mid B \text{ рекурсивно перечислимо и } B \supset C\}$ . Из (ii) получим, что для всякого  $B \in \mathcal{B}$   $(\forall x)[W_{f(x)} \cap B \text{ бесконечно}]$ . (v) Применим метод доказательства теоремы XVIII в форме, обобщенной в упр. 12-47, чтобы найти скатые множества  $C_0, C_1, \dots$ , такие, что  $(\forall x)[C_x \subset W_{f(x)}]$  и  $(\forall x)[C_x \cap B \text{ бесконечно}]$  для всякого  $B \in \mathcal{B}$ . (vi) Рассмотрим множество  $C \cup C_0 \cup C_1 \cup \dots$ . В силу (v) это множество неразложимо. Согласно упр. 12-50, оно имеет бесконечное ретрассирируемое подмножество.)

12-58. (Тенненбаум). Пусть  $f$  — всюду определенная функция, область значений которой есть  $B$  и  $(\forall z)(\exists n)[[n < m \& \varphi_z(m) \text{ определено}] \Rightarrow \Rightarrow \varphi_z(m) < f(m)]$ . Докажите, что  $K \leqslant_T B$ .

△12-59. (а) (Ейтс). Докажите, что существует полное максимальное множество. (Указание. Используйте упр. 12-58 для модификации построения из теоремы XI.) (Значение этого результата по отношению к работе Поста [1944] обсуждалось в § 9.6.)

(б) (Сакс). Докажите, что существует неполное максимальное множество. (Указание. Приспособьте построение из теоремы XI, используя второе множество маркеров на данном списке, а также дополнительный список с маркерами, чтобы одновременно получить конструкцию, сходную с конструкцией из теоремы 10-III.)

12-60. Докажите, что всякое наполненное множество есть дополнение к максимальному множеству. (Указание. Примените теорему XIX вместе с конструкцией из упр. 12-56.)

12-61. (а) Докажите, что если  $A$  квазимаксимально и  $\bar{A}$  — объединение скатых множеств из  $n$  различных классов с-эквивалентности, то  $A$  есть пересечение максимальных множеств из  $n$  различных элементов  $\mathcal{EF}$ . (Указание. Воспользуйтесь теоремой XX.)

(б) Докажите, что дополнение любого квазимаксимального множества есть объединение наполненных множеств. (Указание. Воспользуйтесь упр. 12-60.)

△12-62. (Р. В. Робинсон). (а) Покажите, что существует  $\gamma$ -максимальное, но не максимальное множество. (Указание. Постройте такие рекурсивно-перечислимые множества  $A$  и  $B$ , что  $A \subset B$ ,  $B$  максимально,  $B - A$  бесконечно и  $\bar{A}$  рекурсивно неразложимо. Для этого следующим образом измените конструкцию Ейтса из теоремы XI. Четные и нечетные маркеры рассматриваются порознь;  $z$ -штат элемента  $x$  на этапе  $n+1$  определяется, как и раньше. Модифицированный  $z$ -штат элемента  $x$  относительно  $u$  на этапе  $n+1$  определяется с помощью такого изменения в определении  $z$ -штата:

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in W_i^{(n+1)}, y \in W_i^{(n+1)} \text{ и } i \leqslant n, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

при  $0 \leq i \leq z$ . Маркеры сдвигаются так же, как в теореме XI, с теми исключениями, что четный маркер  $\boxed{2m}$  должен переместиться на  $x_{2q}^{(n)}$ ,  $q > m$ , при чем  $x_{2q}^{(n)}$  находится в большем  $m$ -штате, чем  $x_{2m}^{(n)}$ , а нечетный маркер  $\boxed{2m+1}$  должен сдвинуться на  $x_p^{(n)}$ ,  $p > 2m+1$ , причем  $x_p^{(n)}$  находится в большем модифицированном  $m$ -штате относительно  $x_{2m}^{(n)}$ , чем  $x_{2m+1}^{(n)}$ . Положим  $A = \{x \mid x \text{ в конце концов остается без маркера}\}$ ,  $B = A \cup \{x \mid x \text{ в конце концов остается с нечетным маркером}\}$ . Докажите, что (1) каждый маркер, начиная с некоторого момента, больше не сдвигается, (2)  $B$  максимально и (3) для всякого  $z$  ( $W_z \cap \bar{B}$  бесконечно)  $\Rightarrow \bar{A} - W_z$  конечно. Выведите из (3), что (4)  $A$  рекурсивно неразложимо. Доказательство (1) почти тождественно доказательству леммы 1 к теореме XI. Доказательство (2) оперирует с четными маркерами и почти совпадает с доказательством леммы 2 к теореме XI. Доказательство (3) аналогично доказательству леммы 2 к теореме XI; доказывается, что если дано  $z$ , то для достаточно большого  $m$  существует точно один модифицированный  $z$ -штат относительно  $x_{2m}$ , содержащий бесконечно много элементов  $\bar{A}$ , оканчивающих в нем свой путь (где  $x_{2m}$  — заключительное положение маркера  $\boxed{2m}$ ). (4) выводится непосредственно.)

(b) Обобщая описанную конструкцию, покажите, что для любого рекурсивно перечислимого множества  $B$  существует такое рекурсивно перечислимое множество  $A$ , что  $B - A$  бесконечно и для всех  $z$  имеем  $(\bar{B} - W_z \text{ конечно}) \Rightarrow \bar{A} - W_z$  конечно. (Заметим, что это упражнение вместе с упр. 12-50 влечет за собой результаты упр. 12-47 и 12-57.)

$\triangle 12-63$ . (Р. Робинсон). Покажите, что существует обобщенно сжатое, но не квазижатое множество с рекурсивно перечислимым дополнением<sup>1)</sup>. (Указание. Постройте рекурсивно перечислимые множества  $H_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , так, что для всех  $i$  выполнены условия  $H_i \subset H_{i+1}$ ,  $H_{i+1} - H_i$  сжато и  $\bar{H}_0$  обобщенно сжато. Построение идентично построению Ейтса и теоремы XI, за тем исключением, что условие „ $x_g^{(n)}$  находится в большем  $m$ -штате (на этапе  $n+1$ ), чем  $x_m^{(n)}$ “, дополняется требованием „и  $\pi_1(g) \geq \pi_1(m)$ “. Полагаем  $H_0 = \{x \mid x \text{ в конце концов остается без маркера}\}$ , и для  $i > 0$  определяем  $H_i = \{x \mid x \text{ в конце концов получает такой маркер } \boxed{m}, \text{ что } \pi_1(m) < i\}$ . Аналогично тому, как доказываются леммы 1 и 2 к теореме XI, устанавливается, что множества  $H_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , обладают требуемыми свойствами.)

$12-64$  (Р. В. Робинсон). Покажите, что существует строго гиперпростое, но не гипергиперпростое множество. (Указание. Воспользуйтесь результатом упр. 12-62.)

$\triangle 12-65$  (Янг). Покажите, что существуют такие  $A$  и  $B$ , что  $A \leq_1 B$ , но  $A \not\leq_1^r B$ , где  $\leq_1^r$  определено в упр. 7-34. (Указание. Возьмите  $A$  и  $B$ , построенные в упр. 12-62. Пусть  $f$  — взаимно однозначная общерекурсивная функция, перечисляющая  $A$ . Тогда  $A$  1-сводится к  $f(A)$  посредством функции  $f$ . Покажите, что ни для какой общерекурсивной сводящей функции  $g$  не выполняется  $A \leq_1^r f(A)$  посредством  $g$ .)

$12-66$  (Мартин). Если  $\varphi_x$  — характеристическая функция некоторого множества, положим  $C_x = \{y \mid \varphi_x(y) = 1\}$ . Назовем  $A$  *с-строго гипериммунным*, если  $A$  бесконечно и не существует такой общерекурсивной функции  $f$ , чтобы  $(\forall u)[\varphi_{f(u)} \text{ — характеристическая функция}], (\forall u)[C_{f(u)} \cap A \neq \emptyset]$

и  $(\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow C_{f(u)} \cap C_{f(v)} = \emptyset]$ . Назовем  $A$  *с-строго гиперпростым*, если  $A$  рекурсивно перечислимо, а  $\bar{A}$  с-строго гипериммунно.

(a) Докажите, что  $A$  с-строго гиперпросто  $\Leftrightarrow A$  строго гиперпросто.

$\triangle(b)$  Докажите, что  $A$  с-строго гипериммунно  $\Leftrightarrow A$  не содержит бесконечного ретрассирируемого множества, обладающего всюду определенной ретрассириющей функцией. (Указание. См. упр. с 12-48 по 12-50.)

$12-67$ . (a) Докажите, что всякое квазимаксимальное множество содержится в некотором максимальном.

$\triangle(b)$  (Лахлан). Покажите, что существует гипергиперпростое множество, не содержащееся ни в каком максимальном.

$\triangle(c)$  (Р. В. Робинсон). Покажите, что существует г-максимальное множество, не содержащееся ни в каком максимальном множестве.

<sup>1)</sup> Слова „но не квазижатое“ тут лишние, поскольку обобщено сжатое множество по определению не является квазижатым. — Прим. ред.

§ 13.1. Операция скачка	326
13.2. Некоторые важные множества и степени	336
13.3. Полные степени, категории и мера	341
13.4. Упорядочение степеней	351
13.5. Минимальные степени	355
13.6. Частичные степени	359
13.7. Решетка Медведева	363
13.8. Дальнейшие результаты	372
§ 13.9. Упражнения	380

## § 13.1. ОПЕРАЦИЯ СКАЧКА

В этой главе изучается упорядочение совокупности Т-степеней неразрешимости отношением сводимости. Мы рассматриваем эту структуру на совокупности всех Т-степеней, неважно, рекурсивно перечислимых или нет.

Большой интерес исследователей к этой области позволил получить значительное число результатов. Некоторые из результатов этой главы получены раньше, чем результаты, изложенные в гл. 10.

Основное различие между упорядочениями рекурсивно перечислимых степеней и всех степеней заключается в том, что второе упорядочение несчетно. Как мы увидим, ряд других структурных свойств упорядочения рекурсивно перечислимых степеней (например, плотность) не сохраняются в общем случае. Доказательства в общем случае могут быть весьма неконструктивными, так как обычно не нужно заботиться о рекурсивной перечислимости строящихся объектов. Тем не менее часто доказательства имеют комбинаторный характер, что делает их простыми и элегантными. Нашей главной целью будет проиллюстрировать имеющиеся здесь способы доказательства и скорее дать читателю почувствовать, что можно и чего нельзя сделать, нежели доказать известные результаты в самой сильной форме. Значительное число не доказанных в тексте фактов отнесено в упражнения и перечислено в § 13.8. Как отмечается в § 13.8, некоторые из наиболее сильных результатов получаются при использовании описываемых в настоящей главе методов в сочетании с методами приоритета, описанными в гл. 10.

*Операция скачка* является одним из основных понятий при изучении степеней. Мы определяем ее сначала на множествах, а затем на степенях.

**Определение.** Положим для любого множества  $A$

$$A' = \{x \mid \varphi_x^A(x) \text{ определено}\} = \{x \mid x \in W_x^A\}.$$

Множество  $A'$  называется *скачком*, или *полнением* множества  $A$ . ( $A'$  совпадает с множеством  $K^A$ , определенным в § 9.3.)

Ряд основных свойств операции скачка на множествах приведен в теореме I. Оказывается, операция скачка зависит от выбора гёделевой нумерации частичнорекурсивных функций. Однако из теоремы I следует, что если  $A_1$  и  $A_2$  — скачки множества  $A$ , полученные с помощью двух различных допустимых гёделевых нумераций (в смысле упр. 2-10), то  $A_1 \equiv A_2$  (см. упр. 13-1<sup>1)</sup>).

**Теорема I.** (a)  $B \leq_t A \Leftrightarrow B \text{ и } \bar{B}$  рекурсивно перечислимы относительно  $A$ .

(b)  $A'$  рекурсивно перечислимо относительно  $A$ .

(c)  $A' \not\leq_t \bar{A}$ .

(d)  $B$  рекурсивно перечислимо относительно  $A \Leftrightarrow B \leq_1 A'$ .

(e)  $A \leq_t \bar{B} \Leftrightarrow A' \leq_1 B'$ .

**Доказательство.** Пункт (a) есть теорема 9-IV. Пункты (b) и (c) получены при доказательстве теоремы 9-X.

(d)  $\Rightarrow$ . Неформальное доказательство получается параллельно доказательствам теорем 7-III и 7-IV. Более формальное доказательство может быть получено следующим образом. Пусть  $B = W_z^A$  и дано произвольное  $w$ . Рассмотрим  $\{(x, y, u, v) \mid \langle w, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)}\}$ . Согласно второй теореме о проекции, это множество рекурсивно перечислимо, и его индекс может быть найден по  $w$  и  $z$  равномерно эффективно. Пусть  $g$  — такая рекурсивная функция, что  $W_{g(w, z)} = \{(x, y, u, v) \mid \langle w, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)}\}$ . Ясно, что это множество регулярно (в смысле § 9.2). Поэтому

$$W_{\rho g(w, z)} = W_{g(w, z)}.$$

Теперь  $g(w, z) \in A' \Leftrightarrow g(w, z) \in W_{g(w, z)}^A \Leftrightarrow (\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle w, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)} \& D_u \subset A \& D_v \subset \bar{A}] \Leftrightarrow w \in W_z^A \Leftrightarrow w \in B$ . Значит,  $B$  1-сводится к  $A'$  функцией  $\lambda w[g(w, z)]$ .

$\Leftarrow$ . Это следует из части (b) теоремы 9-IX (релятивизированной теоремы о проекции).

(e)  $\Rightarrow$ . Пусть  $A \leq_t B$ . Согласно (b), множество  $A'$  рекурсивно перечислимо относительно  $A$ . В силу (c)  $A' \neq \emptyset$ . Поэтому  $A'$  есть область значений некоторой рекурсивной относительно  $A$  функции  $f$ . Но если  $f$  рекурсивна относительно  $A$ , то  $f$  рекурсивна и относительно  $B$ , так как  $A \leq_t B$ . Поэтому  $A'$  рекурсивно перечислимо относительно  $B$  и в силу (d)  $A' \leq_1 B'$ .

$\Leftarrow$ . Пусть  $A' \leq_1 B'$ . Элементарные построения показывают, что множества  $A$  и  $\bar{B}$  рекурсивно перечислимы относительно  $A$ .

<sup>1)</sup> Отметим, что нумерация  $A$ -рекурсивных функций определяется по теореме 9-II нумерацией частичнорекурсивных функций.

Поэтому, согласно (d),  $A \leqslant_1 A'$  и  $\bar{A} \leqslant_1 A'$ . Значит,  $A \leqslant_1 B'$  и  $\bar{A} \leqslant_1 B'$ . Из (d) следует, что множества  $A$  и  $\bar{A}$  рекурсивно перечислимы относительно  $B$ . Поэтому в силу (a)  $A \leqslant_T B$ . ■

**Следствие I.** (a)  $A \equiv_T B \Leftrightarrow A' \equiv B'$ .

(b)  $B \leqslant_T A \Leftrightarrow [B \leqslant_1 A' \& \bar{B} \leqslant_1 A']$ .

(c) Пункты (b), (d) и (e) теоремы I выполняются равномерно в следующем смысле. Пункт (b):  $(\exists z)(\forall A)[A' = W_z^A]$ . Пункт (d): существуют такие общерекурсивные функции  $f$  и  $h$ , что  $[B = W_z^A \Rightarrow B \leqslant_1 A' \text{ со сводящей функцией } \varphi_{f(z)}]$  и  $[B \leqslant_1 A' \text{ со сводящей } \varphi_z \Rightarrow B = W_h^A]$ . Пункт (e): существуют такие общерекурсивные  $f$  и  $h$ , что  $(c_A = \varphi_z^B \Rightarrow A' \leqslant_1 B' \text{ со сводящей функцией } \varphi_{f(z)})$  и  $(A' \leqslant_1 B' \text{ со сводящей } \varphi_z \Rightarrow c_A = \varphi_h^B)$ .

**Доказательство.** Пункты (a) и (b) очевидны. Пункт (c) получается как результат следующего исследования формальных построений из теоремы I. Рассматривая пункт (b) теоремы I, выберем  $z$  так, чтобы  $W_z = \{(x, y, u, v) \mid (x, y, u, v) \in W_{\rho(x)}\}$ . Отсюда следует, что  $W_{\rho(z)} = W_z$  и что для всех  $A$  имеет место  $A' = W_z^A$ . Для проверки утверждения о пункте (d) теоремы I возьмем такое  $f$ , что  $\varphi_{f(z)} = \lambda w[g(w, z)]$ ;  $h$  выбирается аналогично. Примерно так же обстоит дело с пунктом (e) теоремы I. ■

На основании теоремы I и следствия I мы заключаем, что упорядочение  $T$ -степеней изоморфно вкладывается в упорядочение  $1$ -степеней. (Однако в отличие от изоморфизмов, связанных с  $m$ -цилиндрами и  $tt$ -цилиндрами, образ  $T$ -степени при этом изоморфизме не попадает в ту же  $T$ -степень.) Из следствия I (a) вытекает, что операция скачка корректно определена на  $T$ -степенях и что она переводит каждую  $T$ -степень в однозначно определенную более высокую  $T$ -степень. Дальше мы используем следующие обозначения (обычные в рассуждениях о степенях).

**Обозначения.** Буквами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... будем обозначать степени.  $0$  обозначает рекурсивную степень. Для всякого  $a$  через  $a'$  будет обозначаться (однозначно определенная) степень множества  $A'$ , где  $A$  — любое множество из  $a$ . Степень  $a'$  называется *скакком*, или *пополнением* степени  $a$ . Если  $b = a'$  для некоторого  $a$ , то  $b$  называется *полной* степенью.

Для любых степеней  $a$  и  $b$  формула  $a \leqslant b$  будет означать, что  $a$   $T$ -сводима к  $b$ ;  $a < b$  означает, что  $a \leqslant b$  и  $b \not\leqslant a$ ;  $a \parallel b$  означает, что  $a \not\leqslant b$  и  $b \not\leqslant a$  (мы говорим тогда, что  $a$  и  $b$  *несравнимы*);  $a \cup b$  будет обозначать *сочленение* степеней  $a$  и  $b$ .

Степень  $a$  называется *рекурсивно перечислимой относительно  $b$* , если существуют такие  $A \in a$  и  $B \in b$ , что  $A$  рекурсивно перечислимо относительно  $B$  (см. упр. 13-6). Степень  $a$  называется *рекурсивной относительно  $b$* , если  $a \leqslant b$ . Когда мы говорим, что

$A$  рекурсивно относительно  $b$  (или что  $f$  рекурсивна относительно  $b$ ), мы имеем в виду, что  $A$  (или  $f$ ) рекурсивно относительно некоторого  $B \in b$ .

**Примеры.**  $\emptyset \in 0$ .  $K \in 0'$ .  $a \leqslant a'$ .  $a' \not\leqslant a$ .

Из теоремы I вытекает следующее основное соотношение:  $a \leqslant b \Rightarrow a' \leqslant b'$ . (В § 13.3 будет показано, что обратная импликация неверна.)

Итерации скачка мы будем обозначать следующим образом. Для любого  $A$

$$A^{(0)} = A,$$

$$A^{(n+1)} = (A^{(n)})'.$$

$(A^{(n)})$  называется *n-м скачком* множества  $A$ .)

Соответственно, для всякой  $a$

$$a^{(0)} = a,$$

$$a^{(n+1)} = (a^{(n)})'.$$

**Пример.**  $(\forall n)[\emptyset^{(n)} \in 0^{(n)}]$ .

**Следствие I (d).** Существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что, каковы бы ни были  $A$ ,  $x$  и  $y$ ,  $[x \leqslant y \Rightarrow A^{(x)} 1\text{-сводится к } A^{(y)}]$  функцией  $\varphi_{f(x, y)}$ . Существует такая общерекурсивная  $g$ , что для любых  $A$ ,  $B$  и  $x$  если  $\varphi_z 1\text{-сводит } A$  к  $B$ , то  $\varphi_{g(z, x)} 1\text{-сводит } A^{(x)}$  к  $B^{(x)}$ .

**Доказательство.** Это вытекает из следствия I (c) и существования такой общерекурсивной функции  $k$ , что если  $\varphi_z 1\text{-сводит } A$  к  $B$ , то  $c_A = \varphi_{k(z)}^B$ . ■

Элементы возрастающей последовательности  $0, 0', 0'', \dots, 0^{(n)}, \dots$  особенно полезны в качестве ориентиров в упорядочении степеней. В § 13.2 мы сосредоточим наше внимание на  $0'$  и  $0''$ . В гл. 14 мы обнаружим другие естественные свойства этой последовательности и увидим, какое значение имеет она для логики и теории рекурсивных функций.

Некоторые свойства упорядочения степеней уже отмечались. Каждая степень состоит из  $\aleph_0$  множеств; поэтому всего имеется  $2^{\aleph_0}$  степеней. К каждому множеству сводится  $\aleph_0$  множеств; поэтому ниже любой степени имеется не более  $\aleph_0$  степеней.

Результаты, полученные в гл. 10 о рекурсивно перечислимых степенях, дают нам дополнительную информацию. (Отметим, что все рекурсивно перечислимые степени  $\leqslant 0'$ .) Теорема Мучника — Фридберга (теорема 10-III) показывает, что между  $0$  и  $0'$  существуют несравнимые степени. Более того, следствие 10-III указывает  $\aleph_0$  степеней между  $0$  и  $0'$ . Другие результаты, сформулированные, но не доказанные в гл. 10, дают нам дальнейшие сведения. Теорема Сакса о плотности множества рекурсивно перечислимых степеней

(см. § 10.3) утверждает, что существуют плотные цепи степеней между  $0$  и  $0'$ . (Релятивизация результата Мучника — Фридберга показывает, что для любого  $A$  существуют несравнимые рекурсивно перечислимые относительно  $A$  множества. Поэтому, какова бы ни была степень  $a$ , между  $a$  и  $a'$  существуют несравнимые степени. Следствие 10-III и результат Сакса также допускают подобную релятивизацию.) В дальнейшем мы будем опираться только на доказанные в предыдущих главах результаты. Так, в § 13.4 мы докажем, что между  $0$  и  $0'$  существуют плотные цепи. Приводимое доказательство (принадлежащее Клини и Посту) проще, чем доказательство теоремы Сакса, поскольку теперь мы не требуем, чтобы строящиеся степени были рекурсивно перечислимыми.

Можно определить операцию скачка и с бесконечным показателем.

**Определение.**  $A^{(\omega)} = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A^{(y)}\}$ .  $A^{(\omega)}$  называется  $\omega$ -скакком, или  $\omega$ -пополнением множества  $A$ .

Очевидно, при любом  $n$   $A^{(n)} \leqslant_1 A^{(\omega)}$  и  $A^{(\omega)} \not\leqslant_{\text{т}} A^{(n)}$ . Следующая теорема показывает, что  $\omega$ -скакок определен корректно и на степенях.

**Теорема II.**  $A \leqslant_{\text{т}} B \Rightarrow A^{(\omega)} \leqslant_1 B^{(\omega)}$ .

**Доказательство.** Пусть  $A \leqslant_{\text{т}} B$ . По следствию I можем найти такую общерекурсивную  $g$ , что  $A^{(y)}$  1-сводится к  $B^{(y+1)}$  функцией  $\varphi_{g(y)}$ . Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in A^{(\omega)} &\Leftrightarrow x \in A^{(y)} \Leftrightarrow \varphi_{g(y)}(x) \in B^{(y+1)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle \varphi_{g(y)}(x), y+1 \rangle \in B^{(\omega)}. \end{aligned}$$

Полагая  $f(\langle x, y \rangle) = \langle \varphi_{g(y)}(x), y+1 \rangle$ , получим, что  $f$  1-сводит  $A^{(\omega)}$  к  $B^{(\omega)}$ . ■

Обратное к теореме II утверждение опровергается, если, например, взять  $A$  и  $B = A^{(n)}$  для некоторого  $n > 0$ . По теореме II,  $A^{(\omega)} \leqslant_1 B^{(\omega)}$ . Но  $\langle x, y \rangle \in B^{(\omega)} \Leftrightarrow x \in B^{(y)} \Leftrightarrow x \in A^{(n+y)} \Leftrightarrow \langle x, n+y \rangle \in A^{(\omega)}$ . Значит,  $B^{(\omega)} \leqslant_1 A^{(\omega)}$ . Поэтому  $B^{(\omega)} \equiv A^{(\omega)}$ , хотя  $B \not\equiv_{\text{т}} A$ .

**Определение.** Будем говорить, что  $a^{(\omega)}$  есть (однозначно определенная) степень множества  $A^{(\omega)}$ , где  $A$  — произвольное множество из  $a$ .

(Заметим, что для всякой степени  $a$  ниже  $a^{(\omega)}$  находится бесконечная цепь степеней.)

**Теорема III** (Шён菲尔д, Клини, Пост). *Существуют несчетные цепи степеней.*

**Доказательство.** По лемме Цорна (упр. 12-41) существует максимальная цепь степеней. У этой цепи не может быть

наибольшего элемента, так как в противном случае с помощью скачка такого элемента можно было бы построить более длинную цепь. Предположим, что эта цепь счетная; пусть тогда  $a_0, a_1, a_2, \dots$  — последовательность степеней, конфинальная нашей цепи. Пусть  $A_0, A_1, \dots$  — такая последовательность множеств, что  $(\forall i)[A_i \in a_i]$ . Тогда  $B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A_y\}$  больше (по сводимости) всех членов этой последовательности, а потому его степень  $b$  больше всех элементов нашей цепи, что противоречит предложению о максимальности цепи. ■

**Следствие III.** *Над всякой степенью  $a$  существует несчетная цепь степеней. Всякая максимальная цепь степеней несчетна.*

**Доказательство очевидно.** ■

Следующее понятие будет более подробно изучено в гл. 14.

**Определение.** Множество  $A$  называется *арифметическим относительно  $B$* , если  $A \leqslant_{\text{т}} B^{(n)}$  при некотором  $n$ . Множество  $A$  называется *арифметическим*, если  $A$  — арифметическое относительно  $\emptyset$ .

Эти понятия определены и на степенях, поскольку оператор скачка корректно определен на степенях. Будем говорить поэтому, что  $a$  — *арифметическая степень*, если  $a \leqslant 0^{(n)}$  при некотором  $n$ , и что  $a$  — *арифметическая относительно  $b$  степень*, если  $a \leqslant b^{(n)}$  при некотором  $n$ . Мы увидим (в гл. 14), что арифметические множества — это в точности множества, определимые в элементарной арифметике, и что  $\emptyset^{(\omega)}$  рекурсивно изоморфно множеству всех истинных высказываний элементарной арифметики. Ясно, что если  $A$  арифметично относительно  $B$ , то  $A^{(\omega)} \leqslant_1 B^{(\omega)}$  (см. упр. 13-9). (С помощью методов Коэна Сакс показал, что обратная импликация неверна.) Назовем  $a$  *арифметически эквивалентной  $b$* , если  $a$  — арифметическая относительно  $b$ , а  $b$  — арифметическая относительно  $a$ . Легко видеть, что отношение „быть арифметическим относительно“ рефлексивно и транзитивно (упр. 13-10), а потому арифметическая эквивалентность есть отношение эквивалентности (и мы можем говорить о классах эквивалентности как о „степенях“). Пусть степени  $a$  и  $b$  арифметически эквивалентны; обязательно ли существуют такие  $m$  и  $n$ , что  $a^{(m)} = b^{(n)}$ ? Мартин и Лахлан показали, что это, вообще говоря, не так (см. § 13.8).

Как далеко по трансфинитам можно продолжить операцию скачка? Можно попытаться следующим образом обобщить построение множества  $A^{(\omega)}$ . Пусть  $\beta = \alpha + 1$  и  $A^{(\alpha)}$  уже определено; положим  $A^{(\beta)} = (A^{(\alpha)})'$ . Если же  $\gamma$  — счетный предельный трансфинит, то пусть  $\{\beta_n\} \uparrow$  такова, что  $\lim \beta_n = \gamma$ , и пусть  $A^{(\beta_n)}$  определены при всех  $n$ . Положим  $A^{(\gamma)} = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A^{(\beta_n)}\}$ . При

таком способе, однако, степень множества  $A^{(y)}$  определяется некорректно (см. упр. 13-8). Чтобы избежать этой трудности при определении  $A^{(y)}$ , следует ограничиться эффективными, в некотором смысле, последовательностями ординалов. Поэтому изучение итераций скачка тесно связано с изучением конструктивных ординалов. Мы рассмотрим эту связь подробнее в гл. 16.

Основным предметом изучения в этой главе является структура степеней с отношением  $\leqslant$  и операциями ' и  $\cup$  (и в меньшей мере с отношением „быть рекурсивно перечислимым относительно“ и операцией  $(\omega)$ ). Удобно ввести некоторые вспомогательные понятия и обозначения.

1. Нам будет удобнее работать с характеристическими функциями множеств, а не с самими множествами. Напомним, что (по теореме 9-VII) для любых  $A$  и  $B$

$A$  рекурсивно относительно  $B \Leftrightarrow A$  рекурсивно

относительно  $c_B \Leftrightarrow A$  рекурсивно относительно  $\tau(c_B)$

и что первая эквивалентность выполняется равномерно в каждом направлении (вторая эквивалентность справедлива по определению). Будем пользоваться обозначением  $\varphi_z^f$  для сокращенной записи функции  $\varphi_z^{(\tau(f))}$ .

2. Всякая функция с рекурсивной областью определения будет называться *сегментом*. (В частности, сегментом является каждая всюду определенная функция.) В отличие от предшествующих разделов мы будем употреблять символы  $f, g, h, \dots$  для обозначения сегментов (не обязательно всюду определенных). Если  $f$  — сегмент и область определения  $f$  есть  $\emptyset$  или  $\{0, 1, \dots, n\}$  для некоторого  $n$ , то  $f$  называется *начальным сегментом*. Наименьшее число, не принадлежащее области определения начального сегмента, называется *длиной* этого сегмента. Если  $f$  и  $g$  — сегменты и  $f \supset g$ , то назовем  $f$  *продолжением* сегмента  $g$ . В приводимых ниже доказательствах, если не оговорено противное, предполагается, что значения всех сегментов принадлежат  $\{0, 1\}$ . Если  $f$  — сегмент, то  $\varphi_z^f$  — сокращенное обозначение функции  $\varphi_z^{(\tau(f))}$ . Всякий начальный сегмент является финитным объектом. Когда мы говорим, что знаем (или можем вычислить) некоторый начальный сегмент  $f$ , то имеем в виду, что знаем (или можем вычислить) канонический индекс для  $\tau(f)$ .

3. Введем следующее специальное обозначение (здесь  $f$  — сегмент):

$$\varphi_z^{[f]}(x) = \begin{cases} \varphi_z^f(x), & \text{если все вопросы относительно } f, \\ & \text{заданные в процессе вычисления} \\ & \text{(с индексом } z\text{), касаются значений аргументов, для которых } f \\ & \text{определенна;} \\ & \text{расходится в противном случае.} \end{cases}$$

Более формально,

$$\varphi_z^{[f]}(x) = y \Leftrightarrow (\exists u)(\exists v)[\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho_f} \& D_v \subset \overline{\tau(f)} \& (\forall x)(\forall y) [\langle x, y \rangle \in D_v]$$

Если  $\varphi_z^{[f]}(x) = y$ , то и для любого  $g$ , продолжим. Заметим, что для начальных сегментов рекурсивно перечислимо, как отношение  $\{ \langle u, x, y, z \rangle \mid (\exists f)[f \text{ — начальный сегмент} = y] \}$  рекурсивно перечислимо (по второму). Пусть  $W_z^{[f]}$  обозначает область определения

Во многих доказательствах будет встретиться определенной функции как объединение. (Такой общий подход к проблемам, касающимся определенных функций с помощью рекурсии. (В теореме 10-III мы не пользовались понятием для того, чтобы с помощью проподчеркнуть рекурсивную перечислимость. Если отказаться от требования рекурсивного доказательства Фридберга значительно упрощаются неконструктивные шаги). Математическое доказательство, чтобы продемонстрировать техники.

Теорема IV (Клини, Пост, Фридберг) Для множества  $A$  и  $B$ , что  $A$  не рекурсивно и  $B$ , а  $B$  не рекурсивно перечислимо относительно  $A$ .

Доказательство. Определим сегменты:  $f_0, f_1, \dots$  и  $g_0, g_1, \dots$ . Функция  $g = \bigcup_i g_i$  будет  $c_B$ <sup>1</sup>). Построение произведено.

Этап 0. Положим  $f_0 = g_0 = \emptyset$ .

Этап  $2n+1$ . Пусть  $m = 2n$ . Пусть  $f_m$ . Проверим, существует ли начальный сегмент  $g_m$ , для которого  $x_m \in W_n^{[g_m]}$ . (Эта операция определена в теореме 10-III). Если да, то полагаем  $f_{m+1} = f_m \cup \{\langle x_m, 1 \rangle\}$ , нет, положим  $f_{m+1} = f_m \cup \{\langle x_m, 0 \rangle\}$ ,

<sup>1</sup>) Мы сокращаем запись  $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$  до  $\bigcup_i f_i$ .

образом, на этапе  $2n + 1$  мы добиваемся, что для определяемой функции  $g$   $x_m \in A \Leftrightarrow x_m \notin W_n^g$ .

Этап  $2n + 2$ . Пусть  $m = 2n + 1$ . Определение этапа  $2n + 2$  получается из определения этапа  $2n + 1$ , если символы  $f$  и  $g$  (с индексами или без) всюду поменять местами.

Положим  $f = \bigcup_i f_i$ ,  $g = \bigcup_i g_i$ ,  $A = \{x \mid f(x) = 1\}$  и  $B = \{x \mid g(x) = 1\}$ . Из построения следует, что для всех  $n$   $A \neq W_n^B$  и  $B \neq W_n^A$ .

(В § 13.2 мы увидим, что построенные выше множества  $A$  и  $B$  рекурсивны относительно  $0'$ .)

Следующая теорема Шёнфильда [1960] дает новую важную информацию об упорядочении степени и в то же время служит новым примером использования сегментной техники.

**Теорема V** (Шёнфильд, Клини, Пост). *Существует несчетное множество попарно не сравнимых степеней.*

**Доказательство.** Из леммы Цорна следует, что существует максимальное множество попарно не сравнимых нерекурсивных степеней. Достаточно доказать, что это множество не может быть конечным или счетным. Это вытекает из следующей леммы.

**Лемма.** *Пусть  $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$  — произвольная последовательность нерекурсивных множеств. Тогда существует такое множество  $B$ , что при всяком  $n$  множество  $B$  и  $A_n$  несравнимы.*

**Доказательство леммы.** Определим характеристическую функцию  $f$  множества  $B$  с помощью цепи начальных сегментов. Построение происходит по этапам.

*Этап 0.* Положим  $f_0 = \emptyset$ .

*Этап  $2n + 1$ .* Пусть  $m = 2n$ . Возьмем такие  $y$  и  $z$ , что  $n = \langle y, z \rangle$ . Пусть  $x_m$  — длина сегмента  $f_m$ . Проверим, выполняется ли равенство  $\varphi_z^{A_y}(x_m) = 0$ . Если да, полагаем

$$f_{m+1} = f_m \cup \{\langle x_m, 1 \rangle\}.$$

Если нет, то положим  $f_{m+1} = f_m \cup \{\langle x_m, 0 \rangle\}$ . (На этом этапе добиваемся, чтобы  $f \neq \varphi_z^{A_y}$  для определяемой нами функции  $f$ .)

*Этап  $2n + 2$ .* Пусть  $m = 2n + 1$ ,  $n = \langle y, z \rangle$ . Проверим, существуют ли такие числа  $x$  и начальный сегмент  $\tilde{f}$ , продолжающий  $f_m$ , что  $\varphi_z^{\tilde{f}}(x)$  определено и не равно  $c_{A_y}(x)$ . Если да, положим  $f_{m+1} = \tilde{f}$ . Если нет, положим  $f_{m+1} = f_m$ . (Этот этап обеспечивает выполнение соотношения  $c_{A_y} \neq \varphi_z^t$ . Ясно, что это так,

если такой сегмент  $\tilde{f}$  существует. Если же такого  $\tilde{f}$  нет, то для всех продолжений  $\tilde{f}$  сегмента  $f_m$  имеем  $\varphi_z^{\tilde{f}} \subset c_{A_y}$ . Поэтому  $E = \{\langle u, v \rangle \mid (\exists \text{ начальный сегмент } \tilde{f}) [f_m \subset \tilde{f} \& \varphi_z^{\tilde{f}}(u) = v]\} \subset c_{A_y}$ . Если  $c_{A_y} = \varphi_z^t$  для некоторого всюду определенного продолжения  $t$  сегмента  $f_m$ , то рекурсивно перечислимое множество  $E$  совпадает с  $c_{A_y}$ ; но тогда  $c_{A_y}$  — рекурсивная функция, что противоречит предположению о нерекурсивности  $A_y$ .)

Положим  $f = \bigcup_i f_i$  и  $B = \{x \mid f(x) = 1\}$ . Мы убедились, что при всех  $y$  множество  $B$  не рекурсивно относительно  $A_y$ , а  $A_y$  не рекурсивно относительно  $B$ . Этим заканчивается доказательство леммы, а вместе с ней и теоремы. ■

**Следствие V.** Для всякой степени  $a > 0$  существует несчетное множество степеней, не сравнимых с  $a$ .

**Доказательство очевидно.** ■

### Заключительные замечания

Назовем некоторое свойство степеней, или операцию на степенях, *теоретико-порядковым*, если оно инвариантно относительно всех автоморфизмов упорядочения степеней (см. обсуждение в § 12.1). Степень  $0$  и операция  $\cup$ , очевидно, являются теоретико-порядковыми. Не известно, являются ли таковыми операция *скачка* и отношение „быть рекурсивно перечислимым относительно“. Не известно по существу, обладает ли упорядочение степеней нетривиальными автоморфизмами. (Рекурсивные преобразования индуцируют только тождественный автоморфизм.) Открытыми являются также следующие *проблемы однородности*: (1). Верно ли, что для всякой степени  $a$  существует изоморфизм между упорядочением всех степеней и упорядочением степеней, ограниченным множеством  $\{b \mid a \leq b\}$ ? (2) Верно ли, что для всякой степени  $a$  существует изоморфизм описанного в (1) вида, сохраняющий операцию *скачка* и отношение „быть рекурсивно перечислимым относительно“? <sup>1)</sup> При изучении дальнейших теорем и упражнений читатель заметит, что утвердительный ответ на вопрос (2) значительно упростили бы существующие доказательства. Различные „релятивизированные“ формы теорем сделались бы непосредственными следствиями их простейших, нерелятивизованных вариантов.

<sup>1)</sup> Фейнер Л. (Feiner L., The strong homogeneity conjecture, *Journ. symb. logic*, 35 (1970), № 3, 375–377) получил отрицательное решение проблемы (2). Он показал, что  $\{d \mid 0 \leq d \leq 0'\}$  и  $\{d \mid 0^{(6)} \leq d \leq 0^{(8)}\}$  не изоморфны.— Прим. перев.

## § 13.2. НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ МНОЖЕСТВА И СТЕПЕНИ

Уясним теперь значение степеней  $0$ ,  $0'$  и  $0''$  (а также степеней  $a'$  и  $a''$  для произвольной степени  $a$ ) и укажем некоторые типичные множества, принадлежащие этим степеням.

### Степень $0$

По определению это степень всех рекурсивных множеств. Она содержит множества  $\emptyset$  и  $N$  в качестве своих членов и является наименьшей в упорядочении степеней. Мы часто пользуемся множеством  $\emptyset$  как представителем этой степени.

### Степень $0'$

По определению это степень множества  $\emptyset'$ . Ей принадлежит множество  $K$ . (На самом деле  $\emptyset' = K$ , потому что по теореме I  $\emptyset'$  должно быть полным относительно 1-сводимости.) В  $0'$  входят также множества  $\bar{K}$ ,  $\{x \mid W_x = \emptyset\}$  и  $\{x \mid W_x \neq \emptyset\}$ . Рекурсивный изоморфизм между  $\{x \mid W_x = \emptyset\}$  и  $\bar{K}$  (а потому и между  $\{x \mid W_x \neq \emptyset\}$  и  $K$ ) вытекает в силу теоремы 7-VI из упр. 7-12.

Степень  $0'$  есть степень проблемы остановки. Вычислительная процедура рекурсивна относительно  $0'$  (т. е. рекурсивна относительно  $\emptyset'$ ), если она эффективна во всем, кроме требования решать в отдельных явно заданных случаях проблему остановки, т. е. требует ответа на вопрос, произойдет ли некоторое точно описанное (и эффективно распознаваемое) событие хотя бы однажды по ходу некоторого эффективного вычисления. Рассмотрим, например, осуществленное при доказательстве теоремы IV построение множеств  $A$  и  $B$ , ни одно из которых не является рекурсивно перечислимым относительно другого. На  $(2n + 1)$ -м этапе задавался вопрос: существует ли продолжающий  $g_m$  начальный сегмент  $\tilde{g}$ , для которого  $x_m \in W_n^{[\tilde{g}]}$ ? Если сегмент  $g_m$  задан, то совокупность всех таких продолжений рекурсивно перечислима с р. п. индексом, равномерно зависящим от  $g_m$ ,  $x_m$  и  $n$ . Таким образом, чтобы ответить на поставленный вопрос, требуется решить для некоторого явно заданного частного случая проблему остановки. Подобный вопрос возникает и на этапе  $2n + 2$ . Помимо этих вопросов описанная процедура полностью эффективна. (Например, на этапе  $2n + 1$ , если известно, что ответ на упомянутый вопрос — положительный, продолжение  $\tilde{g}$  с нужными свойствами может быть найдено с помощью эффективного поиска.) Отсюда следует, что функции  $f$  и  $g$  рекурсивны относительно  $0'$ . Итак, мы получили следующее

**Следствие IV.** (а) Существуют такие множества  $A$  и  $B$ , что  $A \leq_t K$ ,  $B \leq_t K$ , множество  $A$  не рекурсивно перечислимо относительно  $B$  и множество  $B$  не рекурсивно перечислимо относительно  $A$ .

(б) Существуют такие степени  $a$  и  $b$ , что  $0 < a < 0'$ ,  $0 < b < 0'$  и  $a \neq b$ .

**Доказательство.** Пункт (а) доказан выше. Для доказательства (б) возьмем в качестве  $a$  и  $b$  степени множеств  $A$  и  $B$  соответственно. Так как для любых  $A$  и  $B$  имеет место  $A \leq_t B \Rightarrow A$  рекурсивно перечислимо относительно  $B$ , а  $a$  и  $b$  должны быть не сравнимыми и отличными от  $0$  и  $0'$ .

(Можно, конечно, получить теорему IV и следствие IV как следствия из теоремы 10-III; непосредственное обращение этой дедукции, однако, невозможно, потому что, как мы покажем в § 13.3, не всякая меньшая  $0'$  степень содержит рекурсивно перечислимое множество.)

### Степень $a'$

Интуитивный смысл степени  $a'$  аналогичен смыслу, присущему степени  $0'$ . Вычислительная процедура рекурсивна относительно  $a'$ , если она эффективна во всем, кроме необходимости решать некоторые частные случаи (релятивизированной) проблемы остановки для рекурсивных относительно множества  $A$  процедур, где  $A$  — некоторое множество из  $a$ . Проиллюстрируем сказанное доказательством следующей теоремы.

**Теорема VI** (Клини, Пост).  $(\forall a)[0 < a \Rightarrow (\exists b)[b \neq a \& b < a']]$ .

**Доказательство.** Проводимое построение сходно с построением из теоремы V. Пусть  $A \in a$ . Мы построим функцию  $f$  с помощью начальных сегментов  $f_0, f_1, \dots$ ;  $b$  будет степенью множества с характеристической функцией  $f$ .

Этап 0. Положим  $f_0 = \emptyset$ .

Этап  $2n + 1$ . Пусть  $m = 2n$ ,  $x_m$  — длина сегмента  $f_m$ . Проверим, выполняется ли равенство  $\varphi_n^A(x_m) = 0$ . Если да, то положим  $f_{m+1} = f_m \cup \{(x_m, 1)\}$ . Если нет, положим

$$f_{m+1} = f_m \cup \{(x_m, 0)\}.$$

Этап  $2n + 2$ . Пусть  $m = 2n + 1$ . Проверим, существуют ли такие числа  $x$  и продолжающий  $f_m$  начальный сегмент  $\tilde{f}$ , что  $\varphi_n^{[\tilde{f}]}(x)$  определено и не совпадает с  $c_A(x)$ . Если да, то положим  $f_{m+1} = \tilde{f}$ . Если нет, то  $f_{m+1} = f_m$ .

Положим  $f = \bigcup_i f_i$  и  $B = \{x \mid f(x) = 1\}$ . Точно так же, как в теореме V, построение гарантирует, что множество  $B$  не рекурсивно относительно  $A$ , а множество  $A$  не рекурсивно относительно  $B$ . Поэтому  $a \parallel b$ , где  $b$  — степень множества  $B$ . Заданный на этапе  $2n + 1$  вопрос является частным случаем проблемы остановки для процедур, рекурсивных относительно  $A$ . Что касается этапа  $2n + 2$ , то совокупность пар  $\langle x, \tilde{f} \rangle$ , обладающих требуемыми свойствами, рекурсивно перечислима относительно множества  $A$ ; следовательно, возникший там вопрос есть частный случай проблемы остановки для рекурсивных относительно множества  $A$  процедур. Поэтому имеем  $B \leq_t A'$  и, значит,  $b \leq a'$ . Так как  $a \parallel b$ , получаем  $b < a'$ . ■

**Следствие VI.** Между  $0$  и  $0''$  существуют степени, не сравнимые с  $0'$ .

**Доказательство.** Возьмем степень  $0'$  в качестве  $a$  в предыдущей теореме. ■

#### Степень $a' \cup b'$

Если некоторое вычисление эффективно во всем, кроме требования отвечать на вопросы, являющиеся либо частными случаями проблемы остановки для процедур, рекурсивных относительно некоторого фиксированного множества  $A \in a$ , либо частными случаями этой проблемы для процедур, рекурсивных относительно некоторого фиксированного множества  $B \in b$ , то такое вычисление, очевидно, рекурсивно относительно степени  $a' \cup b'$ . Мы увидим, однако, что вычисление, использующее проблему остановки для процедур, рекурсивных относительно некоторого множества  $C \in a \cup b$ , не обязательно рекурсивно относительно степени  $a' \cup b'$ . (В теореме X строятся такие степени  $a$  и  $b$ , что  $a' \cup b' < (a \cup b)'$ .)

Теорема VI допускает следующую релятивизацию. Приводимое ниже доказательство иллюстрирует часто используемый прием, с помощью которого строящаяся степень помещается над некоторой заранее заданной степенью.

**Теорема VII** (Клини, Пост). Для любых степеней  $a$  и  $d$

$$d < a \Rightarrow (\exists b)(b \parallel a \& d < b < a').$$

**Доказательство.** Пусть  $A \in a$  и  $D \in d$ . Построение проводится так же, как в теореме VI, с той лишь разницей, что  $f_0, f_1, \dots$  — теперь не начальные сегменты, а берутся из совокупности всех так называемых *специальных* сегментов

$\tilde{f}$ , область определения которых есть либо  $\{2x \mid x \in N\}$ , либо  $\{2x \mid x \in N\} \cup \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Этап 0.** Сегмент  $f_0$  определяется равенствами

$$f_0(2x) = c_D(x),$$

$f_0(2x + 1)$  не определено.

**Этап  $2n + 1$ .** Все происходит так же, как в теореме VI, только теперь  $x_m$  — наименьшее из чисел, где  $f_m$  не определена.

**Этап  $2n + 2$ .** Аналогично теореме VI, за исключением того, что  $\tilde{f}$  — специальный, а не начальный сегмент.

Пусть  $f = \bigcup_i f_i$ ,  $B = \{x \mid f(x) = 1\}$  и  $b$  — степень множества  $B$ . Как и прежде,  $b \parallel a$ . Нулевой этап рекурсивен относительно степени  $d$ . Этапы  $2n + 1$  и  $2n + 2$  во всем рекурсивны относительно  $d$ , кроме необходимости решать в отдельных случаях проблему остановки для процедур, рекурсивных относительно степени  $a \cup d$ . (На этапе  $2n + 2$  мы на самом деле ищем конечный сегмент, добавление которого к  $f_{2n+1}$  приводит к образованию сегмента  $\tilde{f}$ .) Поэтому  $b \leq d \cup (a \cup d)'$ . Но поскольку  $d < a$ , имеет место  $d \cup (a \cup d)' = d \cup a' = a'$ . Значит,  $b \leq a'$ . А так как  $b \parallel a$ , то  $b < a'$ . ■

#### Степень $0''$

По определению это степень множества  $\emptyset''$ , а потому и множества  $K'$ . Как мы сейчас покажем, она содержит также множества  $\{x \mid \varphi_x \text{ всюду определена}\}$  и  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$ .

**Теорема VIII.**  $K' = \emptyset'' = \overline{\{x \mid \varphi_x \text{ всюду определена}\}} = \overline{\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}}$ .

**Доказательство.** Утверждение  $K' = \emptyset''$  вытекает из теоремы I, так как  $K \in 0'$  и  $\emptyset' \in 0'$ .

В конце § 7.4 мы отметили, что  $\{x \mid \varphi_x \text{ всюду определена}\} = \{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$ .

Остается показать, что  $\{x \mid \varphi_x \text{ всюду определена}\} = K'$ . Сначала заметим, что  $\{x \mid \varphi_x \text{ не всюду определена}\} = \{z \mid (\exists x)[\varphi_z(x) \text{ не определено}]\}$ . В силу релятивизованной теоремы о проекции это множество рекурсивно перечислимо относительно множества  $K$  (так как  $\{\langle x, z \rangle \mid \varphi_z(x) \text{ не определено}\}$  рекурсивно относительно множества  $K$ ); а потому по теореме I  $\{x \mid \varphi_x \text{ не всюду определена}\} \leq_1 K'$ .

Поскольку  $K'$  рекурсивно перечислимо относительно множества  $K$ , имеем  $K' = W_{z_0}^K$  для некоторого  $z_0$ . Поэтому  $K' = \{x \mid (\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z_0)} \& D_u \subset K \& D_v \subset \bar{K}]\}$ .

Пусть  $x$  задано. Определим функцию  $\psi$  следующим образом. Чтобы вычислить  $\psi(w)$ , проверяем, выполняется ли условие  $(\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle x, y, u, v \rangle]$  оказывается в  $W_{\rho(z_0)}$  на  $w$ -м шаге перечисления множества  $W_{\rho(z_0)}$ ; если нет, то полагаем  $\psi(w) = w$ , если да, рассматриваем те  $\langle x, y, u, v \rangle$ , которые оказались в  $W_{\rho(z_0)}$  на  $w$ -м шаге и для которых все элементы множества  $D_u$  оказываются в  $K$  на  $w$ -м шаге перечисления множества  $K$ ; если таких нет, полагаем  $\psi(w) = w$ ; если же такие элементы найдутся, начинаем перечислять множество  $K$ , и когда (если это случится) будет показано, что для всех таких  $\langle x, y, u, v \rangle$  имеет место  $D_v \cap K \neq \emptyset$ , полагаем  $\psi(w) = w$ ; в противном случае  $\psi(w)$  не определено.

Построенная функция  $\psi$  частично рекурсивна, причем существует такая взаимно однозначная общерекурсивная функция  $f$ , что  $\Phi_{f(x)} = \psi$ . Из определения  $\psi$  следует также (как может проверить читатель, см. упр. 13-15), что  $x \in K' \Leftrightarrow (\exists w)[\psi(w) \text{ не определено}]$ . Поэтому  $x \in K' \Leftrightarrow f(x) \in \{x \mid \varphi_x \text{ не всюду определена}\}$ , и мы получаем  $K' \leqslant_1 \{x \mid \varphi_x \text{ не всюду определена}\}$ .

Значит,  $K' \equiv \{x \mid \varphi_x \text{ всюду определена}\}$ , чем и заканчивается доказательство. ■

Теорема VIII проясняет интуитивный смысл степени  $0''$ . Вычислительная процедура рекурсивна относительно  $0''$  тогда и только тогда, когда она эффективна во всем, кроме необходимости получать ответы на вопросы о том, встречается ли некоторое известное (и эффективно распознаваемое) событие бесконечно много раз по ходу некоторого эффективного вычисления. Например, множество  $W_x$  бесконечно тогда и только тогда, когда событие „что-то появилось на выходе“ происходит бесконечно много раз в процессе перечисления множества  $W_x$  без повторений; функция  $\varphi_x$  всюду определена тогда и только тогда, когда событие „теперь функция  $\varphi_x$  определена на большем начальном сегменте“ осуществляется бесконечное число раз по ходу одновременного вычисления значений  $\varphi_x(0), \varphi_x(1), \dots$ .

### Степень $a''$

Подобно предыдущему, вычислительная процедура рекурсивна относительно степени  $a''$  тогда и только тогда, когда она эффективна во всем, кроме необходимости получать ответы на вопросы, осуществляется ли некоторое определенное (и эффективно распознаваемое) событие бесконечно много раз по ходу некоторого вычисления, рекурсивного относительно фиксированного множества  $A \in a$ .

В гл. 14 описанные только что результаты будут обобщены и будут указаны более экономные методы для проведения доказательств, подобных доказательству теоремы VIII.

### § 13.3. ПОЛНЫЕ СТЕПЕНИ; КАТЕГОРИИ И МЕРА

Как распределены полные степени в упорядочении степеней? Обязательно ли  $a = b$ , если  $a' = b'$ ? Верно ли, что  $(a \cup b)' = a' \cup b'$ ? На эти вопросы и другие, с ними связанные, ответят приводимые ниже теоремы.

Поскольку для всякой степени  $a$  имеем  $0 \leqslant a$ , из теоремы I вытекает, что всякая полная степень больше или равна  $0'$ . Верно ли обратное, т. е. всякий ли элемент несчетной совокупности  $\{a \mid 0' \leqslant a\}$  есть полная степень? Следующая теорема Фридберга [1957а] показывает, что это так.

**Теорема IX (Фридберг).**  $(\forall a)[0' \leqslant a \Rightarrow (\exists b)[b' = a]]$ .

**Доказательство.** На языке множеств теорема означает, что  $(\forall A)[K \leqslant_T A \Rightarrow (\exists B)[B' \equiv_T A]]$ . Пусть дано такое множество  $A$ , что  $K \leqslant_T A$ , и положим  $g = c_A$ . Построим функцию  $f$  с помощью начальных сегментов  $f_0, f_1, \dots$  следующим образом.

**Этап 0.** Положим  $f_0 = \emptyset$ .

**Этап  $n+1$ .** Проверим, определено ли  $\varphi_n^{f(n)}(n)$  хотя бы для одного начального сегмента  $\tilde{f}$ , продолжающего  $f_n$ . Если да, то пусть  $f^*$  — первое из таких продолжений (при эффективном перечислении всех таких продолжений, получающихся из множества  $W_{\rho(n)}$  (пункт 3 на стр. 332)). Если нет, то пусть  $f^* = f_n$ . В обоих случаях обозначим через  $x_n$  длину сегмента  $f^*$  и положим  $f_{n+1} = f^* \cup \{\langle x_n, g(n) \rangle\}$ .

Пусть  $f = \bigcup_i f_i$  и  $B = \{x \mid f(x) = 1\}$ . Остается проверить, что  $B' \equiv_T A$ .

(i) Если множество  $A$  задано<sup>1)</sup>, то можно вычислять значения функции  $g$ , так как  $g = c_A$ . Если множество  $A$  задано, то можно также решать в конкретных случаях проблему остановки, так как  $K \leqslant_T A$ . Поэтому если  $A$  задано, то можно на каждом этапе выяснить, существует ли продолжение  $\tilde{f}$  с желаемыми свойствами. Поэтому можно восстановить сегменты  $f_0, f_1, \dots$ , проверяя попутно принадлежность натуральных чисел множеству  $\{n \mid \text{существование сегмента } \tilde{f} \text{ установлено на этапе } n+1\}$ . Но по построению последнее множество есть в точности

$$\{x \mid \varphi_x'(x) \text{ определено}\} = (\tau(f))'$$

<sup>1)</sup> Говоря, что  $A$  задано, автор имеет в виду, что мы располагаем воображаемой возможностью вычислять произвольные значения функции  $c_A$ . Все остальные процедуры, о возможности осуществления которых говорится ниже, рекурсивны относительно множества  $A$  и потому становятся вычислимими при сделанном предположении. — Прим. перев.

Значит,  $(\tau(f))' \leqslant_t A$ . А так как  $B' \equiv (\tau(f))'$  (поскольку  $B \equiv_t f$ ), имеем  $B' \leqslant_t A$ .

(ii) Обратно, если задано множество  $B'$ , мы можем вычислять значения функции  $f = c_B$  (так как  $B \leqslant_1 B'$ ), а также решать частные случаи проблем остановки (так как  $K \leqslant_1 B'$  по теореме I). Поэтому мы можем восстанавливать начальные сегменты функции, пользуясь тем, что мы умеем решать проблему остановки для проверки на каждом этапе существования продолжения  $\tilde{f}$  с требуемыми свойствами. Но  $g(n)$  есть последнее значение в сегменте  $f_{n+1}$ . Поэтому, располагая множеством  $B'$ , мы можем вычислять функцию  $g$ . Так как  $g = c_A$ , имеем  $A \leqslant_t B'$ .

Из (i) и (ii) вытекает, что  $A \equiv_t B'$ . ■

Приведенное доказательство содержит дополнительную информацию, которую мы представим в виде следствия.

**Следствие IX (a).**  $(\forall a)(\exists b)[b' = b \cup 0' = a \cup 0']$ .

**Доказательство.** Пусть дано множество  $A$  и  $g = c_A$ . Построим функцию  $f$  и множество  $B$ , как в доказательстве теоремы. Пункт (i) доказательства теоремы показывает, что  $B'$  рекурсивно относительно множеств  $A$  и  $K$ ; значит,  $b' \leqslant a \cup 0'$ . Пункт (ii) показывает, что  $A$  рекурсивно относительно множеств  $B$  и  $K$ ; поэтому  $a \leqslant b \cup 0'$ , а значит, и  $a \cup 0' \leqslant b \cup 0'$ . Поскольку  $b \leqslant b'$  и  $0' \leqslant b'$ , получаем  $b \cup 0' \leqslant b'$ . Таким образом,  $b' \leqslant a \cup 0' \leqslant b \cup 0' \leqslant b'$ , а потому все эти степени равны. ■

**Следствие IX (b)** (Спектор, Шёнфильд).

- (i)  $(\exists b)(\exists c)[b \mid c \& c' = b']$ ;
- (ii)  $(\exists b)(\exists c)[b \mid c \& c' < b']$ .

**Доказательство.** (i) Применим следствие IX (a) при  $a = 0''$ . Тогда

$$b' = 0'' = b \cup 0'.$$

Поэтому  $b \cup 0' \neq b$  и  $b \cup 0' \neq 0'$ . Значит,  $b \mid 0'$ ,  $b' = (0')'$  и (i) выполняется при  $c = 0'$ .

(ii) Применим следствие IX (a) при  $a = 0'''$ . Тогда  $b' = 0'''$ , но, как и в (i),  $b \mid 0'$ . Поэтому (ii) выполняется при  $c = 0'$ . ■

Пункт (i) показывает, что оператор скачка не взаимно однозначен на степенях (см. также упр. 13-19). Отметим между прочим, что из доказательства следствия IX (b) вытекает следствие VI и что следствие IX (b) опровергает предположение, будто  $a' \leqslant b' \Rightarrow a \leqslant b$  (являющееся обращением выведенного из теоремы I основного соотношения, о котором упоминалось после следствия I).

Поставим теперь еще четыре вопроса.

1. Какие из возможностей  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ ,  $a \mid b$  осуществимы, если  $a' = b'$ ?

2. Какие из этих соотношений между  $a$  и  $b$  возможны, если  $a' < b'$ ?

3. Какие из трех соотношений  $a' = b' < a''$ ,  $a' < b' < a''$ ,  $a' < b' = a''$  могут выполняться, если  $a < b < a''$ ?

4. Обязательно ли  $a' \cup b' = (a \cup b)'$ ?

Что касается первого вопроса, то, очевидно, возможно  $a = b$ ; в силу следствия IX возможно также  $a \mid b$ .

Ни  $a = b$ , ни  $b < a$  в условиях вопроса 2 не могут выполнятся (по теореме I). Соотношение  $a < b$  возможно, например, при  $b = a'$ . Осуществимость  $a \mid b$  показана в следствии IX. Таким образом, вопрос 2 полностью разобран.

Следующая теорема Спектора [1956] исчерпывает вопрос 1, отвечает на вопрос 4 и частично на 3. (Пункт (i) следствия IX (b) впервые был получен как следствие этой теоремы.)

**Теорема X** (Спектор).  $(\exists a)(\exists b)[a' \leqslant a \cup b \& b' \leqslant a \cup b \& a \leqslant 0' \& b \leqslant 0']$ .

**Доказательство.** Построим с помощью начальных сегментов две функции  $f$  и  $g$ . Они будут характеристическими функциями, а  $a$  и  $b$  — степенями множеств  $A$  и  $B$  соответственно. При каждом  $n$  сегменты  $f_n$  и  $g_n$  будут иметь одну и ту же длину.

**Этап 0.** Положим  $f_0 = g_0 = \emptyset$ .

**Этап  $2n + 1$ .** Пусть  $m = 2n$ . По предположению индукции сегменты  $f_m$  и  $g_m$  имеют одну и ту же длину. Проверим, существует ли такой начальный сегмент  $\tilde{f}$ , продолжающий  $f_m$ , что  $\varphi_n^{(\tilde{f})}(n)$  определено. Если да, то пусть  $\tilde{f}$  — первое такое продолжение (в процессе их перечисления с помощью множества  $W_{\rho(n)}$ ) и пусть  $p$  — длина сегмента  $\tilde{f}$ . Положим

$$\begin{aligned} f_{m+1} &= \tilde{f} \cup \{\langle p, 1 \rangle\}, \\ g_{m+1} &= g_m \cup (\tilde{f} - f_m) \cup \{\langle p, 0 \rangle\}. \end{aligned}$$

Сегменты  $f_{m+1}$  и  $g_{m+1}$  снова имеют одинаковую длину. Если же желаемого продолжения  $\tilde{f}$  не существует, то пусть  $p$  — длина сегмента  $f_m$ . Положим в этом случае

$$\begin{aligned} f_{m+1} &= f_m \cup \{\langle p, 0 \rangle\}, \\ g_{m+1} &= g_m \cup \{\langle p, 1 \rangle\}. \end{aligned}$$

**Этап  $2n + 2$ .** Пусть  $m = 2n + 1$ . На шаге  $2n + 2$  делается то же, что и на шаге  $2n + 1$ , только символы  $f$  и  $g$  (с индексами или без) всюду меняются местами.

Положим  $f = \bigcup_i f_i$ ,  $g = \bigcup_i g_i$ ,  $A = \{x \mid f(x) = 1\}$  и  $B = \{x \mid g(x) = 1\}$ . Пусть  $a$  и  $b$  — степени множеств  $A$  и  $B$  соответственно.

При построении функции  $f^1$  мы нуждались только в решении частных случаев проблемы остановки, чтобы выяснить, пригодно ли то или иное продолжение  $\tilde{f}$ , и затем вычислить функции  $f$  и  $g$ . Поэтому  $a \leqslant 0'$  и  $b \leqslant 0'$ . Пусть  $x_0, x_1, \dots$  — элементы множества  $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ , перечисленные в порядке возрастания. Тогда  $\{x \mid \varphi_x^f(x) \text{ сходится}\} = \{n \mid f(x_{2n}) = 1\}$ . Поэтому, если даны функции  $f$  и  $g$ , мы можем разрешать множество  $(\tau(f))'$ . Значит,  $a' \leqslant a \cup b$ . Аналогично доказывается, что  $b' \leqslant a \cup b$ . ■

**Следствие X (a).**  $(\exists a)(\exists b)[a' \cup b' = a \cup b = a' = b' = 0' \& a < 0' \& b < 0' \& a \mid b]$ .

**Доказательство.** Любые  $a$  и  $b$ , удовлетворяющие теореме, обязательно обладают и сформулированными в следствии свойствами. ■

Следствие X (a) дает отрицательный ответ на вопрос 4, так как

$$a' \cup b' = a \cup b < (a \cup b)'.$$

Отрицательный ответ на этот вопрос выводится также и из следствия IX (a); с другой стороны, возможна и ситуация, когда  $a \mid b$  и  $a' \cup b' = (a \cup b)'$  (см. упр. 13-20). Следствие X (a) дает исчерпывающий ответ на вопрос 1, поскольку обнаруживается, что остававшиеся возможности  $a < b$  и  $b < a$  реализуются (так как  $0 < a$ , и  $0' = a'$  в следствии). Оно же показывает, что осуществима и первая возможность из вопроса 3 (так как  $0 < a < 0'$  и  $0' = a' < 0''$ ). Шёнфильд показал (см. § 13.8), что и другие две возможности реализуются. Следствие X (a) дает также новое и более прямое доказательство пункта (i) из следствия IX (b).

Теорема X и следствие X допускают также следующую релятивизацию.

**Следствие X (b).**  $(\forall d)(\exists a)(\exists b)[a' \cup b' = a \cup b = a' = b' = d' \& d < a < d' \& d < b < d']$ .

**Доказательство.** См. упр. 13-22. ■

Из следствия X (b) получается еще одно

**Следствие X (c).**  $0' < c \Rightarrow c \text{ есть наименьшая верхняя грань множества всех степеней, меньших } c$ .

**Доказательство.** Если  $0' < c$ , то по теореме IX  $c = d'$  для некоторого  $d$ . Возьмем  $a$  и  $b$ , обладающие свойствами, сформулированными в следствии X (b). Тогда  $a < d'$ ,  $b < d'$  и  $a \cup b = d'$ . ■

<sup>1)</sup> А также и  $g$ . — Прим. перев.

Рассмотрим счетную совокупность степеней  $\{a \mid a \leqslant 0'\}$ . Все ли эти степени рекурсивно перечислимы? Следующая теорема Шёнфильда [1959] показывает, что это не так.

**Теорема XI** (Шёнфильд).  $(\exists a)[a \leqslant 0' \& (\forall x)[W_x \notin a]]$ .

**Доказательство.** Введем следующее определение. Пусть  $f$ ,  $g$  и  $h$  — начальные сегменты, а  $y$  и  $z$  — числа. Скажем, что выполняется отношение  $R(f, y, g, z, h)$ , если  $g \subset \varphi_y^f$  и  $h \subset \varphi_z^g$ . Заметим, что это отношение рекурсивно перечислимо.

Пусть  $c_x$  обозначает (до конца доказательства) характеристическую функцию множества  $W_x$ . Определим функцию  $f$  с помощью начальных сегментов  $f_0, f_1, \dots$ . Мы сделаем это так, чтобы для каждой пары  $\langle y, z \rangle$  и для каждого  $x$  либо  $c_x \neq \varphi_y^f$ , либо  $f \neq \varphi_z^{c_x}$ . Затем мы обнаружим, что функция  $f$  рекурсивна относительно  $0'$ , и возьмем в качестве  $a$  степень функции  $f$ .

**Этап 0.** Положим  $f_0 = \emptyset$ .

**Этап  $n + 1$ .** Пусть  $n = \langle x, y, z \rangle$ . Построим  $f_{n+1}$  так, чтобы для всех продолжений  $\tilde{f}$  сегмента  $f_{n+1}$  выполнялось либо  $\varphi_y^{\tilde{f}} \not\subset c_x$ , либо  $\tilde{f} \not\subset \varphi_z^{c_x}$ . Пусть  $m$  — длина сегмента  $f_n$ . Положим  $f^0 = f_n \cup \{\langle m, 0 \rangle\}$  и  $f^1 = f_n \cup \{\langle m, 1 \rangle\}$ .

**Подэтап (a).** Проверим, существуют ли такие начальные сегменты  $\tilde{f}$  и  $g$ , что  $f_n \subset \tilde{f}$  и  $R(\tilde{f}, y, g, z, f^0)$ . Если нет, положим  $f_{n+1} = f^0$  и перейдем к этапу  $n + 2$ . Если да, перейдем к подэтапу (b).

**Подэтап (b).** Проверим, существуют ли такие начальные сегменты  $\tilde{f}$  и  $g$ , что  $f_n \subset \tilde{f}$  и  $R(\tilde{f}, y, g, z, f^1)$ . Если нет, положим  $f_{n+1} = f^1$  и перейдем к этапу  $n + 2$ . Если да, перейдем к подэтапу (c).

**Подэтап (c).** Возьмем такие  $\tilde{f}^0, g^0, \tilde{f}^1$  и  $g^1$ , что  $f_n \subset \tilde{f}^0$ ,  $f_n \subset \tilde{f}^1$ ,  $R(\tilde{f}^0, y, g^0, z, f^0)$  и  $R(\tilde{f}^1, y, g^1, z, f^1)$ . Так как функции  $f^0$  и  $f^1$  принимают различные значения в точке  $m$ , то и функции  $g^0$  и  $g^1$  должны различаться при некотором значении аргумента. Значит, или  $g^0$ , или  $g^1$  отличается от  $c_x$  при этом значении аргумента. Если функция  $g^0$  отличается в этой точке от  $c_x$ , то положим  $f_{n+1} = \tilde{f}^0$ , в противном случае  $f_{n+1} = \tilde{f}^1$ .

Положим  $f = \bigcup_i f_i$ , чем и завершим построение.

Для любых  $x, y$  и  $z$  положим  $n = \langle x, y, z \rangle$ . Тогда, если сегмент  $f_{n+1}$  построен на подэтапе (c)  $(n+1)$ -го этапа, имеем  $\varphi_y^{f_{n+1}} \not\subset c_x$ . Если же сегмент  $f_{n+1}$  построен на подэтапе (a) или (b) и  $\varphi_y^f = c_x$ , то  $f_{n+1} \not\subset \varphi_z^{c_x}$ . Отсюда или  $c_x \neq \varphi_y^f$ , или  $f \neq \varphi_z^{c_x}$ .

Заметим, что построение делается эффективным на каждом этапе, если допустить, что мы умеем в конкретных случаях решать проблему остановки (поскольку проверки, производимые в (a) и (b), и вычисление значений  $c_x(w)$  сводятся к вопросам о принадлежности некоторого элемента некоторому рекурсивно перечислимому множеству). Поэтому функция  $f$  рекурсивна относительно степени  $0'$ . Положим

$$A = \{x \mid f(x) = 1\}.$$

Тогда  $(\forall x)[W_x \neq_T A]$ . Пусть  $a$  — степень множества  $A$ . Понятно, что  $a \leqslant 0'$  и  $(\forall x)[W_x \notin a]$ .

Релятивизация теоремы XI приводится в упр. 13-23.

### Категории

Мы показали, что существует несчетное множество полных степеней и несчетное же множество неполных степеней. Можно ли в каком-нибудь разумном смысле сказать, что степеней одного вида *больше*, чем другого? Два понятия из анализа, *категории* и *меры*, могут быть использованы, чтобы ответить на этот вопрос с различных точек зрения. На полезность этих понятий (при рассмотрении этого и других вопросов) было указано Майхиллом [1961а] (в случае категорий) и Саксом (в случае меры; см. упр. 13-29). Впервые понятие меры в теории эффективной вычислимости использовал Спектор.

**Определение.** Пусть  $\mathcal{C}$  — совокупность всех характеристических функций. Следующим образом определим на  $\mathcal{C}$  расстояние  $\delta$ :

$$\delta(f, g) = \begin{cases} 0, & \text{если } f = g, \\ \frac{1}{\mu_x[f(x) \neq g(x)] + 1} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко проверяется, что  $\delta$  — метрика на  $\mathcal{C}$  (см. упр. 13-24). Поэтому  $\delta$  определяет в  $\mathcal{C}$  топологию метрического пространства. *Сферические окрестности* в ней — это множества вида  $\{f \mid f_0 \subset f\}$ , где  $f_0$  — некоторый начальный сегмент.

Возможен и другой способ введения топологии на множестве  $\mathcal{C}$ . Пусть  $I = \{0, 1\}$ . Тогда  $\mathcal{C} = I^{\mathbb{N}}$ . Введем на множестве  $I$  дискретную топологию, и определим на  $\mathcal{C} = I^{\mathbb{N}}$  топологию произведения. *Базисными окрестностями* будут тогда множества вида  $\{f \mid f_0 \subset f\}$ , где  $f_0$  — произвольный конечный сегмент (начальный или нет).

Легко показать, что эти топологии совпадают (урп. 13-24). Зафиксируем эту топологию для дальнейших рассмотрений. (Иногда эту топологию называют топологией *канторова множества*, потому что  $\mathcal{C}$  можно канонически отобразить на канторово

совершенное множество, и наша топология при этом будет совпадать с обычной индуцированной топологией канторова множества.) Можно определить в  $\mathcal{C}$  и другие естественные топологии (см. упр. 13-24 и 11-35). Пространство  $\mathcal{C}$  (с выбранной нами топологией) иногда называют *канторовым пространством*. Элементы множества  $\mathcal{C}$  мы будем иногда называть точками пространства  $\mathcal{C}$ . Как топологическое пространство  $\mathcal{C}$  полно (определение и доказательство см. в упр. 13-25).

**Определение.** Подмножество  $\mathcal{A}$  топологического пространства называется *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит ни одного непустого открытого множества.

Назовем  $\mathcal{A}$  множеством *первой категории*, если  $\mathcal{A}$  есть конечное или счетное объединение нигде не плотных множеств.

Всякое множество  $\mathcal{A}$ , не являющееся множеством первой категории, называется множеством *второй категории*.

Из этих определений вытекают очевидные утверждения: счетное объединение множеств первой категории само есть множество первой категории; разность множества второй категории и множества первой категории имеет вторую категорию. Следующий результат обычно называют теоремой Бэра.

**Теорема XII (Бэр).** *Всякое полное метрическое пространство есть множество второй категории (в своей собственной топологии).*

**Доказательство.** См. упр. 13-26.

Всякая совокупность степеней определяет некоторое подмножество в  $\mathcal{C}$ , именно совокупность характеристических функций всех множеств из этих степеней. Поэтому понятие категории можно использовать, чтобы оценить, сколь многочисленны степени какого-либо определенного вида. Для любой функции  $f \in \mathcal{C}$  одноэлементное множество  $\{f\}$  имеет первую категорию. Поэтому всякая степень (как счетная совокупность точек) есть множество первой категории, равно как и всякая счетная совокупность степеней. В частности,  $\{a \mid a \leqslant 0'\}$  — множество первой категории. Что можно сказать о множествах  $\{a \mid 0' \leqslant a\}$  и  $\{a \mid 0' \leqslant a\}$ ?

**Теорема XIII.**  *$\{a \mid 0' \leqslant a\}$  есть множество первой категории в канторовом пространстве.*

**Доказательство.**  $0' \leqslant a \Leftrightarrow (\exists A)(\exists z)[A \in a \& c_k = \varphi_z^A]$ . Мы хотим показать, что  $\mathcal{A} = \{f \mid (\exists z)[c_k = \varphi_z^f]\}$  — множество первой категории. (В доказательстве мы ограничимся случаем  $f \in \mathcal{C}$ .) Достаточно доказать, что для всякого  $z$  множество  $\{f \mid c_k = \varphi_z^f\}$  нигде не плотно (так как  $\mathcal{A}$  — счетное объединение таких множеств). Пусть дано  $\mathcal{B} = \{f \mid c_k = \varphi_z^f\}$ . Допустим, что  $\mathcal{B}$  не является нигде не плотным. Тогда найдется сферическая окрестность  $\mathcal{S} = \{f \mid f_0 \subset f\}$ , содержащаяся в замыкании множества  $\mathcal{B}$ .

Всякая окрестность, содержащаяся в  $\mathcal{S}$ , пересекается с  $\mathcal{B}$ . Поэтому  $c_K = \varphi_z^{f^*}$  для некоторого продолжения  $f^*$  сегмента  $f_0$  и  $\varphi_z^{f^*} \subset c_K$  для всякого начального сегмента  $f$ , продолжающего  $f_0$  (в противном случае  $(\exists w)[\varphi_z^{f^*}(w) \neq c_K(w)]$  и окрестность  $\{f \mid f \subset f\}$  содержитя в  $\mathcal{S}$ , но не пересекается с  $\mathcal{B}$ ). Значит,

$$c_K = \{(x, y) \mid (\exists f)[f_0 \subset f \text{ & } \varphi_z^{f^*}(x) = y]\};$$

но в правой части равенства стоит рекурсивно перечислимое отношение, а потому  $c_K$  — рекурсивная функция, что противоречит нерекурсивности множества  $K$ . Таким образом,  $\mathcal{B}$  нигде не плотно и  $\mathcal{A}$  — множество первой категории. ■

Другое применение приведенного рассуждения содержится в упр. 13-28.

**Следствие XIII.** (a)  $\{a \mid 0' \mid a\}$  есть множество второй категории.

(b) Для всякого  $c \neq 0$   $\{a \mid a \leq c \text{ или } c \leq a\}$  есть множество первой категории, а  $\{a \mid c \mid a\}$  — множество второй категории.

**Доказательство.** (a) очевидно.

(b) Любое нерекурсивное множество можно использовать вместо множества  $K$  в доказательстве теоремы. ■

Итак, в смысле категорий неполных степеней *больше*, чем полных. С помощью следствия XIII (b) получается также, как мы сейчас покажем, простое и непосредственное доказательство леммы к теореме V.

**Следствие XIII (c).** Для любой счетной совокупности  $\mathcal{A}$  нерекурсивных степеней существует такая степень  $b$ , что  $(\forall a)[a \in \mathcal{A} \Rightarrow b \mid a]$ .

**Доказательство.** Пусть  $a_0, a_1, \dots$  — элементы совокупности  $\mathcal{A}$ . Положим

$$\mathcal{A}_x = \{c \mid c < a_x \text{ или } a_x < c\}.$$

В силу следствия XIII (b),  $\mathcal{A}_x$  — множество первой категории. Поэтому и  $\mathcal{A}^* = \bigcup_x \mathcal{A}_x$  есть множество первой категории. Значит, существует степень, не принадлежащая  $\mathcal{A}^*$ . В качестве  $b$  возьмем произвольную такую степень. ■

### Мера

Иной способ оценки распространенности степеней связан с понятием *меры*. Этот способ позволяет использовать терминологию теории вероятностей.

Мы превратим канторово пространство в *пространство с мерой* (определение и свойства меры см. у Халмоса [1950]), определяя на множестве  $I$  *равномерно распределенную меру*  $\mu$  ( $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ ) и вводя затем на  $\mathcal{C}$  *меру произведения* (которую мы также обозначим через  $\mu$ ).

Всякое счетное подмножество множества  $\mathcal{C}$  имеет меру нуль, а потому всякая степень или счетная совокупность степеней также имеет меру нуль.

Понятия множества *нулевой меры* и множества *первой категории* независимы. Существует множество первой категории с ненулевой мерой, а также множество второй категории с нулевой мерой (см. упр. 13-27).

Утверждению, что подмножество  $\mathcal{A}$  пространства  $\mathcal{C}$  имеет меру нуль, можно дать следующую вероятностную интерпретацию: если элемент пространства  $\mathcal{C}$  (т. е. бесконечная последовательность нулей и единиц) определяется с помощью бесконечной последовательности независимых испытаний („бросания монеты“) с равными вероятностями двух возможных исходов, то вероятность попадания этого элемента в  $\mathcal{A}$  равна нулю. Приведем в качестве примера следующую теорему.

**Теорема XIV.**  $\{a \mid 0' \leq a\}$  имеет меру нуль в канторовом пространстве.

**Доказательство.** Будем пользоваться вероятностной терминологией для сокращения некоторых элементарных рассуждений о мере. Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — измеримые подмножества пространства  $\mathcal{C}$ . Определим  $P[f \in \mathcal{A}] = \mu(\mathcal{A})$ , и назовем эту величину *вероятностью* множества  $\mathcal{A}$ . Если  $\mu(\mathcal{B}) \neq 0$ , положим  $P[f \in \mathcal{A} \mid f \in \mathcal{B}] = \mu(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})/\mu(\mathcal{B})$  и назовем эту величину *условной вероятностью* множества  $\mathcal{A}$  при условии  $\mathcal{B}$ .

Предположим, что доказываемое утверждение неверно. Тогда  $P[(\exists z)[c_K = \varphi_z^f]] > 0$ <sup>1)</sup>. Поэтому для некоторого  $z$   $P[c_K = \varphi_z^f] = e > 0$ . Возьмем это  $z$ , и рассмотрим тождество (справедливое при любом  $n$ )

$$P[c_K = \varphi_z^f] = P[(\forall x)[x \leq n \Rightarrow c_K(x) = \varphi_z^f(x)]] \cdot P[c_K = \varphi_z^f \mid (\forall x)[x \leq n \Rightarrow c_K(x) = \varphi_z^f(x)]] = e.$$

Так как

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \{f \mid (\forall x)[x \leq n \Rightarrow c_K(x) = \varphi_z^f(x)]\} = \{f \mid c_K = \varphi_z^f\},$$

имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[(\forall x)[x \leq n \Rightarrow c_K(x) = \varphi_z^f(x)]] = e,$$

<sup>1)</sup> Здесь  $f$  — некоторая функция степени  $a$ , фигурирующей в формулировке теоремы. — Прим. перев.

а потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[c_K = \varphi_z^f \mid (\forall x)[x \leq n \Rightarrow c_K(x) = \varphi_z^f(x)]] = 1.$$

Выберем  $n_0$  так, чтобы  $n \geq n_0 \Rightarrow P[c_K = \varphi_z^f \mid (\forall x)[x \leq n \Rightarrow c_K(x) = \varphi_z^f(x)]] \geq \frac{3}{4}$ . Рассмотрим класс  $\mathcal{S}$  всех начальных сегментов  $f'$ , для которых

(i)  $(\forall x)[x \leq n_0 \Rightarrow c_K(x) = \varphi_z^{f'}(x)]$  и (ii) ни для какого более короткого начального сегмента  $f'' \subset f'$  не выполняется

$$(\forall x)[x \leq n_0 \Rightarrow c_K(x) = \varphi_z^{f''}(x)].$$

Для произвольного начального сегмента  $f'$  определим

$$P_1(f') = P[f' \subset f] \text{ и } P_2(f') = P[c_K = \varphi_z^f \mid f' \subset f].$$

Тогда

$$P[(\forall x)[x \leq n_0 \Rightarrow c_K(x) = \varphi_z^f(x)]] = \sum_{f' \in \mathcal{S}} P_1(f'),$$

$$P[c_K = \varphi_z^f] = \sum_{f' \in \mathcal{S}} P_1(f') \cdot P_2(f'),$$

$$\begin{aligned} P[c_K = \varphi_z^f \mid (\forall x)[x \leq n_0 \Rightarrow c_K(x) = \varphi_z^f(x)]] &= \\ &= \left[ \sum_{f' \in \mathcal{S}} P_1(f') \cdot P_2(f') \right] / \sum_{f' \in \mathcal{S}} P_1(f') \geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Так как последнее выражение представляет собой среднее взвешенное, найдется такое  $f^* \in \mathcal{S}$ , что  $P_2(f^*) \geq \frac{3}{4}$ . Рассмотрим теперь следующие инструкции для вычисления некоторой функции  $g$ .

Если задано входное значение  $x$ , перечисляйте множество  $W_{\varphi_z^f}(z)$ ; для каждого его элемента вида  $\langle x, y, u, v \rangle$  вычисляйте  $P[D_u \subset \tau(f) \& D_v \subset \tau(f) \mid f^* \subset f]$  (это вычисление элементарно); назовем каждое такое значение вероятностью потенциального выхода  $y$ ; когда для некоторого потенциального выхода  $y$  накопленная вероятность превысит  $\frac{1}{2}$ , объявит это  $y$  значением функции  $g(x)$ .

Так как  $P[c_K = \varphi_z^f \mid f^* \subset f] \geq \frac{3}{4}$ , функция  $g$  всюду определена и совпадает с  $c_K$ . Поэтому  $c_K$  рекурсивна, что противоречит нерекурсивности множества  $K$ . ■

**Следствие XIV.** (a) Множество  $\{a \mid a \mid 0'\}$  имеет меру единица.  
 (b) Для всякого  $c \neq 0$  множество  $\{a \mid a \leq c \text{ или } c \leq a\}$  имеет меру нуль, а  $\{a \mid a \mid c\}$  — меру единица.

Доказательство очевидно. ■

Таким образом, и в смысле меры (как и в смысле категорий) неполных степеней больше, чем полных.

#### § 13.4. УПОРЯДОЧЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ

В этом параграфе мы докажем две теоремы об упорядочении степеней. Они показывают, насколько различно могут быть устроены подмножества частично упорядоченного множества степеней. Первая теорема, принадлежащая Клини и Посту, показывает, что между степенями  $0$  и  $0'$  существует цепь степеней, упорядоченная по типу рациональных чисел. Вторая теорема, также Клини и Поста, показывает, что упорядочение степеней не есть решетка и, в частности, что степень  $0^{(\omega)}$  не минимальна среди верхних граней совокупности всех арифметических степеней.

**Теорема XV** (Клини, Пост). *Существует счетная совокупность степеней, лежащих между  $0$  и  $0'$ , линейно упорядоченная (упорядочением степеней) по типу рациональных чисел.*

**Доказательство.** Назовем  $f$  сегментом двух переменных, если  $f$  — функция двух переменных с рекурсивной областью определения. Функция  $f$  называется начальным сегментом двух переменных, если для некоторого  $m$   $\text{Arg } f = \{\langle x, y \rangle \mid x < m \text{ и } y < f^*(x)\}$ , где  $f^*$  — некоторый начальный сегмент (одного переменного) длины  $m$ . Если  $f$  и  $g$  — сегменты двух переменных и  $f \supset g$ , будем называть  $f$  продолжением  $g$ . Если  $f$  — некоторый (возможно, всюду определенный) сегмент двух переменных, положим  $f^x = \lambda y[f(x, y)]$  и

$$f^{(x)} = \lambda zy[f(s_x(z), y)],$$

где  $s_x(z) = z$ , если  $z < x$ , и  $s_x(z) = z + 1$ , если  $x \leq z$ . (Таким образом,  $f^x$  — это  $x$ -е сечение функции  $f$ , а  $f^{(x)}$  есть  $f$  с вырезанным  $x$ -м сечением.) Если  $f$  — начальный сегмент двух переменных, то  $f^x$  и  $f^{(x)}$  — начальные сегменты одного и двух переменных соответственно. Если  $f$  — сегмент двух переменных, то  $\varphi_z^{f^x}$  определяется так же, как (ранее) определялось  $\varphi_z^{f^{(x)}}$  для сегмента  $f$  одного переменного (см. упр. 13-34).

Доказательство состоит из четырех частей.

1. Построим функцию  $f$  двух переменных так, чтобы  $f^x \not\leq f^{(x)}$  при всех  $x$ , т. е. чтобы  $f^x \neq \varphi_y^{f^{(x)}} (= \varphi_y^{f^3(f^{(x)})})$ , при всех  $x$  и  $y$ . Функция  $f$  будет построена как объединение цепи начальных сегментов  $f_0, f_1, \dots$

Этап 0. Положим  $f_0 = \emptyset$ .

Этап  $n+1$ . Пусть  $n = \langle x, y \rangle$ . Пусть также  $x_n$  — длина сегмента  $f_n^x$ . Мы построим  $f_{n+1}$  так, чтобы для всех продолжений  $\tilde{f}$  сегмента  $f_{n+1}$  выполнялось  $\tilde{f}^x(x_n) \neq \varphi_y^{\tilde{f}^{(x)}}(x_n)$ . Это соотношение гарантирует справедливость  $f^x \neq \varphi_y^{f^{(x)}}$ . Сделаем это так. Прове-

рим, определено ли  $\varphi_y^{[\tilde{f}]}(x_n)$  хотя бы для одного начального сегмента  $\tilde{f}$ , продолжающего  $f^{(x)}$ . Если нет, положим

$$f_{n+1} = f_n \cup \{\langle x, x_n, 1 \rangle\}.$$

Если да, возьмем один из таких сегментов  $\tilde{f}$ , и пусть  $w = \varphi_y^{[\tilde{f}]}(x_n)$ . Определим сегмент  $f_{n+1}$  так, что  $f_{n+1}^{(x)} = \tilde{f}$  и  $f_{n+1}^x = f_n^x \cup \{\langle x_n, w + 1 \rangle\}$ .

Положим  $f = \bigcup_i f_i$ . Очевидно, что  $f^x \neq \varphi_y^{[f^{(x)}]}$  для всех  $x$  и  $y$ .

2. Располагая построенной выше функцией  $f$ , покажем, что если  $g$  и  $h$  — взаимно однозначные общерекурсивные функции, то  $\text{Val } g \subset \text{Val } h \Leftrightarrow \lambda xy[f(g(x), y)] \leqslant_t \lambda xy[f(h(x), y)]$ .

$\Rightarrow$ . Пусть даны  $x$  и  $y$  и выполняется левая часть доказываемой эквивалентности. Чтобы вычислить  $f(g(x), y)$ , найдем такое  $z$ , что  $h(z) = g(x)$ , и вычислим  $f(h(z), y)$ .

$\Leftarrow$ . Допустим, что  $\text{Val } g \not\subset \text{Val } h$ . Пусть  $x_0$  — некоторое значение функции  $g$ , не являющееся значением функции  $h$ . Предположим, что  $\lambda xy[f(g(x), y)] \leqslant_t \lambda xy[f(h(x), y)]$ . Тогда, в частности,  $f^{x_0} \leqslant_t \lambda xy[f(h(x), y)]$ . Но  $\lambda xy[f(h(x), y)] \leqslant_t f^{(x_0)}$ , так как  $f^{(x_0)} = \lambda xy[f(s_{x_0}(x), y)]$  и  $\text{Val } h \subset \text{Val } s_{x_0}$  (см. доказательство  $\Rightarrow$ ). Но тогда  $f^{x_0} \leqslant_t f^{(x_0)}$ , что противоречит части 1 доказательства.

3. Сопоставим каждому рациональному числу  $r$  такую взаимно однозначную общерекурсивную функцию  $g_r$ , что для любых рациональных  $r$  и  $s$  верна эквивалентность ( $r \leqslant s$  (при обычном упорядочении рациональных чисел))  $\Leftrightarrow \text{Val } g_r \subset \text{Val } g_s$ . Для этого закодируем рациональные числа (изображаемые нескократимыми дробями) с помощью всех натуральных чисел, и пусть  $r_n$  — рациональное число, кодом которого служит  $n$ . Для любого рационального  $r$  множество  $\{n \mid r_n \leqslant r\}$  рекурсивно. Пусть  $g_r$  — некоторая рекурсивная функция с областью значений  $\{n \mid r_n < r\}$ . Рассмотрим теперь для произвольного рационального  $r$  степень  $a_r$  функции  $\lambda xy[f(g_r(x), y)]$ . Из части 2 тотчас следует, что  $r \leqslant s \Leftrightarrow a_r \leqslant a_s$  для любых рациональных  $r$  и  $s$ .

4. Остается проверить, что  $a_r \leqslant 0'$  для любого рационального  $r$ . Это будет доказано, если удастся показать, что  $f \leqslant_t K$ . Но вычисление последовательных продолжений  $f_0, f_1, \dots$  становится эффективным, если допустить, что мы умеем в отдельных случаях решать проблему остановки. Поэтому  $f \leqslant_t K$ . Доказательство закончено. ■

Следствие XV (Клини, Пост). Для любой степени  $d$  между  $d$  и  $d'$  существует счетная совокупность степеней, линейно упорядоченная по типу рациональных чисел.

Доказательство. См. упр. 13-31. ■

Теорема XVI (Клини, Пост). Существуют такие степени  $b$  и  $c$ , что

- (i)  $b \leqslant 0^{(\omega)}$  и  $c \leqslant 0^{(\omega)}$ ;
- (ii)  $(\forall n)[0^{(n)} \leqslant b \text{ и } 0^{(n)} \leqslant c]$ ;
- (iii)  $(\forall d)[[d \leqslant b \text{ и } d \leqslant c] \Rightarrow (\exists n)(d \leqslant 0^{(n)})]$ .

Доказательство. Мы построим две функции  $f$  и  $g$  с помощью сегментов  $f_0, f_1, \dots$  и  $g_0, g_1, \dots$ . Все эти сегменты, кроме  $f_0$  и  $g_0$ , будут иметь бесконечные области определения.  $b$  будет степенью множества  $B$ , а  $c$  — множества  $C$ , где  $f = c_B$ , а  $g = c_C$ .

Будем обозначать (в этом доказательстве) через  $c_n$  характеристическую функцию множества  $\mathcal{O}^{(n)}$ . Сегмент  $\tilde{f}$  называется конечным продолжением сегмента  $f$ , если  $\tilde{f} \supset f$ , и разность областей определения функций  $\tilde{f}$  и  $f$  конечна.

Этап 0. Положим  $f_0 = g_0 = \emptyset$ .

Этап  $n+1$ . Подэтап (a). Пусть  $n = \langle x, y \rangle$ . Проверим, существуют ли такие конечные продолжения  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$  сегментов  $f_n$  и  $g_n$  соответственно, чтобы для некоторого  $z$  функции  $\varphi_x^{[\tilde{f}]}(z)$  и  $\varphi_y^{[\tilde{g}]}(z)$  были определены и не совпадали. Если существуют, положим  $\tilde{f}_n = \tilde{f}$  и  $\tilde{g}_n = \tilde{g}$ . Если нет — положим  $\tilde{f}_n = f_n$  и  $\tilde{g}_n = g_n$ .

Подэтап (b). Чтобы получить  $f_{n+1}$ , продолжим сегмент  $\tilde{f}_n$ , положив  $f_{n+1}(\langle n, x \rangle) = c_n(x)$  для всех  $\langle n, x \rangle$ , не принадлежащих области определения сегмента  $\tilde{f}_n$ . (С помощью индукции легко проверяется, что только конечное число элементов вида  $\langle n, x \rangle$  принадлежит области определения сегмента  $\tilde{f}_n$ ). Аналогично, продолжим сегмент  $\tilde{g}_n$  до  $g_{n+1}$ , положив  $g_{n+1}(\langle n, x \rangle) = c_n(x)$  для всех  $\langle n, x \rangle$ , не содержащихся в области определения сегмента  $\tilde{g}_n$ .

Положим  $f = \bigcup_i f_i$ ,  $g = \bigcup_i g_i$ ,  $B = \{x \mid f(x) = 1\}$  и  $C = \{x \mid g(x) = 1\}$ . Пусть  $b$  и  $c$  — степени множеств  $B$  и  $C$  соответственно. Остается проверить утверждения (i) — (iii) теоремы.

(i) В силу результатов о равномерности из следствия I для  $m < n$  равномерно выполняется  $\mathcal{O}^{(m)} \leqslant_1 \mathcal{O}^{(n)}$  и для всех  $n$  равномерно выполняется  $\mathcal{O}^{(n)} \leqslant_1 \mathcal{O}^{(n+1)}$ . Отсюда следует, что этап  $n+1$  в построении функций  $f$  и  $g$  равномерно рекурсивен относительно  $\mathcal{O}^{(n+1)}$  в следующем смысле:  $f_{n+1}$  и  $g_{n+1}$  равномерно рекурсивны относительно множества  $\mathcal{O}^{(n+1)}$  (т. е. их индексы эффективно вычисляются по  $n$ ) и области определения сегментов  $f_{n+1}$  и  $g_{n+1}$  равномерно рекурсивны относительно  $\mathcal{O}^{(n+1)}$  (т. е. индексы их характеристических функций (как  $\mathcal{O}^{(n+1)}$ -рекурсивных функций) эффективно вычисляются по  $n$ ). Действительно, так как функции  $f_0$  и  $g_0$ , очевидно, рекурсивны относительно множества  $\mathcal{O}^{(0)}$  и имеют рекурсивные относительно множества  $\mathcal{O}^{(0)}$  области

определения и по предположению индукции функции  $f_n$  и  $g_n$  вычислимы относительно множества  $\emptyset^{(n)}$ , а их области определения рекурсивны относительно множества  $\emptyset^{(n)}$ , вопросы о существовании продолжений  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$  с нужными свойствами в подэтапе (a) представляют собой частные случаи проблемы остановки для процедур, рекурсивных относительно множества  $\emptyset^{(n)}$ , и, значит,  $\hat{f}_n$  и  $\hat{g}_n$  могут быть вычислены рекурсивно относительно множества  $\emptyset^{(n+1)}$ , а их области определения рекурсивны относительно множества  $\emptyset^{(n+1)}$ . Но тогда и на подэтапе (b)  $f_{n+1}$  и  $g_{n+1}$  вычисляются рекурсивно относительно множества  $\emptyset^{(n+1)}$  и их области определения рекурсивны относительно  $\emptyset^{(n+1)}$ . Но поскольку все множества  $\emptyset^{(n+1)}$  рекурсивны относительно  $\emptyset^{(\omega)}$  равномерно по  $n$ , получаем, что  $f$ , и  $g$  рекурсивны относительно  $\emptyset^{(\omega)}$ . Так что  $b \leqslant 0^{(\omega)}$  и  $c \leqslant 0^{(\omega)}$ .

(ii) Для каждого  $n$  имеем  $\{\langle n, x \rangle \in B \Leftrightarrow c_n(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset^{(n)}\}$  для всех, кроме конечного числа, значений  $x$ . Поэтому  $0^{(n)} \leqslant b$ . Точно так же для любого  $n$  справедливо  $0^{(n)} \leqslant c$ .

(iii) Предположим, что  $D \leqslant_T B$  и  $D \leqslant_T C$ . Тогда  $c_D = \varphi_x^t$  и  $c_D = \varphi_y^g$  для некоторых  $x$  и  $y$ . Пусть  $n = \langle x, y \rangle$ . В этом случае на подэтапе (a) этапа  $n + 1$  обнаружится, что не существует таких конечных продолжений  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$  для сегментов  $f_n$  и  $g_n$  соответственно, для которых хотя бы одна из функций  $\varphi_x^{[\tilde{f}]}$  или  $\varphi_y^{[\tilde{g}]}$  принимала бы иные значения, чем  $c_D$ . (Пусть, напротив,  $\tilde{f}$  — конечное продолжение сегмента  $f_n$  и при некотором  $w$  имеем  $\varphi_x^{[\tilde{f}]}(w) \neq c_D(w)$ ; по предположению существует конечное продолжение  $\tilde{g}$  сегмента  $g_n$ , для которого  $\varphi_y^{[\tilde{g}]}(w) = c_D(w)$ ; но тогда на подэтапе (a) было бы обеспечено, что  $\varphi_x^t \neq \varphi_y^g$ .) Поэтому, если бы мы умели вычислять сегменты  $f_n$  и  $g_n$ , мы могли бы перечислять все конечные продолжения  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$  и, таким образом, вычислять функцию  $c_D$ . Поскольку сегменты  $f_n$  и  $g_n$  рекурсивны относительно  $\emptyset^{(n)}$  (в силу доказательства (1)),  $c_D$  оказывается рекурсивной относительно множества  $\emptyset^{(n)}$ . Этим доказан пункт (iii). ■

**Следствие XVI** (Клини, Пост). (a) Упорядочение степеней не есть решетка.

(b) Степень  $0^{(\omega)}$  не является наименьшей верхней границей степеней  $0, 0', 0'', \dots$

**Доказательство.** (a) В силу пункта (iii) теоремы степени  $b$  и  $c$  не имеют наибольшей нижней грани.

(b) Согласно (a), степени  $b$  и  $c$  несравнимы. Значит, согласно (i),  $b < 0^{(\omega)}$  и  $c < 0^{(\omega)}$ . Но в силу (ii) и  $b$ , и  $c$  — верхние грани степеней  $0, 0', 0'', \dots$  ■

Релятивизация теоремы XVI содержится в упр. 13-33.

### § 13.5. МИНИМАЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ

Плотно ли упорядочение степеней? Мы приведем теперь теорему Спектора, показывающую, что существуют минимальные нерекурсивные степени, и потому (в отличие от упорядочения рекурсивно перечислимых степеней) упорядочение степеней не плотно.

Все построения с помощью последовательных продолжений, встречавшиеся в предыдущих доказательствах, были „простыми“ в том смысле, что к концу каждого этапа требовалось только, чтобы (строящаяся) функция  $f$  содержала некоторый сегмент, т. е. попадала в некоторое замкнутое множество пространства Бэра (см. упр. 13-24). Приводимое ниже доказательство не таково, причем неизвестно никакого „простого“ построения искомой степени. Читателю следует также обратить внимание на упр. 13-29, показывающее, что совокупность минимальных нерекурсивных степеней имеет меру нуль.

**Теорема XVII** (Спектор). ( $\exists a$ ) [ $0 < a \& (\forall b)[b < a \Rightarrow b = 0]$ ].

**Доказательство.** Достаточно показать, что  $(\exists A)[A \text{ не рекурсивно} \& (\forall B)[B \leqslant_T A \Rightarrow [B \text{ рекурсивно или } A \leqslant_T B]]]$ . Мы построим некоторую функцию  $g$ , которую и примем в качестве  $c_A$ . Построение функции  $g$  осуществляется по этапам. Для каждого  $n$  к концу  $n$ -го этапа мы будем иметь по три функции  $h^n$ ,  $f_1^n$ , и  $f_2^n$ , удовлетворяющие следующим условиям.

**Условия.** Функции  $h^n$ ,  $f_1^n$  и  $f_2^n$  общерекурсивны; области значений функций  $f_1^n$  и  $f_2^n$  содержатся в  $\{0, 1\}$ . Функция  $h^n$  монотонна, т. е.  $x < y \Rightarrow h^n(x) < h^n(y)$ . Функция  $f_1^n$  совпадает с  $f_2^n$  на интервале  $\{z \mid z < h^n(0)\}$ , зато для любого  $y$  функции  $f_1^n$  и  $f_2^n$  не тождественны на интервале  $\{z \mid h^n(y) \leqslant z < h^n(y+1)\}$ . Будем называть  $\{z \mid z < h^n(0)\}$  и  $\{z \mid h^n(y) \leqslant z < h^n(y+1)\}$ ,  $y = 0, 1, 2, \dots$ , интервалами, определяемыми функцией  $h^n$ . Если  $m < n$ , то область значений функции  $h^m$  содержит область значений функции  $h^n$  (поэтому интервалы, определяемые функцией  $h^n$ , суть конечные объединения интервалов, определяемых функцией  $h^m$ ), и на каждом (под)интервале, определяемом  $h^m$ ,  $f_1^m$  совпадает либо с  $f_1^n$ , либо с  $f_2^n$ , и функция  $f_2^m$  также совпадает либо с  $f_1^n$ , либо с  $f_2^n$  (в частности,  $f_1^m = f_2^m = f_1^n = f_2^n$  на  $\{x \mid x < h^m(0)\}$ ). Наконец, если  $m < n$ , то  $h^m(0) < h^n(0)$ .

Предположим, что функции  $h^n$ ,  $f_1^n$  и  $f_2^n$  уже определены для всех  $n$ . Определим  $g_n$  как начальный сегмент длины  $h^n(0)$ , полагая  $g_n = f_1^n = f_2^n$  на  $\{z \mid z < h^n(0)\}$ . Из сформулированных выше условий следует, что  $g_0, g_1, \dots$  образуют цепь начальных сегментов, объединение которой — всюду определенная функция. Положим  $g = \bigcup_i g_i$ . Заметим, что из наших условий вытекает также, что для любого данного  $n$  на любом определяемом функцией  $h^n$  интервале функция  $g$  совпадает либо с  $f_1^n$ , либо с  $f_2^n$ .

Остается построить функции  $h^n$ ,  $f_1^n$  и  $f_2^n$  и проверить, что  $g$  будет обладать требуемыми свойствами. Будем действовать следующим образом. [Отметим, что процедура построения сегментов  $h^{n+1}$ ,  $f_1^{n+1}$  и  $f_2^{n+1}$  из  $h^n$ ,  $f_1^n$  и  $f_2^n$  не равномерно эффективна (и что  $g$  не будет общерекурсивной функцией), но что тем не менее получающиеся на каждом этапе  $n$  функции  $h^n$ ,  $f_1^n$  и  $f_2^n$  рекурсивны.]

Этап 0. Пусть  $h^0 = \lambda x[x]$ ,  $f_1^0 = \lambda x[0]$  и  $f_2^0 = \lambda x[1]$ . (Таким образом, 0-й этап не накладывает никаких ограничений на будущую функцию  $g$ .) Наши условия выполняются тривиально.

Этап  $2n + 1$ . Пусть  $m = 2n$ . Допустим в качестве индуктивного предположения, что наши условия выполняются для функций  $h^m$ ,  $f_1^m$  и  $f_2^m$ . Поэтому  $f_1^m$  и  $f_2^m$  должны различаться на интервале

$$\{z \mid h^m(0) \leq z < h^m(1)\}.$$

Проверим, выполняется ли на этом интервале соотношение  $\varphi_n \neq f_1^m$ . Если выполняется, то положим  $h^{m+1} = \lambda x[h^m(x+1)]$ ,  $f_1^{m+1} = f_2^{m+1} = f_1^m$  на

$$\{z \mid z < h^{m+1}(0) = h^m(1)\}$$

и  $f_1^{m+1} = f_1^m$ ,  $f_2^{m+1} = f_2^m$  на интервале

$$\{z \mid h^{m+1}(0) \leq z\}.$$

Если же нет, то на  $\{z \mid h^m(0) \leq z < h^m(1)\}$  выполнено  $\varphi_n \neq f_2^m$ , и мы определим функции  $h^{m+1}$ ,  $f_1^{m+1}$  и  $f_2^{m+1}$ , как в предыдущем случае, с тем лишь исключением, что  $f_1^{m+1} = f_2^{m+1} = f_2^m$  на  $\{z \mid z < h^{m+1}(0)\}$ . Непосредственно проверяется, что функции  $h^{m+1}$ ,  $f_1^{m+1}$  и  $f_2^{m+1}$  удовлетворяют условиям. Этап  $2n + 1$  гарантирует, что  $g \neq \varphi_n$ ; поэтому  $g$  не будет общерекурсивной функцией.

Этап  $2n + 2$ . Пусть  $m = 2n + 1$ . По предположению индукции условия выполнены для  $h^m$ ,  $f_1^m$  и  $f_2^m$ . Сегмент  $\tilde{g}$  называется *m-допустимым сегментом*, если  $\tilde{g}$  определен в точности на  $\{z \mid z < h^m(y)\}$  для некоторого  $y$  и на каждом определяемом функцией  $h^m$  интервале, лежащем в этой области, сегмент  $\tilde{g}$  совпадает либо с  $f_1^m$ , либо с  $f_2^m$ <sup>1)</sup>. Если  $\tilde{g}$  — *m-допустимый сегмент*, назовем *m-допустимым продолжением* сегмента  $\tilde{g}$  всякий *m-допустимый сегмент*  $g^*$ , продолжающий сегмент  $\tilde{g}$ .

Подэтап (а). Проверим, существуют ли такие число  $w$  и *m-допустимый сегмент*  $g$ , что для всех *m-допустимых продолже-*

<sup>1)</sup> То есть ( $\forall$  интервал) ( $\exists i$ ) [ $i = 1$  или  $i = 2$ , и  $\tilde{g}$  совпадает с  $f_i^m$  на этом интервале]. Мы не утверждаем, что ( $\exists i$ ) ( $\forall$  интервал) [...].

ний  $g^*$  сегмента  $\tilde{g}$  не определено  $\varphi_n^{[g^*]}(w)$ . Если таких нет, перейдем к подэтапу (б). Если же такие  $w$  и  $g^*$  существуют, то полагаем  $h^{m+1} = \lambda x[h^m(x+u)]$ , где  $\{z \mid z < h^m(u)\}$  есть область определения сегмента  $\tilde{g}$ ,  $f_1^{m+1} = f_2^{m+1} = \tilde{g}$  на области определения сегмента  $\tilde{g}$  и  $f_1^{m+1} = f_1^m$  и  $f_2^{m+1} = f_2^m$  на  $\{z \mid h^{m+1}(0) = h^m(u) \leq z\}$ , после чего переходим к этапу  $2n + 3$ . (Наши условия при этом выполняются, и мы обеспечиваем, что функция  $\varphi_n^g$  не может быть всюду определенной.)

Подэтап (б). Проверим, существует ли такой *m-допустимый сегмент*  $\tilde{g}$ , что для всех  $w$  функция  $\varphi_n^{[g^*]}(w)$  принимает не более одного значения, когда  $g^*$  пробегает совокупность всех *m-допустимых продолжений* сегмента  $\tilde{g}$ <sup>1)</sup>. Если нет, перейдем к подэтапу (с). Если же существует, то определим функции  $h^{m+1}$ ,  $f_1^{m+1}$  и  $f_2^{m+1}$ , отправляясь от  $\tilde{g}$  так же, как в последней части подэтапа (а), и перейдем к этапу  $2n + 3$ . (Наши условия выполняются, и, поскольку совокупность *m-допустимых продолжений* сегмента  $\tilde{g}$  рекурсивно перечислима, мы добились того, что функция  $\varphi_n^g$  обязана быть рекурсивной, если только она будет всюду определенной.)

Подэтап (с). Если мы добрались до подэтапа (с), уже известно, что для каждого *m-допустимого сегмента*  $\tilde{g}$  (i) для любого  $w$  существует такое его *m-допустимое продолжение*  $g^*$ , что  $\varphi_n^{[g^*]}(w)$  определено (см. подэтап (а)), и (ii) существуют такие число  $w$  и *m-допустимые продолжения*  $g_1^*$  и  $g_2^*$ , что  $\varphi_n^{[g_1^*]}(w)$  и  $\varphi_n^{[g_2^*]}(w)$  определены и не равны (см. подэтап (б)). Индуктивно определяем функции  $h^{m+1}$ ,  $f_1^{m+1}$  и  $f_2^{m+1}$ :

$$h^{m+1}(0) = h^m(1),$$

$$f_1^{m+1} = f_2^{m+1} = f_1^m \text{ на } \{z \mid z < h^m(1) = h^{m+1}(0)\}.$$

(Выбор функции  $f_1^m$  здесь произволен; вместо нее можно было бы использовать  $f_2^m$ .)

Предположим, что функция  $h^{m+1}$  определена для всех  $x \leq p$  и функции  $f_1^{m+1}$  и  $f_2^{m+1}$  определены на  $\{z \mid z < h^{m+1}(p)\}$ . Функция  $h^{m+1}$  определяет  $p+1$  интервалов на  $\{z \mid z < h^{m+1}(p)\}$ . Поэтому  $2^p$  сегментов длины  $h^{m+1}(p)$  будут  $(m+1)$ -допустимы. Обозначим их  $\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{2^p-1}$  (упорядочив их, скажем, лексикографически). Для определения значений  $h^{m+1}(p+1)$  (и  $f_1^{m+1}$ , и  $f_2^{m+1}$  на интервале  $\{z \mid h^{m+1}(p) \leq z < h^{m+1}(p+1)\}$ ) нам потребуется  $2^p$  подшагов.

<sup>1)</sup> Согласно подэтапу (а), хотя бы одно значение ими принимается.

**Подшаг 0.** Согласно замечанию (ii), приведенному выше, существуют такие  $m$ -допустимые продолжения  $s_0$  и  $t_0$  сегмента  $\tilde{g}_0$  и число  $z_0$ , что  $\varphi_n^{[s_0]}(z_0)$  и  $\varphi_n^{[t_0]}(z_0)$  определены и не совпадают; при этом можно взять  $s_0$  и  $t_0$  одинаковой длины. Продолжения  $s_0$  и  $t_0$  и число  $z_0$  находятся эффективно, так как мы можем рекурсивно перечислять все такие кортежи  $\langle s_0, t_0, z_0 \rangle$ . Положим  $u_0 = s_0 - \tilde{g}_0$  и  $v_0 = t_0 - \tilde{g}_0$ .

**Подшаг  $q+1$ .** Согласно замечанию (ii), существуют такие  $m$ -допустимые продолжения  $s'$  и  $s''$  сегмента  $\tilde{g}_{q+1} \cup u_q$  и число  $z_{q+1}$ , что  $\varphi_n^{[s']}(z_{q+1})$  и  $\varphi_n^{[s'']}(z_{q+1})$  определены и не равны. Согласно замечанию (i), существует такое  $m$ -допустимое продолжение  $t$  сегмента  $\tilde{g}_{q+1} \cup v_q$ , что  $\varphi_n^{[t]}(z_{q+1})$  определено. Поэтому мы можем выбрать сегменты  $s_{q+1}$  и  $t_{q+1}$  так, что  $s_{q+1}$  —  $m$ -допустимое продолжение сегмента  $\tilde{g}_{q+1} \cup u_q$ ,  $t_{q+1}$  —  $m$ -допустимое продолжение  $\tilde{g}_{q+1} \cup v_q$  и  $\varphi_n^{[s_{q+1}]}(z_{q+1})$  и  $\varphi_n^{[t_{q+1}]}(z_{q+1})$  определены и не равны; при этом можно взять сегменты  $s_{q+1}$  и  $t_{q+1}$  равной длины. Как и на подшаге 0,  $z_{q+1}$ ,  $s_{q+1}$  и  $t_{q+1}$  находятся эффективно, так как интересующие нас продолжения и вычисления могут быть рекурсивно перечислены. Положим

$$u_{q+1} = s_{q+1} - \tilde{g}_{q+1} \text{ и } v_{q+1} = t_{q+1} - \tilde{g}_{q+1}.$$

Заметим, что  $u_0 \subset u_1 \subset \dots \subset u_{2^p-1}$  и  $v_0 \subset v_1 \subset \dots \subset v_{2^p-1}$ . Пусть  $w$  — наименьшее число, превосходящее все элементы области определения  $u_{2^p-1}$  (легко видеть, что область определения  $u_{2^p-1}$ , равная области определения  $v_{2^p-1}$ , непуста). Положим  $h^{m+1}(p+1) = w$ ,

$$f_1^{m+1} = u_{2^p-1} \text{ на } \{z \mid h^{m+1}(p) \leq z < h^{m+1}(p+1)\},$$

$$f_2^{m+1} = v_{2^p-1} \text{ на } \{z \mid h^{m+1}(p) \leq z < h^{m+1}(p+1)\}.$$

Этим заканчивается индуктивное определение сегментов  $h^{m+1}$ ,  $f_1^{m+1}$  и  $f_2^{m+1}$ . (Непосредственно проверяется, что условия по-прежнему выполняются. Далее, если используется подшаг (c), то функция  $g$  рекурсивна относительно  $\varphi_n^g$ . Действительно, мы сможем вычислять функцию  $g$ , если сумеем для каждого интервала  $\{z \mid h^{m+1}(p) \leq z < h^{m+1}(p+1)\}$ ,  $p = 0, 1, \dots$ , решить, с какой из двух функций  $f_1^{m+1}$  или  $f_2^{m+1}$  согласуется  $g$  на этом интервале. Допустим, что мы вычислили функцию  $g$  на  $\{z \mid z < h^{m+1}(p)\}$ ; тогда можно найти такое  $q \leq 2^p - 1$ , что  $\tilde{g}_q \subset g$ , и мы сможем вычислить  $\varphi_n^{[s_q]}(z_q)$  и  $\varphi_n^{[t_q]}(z_q)$ . Одно и только одно из этих значений согласуется со значением  $\varphi_n^g(z_q)$ . Если это первое из них, то функция  $g$  совпадает с  $f_1^{m+1}$  на всем рассматриваемом интервале, в про-

тивном случае  $g$  совпадает на этом интервале с  $f_2^{m+1}$ .) Этим заканчивается описание этапа  $2n+2$ .

Пусть  $A = \{x \mid g(x) = 1\}$ . Остается показать, что  $A$  обладает желаемыми свойствами.  $A$  не рекурсивно; в противном случае  $g = \varphi_n$  при некотором  $n$ , что противоречит построению на этапе  $2n+1$ . Пусть  $B \leq_t A$ , т. е.  $c_B = \varphi_n^g$  для некоторого  $n$ . Если этап  $2n+2$  кончается подшагом (b), то  $\varphi_n^g$  рекурсивна и, значит, множество  $B$  рекурсивно. Если же используется подшаг (c), то  $g$  рекурсивна относительно  $\varphi_n^g$  и  $A \leq_t B$ . Доказательство теоремы закончено. ■

Возникает вопрос, насколько трудно перейти от индексов функций  $h^m$ ,  $f_1^m$  и  $f_2^m$  к индексам функций  $h^{m+1}$ ,  $f_1^{m+1}$  и  $f_2^{m+1}$ ? В случае, когда  $m = 2n+1$ , это может быть сделано эффективно, если мы умеем решать частные случаи проблем остановки. Однако для  $m = 2n+2$  необходимо на обоих подшагах (a) и (b) уметь проверять принадлежность элементов множеству  $\{x \mid W_x — бесконечное\}$  (см. упр. 13-34). (На подшаге (c), если он достигается, процедура эффективна.) Таким образом, справедливо

**Следствие XVII (a).** ( $\exists a$ ) [ $0 < a < 0''$  & ( $\exists b$ ) [ $b < a \Rightarrow b=0$ ]].

**Доказательство.** См. выше. ■

Отметим, что, согласно упр. 10-11, минимальная степень не может быть рекурсивно перечислимой.

Эта теорема и ее следствие допускают следующую релятивизацию.

**Следствие XVII (b).** ( $\forall d$ ) ( $\exists a$ ) [ $d < a < d''$  & ( $\forall b$ ) [ $d \leq b < a \Rightarrow d = b$ ]].

**Доказательство.** См. упр. 13-34.

## § 13.6. ЧАСТИЧНЫЕ СТЕПЕНИ

Сводимость по перечислимости ( $\leq_e$ ) и операторы перечисления определены нами в § 9.7. Мы полагали  $f \leq_e g$ , если  $\tau(f) \leq_e \tau(g)$ , и  $f \equiv_e g$ , если  $f \leq_e g$  и  $g \leq_e f$ . Образуя классы эквивалентности относительно  $\equiv_e$  в совокупности всех всюду определенных функций, мы получаем упорядочение  $e$ -степеней (всюду определенных функций) относительно  $e$ -сводимости. Это упорядочение канонически изоморфно упорядочению Т-степеней, так как по следствию 9-XXIV  $f \leq_e g \Leftrightarrow \tau(f) \leq_T \tau(g)$ . При этом изоморфизме Т-степень множества  $\tau(f)$  соответствует  $e$ -степени функции  $f$ , и, обратно,  $e$ -степень функции  $c_A$  соответствует Т-степени множества  $A$  (см. теорему 9-VII). Имея в виду этот изоморфизм, мы иногда называем  $e$ -степени всюду определенных функций Т-степенями. Можно образовать классы эквивалентности относительно  $\equiv_e$  и в совокупности всех функций (не обязательно всюду опре-

деленных). Получающиеся при этом е-степени называются *частичными степенями*, а их упорядочение по сводимости  $\leq_e$  называется *упорядочением частичных степеней*. В нем существует, например, наименьшая частичная степень, состоящая из всех частично рекурсивных функций.

Всякая Т-степень (всюду определенных функций) является подмножеством некоторой частичной степени. Всякую частичную степень, содержащую некоторую Т-степень (всюду определенных функций), назовем *тотальной степенью*. (Таким образом, частичная степень тотальна тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну всюду определенную функцию.) Понятно, что тотальные степени образуют подупорядочение частичных степеней, изоморфное упорядочению Т-степеней (рассмотренному в предыдущих разделах). Всякая ли частичная степень тотальна, или же упорядочение частичных степеней более обширно? Мы ответим на этот вопрос следующей теоремой, анонсированной Медведевым (см. § 13.7).

**Теорема XVIII.** ( $\exists \psi$ ) [ $\psi$  не частично рекурсивна и  $(\forall f)[f \leq_e \psi \Rightarrow f$  рекурсивна]]<sup>1)</sup>.

**Доказательство.** Напомним, что  $\Phi_n$  обозначает оператор перечисления с индексом  $n$ . В доказательстве мы будем пользоваться следующими обозначениями.

$\Phi_n(\psi)$  служит сокращением для  $\Phi_n(\tau(\psi))$ . (Так что множество  $\Phi_n(\psi)$  может и не быть однозначным.)

Если множество  $\Phi_n(\psi)$  однозначно, мы сокращаем также запись  $\tau^{-1}(\Phi_n(\psi))$  до  $\Phi_n(\psi)$ . (Теперь, например, можно написать  $f \leq_e \psi \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\exists n)[f = \Phi_n(\psi)]$ .)

Функция  $\psi$  будет называться *конечным сегментом*, если (как и раньше) область определения функции  $\psi$  конечна. Конечный сегмент  $\tilde{\psi}$  будет называться *монотонным продолжением* сегмента  $\psi$ , если  $\psi \subset \tilde{\psi}$  и  $(\forall x)(\forall y)[[x \in \text{Arg } \psi \text{ и } y \in \text{Arg } (\tilde{\psi} - \psi)] \Rightarrow x < y]$ .

Мы докажем теорему, построив искомую функцию  $\psi$  как объединение последовательности конечных сегментов  $\psi_0, \psi_1, \dots$ , где ( $m < n \Rightarrow \psi_n$  — монотонное продолжение сегмента  $\psi_m$ ).

**Этап 0.** Положим  $\psi_0 = \emptyset$ .

**Этап  $2n + 1$ .** Пусть  $m = 2n$ . Пусть  $z$  — наименьшее число, большее всех элементов из области определения функции  $\psi_m$ .

<sup>1)</sup> Напомним, что автор использует латинские буквы для обозначения всюду определенных функций, в то время как греческими буквами обозначаются произвольные функции. — Прим. перев.

Проверим, определено ли  $\varphi_n(z)$ . Если нет, полагаем

$$\psi_{m+1} = \psi_m \cup \{(z, 0)\}.$$

Если же определено, то положим

$$\psi_{m+1} = \psi_m \cup \{(z, \varphi_n(z) + 1)\}.$$

(Этап  $2n + 1$  обеспечивает выполнение соотношения  $\psi \neq \varphi_n$ ; поэтому функция  $\psi$  не может быть частично рекурсивной.)

**Этап  $2n + 2$ .** Пусть  $m = 2n + 1$ .

**Подэтап (a).** Проверим, существует ли такое монотонное продолжение  $\tilde{\psi}$  сегмента  $\psi_m$ , что  $\Phi_n(\tilde{\psi})$  не однозначно. Если существует, то положим  $\psi_{m+1} = \tilde{\psi}$  и перейдем к этапу  $2n + 3$ . Если же нет, перейдем к подэтапу (b).

**Подэтап (b).** Проверим, существуют ли такие число  $w$  и монотонные продолжения  $\tilde{\psi}^1$  и  $\tilde{\psi}^2$  сегмента  $\psi_m$ , что значения функций  $\Phi_n(\tilde{\psi}^1)$  и  $\Phi_n(\tilde{\psi}^2)$  определены и не равны при значении аргумента  $w$ . Если не существуют, то пусть  $\psi_{m+1} = \psi_m$ . (В этом случае функция  $\Phi_n(\psi)$  должна быть общерекурсивной, если только она всюду определена, так как ее значения можно эффективно вычислять, перечисляя все монотонные продолжения сегмента  $\psi_m$  и подставляя их в  $\Phi_n$ .) Если же существуют, то положим  $\psi_{m+1} = \psi_m \cup \{(z, 0)\}$ , где  $z$  — наименьшее из чисел, больших всех элементов областей определения как сегмента  $\tilde{\psi}^1$ , так и сегмента  $\tilde{\psi}^2$ . (В этом случае функция  $\Phi_n(\psi)$  обязательно не определена в точке  $w$ , так как иначе функция  $\psi$  вместе с  $\tilde{\psi}^1$  или  $\tilde{\psi}^2$  могли бы быть использованы для построения монотонного продолжения  $\tilde{\psi}$  сегмента  $\psi_m$ , для которого множество  $\Phi_n(\tilde{\psi})$  не было бы однозначным, а это противоречит результату проверки на подэтапе (a).)

Положим  $\psi = \bigcup_i \psi_i$ . Функция  $\psi$  не может быть частично рекурсивной (см. этап  $2n + 1$ ), и для всякой функции  $f$ ,  $f \leq_e \psi \Rightarrow f$  общерекурсивна (см. этап  $2n + 2$ ). ■

Таким образом, упорядочение частичных степеней более обширно, чем упорядочение тотальных степеней. В § 13.7 мы дадим более широкое обобщение понятия степени неразрешимости.

**Следствие XVIII.** ( $\exists \psi$ ) [ $\psi$  рекурсивно перечислима относительно  $0'$ , и  $\psi$  не частично рекурсивна, и  $(\forall f)[f \leq_e \psi \Rightarrow f$  общерекурсивна]].

**Доказательство.** См. упр. 13-37. ■

В упр. 13-38 мы даем простое доказательство теоремы XVIII (но не следствия XVIII), опирающееся на понятие категории множества.

Если  $f \leq_e \psi$ , то по определению  $f = \Psi(\psi)$  для некоторого частично рекурсивного оператора  $\Psi$  (см. § 9.8). Зададимся следующим вопросом: вытекает ли из соотношения  $f \leq_e \psi$  равенство  $f = \Psi(\psi)$  для некоторого рекурсивного оператора  $\Psi$ ? Приводимая ниже теорема содержит отрицательный ответ на этот вопрос. Первое доказательство этого результата восходит к Майхиллу и Шепердсону. Мы приводим доказательство, принадлежащее Рабину.

**Теорема XIX.**  $(\exists f)(\exists \psi)[f \leq_e \psi, \text{ но ни для какого рекурсивного оператора } \Psi \text{ не выполняется } f = \Psi(\psi)]$ .

**Доказательство<sup>1)</sup>.** Воспользуемся обозначениями из предыдущего доказательства. Мы должны доказать, что  $(\exists f)(\exists \psi)[f \leq_e \psi \& (\forall m)[f = \Phi_m(\psi) \Rightarrow (\exists \psi')[\Phi_m(\psi') \text{ не однозначно}]]]$ .

Построим функцию  $f$  как объединение последовательности начальных сегментов  $f_0, f_1, \dots$ , а функцию  $\psi$  как объединение последовательности конечных сегментов  $\psi_0, \psi_1, \dots$ , причем  $m < n \Rightarrow \psi_n$  есть монотонное продолжение сегмента  $\psi_m$ . Областью определения сегмента  $f_{n+1}$  служит  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Сегмент  $\psi_{n+1}$  будет иметь областью определения множество  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , где  $x_0, x_1, \dots$  — некоторая возрастающая последовательность. Далее, для  $0 \leq i \leq n$  будет выполняться равенство  $\psi_{n+1}(x_i) = \tau^*(\langle f(0), f(1), \dots, f(i) \rangle)$  (см. конец § 5.6). Таким образом, функция  $\psi$  однозначно определяется функцией  $f$  и последовательностью  $x_0, x_1, \dots$ . Действительно, сегмент  $\psi_{n+1}$  определяется, если даны  $f_{n+1}(n), \psi_n$  и  $x_n$ . Если определены сегменты  $f_0, f_1, \dots$  и  $\psi_0, \psi_1, \dots$ , подчиненные этим условиям, и мы положим  $f = \bigcup_i f_i$  и  $\psi = \bigcup_i \psi_i$ , то очевидно, что  $f \leq_e \psi$ , так как если дан произвольный пересчет упорядоченных пар, образующих (график)  $\psi$ , мы можем восстанавливать все более длинные начальные сегменты  $f$ .

Построим сегменты, участвующие в определении искомых функций.

<sup>1)</sup> Д. Г. Скордев нашел ниже следующее, весьма простое доказательство теоремы XIX. В качестве  $f$  берется произвольная всюду определенная функция одного аргумента, не являющаяся общерекурсивной; в качестве  $\psi$  — функция, задаваемая соотношением

$$\psi(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\pi_1(z)) = \pi_2(z), \\ \text{не определено в противном случае} \end{cases}$$

(определение  $\pi_1$  и  $\pi_2$  см. в § 5.3). Легко устанавливается, что  $f \leq_e \psi$ . Предположим, что существует такой рекурсивный оператор  $\Psi$ , что  $f = \Psi(\psi)$ . В силу теоремы 9-ХХI (а) выполняется равенство  $f = \Psi(\lambda z[0])$ , и функция  $f$ , в противоречие с ее выбором, оказывается частично рекурсивной (как результат применения рекурсивного оператора к частично рекурсивной функции). — Прил. ред.

**Этап 0.** Положим  $f_0 = \emptyset$  и  $\psi_0 = \emptyset$ .

**Этап  $n + 1$ .** Проверим, существует ли такой  $y$ , что  $\langle n, y \rangle \in \Phi_n(\tilde{\psi})$  для некоторого конечного монотонного продолжения  $\tilde{\psi}$  сегмента  $\psi_n$ . Если нет, положим  $f_{n+1}(n) = 0$  и  $x_n = x_{n-1} + 1$  (при  $n = 0$  пусть  $x_0 = 0$ ). Если же такой  $y$  существует, положим  $f_{n+1}(n) = y + 1$  и пусть  $x_n$  — наименьшее из чисел, больших всех элементов области определения  $\tilde{\psi}$ . В обоих случаях сегмент  $\psi_{n+1}$  определяется по  $f_{n+1}, \psi_n$  и  $x_n$ , как описано выше.

Положим  $\psi = \bigcup_i \psi_i$  и  $f = \bigcup_i f_i$ .

Как мы уже отмечали,  $f \leq_e \psi$ . Предположим, что  $f = \Phi_n(\psi)$ . Но тогда по построению для некоторого  $\psi^*$ ,  $\psi^* \supset \psi$ ,  $\Phi_n(\psi^*)$  не будет однозначным (возьмем  $\psi^* = \psi \cup \tilde{\psi}$ , где сегмент  $\tilde{\psi}$  описан на этапе  $n + 1$ ). Этим заканчивается доказательство. ■

**Следствие XIX.**  $(\exists f)(\exists \psi)[f \text{ рекурсивна относительно } 0', \text{ и } f \leq_e \psi, \text{ но для всякого рекурсивного оператора } \Psi \text{ справедливо соотношение } f \neq \Psi(\psi)]$ .

**Доказательство.** См. упр. 13-29. ■

Другие приемы, использованные в предыдущих разделах, также могут быть применены к изучению частичных степеней. Так, следующая теорема аналогична теореме VI.

**Теорема XX.**  $(\forall \varphi)[\varphi \text{ не частично рекурсивна} \Rightarrow (\exists \psi)[\varphi \not\leq_e \psi \& \psi \not\leq_e \varphi]]$ .

**Доказательство.** Эту теорему можно доказать по аналогии с теоремой VI (см. упр. 13-40). Существует также доказательство, опирающееся на понятие категории множества, аналогичное доказательству теоремы XIII (см. упр. 13-41). ■

Частичные степени изучены не очень подробно. Например, не известно, справедлив ли аналог теоремы XVII (о минимальных степенях). Мало известно об автоморфизмах этого упорядочения и инвариантных относительно них свойствах. Следующий вопрос также открыт: инвариантна ли совокупность тотальных степеней относительно всех автоморфизмов упорядочения частичных степеней?

### § 13.7. РЕШЕТКА МЕДВЕДЕВА

В предыдущих параграфах этой главы мы рассмотрели две структуры: упорядочение Т-степеней (главный объект наших исследований) и более обширное упорядочение частичных степе-

ней. Теперь мы рассмотрим еще более обширное образование, *решетку степеней трудности*, введенную Медведевым [1955а]. Изучение этой структуры углубляет наше понимание некоторых уже полученных результатов о Т-степенях и частичных степенях, к тому же оказывается, что она устроена более регулярно, чем упорядочения Т-степеней и частичных степеней. Как мы увидим, *степени трудности* являются объектами более высокого логического типа (т. е. более абстрактными), чем Т-степени. Степень трудности представляет собой совокупность множеств всюду определенных функций, тогда как Т-степень может рассматриваться как множество всюду определенных функций (см. § 13.6).

**Определение.** Всякая совокупность  $\mathcal{A}$  всюду определенных функций называется *массовой проблемой*.

Этим определением формализуются следующие представления. Если дана некоторая неформальная „проблема“, то соответствующая ей массовая проблема является на интуитивном уровне совокупностью функций, каждая из которых „решает“ данную „проблему“, причем каждое „решение“ „проблемы“ порождает хотя бы одну из этих функций. Приведем некоторые примеры.

**Пример 1.** Одноэлементное множество  $\{c_A\}$  соответствует в качестве массовой проблемы „проблеме“ разрешения множества  $A$ .

**Пример 2.** Множество  $\{f \mid \text{Val } f = A\}$  соответствует как массовая проблема „проблеме“ перечисления множества  $A$  (при  $A \neq \emptyset$ ).

**Пример 3.** Множество  $\{f \mid A = \{x \mid f(x) = 0\}\}$  — другая массовая проблема, соответствующая „проблеме“ разрешения из примера 1.

**Пример 4.** Множество  $\{f \mid \text{Val } f = \{2x \mid x \in A\}\}$  — другая массовая проблема, соответствующая „проблеме“ перечисления из примера 2.

Если дана произвольная массовая проблема  $\mathcal{A}$ , то существует, конечно, по крайней мере одна соответствующая ей неформальная „проблема“, именно „проблема“ вычисления хотя бы одной функции из совокупности  $\mathcal{A}$ .

Массовые проблемы из примеров 1 и 3 в интуитивном смысле „эквивалентны“, равно как проблемы из примеров 2 и 4. Далее, массовые проблемы из примеров 2 и 4 „сводятся“ к массовым проблемам из примеров 1 и 3. Определения, которые мы дадим ниже, делают эти понятия точными.

По теореме 9-ХХIII существует такая рекурсивная функция  $\sigma$ , что для любого  $z$ , если  $\Psi$  — частично рекурсивный оператор, определяемый оператором  $\Phi_z$ , то  $\Phi_{\sigma(z)}$  определяет рекурсивный

оператор, совпадающий с оператором  $\Psi$  на всех всюду определенных функциях из области определения оператора  $\Psi$ .

**Определение.** Обозначим через  $\Psi_z$  рекурсивный оператор, определяемый оператором  $\Phi_{\sigma(z)}$ .

**Определение.** Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — массовые проблемы. Проблема  $\mathcal{A}$  называется *сводимой* к  $\mathcal{B}$ , если  $(\exists z)[\Psi_z(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}]$ .

Приводящие к этому определению мотивы таковы. Массовая проблема  $\mathcal{A}$  сводима к  $\mathcal{B}$ , если существует эффективная процедура, дающая по произвольной функции-элементу проблемы  $\mathcal{B}$  — некоторый элемент из  $\mathcal{A}$ , т. е. мы располагаем возможностью по произвольному „решению“ проблемы  $\mathcal{B}$  строить некоторое „решение“ проблемы  $\mathcal{A}$ . (Может создаться ошибочное впечатление, что  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  фигурируют в определении в порядке, обратном к применявшемуся ранее в определениях сводимости других типов.)

**Определение.** Массовая проблема  $\mathcal{A}$  называется *эквивалентной* проблеме  $\mathcal{B}$ , если  $\mathcal{A}$  сводится к  $\mathcal{B}$ , а  $\mathcal{B}$  сводится к  $\mathcal{A}$ .

Очевидно, что отношение сводимости рефлексивно. Оно также транзитивно, так как совокупность рекурсивных операторов замкнута относительно суперпозиции. Поэтому *эквивалентность* массовых проблем есть отношение эквивалентности.

**Определение.** Классы эквивалентности массовых проблем называются *степенями трудности*. Отношение сводимости корректно определено на этих классах эквивалентности и индуцирует *упорядочение степеней трудности по сводимости*.

**Обозначения.** Степени трудности будут обозначаться буквами  $A, B, \dots$ . Соотношение  $A \leq B$  означает, что массовая проблема  $\mathcal{A}$  сводима к  $\mathcal{B}$ , если  $\mathcal{A} \in A$  и  $\mathcal{B} \in B$ . Неравенство  $A < B$  означает, что  $A \leq B$  и  $B \not\leq A$ .

**Примеры.** Рассмотрим следующие массовые проблемы:

- (1)  $\{c_K\}$ .
- (2)  $\{f \mid \text{Val } f = K\}$ .
- (3)  $\{f \mid K = \{x \mid f(x) = 0\}\}$ .
- (4)  $\{f \mid \text{Val } f = \{2x \mid x \in K\}\}$ .
- (5)  $\{f \mid \text{Val } f = K'\}$ .

Как сводятся эти проблемы друг к другу? Очевидно, что (1) и (3) эквивалентны (и потому принадлежат одной степени трудности). Эквивалентны также проблемы (2) и (4). Массовая проблема (2) сводится к (1), но (1) не сводится к (2) (в противном случае  $c_K$  была бы рекурсивной функцией). Поэтому степень трудности проблем (1) и (3) отлична от степеней трудности проблем (2) и (4) и притом превосходит последнюю. Что можно сказать о проблеме (5)? Если задана функция  $c_K$ , мы можем перечислять множе-

ство  $K'$ ; обратно, если дан какой-нибудь способ перечисления множества  $K'$ , мы можем перечислять и  $K$ , и  $\bar{K}$  (поскольку  $K \leqslant, \leqslant_1 K'$  и  $\bar{K} \leqslant_1 K'$ ), а потому мы можем вычислять функцию  $c_K$ . Таким образом, проблема (5) принадлежит степени трудности проблем (1) и (3). (В упр. 13-42 мы формально докажем последние утверждения посредством явного построения соответствующих рекурсивных операторов.) Итак, понятие степени трудности делает точным наше интуитивное представление о том, что „умение“ перечислять множество  $K'$  „эквивалентно“ „умению“ разрешать множество  $K$ . (Сделанные замечания остаются верными, если  $K$  заменить произвольным непустым множеством  $A$ , исключив некоторые специальные множества (например множества вида  $A = \bar{B} \oplus \oplus B$ ), для которых все массовые проблемы, соответствующие (1) — (5), принадлежат одной степени трудности.)

Среди степеней трудности существует наименьшая. Если  $f$  — произвольная рекурсивная функция, то проблема  $\{f\}$  сводится к любой массовой проблеме. Назовем эту наименьшую степень трудности *рекурсивной* и обозначим ее 0. Всякая массовая проблема, содержащая хотя бы одну рекурсивную функцию, принадлежит 0. Поэтому 0 содержит  $2^{2^{\aleph_0}}$  элементов. Обратно, всякая массовая проблема из 0 должна содержать рекурсивную функцию. Примерами массовых проблем степени 0 служат  $\{c_A\}$  для любого рекурсивного множества  $A$  и  $\{f \mid \text{Val } f = B\}$  для любого рекурсивно перечислимого непустого множества  $B$ .

Существует и наибольшая степень трудности; всякая массовая проблема (тривиально) сводится к пустой массовой проблеме. Обозначим эту наибольшую степень трудности (пустой массовой проблемы) 1. (Медведев использовал для этой степени символ  $\infty$ .)

**Определение.** Если даны число  $n$  и функция  $f$ , то  $n \otimes f$  будет обозначать такую функцию  $h$ , что  $h(0) = n$  и  $h(x + 1) = f(x)$  для всех  $x$ .

Если даны функции  $f$  и  $g$ , обозначим через  $f \wedge g$  такую функцию  $h$ , что  $h = \lambda x[h(2x)]$  и  $g = \lambda x[h(2x + 1)]$ .

**Определение.** Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — массовые проблемы. Положим  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \{f \mid (\exists g)(\exists h)[g \in \mathcal{A} \wedge h \in \mathcal{B} \wedge f = g \wedge h]\}$ ,

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{f \mid (\exists g)[(g \in \mathcal{A} \wedge f = 0 \otimes g) \text{ или } (g \in \mathcal{B} \wedge f = 1 \otimes g)]\}$ .

Легко показать, что операции  $\wedge$  и  $\vee$  корректно определены на степенях (см. упр. 13-43). Поэтому естественно дать следующее

**Определение.**  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$  — степень трудности проблемы  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{A} \in A$ ,  $\mathcal{B} \in B$ .  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$  — степень трудности проблемы  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{A} \in A$ ,  $\mathcal{B} \in B$ . В этом случае  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$  называется *объединением* степеней  $A$  и  $B$ ;  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$  называется *пересечением* степеней  $A$  и  $B$ .

Это определение *объединения* сходно с нашим обычным понятием *сочленения* множеств; в самом деле, если  $A$  — степень трудности проблемы  $\{c_A\}$ , а  $B$  — степень трудности проблемы  $\{c_B\}$ , то  $A \wedge B$  — степень трудности проблемы  $\{c_{A \wedge B}\}$ .

**Теорема XXI** (Медведев). *Операции  $\wedge$  и  $\vee$  сопоставляют степеням трудности  $A$  и  $B$  их наименьшую верхнюю и наибольшую нижнюю грани соответственно в упорядочении степеней трудности. Поэтому данное упорядочение есть решетка. Эта решетка дистрибутивна.*

(Отметим, что символы  $\wedge$  и  $\vee$  перевернуты по отношению к  $\cup$  и  $\cap$  — обычным обозначениям объединения и пересечения в решетках. Мы выбрали символы  $\wedge$  и  $\vee$  ввиду их обычного употребления в логике в качестве символов конъюнкции и дизъюнкции. Проблема  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$  представляет собой „умение“ решать и  $\mathcal{A}$ , и  $\mathcal{B}$ , а проблема  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$  — „умение“ решать либо  $\mathcal{A}$ , либо  $\mathcal{B}$ . Это неудобство в обозначениях можно было бы исправить (причем обозначения стали бы более естественными и в некоторых других интуитивных отношениях), если бы мы перевернули нашу решетку и считали бы, что проблема тем выше располагается в рассматриваемом упорядочении, чем легче она решается. Мы этого, однако, не делаем, чтобы наши рассмотрения были сходными по форме с изучением Т-степеней и частичных степеней.)

**Доказательство.** Пусть  $C$  — некоторая верхняя грань степеней трудности  $A$  и  $B$ . Выберем в степенях  $A$ ,  $B$  и  $C$  по представителю; пусть это проблемы  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$  соответственно. Пусть оператор  $\Psi_m$  отображает  $\mathcal{C}$  в  $\mathcal{A}$ , а оператор  $\Psi_n$  отображает  $\mathcal{C}$  в  $\mathcal{B}$ . Определим оператор  $\Phi^1$  так, что  $[\Phi^1(f)](2x) = [\Psi_m(f)](x)$  и  $[\Phi^1(f)](2x + 1) = [\Psi_n(f)](x)$ . Очевидно, что  $\Phi^1$  — рекурсивный оператор и что  $\Phi^1(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ . Поэтому  $A \wedge B$  — наименьшая верхняя грань степеней  $A$  и  $B$ .

Пусть  $D$  — некоторая нижняя грань степеней трудности  $A$  и  $B$ . Выберем в  $D$  представителя  $\mathcal{D}$ . Пусть оператор  $\Psi_p$  отображает  $\mathcal{A}$  в  $\mathcal{D}$ , а оператор  $\Psi_q$  отображает  $\mathcal{B}$  в  $\mathcal{D}$ . Определим оператор  $\Phi^2$  так, что  $\Phi^2(f) = \Psi_p(\lambda x[f(x + 1)])$ , если  $f(0) = 0$ , и  $\Phi^2(f) = \Psi_q(\lambda x[f(x + 1)])$ , если  $f(0) \neq 0$ . Очевидно, что  $\Phi^2$  — рекурсивный оператор и  $\Phi^2(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \subset \mathcal{D}$ . Поэтому  $A \vee B$  — наибольшая нижняя грань степеней  $A$  и  $B$ . (В упр. 13-44 мы рассмотрим формальные определения операторов  $\Phi^1$  и  $\Phi^2$  и вопросы равномерности.)

Таким образом, показано, что упорядочение степеней трудности есть решетка. Чтобы доказать ее дистрибутивность, достаточно проверить, что

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

(см. упр. 12-4). Пусть даны степени  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Выберем в  $A$ ,  $B$  и  $C$  по представителю  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$  соответственно. Тогда массовая проблема  $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$  состоит по определению из всех функций вида  $f \wedge (0 \otimes g)$  или  $f \wedge (1 \otimes h)$ , где  $f \in \mathcal{A}$ ,  $g \in \mathcal{B}$  и  $h \in \mathcal{C}$ , тогда как массовая проблема  $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$  состоит из всех функций вида  $0 \otimes (f \wedge g)$  или  $1 \otimes (f \wedge h)$ . Каждая из этих массовых проблем тривиально сводится к другой, что и доказывает закон дистрибутивности. ■

Будем называть эту решетку *решеткой Медведева*. Легко показать, что она не является булевой алгеброй (см. упр. 13-45).

Некоторые виды степеней трудности представляют особый интерес.

**Определение.** Массовая проблема  $\mathcal{A}$  называется *проблемой разрешения*, если  $\mathcal{A} = \{c_A\}$  для некоторого  $A$ .

Массовая проблема  $\mathcal{B}$  называется *проблемой перечисления*, если  $\mathcal{B} = \{f \mid \text{Val } f = B\}$  для некоторого  $B$ .

Степень  $A$  называется *степенью разрешимости* (не путать с рекурсивной степенью 0), если  $A$  содержит некоторую проблему разрешения.

Степень  $B$  называется *степенью перечислимости*, если  $B$  содержит некоторую проблему перечисления.

**Обозначения.**  $S_A$  обозначает степень разрешимости, содержащую  $\{c_A\}$ .

$E_B$  обозначает степень перечислимости, содержащую  $\{f \mid \text{Val } f = B\}$ , если  $B \neq \emptyset$ , или 0, если  $B = \emptyset$ .

Для произвольной функции  $\psi$  мы пользуемся сокращениями  $E_\psi$  вместо  $E_{(\psi)}$  и  $S_\psi$  вместо  $S_{\tau(\psi)}$ .

**Теорема XXII.** (a)  $(\forall A)[S_A = E_{c_A}]$  (а потому всякая степень разрешимости является степенью перечислимости).

(b)  $(\forall A)(\exists \psi)[E_A = E_\psi]$  (т. е. всякая степень перечислимости содержит проблему перечисления некоторой функции).

(c)  $S_A \leq S_B \Leftrightarrow A \leq_T B$  (а потому изученное ранее упорядочение  $T$ -степеней изоморфно упорядочению степеней разрешимости в решетке Медведева).

(d)  $E_\psi \leq E_\phi \Leftrightarrow \psi \leq_e \phi$  (а потому изученное ранее упорядочение частичных степеней изоморфно упорядочению степеней перечислимости в решетке Медведева, и (в силу (a)) композиция этого изоморфизма с изоморфизмом  $T$ -степеней на тотальные степени, описанным в начале § 13.6, дает изоморфизм из (c)).

**Доказательство.** (a) Легко проверяется, что  $E_{c_A} = S_{c_A} = S_A$ .

(b) Очевидно,  $E_{c_A} = E_A$ , где  $c_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$ .

(c) Это вытекает из теоремы 9-XXV.

(d)  $\Leftarrow$ . Пусть  $\psi \leq_e \phi$ . Если (графики)  $\psi$  и  $\phi$  не пусты, то существует частичнорекурсивный оператор, переводящий всякую функцию с областью значений  $\tau(\phi)$  в некоторую функцию с областью значений  $\tau(\psi)$ . По теореме 9-ХХIII должен найтись рекурсивный оператор, делающий то же, и потому  $E_\psi \leq E_\phi$ . Если график  $\psi$  пуст (функция  $\psi$  нигде не определена), то  $E_\psi = 0$  и утверждение очевидно, верно. Если график  $\phi$  пуст (функция  $\phi$  нигде не определена), то функция  $\psi$  частичнорекурсивна и вновь  $E_\psi = 0$ .

$\Rightarrow$ . Пусть  $E_\psi \leq E_\phi$ . Если  $\psi$  и  $\phi$  определены хоть где-нибудь, то существует рекурсивный оператор, отображающий  $\{f \mid \text{Val } f = \tau(\phi)\}$  в  $\{f \mid \text{Val } f = \tau(\psi)\}$ . Поэтому, если дано произвольное перечисление множества  $\tau(\phi)$  (в любом порядке), мы можем перечислять график функции, перечисляющей (в этом порядке) множество  $\tau(\phi)$ , и, применяя описанный выше рекурсивный оператор, получить некоторое перечисление графика функции, перечисляющей множество  $\tau(\psi)$ . Поэтому  $\psi \leq_e \phi$ . Если функция  $\psi$  нигде не определена, то  $\psi \leq_e \phi$  тривиально. Если  $\psi$  где-то определена, а  $\phi$  — нигде, то  $E_\psi = 0$  и  $\{f \mid \text{Val } f = \tau(\psi)\}$  содержит рекурсивную функцию. Но тогда  $\psi$  частичнорекурсивна и соотношение  $\psi \leq_e \phi$  тривиально. ■

**Следствие XXII.** (a)  $(\forall A)[A \text{ рекурсивно} \Leftrightarrow S_A = 0]$ .

(b)  $(\forall \psi)[\psi \text{ частичнорекурсивна} \Leftrightarrow E_\psi = 0]$ .

(c)  $E_A \leq E_B \Leftrightarrow A \leq_e B$ .

**Доказательство** очевидно. ■

В силу последней теоремы мы можем считать, что  $T$ -степени и частичные степени (изучавшиеся в предыдущих разделах) вложены в решетку Медведева. Поэтому мы можем воспользоваться уже полученными результатами о  $T$ -степенях и частичных степенях для получения информации о решетке Медведева. (Например, немедленно получается существование несравнимых степеней трудности.) В следующей теореме перечисляются некоторые наиболее интересные результаты.

**Теорема ХХIII** (Медведев). (a)  $(\forall A)[A \neq 1 \Rightarrow (\exists B)[A \leq S_B]]$  (т. е. всякая степень трудности  $\neq 1$  сводима к некоторой степени разрешимости).

(b)  $(\forall A)(\exists B)[S_A < B \& (\forall C)[S_A < C \Rightarrow B \leq C]]$  (т. е. для всякой степени разрешимости  $S_A$  среди всех степеней, больших  $S_A$ , существует наименьшая степень).

(c)  $(\exists B)[0 < B \& (\forall C)[0 < C \Rightarrow B \leq C]]$  (т. е. существует наименьшая нерекурсивная степень).

(d)  $(\exists A)(\forall B)[A \neq 1 \& A \neq E_B]$  (т. е. существует степень  $\neq 1$ , не являющаяся степенью перечислимости).

(e)  $(\exists A)[E_A \neq 0 \wedge (\forall B)[S_B \neq 0 \Rightarrow S_B \leq E_A]]$  (т. е. существует нерекурсивная степень перечислимости, к которой не сводится никакая нерекурсивная степень разрешимости).

(f)  $(\exists A)(\forall B)[E_A \neq S_B]$  (т. е. существует степень перечислимости, не являющаяся степенью разрешимости).

**Доказательство.** (a) Пусть  $\mathcal{A} \in A$  и  $f \in \mathcal{A}$ . Положим  $B = \tau(f)$ ; тогда  $A \leq S_B$ .

(b) Пусть дано множество  $A$ . Построим

$$\mathcal{B} = \{f \mid (\exists g)(\exists n)[f = n \otimes g \wedge c_A = \Psi_n(g) \wedge (\forall m)[g \neq \Psi_m(c_A)]]\}.$$

Утверждение проверяется непосредственно (см. упр. 13-48).

(c) Следует из (b).

(d) Пусть  $A$  — наименьшая нерекурсивная степень, полученная в (c). Если бы  $A$  была степенью перечислимости, то по теоремам XX и XXII (d) нашлась бы не сравнимая с ней степень перечислимости, что противоречит (c).

(e) Построим функцию  $\psi$ , как в теореме XVIII, и положим  $A = \tau(\psi)$ .

(f) Следует из (e). ■

Как мы уже отмечали, многие другие результаты могут быть прямо выведены из уже известных; например, по теореме XVII существует степень разрешимости, минимальная среди нерекурсивных степеней разрешимости.

Мы выделили для специального рассмотрения степени разрешимости и перечислимости. Можно рассматривать и другие интересные семейства степеней трудности. Введем, например, следующее определение.

**Определение.** Массовая проблема  $\mathcal{A}$  называется *проблемой отделения*, если для некоторых множеств  $A$  и  $B$

$$\mathcal{A} = \{f \mid f(A) = 0 \text{ и } f(B) = 1\}.$$

Степень  $A$  называется *степенью отделимости*, если  $A$  содержит некоторую проблему отделения.

С помощью этого понятия теория непересекающихся пар множеств (описанная в конце § 7.7) может быть включена в общую теорию степеней трудности.

Другим примером служит следующее определение.

**Определение.**  $\mathcal{A}$  называется *проблемой 1-сведения*, если для некоторых  $A$  и  $B$

$$\mathcal{A} = \{f \mid f \text{ взаимно однозначна и } f^{-1}(B) = A\}.$$

Степень  $A$  называется *степенью 1-сводимости*, если  $A$  содержит некоторую проблему 1-сведения.

**Релятивизация** (см. § 9.3) в решетке Медведева обобщена и одновременно упрощена. Если задана произвольная степень трудности  $D$ , то множество  $\{A \mid A \leq D\}$  есть идеал в решетке. Можно построить факторрешетку, и естественно называть элементы этой факторрешетки *степенями трудности относительно  $D$* . При построении элементов факторрешетки каждая степень трудности  $A$  исходной решетки отождествляется со степенью  $A \wedge D$  (см. упр. 13-50); поэтому в частном случае, когда  $D$  — степень разрешимости, *степени разрешимости относительно  $D$*  из факторрешетки соответствуют степеням неразрешимости относительно  $D$  в смысле релятивизации, определенной в гл. 9 (где  $D = S_D$ ).

Решетка Медведева изучена не очень подробно. Не известно, в частности, равна ли мощность этой решетки  $2^{2^{N_0}}$ <sup>1)</sup>. Мало что известно о неглавных идеалах, автоморфизмах и теоретико-решеточных свойствах. Не известно, будут ли теоретико-решеточными свойства „быть степенью разрешимости“ и „быть степенью перечислимости“. Не известно, будет ли операция скачка на степенях разрешимости теоретико-решеточной или хотя бы теоретико-решеточной по отношению к степеням разрешимости, т. е. инвариантной относительно всех автоморфизмов решетки Медведева, отображающих степени разрешимости на себя.

В заключение опишем соотношения между решеткой Медведева и некоторыми нестандартными логиками.

**Теорема XXIV** (Медведев). Для любых степеней  $A$  и  $B$  совокупность  $\{C \mid B \leq A \wedge C\}$  имеет наименьший элемент.

(Совокупность  $\{C \mid B \leq A \wedge C\}$  является дуальным идеалом; теорема утверждает, что этот дуальный идеал главный.)

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{A} \in A$ ,  $\mathcal{B} \in B$ . Положим  $\mathcal{D} = \{h \mid (\exists g)(\exists n)[h = n \otimes g \wedge (\forall f)[f \in \mathcal{A} \Rightarrow \Psi_n(f \wedge g) \in \mathcal{B}]]\}$ .

Пусть  $D$  — степень проблемы  $\mathcal{D}$ . Тогда  $D$  — искомая степень. Чтобы проверить это, заметим сначала, что проблема  $\mathcal{B}$  сводима к  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{D}$ , так как  $\Phi^1(\mathcal{A} \wedge \mathcal{D}) \subset \mathcal{B}$ , где оператор  $\Phi^1$  определяется так, что  $\Phi^1(f \wedge (n \otimes g)) = \Psi_n(f \wedge g)$ . Возьмем, далее, произвольную проблему  $\mathcal{C}$ , для которой  $\mathcal{B}$  сводима к  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}$ . Тогда для некоторого  $n$  имеем  $\Psi_n(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$ ; но тогда  $\Phi^2(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$ , где оператор  $\Phi^2$  определяется так, что  $\Phi^2(g) = n \otimes g$ . Поэтому проблема  $\mathcal{D}$  сводится к  $\mathcal{C}$ . Непосредственно проверяется, что  $\Phi^1$  и  $\Phi^2$  — рекурсивные операторы, и доказательство заканчивается. ■

**Определение.**  $A \rightarrow B$  при заданных степенях  $A$  и  $B$  обозначает наименьший элемент совокупности  $\{C \mid B \leq A \wedge C\}$  (существует

<sup>1)</sup> На этот вопрос получен положительный ответ (Plattek R. A., A note on the cardinality of the Medvedev lattice, Proc. Amer. Math. Soc., 1970, 25, N 4, 917; Poulsen B. T., The Medvedev lattice of degrees of difficulty, Var. Publ. Mat. inst. Aarhus univ., 1970, N 12). — Прим. перев.

вание которого доказано в теореме XXIV). Назовем  $A \rightarrow B$  степенью трудности проблемы сведения  $B$  к  $A$ . Если  $C = A \rightarrow B$  для некоторых степеней  $A$  и  $B$ , мы называем  $C$  степенью сводимости (отметим, что  $(A \rightarrow B) = 0 \Rightarrow B \leq A$ ).

**Определение.** Положим  $(A \leftrightarrow B) = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ .

Рассмотрим выражения, построенные из переменных „ $A$ “, „ $B$ “, „ $C$ “, ... и символов „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “, „ $\rightarrow$ “ и „ $\leftrightarrow$ “, как обычно в исчислении высказываний. Назовем такое выражение истинным, если при произвольной подстановке степеней трудности вместо переменных степень трудности, обозначаемая всем выражением (где операции  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  и  $\leftrightarrow$  определены выше), есть 0.

**Пример 1.** „ $A \rightarrow A$ “ истинно, так как  $(A \rightarrow A) = 0$  для любой степени трудности  $A$ .

**Пример 2.** „ $A \leftrightarrow A$ “ истинно, так как  $(A \rightarrow A) = 0$  и  $0 \wedge 0 = 0$ .

**Пример 3.** Закон дистрибутивности „ $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ “ является истинным, так как решетка Медведева дистрибутивна и „ $A \leftrightarrow A$ “ истинно.

**Пример 4.** „ $((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$ “ истинно, как читатель может проверить сам.

**Пример 5.** „ $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ “ не истинно (см. упр. 13-51).

Рассмотренные выше выражения являются формулами логики высказываний (в обычном символизме). Можно показать, что всякое истинное выражение есть тавтология логики высказываний, т. е. теорема классической двузначной логики высказываний. Обратное неверно: пример 5 дает тавтологию, не являющуюся истинной. Можно показать (Медведев), что истинные выражения — это в точности теоремы позитивного исчисления высказываний (см. Гильберт и Бернайс [1939, том 2, доб. 3]).

**Определение.**  $\neg A = (A \rightarrow 1)$  (поэтому  $(\neg A) = 1$ , если  $A \neq 1$ , и  $(\neg A) = 0$ , если  $A = 1$ ).

Рассмотрим выражения, построенные, как выше, но с использованием дополнительного символа „ $\neg$ “. Медведев доказал, что в этом случае истинные выражения совпадают с теоремами интуиционистского исчисления высказываний (см. также упр. 13-52).

### § 13.8. ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы вновь возвращаемся к упорядочению Т-степеней, рассматривавшемуся нами в § 13.1—13.5. Доказанные уже в настоящей главе результаты об упорядочении степеней получены без приме-

нения методов приоритета из гл. 10. Если же методы приоритета объединить с методами, использованными в этой главе, то можно получить ряд более сильных результатов. Они включают как теоремы о рекурсивно перечислимых степенях, например две теоремы Сакса, упоминавшиеся в § 10.3, так и усиленные варианты теорем о степенях. (Например, Сакс использовал методы приоритета при доказательстве теоремы XVII и улучшил верхнюю оценку в следствии XVII (a) с  $0''$  до  $0'$ . Подобным образом Сакс воспользовался методами приоритета, чтобы сделать степени  $a$  и  $b$  из теоремы X рекурсивно перечислимыми.)

В качестве примера применения методов приоритета мы приводим специальный случай одной из главных теорем Сакса [1963b] и используем его, чтобы ответить на некоторые вопросы, оставшиеся открытыми в предыдущих параграфах. В этом доказательстве Сакса фридбергова идея приоритета существенно обобщается. По существу в этом доказательстве индивидуальным маркерам приоритета разрешается сдвигаться бесконечно много раз. Такой обобщенный метод приоритета в последнее время был использован для получения различных новых результатов (таких, как доказательство плотности рекурсивно перечислимых степеней) и улучшения более ранних результатов.

**Теорема XXV (Сакс).**  $[0' \leq c \& c \text{ рекурсивно перечислима относительно } 0'] \Rightarrow (\exists a) [a \text{ рекурсивно перечислима \&} a' = c]$ .

**Доказательство.** (Это доказательство частично основано на построениях Ейтса.) Пусть мы имеем множество  $C$ , рекурсивно перечислимое относительно множества  $K$ . Для доказательства, понятно, достаточно построить такое рекурсивно перечислимое множество  $A$ , что  $A' =_t C \oplus K$ . Так как  $C \leq_i K'$ , мы имеем в силу § 13.2 такую общерекурсивную функцию  $f$ , что  $C = \{x \mid W_{f(x)} \text{ конечно}\}$ . Перечисляя множество  $A$ , мы представляем себе натуральные числа выстроенные в виде бесконечной по строкам и столбцам матрицы, в которой число  $\langle i, j \rangle$  стоит на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. (Мы называем начальные строки и столбцы нулевыми.) По выполнении описываемой процедуры некоторые числа в матрице помечаются знаком плюс; они и есть элементы множества  $A$ . Процедура устроена так, что  $x$ -я строка выделяет в  $A$  конечное число своих элементов, если множество  $W_{f(x)}$  конечно, и все, кроме конечного числа, если  $W_{f(x)}$  бесконечно. Таким образом,  $x \in \bar{C} \Leftrightarrow x$ -я строка содержится в  $A$ , кроме конечного числа элементов. Так как совокупность элементов  $x$ -й строки, не принадлежащих множеству  $A$ , очевидно, равномерно рекурсивно перечислима относительно  $A$ , получаем такую общерекурсивную функцию  $g$ , что  $\bar{C} = \{x \mid W_{g(x)}^A \text{ конечно}\}$ . В силу § 13.2 отсюда следует  $\bar{C} \leq_i A''$ , и потому множество  $\bar{C}$

рекурсивно перечислимо относительно  $A'$ . А так как  $C$  рекурсивно перечислимо относительно множества  $A'$  (потому что множество  $C$  рекурсивно перечислимо относительно  $K$ , а  $K \leqslant_t A'$ ), получаем  $C \leqslant_t A'$  и потому  $C \oplus K \leqslant_t A'$ .

Заметим, что мы могли бы достичь описанного выше результата, просто перечисляя одновременно множества  $W_{f(0)}, W_{f(1)}, \dots$  и, когда в множестве  $W_{f(p)}$  появляется  $r$ -й элемент, проставляя *плюс* около элемента  $\langle p, r - 1 \rangle$  в матрице. Эта простая процедура, однако, не гарантирует, что  $A' \leqslant_t C \oplus K$ ; поэтому описываемая ниже процедура представляет собой модифицированный и более сложный вариант этого простого построения.

Предлагаемая процедура обладает следующими двумя особенностями. Во-первых, для каждого  $z$  будет определен конечный набор чисел, которые называются *удерживаемыми* этим  $z$ . Числа, удерживаемые  $z$ , будут появляться из строк, расположенных ниже  $z$ -й строки. Можно представлять себе эти наборы как вспомогательные списки, которые хранят человек, перечисляющий множество  $A$ . (В любой момент только конечное число этих списков непусто.) Во-вторых, когда  $W_{f(0)}, W_{f(1)}, \dots$  одновременно перечисляются и в множестве  $W_{f(p)}$  появляется  $r$ -й элемент, *плюс* не сразу ставится около числа  $\langle p, r - 1 \rangle$ ; вместо этого сначала  $\langle p, r - 1 \rangle$  обводится кружком и *плюс* выставляется около  $\langle p, r - 1 \rangle$ , если (и когда) окажется, что  $\langle p, r - 1 \rangle$  не удерживается (каким-либо числом).

Более детально наша процедура выглядит так. Здесь  $A_n$  обозначает множество чисел, которые получили *плюсы* к концу  $n$ -го этапа. Процедура будет начинаться с  $A_0 = \emptyset$ . Наша процедура будет иметь дело с вычислениями, относящими  $z$  к множеству  $W_z^{A_n}$ . Скажем, что число  $x$  использовалось *отрицательно* в одном из таких вычислений, если вычисление (значения  $\varphi_z^{A_n}(z)$ ) заканчивается и использует то обстоятельство, что  $x \notin A_n$ . Если (и когда) такое число  $x$  помещается затем в  $A$ , будем говорить, что это вычисление *атрофировалось*. Число  $x$  называется *допустимым* для удержания числом  $z$ , если  $x$  расположено в матрице ниже  $z$ -й строки, т. е. если  $\pi_1(x) > z$ . Множество удерживаемых числом  $z$  (в данный момент) чисел будет называться *z-списком* (в этот момент). Числа могут добавляться к *z-списку* и удаляться из него.

#### Этап $n + 1$ .

(а) Выполним  $n$  шагов в перечислении каждого из множеств  $W_0^{A_n}, \dots, W_n^{A_n}$ .

(б) Пусть  $z_0 < z_1 < \dots < z_p$  — все такие числа  $z$ , что  $z$  отнесено к  $W_z^{A_n}$  при вычислениях значений  $\varphi_z^{A_n}(z)$ , проделанных в (а). Добавим к  $z_0$ -списку все допустимые для  $z_0$  числа, отрицательно использованные при вычислении значения  $\varphi_{z_0}^{A_n}(z_0)$  и не находящиеся в настоящий момент в  $z_0$ -списке.

Добавим к  $z_1$ -списку все допустимые для  $z_1$  числа, отрицательно использованные при вычислении значения  $\varphi_{z_1}^{A_n}(z_1)$  и не находящиеся в  $z_0$ - или в  $z_1$ -списке.

Добавим к  $z_p$ -списку все допустимые для  $z_p$  числа, отрицательно использованные при вычислении значения  $\varphi_{z_p}^{A_n}(z_p)$  и не входящие ни в  $z_0$ -список, ..., ни в  $z_p$ -список.

(с) Выполним  $n$  шагов в перечислении каждого из множеств  $W_{f(0)}, \dots, W_{f(n)}$ . Для каждого  $x \leqslant n$ , если в  $W_{f(x)}$  появляется новый (т. е. не появлявшийся в (c) на  $n$ -м этапе) элемент, в  $x$ -й строке матрицы обведите кружком первое необведенное число.

(d) Поставьте по *плюсу* около каждого заключенного в кружок числа, которое не удерживается никаким числом  $z$ .

(e) Как результат добавления этих *плюсов* некоторые из вычислений значений  $\varphi_z^{A_n}(z)$ , рассматривавшихся в (b), могут теперь атрофироваться. Для каждого такого  $z$  освободите все числа, удерживавшиеся числом  $z$  (т. е.  $z$ -список станет пустым). Поставьте *плюс* около каждого заключенного в кружок числа, которое теперь ничем не удерживается.

(f) Повторяйте (e) до тех пор, пока вычисления из (b) не перестанут атрофироваться.

(g) Каждое число  $x$ , освободившееся от удержания во время выполнения (e) или (f), но не получившее *плюса*, добавьте к каждому  $z$ -списку, если только (i) число  $x$  допустимо для  $z$ , (ii) число  $x$  использовалось отрицательно в вычислении из (b), которое поместило  $z$  в множество  $W_z^{A_n}$ , и (iii) вычисление, поместившее  $z$  в  $W_z^{A_n}$ , не атрофировалось в процессе выполнения (e) и (f).

Все числа, обладающие теперь *плюсами*, образуют множество  $A_{n+1}$ . Этим заканчивается этап  $n + 1$ .

Остается проверить, что множество  $A$  обладает требуемыми свойствами. Заметим сначала, что если существует бесконечно много этапов, на которых число  $x$  удерживается, то либо (i) существует бесконечно много этапов, на которых число  $x$  освобождается (по ходу выполнения (f)), либо (ii) существует некоторый  $z$ -список, которому  $x$  принадлежит, начиная с некоторого этапа, уже всегда. Это замечание вытекает из того очевидного и важного свойства нашей конструкции, что, когда число  $x$  покидает высший  $z$ -список, оно не может вернуться в этот список, не освободившись предварительно. Поэтому единственный способ для обведенного кружком числа оставаться вне множества  $A$  заключается в том, чтобы постоянно удерживаться некоторым числом  $z$ . Заметим далее, что если  $x$  постоянно удерживается числом  $z$ , то, значит, число  $x$  отрицательно используется при вычислении значения  $\varphi_z^A(z)$ , и что если  $x$  отрицательно используется при вычислении значения

$\Phi_z^A(z)$  и  $\pi_1(x) > z$ , то число  $x$  постоянно удерживается некоторым  $z'$ ,  $z' \leq z$ . Так что для каждого числа  $x$ , для которого множество  $W_{f(x)}$  бесконечно (т. е. для которого все числа  $x$ -й строки заключены в кружки), только конечное число элементов  $x$ -й строки становятся постоянно удерживаемыми (так как только конечное число их может быть использовано в вычислениях значений  $\Phi_z^A(z)$ ,  $z < x$ ), а остальные числа попадают в множество  $A$ . Поэтому условия, описанные в начале доказательства, выполняются, и мы имеем  $C \oplus K \leq_t A'$ .

Остается доказать, что  $A' \leq_t C \oplus K$ . Допустим для проведения индукции, что (α) мы вычислили характеристическую функцию множества  $A'$  для всех значений аргумента, меньших данного  $z$ , что (β) нам известны все числа, которые оказываются навсегда удерживаемыми любым из  $z' < z$ , и что (γ) мы определили, какие числа из строк выше  $z$ -й попали в множество  $A$ . (Последние сведения имеют конечный объем, поскольку строки содержатся или не содержатся в множестве  $A$  целиком с точностью до конечного множества.) Будем действовать так. Определим с помощью  $C$ -оракула, содержит ли число  $z$  в множестве  $C$ . Если  $z \in C$ , то лишь конечное число элементов  $z$ -й строки находится в множестве  $A$ ; воспользуемся  $K$ -оракулом, чтобы найти наибольший элемент строки, принадлежащий множеству  $A$ ; все предыдущие элементы этой строки, которые не удерживаются навсегда каким-либо  $z' < z$ , попадают в  $A$ . Если  $z \notin C$ , то  $z$ -я строка попадает в множество  $A$  целиком, кроме конечного числа элементов, и все ее элементы, не удерживаемые навсегда каким-либо  $z' < z$ , должны быть в множестве  $A$ . Мы получили (γ) для  $z + 1$ . Воспользуемся теперь  $K$ -оракулом, чтобы определить, существует ли такой этап  $n$  в перечислении множества  $A$ , на котором найдется такое вычисление, относящее число  $z$  к множеству  $W_z^{A_n}$ , что всякое отрицательно использованное в нем число либо попадет в множество  $\bar{A}$ , о чём мы узнали бы из (γ) (для  $z + 1$ ), либо удержится на этапе  $n$  числом  $z$ , либо, о чём мы узнали бы из (β), окажется навсегда удерживаемым некоторым  $z' < z$ . Если существует, то  $z \in A'$  и числа, удерживаемые  $z$  на этапе  $n$ , суть в точности числа, удерживаемые числом  $z$  навсегда. Если нет, то  $z \notin A'$ , и никакое число не удерживается числом  $z$  навсегда. В обоих случаях мы получим (α) и (β) для  $z + 1$ . Таким образом, мы имеем индуктивную процедуру вычисления характеристической функции множества  $A'$  рекурсивно относительно множеств  $C$  и  $K$ . Итак,  $A' \leq_t C \oplus K$ . ■

Теорема XXV может быть следующим образом усиlena.

Следствие XXV (а).  $[0' \leq c \& c \text{ рекурсивно перечислима относительно } 0'] \Rightarrow (\exists a)[a \text{ рекурсивно перечислима } \& 0 < a < 0' \& a' = c]$ .

**Доказательство.** Модифицируем доказательство теоремы XXV. (i) Зарезервируем в каждой строке первое число, чтобы, используя их с подвижными маркерами в простом фридберговом варианте метода приоритета, обеспечить  $\bar{A} \neq W_z$  при всех  $z$ . (ii) В доказательстве теоремы XXV удержания были введены так, что вычисление значения  $\Phi_z^A(z)$  связывалось с  $z$ -й строкой. В настоящем доказательстве мы связываем вычисление  $\Phi_z^A(z)$  с  $2z$ -й строкой, а  $(2z + 1)$ -й строке сопоставляем вычисления, заключающиеся в отыскании какого-нибудь элемента множества  $B \cap W_z^A$ , где  $B$  — такое простое множество, что  $B =_t K$  (например, возьмем в качестве  $B$  множество  $S^*$  из § 8.4). Более точно, на этапе  $n + 1$  проделывается по  $n$  шагов в перечислении множеств  $W_z^{A_n}$  (при  $z \leq n$ ) и  $B$ . Если мы при этом не найдем ни одного элемента, принадлежащего множеству  $B \cap W_z^{A_n}$ , то рассмотрим (на подэтапе (b)) удержания для каждого из элементов (точнее, соответствующих им вычислений) множества  $W_z^{A_n}$ , которые уже перечислены; для каждого нового (на  $(n + 1)$ -м этапе) элемента множества  $W_z^{A_n}$  мы заводим новый список удержаний, который помещается (для целей подэтапа (b)) ниже всех списков удержаний, соответствующих неатрофировавшимся ранее выполненным вычислениям элементов множества  $W_z^{A_n}$ , ниже всех списков удержаний, соответствующих строкам выше  $(2z + 1)$ -й, но выше всех списков удержаний, соответствующих строкам, расположенным ниже  $(2z + 1)$ -й. Если же, напротив, мы найдем какой-нибудь элемент множества  $B \cap W_z^{A_n}$ , то рассмотрим (на подэтапе (b)) списки удержаний для каждого из элементов (точнее, соответствующих им вычислений) множества  $W_z^{A_n}$ , которые были перечислены до появления первого известного элемента из  $B$ . Эти списки удержаний располагаются в данном случае так же, как и в случае, когда не было найдено элементов множества  $B \cap W_z^{A_n}$ . Процедура освобождения (для атрофировавшихся вычислений) на подэтапах (e) и (f) остается прежней.

Основные факты, касающиеся постоянного удержания, доказываются, как и прежде, и заключительное индуктивное доказательство также не изменится, если сделать важное замечание о том, что, как только нам известны все элементы множества  $A$ , располагающиеся в матрице сверху по  $(2z + 1)$ -ю строку, мы можем рекурсивно перечислить те элементы множества  $W_z^A$ , которые уже получены и для которых (как элементов множества  $W_z^{A_n}$ ) учреждены списки удержаний по ходу основного построения. Конечно, в  $W_z^{A_n}$  могут попасть (в основном построении) числа, не принадлежащие множеству  $W_z^A$ , но они могут быть выявлены (поскольку возможные причины их непринадлежности

множеству  $W_z^A$  будут уже известны) и воздействие соответствующих им и позднее атрофирующихся вычислений на другие списки удержаний может быть учтено.

Наш рекурсивный пересчет элементов множества  $W_z^A$  либо должен пересечься с множеством  $B$  (так как  $B$  просто), либо быть конечным и исчерпывающим. (Для целей индукции отметим, что в обоих случаях только конечное число элементов будет постоянно удерживаться вычислениями, соответствующими  $(2z+1)$ -й строке.) Но отсюда вытекает  $W_z^A \neq \bar{B}$ . Поэтому  $B \not\leq_t A$ , и доказательство окончено. ■

Следствие XXV (а) показывает, что все три возможных ответа на вопрос 3 (стр. 343) осуществимы. (Таким образом, вопрос 3 исчерпан. Первым дал на него полный ответ Шёнфильд.)

Построение из следствия XXV (а) дает равномерный переход от индекса множества  $C$  (относительно  $K$ ) к индексу множества  $A$ . Эта равномерная конструкция допускает релятивизацию. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Следствие XXV (б).** *Существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что для всех  $x$  и  $D$  имеет место  $D <_t W_{f(x)}^D <_t D'$  и  $(W_{f(x)}^D)' = W_x^{D'} \oplus D'$ .*

**Доказательство.** Эта релятивизация очевидна. ■

Приложением следствия XXV (б) служит такой результат.

**Теорема XXVI** (Мартин, Лахлан). *Существует такая рекурсивно перечислимая степень  $a$ , что  $(\forall n)[0^{(n)} < a^{(n)} < 0^{(n+1)}]$ .*

**Доказательство.** Применим к функции  $f$  из следствия XXV (б) релятивизованную теорему о рекурсии, чтобы получить такое  $n$ , что для всех  $X$  имеет место  $W_{f(n)}^X = W_n^X$ . Возьмем в качестве  $a$  степень множества  $W_n^X$ . Доказываемое утверждение проверяется непосредственно. ■

Мы закончим этот параграф, сформулировав некоторые дальнейшие результаты.

1 (Сакс). Упорядочение рекурсивно перечислимых степеней не есть решетка.

2 (Ейтс). Степень  $0$  есть наибольшая нижняя грань двух рекурсивно перечислимых степеней, отличных от  $0$ .

3 (Ейтс). Существует такая рекурсивно перечислимая степень  $a > 0$ , что для любой рекурсивно перечислимой степени  $b < 0'$  справедливо  $a \cup b < 0'$ .

4 (Сакс).  $[0 < a \& a$  рекурсивно перечислима]  $\Rightarrow$  существует такая рекурсивно перечислимая степень  $d$ , что  $[0 < d < a \& d' = 0']$ .

5 (Мартин, Лахлан). Существуют такие рекурсивно перечислимые степени  $a$  и  $b$ , что  $(\forall n)[a^{(n)} \mid b^{(n)}]$ . См. упр. 13-54.

6 (Ейтс). Существует степень, меньшая  $0'$ , не сравнимая со всеми рекурсивно перечислимыми степенями, заключенными строго между  $0$  и  $0'$ .

7 (Шёнфильд, Сакс).  $0 < a < 0' \Rightarrow$  существует такая рекурсивно перечислимая степень  $b$ , что  $b \mid a$ .

8 (Спектор). Никакая возрастающая последовательность степеней не имеет наименьшей верхней грани; но (Сакс) всякое счетное множество степеней имеет минимальную верхнюю грань.

9 (Спектор). Арифметические степени не образуют решетку.

10 (Сакс). Если  $\Pi$  — такое частично упорядоченное множество, что (i) мощность множества  $\Pi$  не превосходит  $\aleph_1$  (первый несчетный кардинал) и (ii) каждый элемент множества  $\Pi$  имеет не более  $\aleph_0$  предшествующих ему, то существует подупорядочение степеней, изоморфное множеству  $\Pi$ .

11 (Сакс). Если  $\Pi$  — такое частично упорядоченное множество, что (i) мощность множества  $\Pi$  не более  $2^{\aleph_0}$  и (ii) каждый элемент множества  $\Pi$  имеет не более конечного числа предшествующих ему элементов, то существует подупорядочение степеней, изоморфное  $\Pi$ .

12 (Титгемайер). Существует такая меньшая  $0''$  степень, что между нею и  $0$  заключена единственная степень.

13 (Сакс).  $(\forall a)[(\forall b)[[b \neq 0 \& b$  рекурсивно перечислима]  $\Rightarrow a \leqslant b] \Rightarrow a = 0]$ .

14 (Ейтс). Для всякой рекурсивно перечислимой степени, большей  $0$ , существует меньшая ее минимальная степень<sup>1</sup>), но существует такая степень, большая  $0$ , ниже которой нет минимальных степеней.

15 (Шёнфильд). Для всякой степени  $a < 0'$  существует такая минимальная степень  $b < 0'$ , что  $b \not\leq_t a$ , но (Ейтс) существует такая рекурсивно перечислимая степень  $a < 0'$ , что, какова бы ни была рекурсивно перечислимая степень  $b > 0$ ,  $a$  и  $b$  имеют большую  $0$  нижнюю грань.

16 (Мартин).  $a$  — степень некоторого максимального множества  $\Leftrightarrow a$  — степень некоторого гипергиперпростого множества  $\Leftrightarrow [a$  рекурсивно перечислима и  $a' = 0']$ .

Приведем в качестве заключительного примера следующую теорему Сакса, из которой выводится ряд интересных следствий (включая некоторые из приведенных выше утверждений). Эти следствия перечисляются в упр. 13-53. Теорема является дальнейшим обобщением упр. 10-11.

**Теорема (Сакс).** Пусть даны такие множества  $B$ ,  $C$  и  $D$ , что  $D$  рекурсивно перечислимо относительно  $B$ ,  $C \leq_t D$  и  $C \not\leq_t B$ .

<sup>1</sup>) Не рекурсивно перечислимая в силу 13.— Прим. перев.

Тогда существуют такие множества  $D_1$  и  $D_2$ , что  $D_1 \cup D_2 = D$ ,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ,  $D_1$  и  $D_2$  рекурсивно перечислимы относительно  $B$ ,  $C \leqslant_t B \oplus D_1$  и  $C \not\leqslant_t B \oplus D_2$ .

Сакс [1963b] перечисляет некоторые открытые вопросы, среди которых содержатся следующие. Сохранится ли в силе утверждение 11, если слово „конечное“ заменить на „счетное“? Всякое ли независимое множество степеней (т. е. множество, в котором никакая степень не сводится к наименьшей верхней грани конечного числа других) мощности, меньшей  $2^{\aleph_0}$ , может быть расширено до большего независимого множества? Назовем начальным отрезком всякое множество степеней, замкнутое относительно операции перехода от  $a$  к  $\{b \mid b \leqslant a\}$ ; всякое ли конечное частично упорядоченное множество, подчиненное условиям (i) существует наименьший элемент и (ii) всякая пара элементов имеет не более одной минимальной верхней грани, может быть начальным отрезком<sup>1)</sup>? Сакс предполагает, что ответы на эти вопросы положительны. В пересмотренном издании [1963b] Сакс ставит также (среди прочих) следующий вопрос: существует ли такое  $z$ , что (для всех  $A$  и  $B$ )  $A <_t W_z^A <_{tA'} W_z^B$  и  $[A \equiv_t B \Rightarrow W_z^A \equiv_t W_z^B]$ ?

### § 13.9. УПРАЖНЕНИЯ

#### § 13.1

13-1. Пусть дано множество  $A$ . Возьмем две различные допустимые гёделевы нумерации класса частично рекурсивных функций (упр. 2-10). Получим из них по теореме 9-11 нумерации класса  $A$ -рекурсивных функций. Пусть  $A_1$  и  $A_2$  — скачки множества  $A$ , определенные с помощью этих нумераций. Докажите, что  $A_1 \equiv A_2$ .

13-2. Проведите формальные построения (подобно тому, как это сделано для  $\Rightarrow$  из пункта (d) теоремы I) для  $\Leftarrow$  из (d), а также для  $\Rightarrow$  и  $\Leftarrow$  из (e) теоремы I.

13-3. Покажите, что для любого множества  $A$

- (i)  $\overline{A}'$  продуктивно,
- (ii)  $K \leqslant_t A \Rightarrow A'$  продуктивно,
- (iii)  $(\overline{A})' \neq \overline{A}'$ ,

<sup>1)</sup> В настоящее время получен ряд результатов о возможном строении начальных отрезков полурешетки Т-степеней. Лахлан (Distributive initial segments of the degrees of unsolvability, Zeitschr. f. math. Logik u. Grundl. Math., 14, N 5 (1968), 457—472) показал, что всякая счетная дистрибутивная решетка с наименьшим элементом изоморфна некоторому начальному отрезку Т-степеней. М. Лерман (Some nondistributive lattices as initial segments of the degrees of unsolvability, Journ. symb. logic, 34, N 1 (1969), 85—98) доказал существование начальных отрезков, представляющих собой (недистрибутивные) решетки с нулем, единицей и  $p^k + 1$  попарно не сравнимыми элементами, где  $p$  — простое число. Близкость конечных решеток некоторого специального вида в качестве начальных отрезков установлена Томасоном (Sublattices and initial segments of the degrees of unsolvability, Canad. journ. math., 22, N 3 (1970), 569—581). — Прим. перев.

(iv) из продуктивности множества  $\overline{A}$  не вытекает, что  $(\exists B)[A = B']$ . Покажите, что для любых множеств  $A$  и  $B$

$$(v) A' = B' \Rightarrow A = B.$$

13-4. Покажите, что операция скачка на степенях определима на языке отношений  $\leqslant$  и „быть рекурсивно перечислимым относительно“.

13-5. Покажите, что существует равномерная процедура, позволяющая при любом  $n$  по данному множеству  $\emptyset^{(n)}$  вычислять  $n$ , т. е. что существует такое  $z$ , что при каждом  $n$  справедливо  $\varphi_z^{(n)}(0) = n$ .

13-6. Пусть  $A \in a$ ,  $B \in b$  и множество  $A$  рекурсивно перечислимо относительно  $B$ . Какие из следующих утверждений верны и какие ложны?

(i) Всякое  $A_1 \in a$  рекурсивно перечислимо относительно  $B_1 \in b$ .

(ii) Множество  $A$  рекурсивно перечислимо относительно любого  $B_1 \in b$ .

△13-7. Покажите, что  $(\forall A)(\forall B)[A^{(\omega)} \not\equiv_m B']$ .

13-8. Докажите, что для любого множества  $A$  существует такая возрастающая функция  $f$ , что  $A \leqslant_t \{(x, y) \mid x \in \emptyset^{(f(y))}\}$ . (Указание. См. упр. 13-5.)

13-9. (a) Докажите, что  $(A — арифметическое относительно  $B) \Leftrightarrow (\exists n)[A \leqslant B^{(n)}]$ .$

(b) Докажите, что  $A — арифметическое относительно  $B) \Rightarrow A^{(\omega)} \leqslant B^{(\omega)}$ .$

13-10. Покажите, что отношение „быть арифметическим относительно“ транзитивно.

#### § 13.2

13-11. Докажите, что  $[0 < a \& a \not\leqslant d] \Rightarrow (\exists b)[b \mid a \& d \leqslant b < a' \cup d]$ . (Указание. См. теорему VII.)

△13-12 (Клини, Пост). Покажите, что для любых степеней  $a_1, a_2, a_3$ , таких, что  $a_1 < a_2 \leqslant a_3$ , существует такая степень  $b$ , что  $b \mid a_2$ ,  $b \mid a_3$  и  $a_1 < b < a_3'$ . (Указание. Обобщите доказательство теоремы VII.) Используя этот результат, докажите, что для любого конечного интервала последовательности  $0', 0'', \dots$  существуют степени, не сравнимые со всеми элементами этого интервала, но сравнимые со всеми остальными элементами последовательности.

△13-13 (Клини, Пост). Покажите, что в упр. 13-12 (единственную) степень  $b$  можно заменить бесконечной совокупностью попарно не сравнимых степеней.

13-14. Покажите, что  $\emptyset' \equiv K$ .

13-15. Пусть функция  $f$  такая же, как в доказательстве теоремы VIII. Проверьте, что для всякого  $x$   $[x \in K' \Leftrightarrow \Phi_{f(x)}]$  не всюду определена].

△13-16. Докажите, что  $\{x \mid \Phi_x — рекурсивная перестановка\} \equiv \overline{K'}$ .

▲13-17. Докажите, что  $\{x \mid W_x$  конечна $\} \equiv K''$ .

▲13-18. Докажите, что  $\{x \mid W_x$  рекурсивна $\} \equiv K''$ .

#### § 13.3

13-19. Покажите, что  $(\forall a)(\forall n)(\exists b)[b \mid a \& a^{(n)} \leqslant b']$ . (Указание. См. доказательство следствия IX (b).)

△13-20. (Спектр). Покажите, что  $(\exists a)(\exists b)[a \mid b \& (a \cup b)' = a' \cup b']$ . (Указание. Постройте  $f$  и  $g$  примерно так же, как при доказательстве теоремы X, включив в построение дополнительные шаги, обеспечивающие несравнимость  $\lambda x[f(2x)]$  и  $\lambda x[f(2x+1)]$ . Пусть множества  $A_1$  и  $A_2$  таковы, что  $c_{A_1} = \lambda x[f(2x)]$ , а  $c_{A_2} = \lambda x[f(2x+1)]$ . Заметим, что  $A = A_1 \oplus A_2$ .)

13-21. Используя следствие IX (a), постройте пример таких степеней  $a$  и  $b$ , что  $a' \cup b' \neq (a \cup b)'$ . (Указание. См. доказательство следствия IX (b).)

$\triangle 13-22$ . Докажите следствие X (b).

$\triangle 13-23$ . Докажите следующую релятивизацию теоремы XI:  $(\forall d)(\exists b)[d < b < d' \& b \text{ не рекурсивно перечислима относительно } d]$ . (Указание. Примените метод релятивизации из теоремы VII.)

$\triangle 13-24$ . (а) Докажите, что  $\delta$  — метрика на  $\mathcal{C}$ , т. е.

- (i)  $\delta(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ ,
- (ii)  $\delta(f, g) = \delta(g, f)$ ,
- (iii)  $\delta(f, h) \leq \delta(f, g) + \delta(g, h)$ .

(б) Покажите, что индуцированная этой метрикой топология и описанная в § 13.3 топология декартова произведения на  $\mathcal{C}$  совпадают.

(с) Если отождествить каждое множество с его характеристической функцией, то пространство  $\mathcal{M}$  (всех подмножеств  $N$ ) отождествляется с  $\mathcal{C}$ . Докажите, что топология в пространстве  $\mathcal{C}$ , индуцированная метрикой, и топология, описанная в пункте (c) упр. 11-35, совпадают.

(д) Докажите, что (в выбранной нами топологии) каждая точка в пространстве  $\mathcal{C}$  замкнута, а всякая сферическая окрестность одновременно открыта и замкнута. (Такие пространства иногда называют  *вполне несвязными*.)

(е) Покажите, что пространство  $\mathcal{C}$  — компакт. (Указание. Покажите, что оно обладает следующим свойством: если пересечение любого конечного подсемейства данного семейства замкнутых множеств не пусто, то и пересечение всех множеств данного семейства должно быть непустым.)

$\triangle 13-25$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность точек  $f_0, f_1, \dots$  (метрического пространства) называется *последовательностью Коши*, если для любого действительного  $\varepsilon > 0$

$$(\exists n)(\forall p)(\forall q)[[n < p \& n < q] \Rightarrow \delta(f_p, f_q) < \varepsilon].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка  $g$  называется *пределом* последовательности  $f_0, f_1, \dots$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(f_n, g) = 0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая последовательность Коши имеет предел. (Свойство полноты является обобщением на случай метрических пространств свойства действительной прямой, выражающегося в наличии наименьшей верхней грани у ее ограниченных подмножеств.)

Докажите, что пространство  $\mathcal{C}$  полно.

$\triangle 13-26$ . Докажите теорему Бэра (теорема XII). (Указание. Пусть  $\mathcal{C}$  — полное метрическое пространство. Предположим, что  $\mathcal{C}$  — объединение счетной последовательности нигде не плотных множеств. Пусть  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots$  — замыкания элементов этой последовательности. Тогда  $\mathcal{C} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{C}_i$  и

$(\forall i)[\mathcal{C}_i \text{ не содержит ни одной сферической окрестности}].$  Найдем такую цепь сферических окрестностей  $\mathcal{S}_0 \supset \mathcal{S}_1 \supset \dots$ , что  $\mathcal{S}_n \cap (\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{C}_i) = \emptyset$ .

Образуем последовательность Коши из элементов последовательных окрестностей  $(f_i \in \mathcal{S}_i)$  и покажем, что ее предел не может принадлежать  $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{C}_i$ .)

$\triangle 13-27$ . (а) Приведите пример множества первой категории в  $\mathcal{C}$ , имеющего положительную меру. (Указание. Для всякой возрастающей последовательности  $x_0, x_1, \dots$  рассмотрим множество  $\{f \mid (\forall i)(\exists x)[x_i \leq x < x_{i+1} \& f(x) = 1]\}$ . Покажите, что это — множество первой категории, после-

довательности растут достаточно быстро, мера этого множества положительна.)

(б) Постройте пример множества второй категории в пространстве  $\mathcal{C}$ , имеющего меру нуль. (Указание. Покажите, что множество первой категории, построенное в (a), может иметь меру, сколь угодно близкую к 1. Возьмите объединение счетного семейства таких множеств и рассмотрите его дополнение.)

$\triangle 13-28$ . Назовем множество в пространстве  $\mathcal{C}$  *плотным в  $\mathcal{C}$* , если его замыкание есть  $\mathcal{C}$ .

(а) Покажите, что всякое множество, дополнение которого есть множество первой категории, плотно в  $\mathcal{C}$ .

(б) Выведите из теоремы Бэра, что пересечение счетного семейства множеств, каждое из которых открыто и плотно в  $\mathcal{C}$ , есть множество второй категории, дополнение которого есть множество первой категории. [Замечание: доказательство теоремы XIII сводится к тому, чтобы показать, что для каждого  $z$  внутренность множества  $\{f \mid c_k \neq \varphi_z^f\}$  открыта и плотна в  $\mathcal{C}$ . (Внутренность множества есть объединение всех содержащихся в нем сферических окрестностей.)]

$\triangle 13-29$  (Сакс). Назовем степень  $a$  *минимальной*, если  $0 < a$  и  $(\forall b)[b < a \Rightarrow b = 0]$ . (В § 13.5 показано, что такие степени существуют.) Докажите, что совокупность минимальных степеней имеет меру нуль. (Указание. Для произвольной фиксированной функции  $f$  положим  $f^* = \lambda x[f(2x)]$  и  $f^{**} = \lambda x[f(2x+1)]$ . Ясно, что  $f^* \leq f$ . Покажите, что  $P[f^* \text{ рекурсивна}] = 0$  и  $P[f \leq f^*] = P[f^{**} \leq f^*] = 0$ .)

$\triangle 13-30$  (Сакс). Докажите следующее обобщение теоремы XIV (и выведите аналог следствия XIV): множество  $\{a \mid 0^a \text{ рекурсивно перечислима относительно } a\}$  имеет меру нуль. (Указание. Покажите, что для любых  $A$  и  $z$   $P[A = W_z^f] = \varepsilon > 0 \Rightarrow A$  рекурсивно перечислимо. Примените методы доказательства теоремы XIV, начав с тождества (справедливого при любом  $n$ )  $P[A = W_z^f] = P[(\exists f')[f' \text{ — начальный сегмент функции } f \text{ и } (\forall x)[x \leq n \Rightarrow \Rightarrow [x \in A \Leftrightarrow x \in W_z^{f'}]]]] \cdot P[A = W_z^f \mid (\exists f')[\dots]] = \varepsilon$ , где  $W_z^{f'}$  есть область определения функции  $\varphi_z^{f'}$ .)

### § 13.4

$\triangle 13-31$ . (а) Докажите следствие XV.

(б) Определите формально (т. е. в терминах рекурсивно перечислимых множеств), что такое  $\varphi_z^{[f]}$ , когда  $f$  — сегмент двух переменных.

$\triangle 13-32$  (Клини, Пост). Назовем конечное множество степеней *независимым*, если никакая степень из этого множества не Т-сводится к (териированному) сочинению остальных степеней. Покажите, что в упр. 13-12 единственную степень  $b$  можно заменить произвольно большой независимой совокупностью степеней.

$\triangle 13-33$  (Клини, Пост). Покажите, что теорема XVI останется верной, если степень  $0$  (в ее формулировке) заменить произвольной степенью  $a$ .

### § 13.5

$\triangle 13-34$ . (а) Докажите следствие XVII (a).

(б) Докажите следствие XVII (b).

(с) (Мартин). Модифицировав построение из доказательства теоремы XVII, докажите, что  $(\exists a)[0 < a \& a'' = 0'' \& (\forall b)[b < a \Rightarrow b = 0]]$ .

(Указание. Переделайте построение так, чтобы для всякого  $n$  вопрос, всюду ли определена функция  $\varphi_n^g$ , сводился к степени  $0''$ . Для этого сделайте

так, чтобы подэтапы (b) и (c) (этапа  $2n + 2$ ) принуждали функцию  $\phi_n^g$  быть всюду определенной. Этого можно добиться, дополняя построения, проделанные на подэтапах (b) и (c), с помощью приема, использованного на подэтапе (c).)

(d) (Мартин). Покажите, что степень  $a$  из предыдущего пункта дает пример нерекурсивной степени, не содержащей гипериммунных множеств. (Указание. Покажите, что на этапе  $2n + 2$  существует общерекурсивная функция  $f^*$ , мажорирующая  $\{x \mid \phi_n^g(x) = 1\}$ , если только функция  $\phi_n^g$  всюду определена.)

$\Delta 13-35$  (Лакомб). Покажите, что существует  $2^{N_0}$  минимальных степеней. (Указание. В теореме XVII на этапе  $2n + 1$  используйте интервал  $\{z \mid h^m(1) \leq z < h^m(2)\}$  вместо  $\{z \mid h^m(0) \leq z < h^m(1)\}$ , определите  $h^{m+1} = \lambda x[h^m(x+2)]$  и сделайте произвольный выбор (для построения  $f_1^{m+1}$ ) из  $\{z \mid h^m(0) \leq z < h^m(1)\}$ . Таким образом, делая  $N_0$  произвольных выборов, можно получить  $2^{N_0}$  вариантов функции  $g$ .)

13-36. Покажите, что всякая степень является наибольшей нижней гранью двух несравнимых степеней. (Указание. Воспользуйтесь теоремой VI.)

### § 13.6

13-37. Докажите следствие XVIII.

$\Delta 13-38$  (Майхилл). Пусть  $N^* = N \cup \{\omega\}$ ,  $\mathcal{P} = (N^*)^N$  — совокупность всех отображений из  $N$  в  $N^*$ . Мы можем отождествить  $\mathcal{P}$  с совокупностью всех функций, полагая, что  $\psi(x) = \omega$  означает „ $\psi(x)$  расходится“ (для произвольной функции  $\psi$  из  $\mathcal{P}$ ). Следующим образом определим  $\delta$  для произвольных функций  $\psi$  и  $\varphi$  из совокупности  $\mathcal{P}$ :

$$\delta(\psi, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi = \varphi; \\ 1, & \frac{1}{\mu x[\psi(x) \neq \varphi(x)]+1}, \text{ если } \psi \neq \varphi. \end{cases}$$

(a) Покажите, что  $\delta$  — метрика на  $\mathcal{P}$  и потому определяет топологию на  $\mathcal{P}$ .

(b) Покажите, что  $\mathcal{P}$  полно (как топологическое пространство).

(c) Покажите, что  $\{\psi \mid (\exists f)[f \leq_e \psi \& f \text{ не рекурсивна}]\}$  есть множество первой категории, и выведите отсюда с помощью теоремы Бера теорему XVIII. (Указание. См. подэтап (b) этапа  $2n + 2$  из доказательства теоремы XVIII.) [Читателю следует в этом случае (как и в других) заметить, что, хотя понятие категории множества дает эвристическое упрощение и формальную экономию, основной комбинаторный шаг является общим для доказательств, как использующих, так и не использующих это понятие.]

13-39. (a) Докажите следствие XIX.

$\Delta(b)$  Пусть дана частично рекурсивная функция  $\psi$ , принимающая в качестве значений только 0 и 1. Предположим, что существуют такие функции  $g$  и рекурсивный оператор  $\Phi$ , что  $(\forall f)[[\psi \subset f \& \text{область значений } f \text{ содержит } \{0, 1\}] \Rightarrow \Phi(f) = g]$ . Покажите, что  $g$  обязательно общерекурсивна. (Указание. Воспользуйтесь теоремой о компактности для деревьев (упр. 9-40), или, эквивалентно, компактностью пространства  $\mathcal{C}$  (упр. 13-24).)

13-40. Докажите теорему XX аналогично доказательству теоремы VI.

13-41. Пусть  $\mathcal{P}$  — топологическое пространство, определенное в упр. 13-38. Для произвольной функции  $\psi$  покажите, что если  $\psi$  не частично рекурсивна, то  $\{\varphi \mid \varphi \not\leq_e \psi \& \psi \not\leq_e \varphi\}$  есть множество второй категории; получите отсюда теорему XX. (Указание. Воспользуйтесь методом из теоремы XIII, т. е. покажите, что для любого  $n$  если множество  $\{\varphi \mid \psi = \Phi_n(\varphi)\}$  никогда не плотно, то функция  $\psi$  частично рекурсивна.)

### § 13.7.

13-42. Рассмотрим массовые проблемы (1) — (5), описанные на стр. 365. Постройте соответствующие рекурсивные операторы, проверьте относящиеся к этим проблемам утверждения.

13-43. Докажите, что операторы  $\Lambda$  и  $V$ , определенные на массовых проблемах, корректно определены на степенях трудности.

13-44. Определите формально, т. е. с помощью рекурсивно перечислимых множеств, операторы  $\Phi^1$  и  $\Phi^2$  из доказательства теоремы XXI. Покажите, что индекс оператора  $\Phi^1$  (в нумерации рекурсивных операторов) может быть эффективно найден по  $m$  и  $n$ , и что индекс оператора  $\Phi^2$  может быть эффективно найден по  $p$  и  $q$ .

13-45. Покажите, что никакой элемент решетки Медведева, отличный от 0 и 1, не может иметь дополнения. Отсюда следует, что решетка Медведева не есть булева алгебра.

13-46. Докажите, что, какова бы ни была функция  $f$ , степень трудности, содержащая  $\{f\}$ , есть степень разрешимости.

13-47. Покажите, что утверждения  $E_A = E_B$  и  $S_A = S_B$  независимы, т. е. ни одно из этих утверждений не следует из другого.

13-48. Завершите доказательство теоремы XXIII (b).

13-49. (a) Покажите, что среди неединичных элементов решетки Медведева нет максимальных.

(b) Покажите, что в решетке Медведева не существует таких несравнимых элементов  $A$  и  $B$ , что  $A \vee B = 0$ .

(c) При каких условиях пересечение двух степеней разрешимости может быть само степенью разрешимости?

13-50. (a) Пусть  $\mathcal{L}$  — дистрибутивная решетка,  $c \in \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{J}$  — главный идеал, порожденный  $c$ . Пусть  $a$  и  $b$  — элементы решетки  $\mathcal{L}$ ,  $[a]$  и  $[b]$  — элементы факторрешетки  $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ , определяемые  $a$  и  $b$ . Докажите, что  $[a] \leq [b]$  тогда и только тогда, когда  $a \leq b \cup c$  (упр. 12-7).

(b) Сформулируйте соответствующий результат для главных дуальных идеалов.

$\Delta$  13-51. Проверьте утверждения, сделанные в примерах 4 и 5 (стр. 372).

13-52. Пусть  $\mathcal{M}$  — решетка Медведева,  $D \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{D}$  — главный дуальный идеал, порожденный  $D$ . Определим  $\neg A$  как  $\bar{A} \rightarrow D$ . Рассмотрим формулы со связками  $\neg$ ,  $V$ ,  $\Lambda$ ,  $\rightarrow$  и  $\leftrightarrow$ . Покажите, что эти формулы могут быть интерпретированы на факторрешетке  $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ , т. е. что, приписывая переменным в таком выражении элементы факторрешетки в качестве значений, мы получим единственный элемент факторрешетки в качестве значения всего выражения. Используя результат Медведева об интуиционистском исчислении высказываний (см. § 13-8), покажите, что всякая теорема интуиционистского исчисления высказываний истинна во всякой такой факторрешетке. Покажите, что обратное неверно. В частности, приведите примеры (степени  $D$ ), когда (i) все выражения истинны в  $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ , (ii) совокупность истинных выражений состоит в точности из теорем классической двузначной логики высказываний.

### § 13.8

$\Delta 13-53$  (Сакс). Выполните из теоремы Сакса, сформулированной в конце § 13.8, следующие следствия.

(i)  $[b \leq d \& d \text{ рекурсивно перечислима относительно } b] \Rightarrow (\exists d_1)(\exists d_2)[d = d_1 \cup d_2 \& b < d_1 < d \& b < d_2 < d]$ , рекурсивно перечислима относительно  $b \& d_2$  рекурсивно перечислима относительно  $b]$ . (Указание. Докажите следующую лемму: если  $A \cup B = C$ ,  $A \cap B = \emptyset$  и  $A$  и  $B$  рекурсивно перечислимы относительно  $C'$ , то  $C \equiv_T A \oplus B$ .)

(ii) Множество  $A$  рекурсивно перечислимо  $\Rightarrow A$  есть объединение двух непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств несравнимых степеней. (Этот результат упомянут в конце упр. 10-11.)

(iii)  $\{b \mid b < 0'\}$  не имеет максимальных элементов.

(iv)  $[b < c < d \& d]$  рекурсивно перечислима относительно  $b \Rightarrow [\exists a] [b < a < d \& a \mid c \& a]$  рекурсивно перечислима относительно  $b$ . (Это результат 7 из § 13.8.)

(v)  $A$  рекурсивно  $\Leftrightarrow (\forall B)[B$  рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно  $\Rightarrow A \leq_T B]$ . (Это результат 13 из § 13.8.)

(vi)  $(\exists b) [d$  рекурсивно перечислима относительно  $b \& b < d] \Rightarrow d$  есть минимальная верхняя грань совокупности всех степеней, меньших  $d$ .

(vii)  $(\exists b) [d$  рекурсивно перечислима относительно  $b \& b < d] \Rightarrow$  существует такая возрастающая последовательность степеней  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ , что  $d$  есть минимальная верхняя грань этой последовательности. (Как следует из результата 8 из § 13.8, наименьшей верхней грани эта последовательность иметь не может.)

**Δ 13-54** (Мартин, Лахлан). Покажите, что существуют такие рекурсивно перечислимые степени  $a$  и  $b$ , что  $(\forall n)[a^{(n)} \mid b^{(n)}]$ . (*Указание.* Модифицируйте доказательство теоремы XXV и следствие XXV (b), чтобы получить такие общерекурсивные функции  $f$  и  $g$ , что для всех  $x$  и  $y$  справедливо  $(W_f^D(x,y))' = W_x^D \oplus D'$ ,  $(W_g^D(x,y))' = W_y^D \oplus D'$ , причем множества  $W_f^D(x,y)$  и  $W_g^D(x,y)$  несравнимы. Затем применяйте, итерируя, теорему о рекурсии (см. теорему 11-Х).]

**Δ 13-55.** Покажите, что  $m$ -степени арифметических множеств не образуют решетки относительно  $m$ -сводимости. (*Указание.* Возьмите  $K'$  и  $\bar{K}'$ , рассмотрите их произвольную нижнюю грань и постройте большую нижнюю грань, следуя методу доказательства теоремы 9-I.)

**Δ 13-56.** Выведите из результатов § 13.8, что существует рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество, к которому не сводится никакое гиперпростое множество.

**Δ 13-57.** (Мартин). Скажем, что  $f$  мажорирует все общерекурсивные функции, если  $(\forall$  общерекурсивная  $g)(\exists m)[m \leq n \Rightarrow g(n) < f(n)]$ .

Докажите:  $0'' \leq a' \Leftrightarrow$  существует функция  $f$  степени  $a$ , мажорирующая все общерекурсивные функции. (*Указание.*  $\Leftarrow$ . Достаточно доказать, что множество  $B = \{z \mid \varphi_z$  вследу определена} рекурсивно перечислимо относительно  $a'$ . Но мы можем перечислять  $z \in B$ , перебирая такие  $m$ , что для всех  $n \geq m$  значение  $\varphi_z(n)$  вычисляется за  $f(n)$  или меньшее число шагов.  $\Rightarrow$ . Пусть дана некоторая общерекурсивная функция  $g$ , такая, что  $z \in B \Leftrightarrow W_g^A(z)$  конечно, где  $A \in a$ . Для каждого  $z$  перечислим (рекурсивно относительно множества  $A$ ) последовательность  $z^{(0)}, z^{(1)}, \dots$ , где  $z^{(n)}$  есть либо  $\varphi_z(n)$ , либо  $n$ -й элемент множества  $W_g^A(z)$ . Постройте функцию  $f$ , мажорирующую все эти последовательности, в которой к тому же с помощью четности или нечетности значений закодирована функция  $c_A$ ). (Мартин использовал этот результат, чтобы получить характеристику степеней максимальных множеств.)

## Глава 14. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ (часть 1)

§ 14.1. Иерархия множеств	387
§ 14.2. Нормальные формы	391
§ 14.3. Алгоритм Тарского — Куратовского	394
§ 14.4. Арифметическая представимость	400
§ 14.5. Сильная теорема об иерархии	403
§ 14.6. Степени	406
§ 14.7. Приложения в логике	408
§ 14.8. Вычислимые степени неразрешимости	415
§ 14.9. Упражнения	425

### § 14.1. ИЕРАРХИЯ МНОЖЕСТВ

В предыдущих главах понятия *степени* и *сводимости* применялись для классификации множеств натуральных чисел. В этой главе мы построим новую (хотя и более грубую) классификацию таких множеств. Эта новая классификация позволит лучше понять предыдущую теорию и установить новые связи теории рекурсивных функций с математической логикой. Она также даст элегантные методы большой мощности для установления сходства или несходства разнообразных множеств натуральных чисел. В § 14.5 приводится основная теорема главы, являющаяся обобщением теорем о проекции (теоремы 5-X и 5-XI).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Отношение  $R$  входит в *арифметическую иерархию*, если  $R$  рекурсивно или может быть получено из некоторого рекурсивного отношения  $S$  путем последовательного применения конечного числа операций проектирования и взятия дополнения<sup>1)</sup>.

Рекурсивно перечислимые отношения входят в арифметическую иерархию, так как всякое рекурсивно перечислимое отношение можно получить из некоторого рекурсивного отношения проектированием (теорема 5-X). Следовательно, и дополнение любого рекурсивно перечислимого отношения входит в иерархию, так как его можно получить из рекурсивного отношения операциями проектирования и взятия дополнения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть дано множество  $A$ . Отношение  $R$  входит в *арифметическую иерархию относительно A*, если  $R$  рекурсивно или может быть получено из некоторого  $A$ -рекурсивного отношения  $S$  путем применения конечного числа операций проектирования и взятия дополнения.

<sup>1)</sup> Впервые арифметическая иерархия исследовалась Клини [1943] и Мостовским [1947]. В гл. 15 будут рассмотрены аналоги иерархий Бореля и иерархий проективных множеств действительных чисел.

Согласно релятивизированной теореме о проекции, любое множество, рекурсивно перечислимое в  $A$ , входит в арифметическую иерархию относительно  $A$ .

При рассмотрении иерархий удобно использовать логические символы для обозначения операций проектирования и взятия дополнения. Операция взятия дополнения будет обозначаться знаком отрицания, а операция проектирования — квантором существования. Например, если  $R$  есть  $n$ -местное отношение, то

$$\{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid \neg R(x_1, \dots, x_n)\}$$

— дополнение отношения  $R$ , а

$$\{\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle \mid (\exists x_n)R(x_1, \dots, x_n)\}$$

— одна из  $n$  возможных проекций отношения  $R$ ,

$$\{\langle x_1, \dots, x_{n-3} \rangle \mid \neg(\exists x_{n-2})\neg(\exists x_n)(\exists x_{n-1})R(x_1, \dots, x_n)\}$$

есть результат применения операций проектирования, проектирования, взятия дополнения, проектирования, взятия дополнения (именно в таком порядке) к  $R$ . В подобных выражениях (включающих символы отрицания и кванторы) все символы отрицания, кроме, быть может, одного, можно устраниć путем введения квантора общности и использования следующих правил элементарной логики:  $\neg\neg$  эквивалентно  $\forall\neg$ ;  $\neg\forall$  эквивалентно  $\exists\neg$ ; а  $\neg\neg$  можно опускать. (Полезны еще такие правила:  $\forall$  эквивалентно  $\neg\neg\exists$ , а  $\exists$  эквивалентно  $\neg\neg\forall$ .) Так, например,  $\neg\neg\exists\neg\forall$  можно заменить на  $\forall\neg\exists$ . Так как дополнение рекурсивного отношения также рекурсивно, то имеем следующее.

**Теорема I.**  *$n$ -местное отношение  $R$  входит в арифметическую иерархию тогда и только тогда, когда оно рекурсивно или может быть выражено при некотором  $m$  в такой форме:*

$$\{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid (Q_1y_1) \dots (Q_my_m)S(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)\},$$

где  $Q_i$  — это или  $\forall$  или  $\exists$  для  $1 \leq i \leq m$ , а  $S$  —  $(n+m)$ -местное рекурсивное отношение.

**Доказательство.** Всякую последовательность операций проектирования и взятия дополнения, применяемых к рекурсивному отношению, можно преобразовать по упомянутым выше правилам логики так, чтобы (при подходящем переименовании переменных рекурсивного отношения или его дополнения) получить требуемое выражение.

Наоборот, во всякой последовательности кванторов, учитывая, что  $\forall$  эквивалентно  $\neg\neg\exists$ , все кванторы общности можно заменить на отрицания и кванторы существования, что и дает последовательность операций проектирования и взятия дополнения. ■

**Определение.** Пусть дано выражение, получающееся приписыванием нуля или большего числа кванторов по различным переменным к символу отношения, и пусть этому символу сопоставлено конкретное рекурсивное отношение. Будем говорить, что такое выражение вместе с этим отношением образует *предикатную форму*<sup>1)</sup>.

**Определение.** Предикатная форма с  $m$  кванторами, применяемыми к  $n$ -местному рекурсивному отношению (здесь  $m < n$ ), определяется очевидным образом  $(n-m)$ -местное отношение. Будем говорить, что это  $(n-m)$ -местное отношение *выразимо* в данной форме.

Например, если  $S$  есть 4-местное рекурсивное отношение, то  $(\exists x_3)(\forall x_1)S(x_1, x_2, x_3, x_4)$  вместе с отношением  $S$  образует предикатную форму, а  $\{\langle x_2, x_4 \rangle \mid (\exists x_3)(\forall x_1)S(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$  — отношение, выражимое в этой форме.

Для удобства мы будем считать, что переменные рекурсивного отношения записываются в том же порядке, в каком они встречаются в кванторах; например,  $(\exists y_2)(\forall y_3)S(y_1, y_2, y_3)$ . Однако это ограничение не входит в определение и потому допускаются кванторы по любым переменным и в любом порядке.

**Определение.** Пусть дано множество  $A$ . Если в определении предикатной формы заменить рекурсивное отношение на  $A$ -рекурсивное отношение, то получим определение  *$A$ -формы*.

Из теоремы I получаются такие следствия.

**Следствие I. (a)**  *$R$  входит в арифметическую иерархию тогда и только тогда, когда  $R$  выражимо в некоторой предикатной форме.*

**(b)**  *$R$  входит в арифметическую иерархию относительно  $A$  тогда и только тогда, когда  $R$  выражимо в некоторой  $A$ -форме.*

**Доказательство очевидно. ■**

**Определение.** Список (быть может, пустой) кванторов предикатной формы или  $A$ -формы назовем *префиксом* формы.

Например, префиксом формы  $(\forall x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)R(x_1, x_2, x_3, x_4)$  является  $\forall\exists\exists$ .

**Определение.** Числом перемен кванторов в префиксе называется число всех пар смежных, но не совпадающих кванторов.

Например, в префиксе  $\forall\exists\forall\exists$  две переменны кванторов.

<sup>1)</sup> Стого говоря, это определение скорее теоретико-множественное, чем синтаксическое (т. е. символическое). Предикатная форма состоит из рекурсивного отношения и (быть может, пустого) конечного списка операторов квантификации вместе с однозначным отображением членов этого списка в список переменных отношения.

Мы будем классифицировать формы (и отношения, которые в них выражимы) по числу перемен кванторов в их префиксах. Будет доказана фундаментальная значимость такой классификации.

**Определение.** Для  $n > 0$   $\Sigma_n$ -*префикс* — это префикс, начинающийся с  $\exists$ , с  $n - 1$  переменами кванторов.

$\Sigma_0$ -*префикс* — это пустой префикс.

Для  $n > 0$   $\Pi_n$ -*префикс* — это префикс, начинающийся с  $\forall$ , с  $n - 1$  переменами кванторов.

$\Pi_0$ -*префикс* — это пустой префикс.

(Итак, определения  $\Sigma_0$ -*префикса* и  $\Pi_0$ -*префикса* совпадают.)

**Определение.** Предикатная форма с  $\Sigma_n$ -префиксом называется  $\Sigma_n$ -*формой*.

Предикатная форма с  $\Pi_n$ -префиксом называется  $\Pi_n$ -*формой*.

Пусть дано множество  $A$ , тогда  $A$ -форма с  $\Sigma_n$ -префиксом называется  $\Sigma_n^A$ -*формой*;  $A$ -форма с  $\Pi_n$ -префиксом называется  $\Pi_n^A$ -*формой*.

В следующем основном определении мы распространим  $\Sigma_n$ - и  $\Pi_n$ -классификации с форм на отношения, выражимые в этих формах.

**Определение.**  $\Sigma_n = [\text{класс всех отношений, выражимых в } \Sigma_n\text{-формах}].$

$\Pi_n = [\text{класс всех отношений, выражимых в } \Pi_n\text{-формах}].$

Пусть дано множество  $A$ .

$\Sigma_n^A = [\text{класс всех отношений, выражимых в } \Sigma_n^A\text{-формах}].$

$\Pi_n^A = [\text{класс всех отношений, выражимых в } \Pi_n^A\text{-формах}].$

Итак, согласно следствию I, отношение входит в арифметическую иерархию тогда и только тогда, когда оно при некотором  $n$  является элементом из  $\Sigma_n$  или из  $\Pi_n$ . Аналогично для арифметической иерархии относительно  $A$ .  $\Sigma_0 (= \Pi_0)$  — это класс всех рекурсивных отношений. Согласно теореме о проекции,  $\Sigma_1$  — это класс всех рекурсивно перечислимых отношений. Аналогичным образом,  $\Sigma_0^A (= \Pi_0^A)$  — это класс всех  $A$ -рекурсивных отношений, а  $\Sigma_1^A$  — это класс всех отношений, рекурсивно перечисляемых в  $A$ .

Легко доказываются следующие основные соотношения.

**Теорема II.** (a)  $\Sigma_n \cup \Pi_n \subset \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$ .

(b) Для любого  $R$

$$R \in \Sigma_n \Leftrightarrow \bar{R} \in \Pi_n.$$

(Здесь для  $k$ -местного отношения  $R$   $\bar{R} = N^k - R$ .)

**Доказательство.** (a) Пусть форма задается  $(n + m)$ -местным рекурсивным отношением  $R$  и выражением

$$(Q_1 y_1) \dots (Q_m y_m) R(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m),$$

где  $Q_1, \dots, Q_m$  — последовательность кванторов. Следующим способом можно ввести „фиктивные“ кванторы. Пусть  $T$  — отношение, выражимое в этой форме. Положим

$$S = \{\langle x_1, \dots, y_m, z \rangle \mid R(x_1, \dots, y_m) \& z \in N\}.$$

Отношение  $S$  рекурсивно, и каждое из следующих выражений дает форму, в которой выражимо  $T$ :

$$(\forall z)(Q_1 y_1) \dots (Q_m y_m) S(x_1, \dots, y_m, z);$$

$$(\exists z)(Q_1 y_1) \dots (Q_m y_m) S(x_1, \dots, z);$$

$$(Q_1 y_1) \dots (Q_m y_m) (\forall z) S(x_1, \dots, z);$$

$$(Q_1 y_1) \dots (Q_m y_m) (\exists z) S(x_1, \dots, z).$$

Это дает пункт (a) теоремы.

(b) Если  $R \in \Sigma_n$ , то  $R$  выражимо в  $\Sigma_n$ -форме. Возьмем отрицание этой формы, и пронесем знак отрицания направо по правилам элементарной логики, использованным в теореме I. Это даст  $\Pi_n$ -форму, в которой выражимо дополнение отношения  $R$ .

С другой стороны, если  $\bar{R} \in \Pi_n$ , то отрицание  $\Pi_n$ -формы дает включение  $R \in \Sigma_n$ . ■

**Следствие II.** Пусть дано  $A$ .

(a)  $\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A \subset \Sigma_{n+1}^A \cap \Pi_{n+1}^A$ .

(b) Для любого  $R$

$$R \in \Sigma_n^A \Leftrightarrow \bar{R} \in \Pi_n^A.$$

**Доказательство.** Аналогично.

В упр. 14-3 мы покажем, что  $n > 0 \Rightarrow (\Sigma_n - \Pi_n) \neq \emptyset$  (и, следовательно, по теореме II (b), что  $n > 0 \Rightarrow (\Pi_n - \Sigma_n) \neq \emptyset$ ). Этот результат называют *теоремой об иерархии*. В сочетании с теоремой II (a) он показывает, что классы  $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots$  образуют строго возрастающую последовательность. Для решения упр. 14-3 потребуется теорема III (из следующего параграфа). Более сильный вариант упр. 14-3 будет сформулирован и доказан в § 14.5.

## § 14.2. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Отношения из класса  $\Sigma_n \cup \Pi_n$  можно выразить предикатными формами с не более чем  $n$  кванторами. Для этого достаточно показать, что форму с парой соседних кванторов одного типа можно заменить эквивалентной формой с одним квантором того же типа

(вместо этой пары). Доказательство использует функции  $\pi_1$  и  $\pi_2$  (определенные в § 5.3). Например,  $\dots(\forall x)(\forall y) \dots S(\dots x \dots y \dots)$  эквивалентно  $\dots(\forall u) \dots S^*(\dots u \dots)$ , где

$$S^* = \{\langle \dots z \dots \rangle | S(\dots \pi_1(z) \dots \pi_2(z) \dots)\},$$

при этом, если  $S$  есть  $n$ -местное рекурсивное отношение, то  $S^*$  будет  $(n-1)$ -местным рекурсивным отношением. Это предложение называется *правилом сжатия кванторов*. (Частным случаем этого правила является вторая теорема о проекции.) Следовательно, всякое отношение в арифметической иерархии выразимо предикатной формой, в префикссе которой отсутствуют пары соседних кванторов одного и того же типа. Кванторы в  $A$ -формах (для данного множества  $A$ ) также можно сжать указанным выше способом, поэтому любое отношение в арифметической иерархии относительно  $A$  можно выразить  $A$ -формой, в префикссе которой нет пар соседних кванторов одного типа.

Используя нумерацию рекурсивно перечислимых множеств, можно перенумеровать множества любого из классов  $\Sigma_n$  и  $\Pi_n$  ( $n > 0$ ). Аналогичным способом из нумерации множеств, рекурсивно перечислимых относительно  $A$ , можно получить нумерацию множеств любого из классов  $\Sigma_n^A$  и  $\Pi_n^A$  ( $n > 0$ ). Чтобы получить эти новые нумерации, сначала введем полезные основные отношения, обозначаемые  $T_n$  и  $T_n^A$ .

**Определение.** Для  $n > 0$  положим

$$T_n = \{\langle z, x_0, x_1, \dots, x_n \rangle | \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle\}$$

появляется на  $x_n$ -м шаге перечисления множества  $W_z$  (по номеру  $z$ ).

Для  $n > 0$  и любого множества  $A$  положим

$$T_n^A = \{\langle z, x_0, x_1, \dots, x_n \rangle | (\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle, y, u, v]\}$$

появляется на  $x_n$ -м шаге перечисления множества  $W_{\rho(z)}$  (по номеру  $\rho(z)$ ) и  $D_u \subset A$  и  $D_v \subset \bar{A}$ . (Перечисление множества  $W_z$  по номеру  $z$  — это перечисление, опирающееся на следствие 5-V (d).)

Очевидно, отношение  $T_n$  рекурсивно, а  $T_n^A$  является  $A$ -рекурсивным.  $(\exists x_n)T_n(z, x_0, \dots, x_n)$  утверждает, что  $\varphi_z(\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle)$  сходится,  $(\exists x_n)T_n^A(z, x_0, \dots, x_n)$  утверждает, что  $\varphi_z^A(\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle)$  сходится<sup>1)</sup>.

Для любого рекурсивно перечислимого отношения  $R$  существует такое число  $z$ , что  $R(x_0, \dots, x_{n-1}) \Leftrightarrow (\exists x_n)T_n(z, x_0, \dots, x_n)$ .

<sup>1)</sup> Отношение  $T_n$ , введенное Клини, подобно нашему  $T_n$ , только у Клини  $T_n(z, \dots, x_n)$  ближе по значению к следующему:  $x_n$  есть кодовый номер обрывающегося вывода  $\varphi_z(x_0, \dots, x_{n-1})$ . Отношение Клини имеет то преимущество, что значение функции можно получить непосредственно из  $x_n$ . Нам это не потребуется.

Это следует из определения рекурсивно перечислимого отношения. Таким образом,  $T_n$  дает нумерацию всех  $n$ -местных рекурсивно перечислимых отношений и, если взять дополнения, этот предикат дает нумерацию всех  $n$ -местных отношений с рекурсивно перечислимыми дополнениями.

**Определение.** Если  $R = \{\langle x_0, \dots, x_{m-1} \rangle | (\exists x_m) T_m(z, x_0, \dots, x_m)\}$ , то  $z$  называется  $\Sigma_1$ -индексом ( $\Sigma_1$ -номером) отношения  $R$ .

Если  $R = \{\langle x_0, \dots, x_{m-1} \rangle | (\forall x_m) \neg T_m(z, x_0, \dots, x_m)\}$ , то  $z$  называется  $\Pi_1$ -индексом ( $\Pi_1$ -номером) отношения  $R$ .

Всякое множество из  $\Sigma_n$  можно получить, применяя  $n-1$  раз операцию квантификации к некоторому  $n$ -местному отношению из  $\Sigma_1$  (если  $n$  нечетно) или из  $\Pi_1$  (если  $n$  четно). Следовательно, можно перенумеровать все множества из  $\Sigma_n$  (аналогичное рассуждение проходит для множеств из  $\Pi_n$ ). Вообще всякое  $m$ -местное отношение из  $\Sigma_n$  можно получить, применяя  $n-1$  квантификаций к  $(m+n-1)$ -местному отношению из  $\Sigma_1$  (если  $n$  нечетно) или из  $\Pi_1$  (если  $n$  четно). Следовательно, для любого  $m > 0$  получаем нумерацию всех  $m$ -местных отношений из  $\Sigma_n$  (аналогично для  $\Pi_n$ ).

**Определение.** Если  $B = \{x_0 | (\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n(z, x_0, \dots, x_n)\}$ , то  $z$  называется  $\Sigma_n$ -индексом ( $\Sigma_n$ -номером) множества  $B$  (здесь „ $(\exists x_1)(\forall x_2) \dots$ “ означает цепочку чередующихся кванторов для нечетного  $n$  и цепочку чередующихся кванторов, завершающуюся знаком отрицания, для четного  $n$ ).

Если  $B = \{x_0 | (\forall x_1)(\exists x_2) \dots T_n(z, x_0, \dots, x_n)\}$ , то  $z$  называется  $\Pi_n$ -индексом ( $\Pi_n$ -номером) множества  $B$  (перед  $T_n$  стоит знак отрицания, если  $n$  нечетно).

Так, например, для множества  $B = \{x_0 | (\exists x_1)(\forall x_2) \neg T_2(z, x_0, x_1, x_2)\}$  число  $z$  является  $\Sigma_2$ -индексом (для  $B$  число  $z$  будет  $\Pi_2$ -индексом). По теореме II множество  $B$  содержится и в  $\Sigma_3$ . Как член  $\Sigma_3$  оно будет иметь (в общем, другие)  $\Sigma_3$ -индексы.

$\Sigma_n$ -индексы и  $\Pi_n$ -индексы  $m$ -местных отношений определяются аналогично. (Например, если

$R = \{\langle x_0, \dots, x_{m-1} \rangle | (\exists x_m)(\forall x_{m+1}) \dots T_{m+n-1}(z, x_0, \dots, x_{m+n-1})\}$ , то  $z$  есть  $\Sigma_n$ -индекс отношения  $R$  (перед  $T_{m+n-1}$  стоит знак отрицания, если  $n$  четно).)

Новые нумерации схожи во многих отношениях с нашей первоначальной нумерацией рекурсивно перечислимых множеств. В частности, они обладают следующими свойствами *допустимости*:

(i) имеется эффективная процедура, с помощью которой по данному  $\Sigma_n$ -индексу отношения  $R$  можно найти индекс рекурсивной характеристической функции такого рекурсивного отношения  $S$ , что  $R$  выразимо в  $\Sigma_n$ -форме с ядром  $S$ ; (ii) имеется эффективная

процедура, с помощью которой из данной  $\Sigma_n$ -формы для отношения  $R$  с рекурсивным отношением  $S$ , заданным характеристическим индексом (т. е. индексом своей характеристической функции), можно получить  $\Sigma_n$ -индекс отношения  $R$ . Пункт (i) выполняется тривиально; пункт (ii) выполняется благодаря равномерности операции сжатия кванторов; например, в иллюстрации сжатия кванторов характеристическое отношение  $S^*$  можно равномерно получить из характеристического отношения  $S$ . Аналогичные пункты имеют место и для  $\Pi_n$ .

Заметим, что мы не построили нумерации для  $\Sigma_0$ . Оказывается, что как для рекурсивных множеств, так и для рекурсивных  $m$ -местных отношений невозможна нумерация (на  $N$ ), допустимая в указанном выше смысле (см. упр. 14-2).

Если дано множество  $A$ , то совершенно точно таким же образом, заменяя  $T_n$  на  $T_n^A$ , определяются понятия  $\Sigma_n^A$ - и  $\Pi_n^A$ -индекса. Замечание о допустимости также сохраняется с заменой общерекурсивных характеристических функций  $A$ -рекурсивными характеристическими функциями.

Суммируем сказанное выше в следующей теореме, придав ей релятивизованную форму, т. е. сформулируем теорему для арифметической иерархии относительно  $A$ . Теорему сформулируем для множеств. Соответствующий вариант для  $m$ -местных отношений (для любого  $m > 0$ ) очевиден.

**Теорема III (Клини)** (теорема о нормальной форме и нумерации). *Пусть дано множество  $A$ . Для  $n > 0$  всякое множество  $B$  из  $\Sigma_n^A$  имеет  $\Sigma_n^A$ -индекс, т. е. если  $B \in \Sigma_n^A$ , то существует такое  $z$ , что*

$$B = \{x_0 \mid (\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n^A(z, x_0, \dots, x_n)\}$$

(перед  $T_n^A$  стоит знак отрицания, если  $n$  четно).  $\Sigma_n^A$ -индекс для  $B$  можно найти равномерно по произвольной  $\Sigma_n^A$ -форме для  $B$ , если  $A$ -рекурсивное отношение этой формы задается индексом своей  $A$ -рекурсивной характеристической функции.

**Доказательство.** См. предыдущий текст параграфа. ■

### § 14.3 АЛГОРИТМ ТАРСКОГО — КУРАТОВСКОГО

**Определение.** Пусть дано выражение  $Fa_1 \dots a_n$ , построенное по правилам логики предикатов из кванторов, переменных,  $=$ , пропозициональных связок и символов отношений, и такое, что  $a_1, \dots, a_n$  — свободные (т. е. неквантифицированные) переменные выражения  $Fa_1 \dots a_n$ . Пусть символы отношений интерпретируются как некоторые конкретные отношения  $S_1, S_2, \dots$ . Будем говорить, что отношение  $R = \langle\langle x_1, \dots, x_n \rangle | Fa_1 \dots a_n$

верно, когда  $a_1, \dots, a_n$  интерпретируются как  $x_1, \dots, x_n$  соответственно} определимо в логике предикатов через отношения  $S_1, S_2, \dots$ , и выражение  $Fa_1 \dots a_n$  назовем определением отношения  $R$  через  $S_1, S_2, \dots$

Если отношение определимо в логике предикатов через рекурсивные отношения, то оно входит в арифметическую иерархию. Это следует из некоторых свойств рекурсивных отношений (см. ниже пункт 1) и некоторых соотношений элементарной логики (см. ниже пункты 2, 3 и 4).

1. Если отношение определимо пропозициональной комбинацией рекурсивных отношений, то оно рекурсивно. Например, если  $R$  и  $S$  — рекурсивные бинарные отношения, то  $\{\langle x, y, z \rangle \mid R(x, y) \vee \neg S(y, z)\}$  — рекурсивное тернарное отношение.

2. Если  $F$  и  $G$  — такие выражения, что  $G$  не содержит ни одного свободного (т. е. незаквантитифицированного) вхождения переменной  $a$ , то следующие пары выражений эквивалентны (и, следовательно, если один из членов пары заменить на другой внутри большего выражения, то исходный и измененный варианты этого большого выражения будут эквивалентны):

$$\begin{array}{ll} (\exists a)F \vee G, & (\exists a)[F \vee G]; \\ (\forall a)F \vee G, & (\forall a)[F \vee G]; \\ (\exists a)F \& G, & (\exists a)[F \& G]; \\ (\forall a)F \& G, & (\forall a)[F \& G]; \\ (\exists a)F \Rightarrow G, & (\forall a)[F \Rightarrow G]; \\ (\forall a)F \Rightarrow G, & (\exists a)[F \Rightarrow G]; \\ G \Rightarrow (\exists a)F, & (\exists a)[G \Rightarrow F]; \\ G \Rightarrow (\forall a)F, & (\forall a)[G \Rightarrow F]. \end{array}$$

3. Пусть  $F(a)$  — выражение, содержащее переменную  $a$ , пусть  $b$  — переменная, не входящая в  $F(a)$ , и пусть  $F(b)$  — результат подстановки  $b$  вместо всех незаквантитифицированных вхождений  $a$  в  $F(a)$ . Тогда следующие пары выражений эквивалентны:

$$\begin{array}{ll} (\forall a)F(a), & (\forall b)F(b); \\ (\exists a)F(a), & (\exists b)F(b). \end{array}$$

4. Пусть  $F$  и  $G$  — произвольные выражения. Тогда следующие пары выражений эквивалентны:

$$\begin{array}{ll} \neg(\forall a)F, & (\exists a)\neg F; \\ \neg(\exists a)F, & (\forall a)\neg F; \\ \neg\neg F, & F; \\ F \Leftrightarrow G, & [F \Rightarrow G] \& [G \Rightarrow F]. \end{array}$$

Пункт 1 является очевидным следствием тезиса Черча. Пункты 2, 3 и 4 предоставляется проверить читателю.

**Теорема IV.** Если отношение  $R$  определимо в логике предикатов через рекурсивные отношения, то  $R$  входит в арифметическую иерархию.

**Доказательство.** Возьмем определение  $R$ . По вышеуказанным пунктам 2, 3 и 4 образуем цепочку эквивалентностей, продвигая кванторы налево, пока не получим выражение  $(Q_1 b_1) \dots (Q_m b_m)G$ , где  $Q_1, \dots, Q_m$  — кванторы, а  $G$  не содержит кванторов. Будем называть такие выражения *предваренными формами*. Согласно пункту 1,  $G$  определяет рекурсивное отношение. Следовательно,  $R$  выразимо в предикатной форме и, согласно следствию I,  $R$  входит в арифметическую иерархию. ■

Пункт 1 выполняется при замене „рекурсивный“ на „ $A$ -рекурсивный“, следовательно, имеет место следующий релятивизированный вариант теоремы IV.

**Следствие IV.** Пусть дано множество  $A$ . Если отношение  $R$  определимо в логике предикатов через  $A$ -рекурсивные отношения, то  $R$  входит в арифметическую иерархию относительно  $A$ .

Доказательство. См. сказанное выше<sup>1</sup>).

Пример. Пусть  $B = \{x \mid W_x \text{ рекурсивно}\}$ . Покажем, что  $B$  входит в арифметическую иерархию. „Вывод“ состоит из двух этапов.

Этап 1. Получим определение множества  $B$  через рекурсивные отношения.

Этап 2. Используя пункты 2, 3 и 4, образуем цепь эквивалентностей, ведущую к предваренной форме:

$$\begin{aligned}
 & (\exists y)(\forall x)[(\exists u)T_1(z, x, u) \Leftrightarrow \neg(\exists u)T_1(y, x, u)]; \\
 & (\exists y)(\forall x)[[(\exists u)T_1(z, x, u) \Rightarrow \neg(\exists u)T_1(y, x, u)] \text{ } \& \\
 & \quad \& [\neg(\exists u)T_1(y, x, u) \Rightarrow (\exists u)T_1(z, x, u)]] \text{ (по пункту 4)}; \\
 & (\exists y)(\forall x)[[(\exists u)T_1(z, x, u) \Rightarrow \neg(\exists v)T_1(y, x, v)] \text{ } \& \\
 & \quad \& [\neg(\exists w)T_1(y, x, w) \Rightarrow (\exists s)T_1(z, x, s)] \text{ (по пункту 3)}];
 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Из следствия I непосредственно получаются обращения теоремы IV и следствия IV.

$(\exists y)(\forall x)[[(\exists u)T_1(z, x, u) \Rightarrow (\forall v)\neg T_1(y, x, v)] \& [(\forall w)\neg T_1(y, x, w) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (\exists s)T_1(z, x, s)]]$  (по пункту 4);  
 $(\exists y)(\forall x)[[(\forall u)(\forall v)[T_1(z, x, u) \Rightarrow \neg T_1(y, x, v)] \&$   
 $\& (\exists w)(\exists s)[\neg T_1(y, x, w) \Rightarrow T_1(z, x, s)]]$  (по пункту 2);  
 $(\exists y)(\forall x)(\exists w)(\forall u)(\exists s)(\forall v)[[T_1(z, x, u) \Rightarrow \neg T_1(y, x, v)] \&$   
 $\& [\neg T_1(y, x, w) \Rightarrow T_1(z, x, s)]]$  (по пункту 2).

Согласно пункту 1, множество  $B$  входит в арифметическую иерархию, более того,  $B \in \Sigma_6$ .

Из приведенного примера ясно, что вид получающегося префикса зависит только от вида и расстановки кванторных символов и пропозициональных связок в начале этапа 2. Следовательно, можно сокращенно записать этап 2, указывая только эти символы и связки. В нашем примере получим следующее:

```

;AEFAE
;[EE & AA]AE
;[EE & AA]AE;
;[[E → A] & [A → E]]AE;
;[[E → E] & [E → E]]AE;
;[[E → E] & [E → E]]AE;

```

(Заметим, что (согласно пункту 1) пропозициональные связи можно опускать, если они не соединяют подформулы, содержащие кванторы.) В дальнейшем будем использовать такую сокращенную запись.

Наш процесс получения предваренной формы не определен однозначно. В рассмотренном примере на заключительном шаге можно действовать так:

EE&AAE

И получаем, что  $B \in \Sigma_3$ .

Вообще нам хотелось бы вести процесс так, чтобы получать наименьшее число перемен кванторов. С этой точки зрения второй вывод для  $B$  предпочтительнее. Всегда можно найти наилучший вывод (из данного определения), так как возможно лишь конечное число различных выводов.

Правило сжатия кванторов часто упрощает вывод. Так, в нашем примере заключительные шаги вывода можно было организовать так:

EAE

Ниже мы рассмотрим еще ряд примеров. Заметим, что наши выводы *равномерны* в том смысле, что по данным характеристическим индексам рекурсивных отношений в первоначальном определении множества  $B$  можно эффективно найти  $\Sigma_n$ -индекс (или  $\Pi_n$ -индекс) множества  $B$  (при этом  $\Sigma_n$  (или  $\Pi_n$ ) — это класс, определяемый выводом). Впервые подобный процесс в общем виде был использован Тарским и Куратовским для классификации множеств действительных чисел, входящих в иерархии Бореля и иерархии проективных множеств. Поэтому мы назовем этот процесс *алгоритмом Тарского — Куратовского*.

Если дано множество  $A$ , то алгоритм Тарского — Куратовского можно применять к определениям относительно  $A$ -рекурсивных отношений. Например, если  $B = \{z \mid (\exists y)[y \in W_z^A \& W_y^A \text{ бесконечно}]\}$ , то получим

и, следовательно,  $B \in \Sigma_A^A$

При применении алгоритма Тарского — Куратовского используются иногда следующие сокращения.

### **Сокращенная запись.**

$(\forall a \leq b)F$  означает  $(\forall a)[a \leq b \Rightarrow F]$ ;

где  $a$  и  $b$  — различные переменные.

Сокращения  $(\forall a \leq b)$  и  $(\exists a \leq b)$  называются *ограниченными кванторами*. Отметим следующие свойства ограниченных кванторов.

1. Ограниченные кванторы можно сдвигать вправо через обычные кванторы, производя подходящие изменения в рекурсивных отношениях, находящихся в зоне их действия. Например,

$$(\forall a \leq b)(\exists c)(\forall d)R(a, b, c, d)$$

эквивалентно

$$(\exists c)(\forall a \leq b)(\forall d)R(a \cdot b \cdot \pi_a^b(c), d),$$

где  $\pi_a^b$  — общерекурсивная функция из § 5.3 (см. для других случаев упр. 14-4).

2. Навешивание ограниченного квантора на рекурсивное отношение дает рекурсивное отношение. Например, если  $R$  — рекурсивное тернарное отношение, то  $\{(x, u) \mid (\forall y \leq u)R(x, y, u)\}$  — рекурсивное бинарное отношение.

Из этих замечаний следует, что если квантор можно сокращенно записать как ограниченный квантор, то его можно опускать в алгоритме Тарского — Куратовского. (В упр. 14-5 см. обобщение этого правила.) Очевидно, что это правило действует и для арифметической иерархии относительно  $A$  (для данного множества  $A$ ).

Например, пусть  $R = \{\langle u, z \rangle \mid D_u \subset W_z\}$ . Тогда  $\langle u, z \rangle \in R \Leftrightarrow (\forall x)[x \in D_u \Rightarrow (\exists y)T_z(x, y)]$ . Имеем

$\forall A [ \exists E A ]$

и, следовательно,  $R \in \Pi_2$ . Однако из определения канонического индекса в § 5.6 следует, что  $(\forall x)(\forall u)[x \in D_u \Rightarrow x \leq u]$ . Поэтому  $\langle u, z \rangle \in R \Leftrightarrow (\forall x \leq u)[x \in D_u \Rightarrow (\exists y)T_1(z, x, y)]$ . Опуская ограниченный квантор, получаем

→ E;

и  $R \in \Sigma_1$ ; т. е.  $R$  рекурсивно перечислимо, как и ожидалось, согласно исходному определению отношения  $R$ .

И, наконец, последний пример. Дополнительные примеры можно найти в упражнениях.

Пример. Пусть  $B = \{z \mid W_z \text{ простое множество}\}$ . Тогда  
 $\forall z \in B \Leftrightarrow W_z \text{ просто} \Leftrightarrow [\overline{W}_z \text{ бесконечно} \& (\forall y)[W_y \text{ бесконечно} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow W_y \cap W_z \neq \emptyset]] \Leftrightarrow [(\forall x)(\exists y)[y > x \& y \notin W_z] \& (\forall y)[(\forall u)(\exists v)$   
 $[v > u \& v \in W_y] \Rightarrow (\exists w)[w \in W_y \& w \in W_z]]] \Leftrightarrow [(\forall x)[\exists y]$   
 $[y > x \& (\forall x_1) \neg T_1(z, y, x_1)] \& (\forall y)[(\forall u)(\exists v)[v > u \& (\exists x_1)$   
 $T_1(y, v, x_1)] \Rightarrow (\exists w)[(\exists x_1)T_1(y, w, x_1) \& (\exists x_1)T_1(z, w, x_1)]]].$

;AEEA & AEA;  
 .AEA.  
 ;AEA & AEA;  
 ;EA]AEA & AEA;  
 ;E]AEA & AEA;  
 ;[E] & E]EA & [EA];

Следовательно,  $B \in \Pi_3$ .

Каким образом можно убедиться в том, что алгоритм Тарского — Куратовского дает наилучший возможный результат? Другими словами, каким образом можно убедиться в том, что не существует

ствует эквивалентного, но совершенно иного исходного определения для данного множества или отношения, которое дает (под действием алгоритма Тарского — Куратовского) лучший результат? Мы вернемся к этим проблемам в § 14.8.

#### § 14.4. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРЕДСТАВИМОСТЬ

Рассмотрим логическую систему *элементарной арифметики*, введенную в § 7.8. Формулы строятся как формулы логики предикатов из следующих символов:  $+$ ,  $\times$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $\dots$ ,  $=$ , кванторных символов, символов переменных и пропозициональных связок  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ . Формулы без свободных (т. е. неквантифицированных) переменных называются *высказываниями* (в § 7.8 высказывания назывались п.п. формулами). Высказывания интерпретируются как высказывания с обычными сложением и умножением над неотрицательными целыми числами, при этом „ $0$ “, „ $1$ “, „ $2$ “,  $\dots$  интерпретируются как  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $\dots$ , а областью допустимых значений переменных являются неотрицательные целые числа. Согласно этой интерпретации, всякое высказывание истинно или ложно.  $n$ -местное отношение  $R$  определимо в элементарной арифметике, если имеется такая формула  $Fa_1 \dots a_n$  со свободными переменными  $a_1, \dots, a_n$ , что

$$R = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid Fx_1 \dots x_n \text{ истинна}\},$$

где для любых чисел  $x_1, \dots, x_n$   $Fx_1 \dots x_n$  есть результат подстановки нумералов, выраждающих  $x_1, \dots, x_n$ , вместо  $a_1, \dots, a_n$  соответственно в  $Fa_1 \dots a_n$ .

Следующая известная фундаментальная теорема Гёделя связывает арифметическую иерархию с высказываниями элементарной арифметики.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $n$ -местное отношение  $P$  называется *полиномиальным отношением*, если существует такой полином  $p(a_1, \dots, a_n)$  с  $n$  переменными с целыми коэффициентами, что

$$P = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid p(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

В  $p$  могут быть отрицательные коэффициенты, но (как обычно) считаем, что  $x_1, \dots, x_n$  могут быть только неотрицательными целыми числами. Следовательно,  $P$  — это отношение на неотрицательных целых числах<sup>1)</sup>.

1) Естественным обобщением понятия полиномиального отношения является понятие диофанта отношения.  $n$ -арное отношение  $R$  называется *диофантовым*, если существует такой полином  $p(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$  с целочисленными коэффициентами, что  $R = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid \exists y_1, \dots, \exists y_m [p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0]\}$ . — Прим. ред.

**Теорема V (Гёдель).** Для любого  $n$ -местного рекурсивно перечислимого отношения  $R$  существуют такие полиномиальное отношение  $P$  и префикс  $Q_1 \dots Q_m$ , что

$$R(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow (Q_1y_1) \dots (Q_my_m)P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)^1).$$

**Доказательство.** Доказательство приводится в гл. 7 книги Дэвиса [1958<sup>2</sup>]. Мы не будем здесь проводить это доказательство. Оно опирается на формальное определение машины Тьюринга и требует детальных комбинаторных построений. Доказательство использует китайскую теорему об остатках (из теории чисел). ■

Можно доказать следующий более сильный вариант теоремы V.

**Следствие V (Дэвис).** Для любого  $n$  существуют общерекурсивная функция  $f$ , натуральное число  $k$  и  $q$ -местное полиномиальное отношение  $P$ , такие, что  $q = n + k + 3$  и что для любых  $z$  и  $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{aligned} (\exists w)T_n(z, x_1, \dots, x_n, w) &\Leftrightarrow (\exists y)(\forall u)(\exists v_1) \dots \\ &\quad \dots (\exists v_k)P(f(z), x_1, \dots, x_n, y, u, v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

причем индекс функции  $f$ , полином для  $P$  и, следовательно, число  $k$  можно найти рацемерно по  $n$ .

**Доказательство.** См. главу 7 книги Дэвиса [1958]. ■

Не известно<sup>3)</sup>, можно ли опустить квантор общности  $(\forall u)$  в следствии V. (Если бы его можно было опустить, то из существ-

1) Как показал Ю. В. Матиясевич [1970], можно добиться того, чтобы все кванторы  $Q_i$  были кванторами существования (другими словами, каждое рекурсивно перечислимое отношение является диофантовым). — Прим. ред.

2) Теорему V можно получить также как следствие теоремы I из п. 13.3 книги А. И. Мальцева [1965]. В указанной теореме I утверждается, что каждое рекурсивно перечислимое отношение определимо в элементарной арифметике. Достаточно поэтому для каждой формулы  $Fa_1, \dots, a_n$  элементарной арифметики построить такой полином  $p(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$  и такую приставку  $Q_1, \dots, Q_m$ , что  $(Fx_1, \dots, x_n \text{ истинна}) \Leftrightarrow Q_1y_1 \dots Q_my_m [p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0]$ . Требуемая цель будет достигнута, если совершить над формулой  $Fa_1, \dots, a_n$  последовательно следующие четыре операции: во-первых, согласно законам логики высказываний, выразить связи  $\&$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$  через  $\neg$  и  $\vee$ ; во-вторых, заменить всякое равенство вида  $\alpha = \beta$  равносильным равенством  $\gamma = 0$ , где  $\gamma$  — полином; в-третьих, заменить всякую дизъюнкцию  $(\alpha = 0) \vee (\beta = 0)$  равенством  $\alpha \cdot \beta = 0$ , а отрицание  $\neg(\alpha = 0)$  формулой  $\exists c(\alpha = c + 1)$ ; в-четвертых, согласно законам логики предикатов, вынести все кванторы вперед (т. е. привести формулу к предваренному виду). — Прим. ред.

3) Поскольку отношение  $R$ , задаваемое равенством  $R = (\exists w)T_n(z, x_1, \dots, x_n, w)$ , рекурсивно перечислимо, то (в силу диофантовости рекурсивно перечислимых отношений), в следствии V можно не толь-

вования нерекурсивного рекурсивно перечислимого множества следовала бы неразрешимость десятой проблемы Гильберта (см. § 2.2.)<sup>1)</sup>). Р. Робинсон [1956] показал, что в следствии V в качестве  $k$  можно выбрать число  $n + 3$ <sup>2)</sup>. Следуя доказательствам Гёделя, Дэвиса и Робинсона, эти полиномы можно выписать в явном виде.

Объясним, почему арифметическая иерархия называется арифметической.

**Теорема VI (теорема о представимости).** *Каково бы ни было отношение  $R$ , оно входит в арифметическую иерархию тогда и только тогда, когда  $R$  определимо в элементарной арифметике.*

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Если  $R$  определимо в элементарной арифметике, то  $R$  определимо относительно рекурсивных отношений  $\{\langle x, y, z \rangle \mid x + y = z\}$ ,  $\{\langle x, y, z \rangle \mid x \cdot y = z\}$  и  $\{x \mid x = k\}$  (для произвольного числа  $k$ ). Следовательно, согласно теореме IV, отношение  $R$  входит в арифметическую иерархию.

$\Rightarrow$ . Всякое полиномиальное отношение определимо в элементарной арифметике. Действительно, (i) отношение  $p(a_1, \dots, a_n) = 0$  можно выразить как  $q(a_1, \dots, a_n) = r(a_1, \dots, a_n)$ , где  $q$  и  $r$  — полиномы с неотрицательными коэффициентами, (ii) возведение в степени можно заменить итерацией операции умножения, например  $x^3 = (x \cdot x) \cdot x$ . Остается только применить теорему V. ■

Релятивизованная форма теоремы VI дается теоремой VII.

**Теорема VII.** *Для произвольного множества  $A$  и любого отношения  $R$  (1) отношение  $R$  входит в арифметическую иерархию относительно  $A \Leftrightarrow$  (2) отношение  $R$  определимо в логике предикатов через рекурсивные отношения и множество  $A$ <sup>3)</sup>  $\Leftrightarrow$  (3) отношение  $R$  определимо в логике предикатов через полиномиальные*

ко опустить квантор общности, но и считать, что  $f(z) = z$  при всех  $z$ . Впрочем, чтобы обосновать возможность замены  $f(z)$  на  $z$ , нет нужды опираться на такой сильный факт, как диофантовость рекурсивно перечислимых отношений. Проще использовать само следствие V. Действительно, при подходящем  $z'$  и произвольных  $z, x_1, \dots, x_n$  имеем  $(\exists w)T_n(z, x_1, \dots, x_n, w) \Leftrightarrow (\exists w')T_{n+1}(z', z, x_1, \dots, x_n, w') \Leftrightarrow (\exists y)(\forall u)(\exists v_1) \dots (\exists v_k)P'(f(z'), z, x_1, \dots, x_n, y, u, v_1, \dots, v_k), \Leftrightarrow (\exists y)(\forall u)(\exists v_1) \dots (\exists v_k)P''(z, x_1, \dots, x_n, y, u, v_1, \dots, v_k)$ , где  $P''$  — некоторое полиномиальное отношение. — *Прим. ред.*

<sup>1)</sup> Ю. В. Матиясевич показал, что в следствии V квантор общности можно опустить и что, следовательно, десятая проблема Гильберта неразрешима. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Таким образом, имеется один такой полином  $p$  восьми переменных, что для любого  $z$

$$W_z = \{x \mid (\exists y)(\forall u)(\exists v_1)(\exists v_2)(\exists v_3)(\exists v_4)[p(f(z), x, y, u, v_1, v_2, v_3, v_4) = 0]\}.$$

<sup>3)</sup> Точнее говоря, через рекурсивные отношения и множество  $A$ , рассматриваемое как 1-местное отношение.

отношения и множество  $A \Leftrightarrow$  (4) отношение  $R$  определимо в расширенной элементарной арифметике, полученной путем добавления к элементарной арифметике элементарных формул вида „ $a \in X$ “, при этом „ $a \in X$ “ интерпретируется как  $x \in A$ , где число  $x$  — значение переменной  $a$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $(3) \Rightarrow (4)$ . Из теоремы V получаем, что  $(2) \Rightarrow (3)$ . Чтобы показать, что  $(4) \Rightarrow (1)$ , приведем выражение, определяющее  $R$ , к предваренной форме (как в алгоритме Тарского — Куратовского), тогда бескванторная часть, идущая после кванторов, определит  $A$ -рекурсивное отношение и, согласно следствию I, отношение  $R$  входит в арифметическую иерархию относительно  $A$ . Наконец, чтобы показать, что  $(1) \Rightarrow (2)$ , рассмотрим  $R$ , входящее в арифметическую иерархию относительно  $A$ . По теореме III отношение  $R$  определимо относительно  $T_n^A$  при некотором  $n$ . В свою очередь  $T_n^A(z, x_0, \dots, x_n) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle \langle x_0, \dots, x_{n-1}, y, u, v \rangle, z \rangle \in T_n^A]$  появляется на  $x_n$ -м шаге перечисления  $W_{p(z)} \& (\forall x)[x \in D_u \Rightarrow x \in A] \& (\forall x)[x \in D_v \Rightarrow x \notin A]$ . Следовательно,  $R$  определимо через рекурсивные отношения и множество  $A$ . ■

**Следствие VII.** *Если  $A$  входит в арифметическую иерархию относительно  $B$ , а  $B$  входит в арифметическую иерархию относительно  $C$ , то  $A$  входит в арифметическую иерархию относительно  $C$ .*

**Доказательство** следует из теоремы, поскольку если  $A$  определимо относительно  $B$  в элементарной арифметике, а  $B$  определимо относительно  $C$  в элементарной арифметике, то  $A$  определимо относительно  $C$  в элементарной арифметике. ■

## § 14.5. СИЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ОБ ИЕРАРХИИ

В этом параграфе излагаются теорема и ее следствия, представляющие собой главный результат всей главы. Мы назовем его *сильной теоремой об иерархии*. Изложение и доказательство будет проведено для релятивизированного случая. Этот результат связывает арифметическую иерархию относительно  $A$  со структурой степеней, изученной в гл. 13.

Напомним, что  $A^{(n)}$  — это результат  $n$ -кратного применения к  $A$  операции скачка.

**Теорема VIII (Клини, Пост).** *Пусть  $A$  — произвольное множество. Каковы бы ни были число  $n$  и множество  $B$*

- (a)  $B \in \Sigma_{n+1}^A \Leftrightarrow B$  рекурсивно перечислимо относительно  $A^{(n)}$ ;
- (b)  $B \in \Sigma_{n+1}^A \cap \Pi_{n+1}^A \Leftrightarrow B \leqslant_T A^{(n)}$ . Более того,

(с) имеются равномерные процедуры, позволяющие по любому  $\Sigma_{n+1}^A$ -индексу множества  $B$  (для любых  $n$  и  $B \in \Sigma_{n+1}^A$ ) получать индекс множества  $B$  как множества, рекурсивно перечислимого относительно  $A^{(n)}$  и, наоборот, по любому индексу множества  $B$  как множества, рекурсивно перечислимого относительно  $A^{(n)}$ , можно эффективно получить  $\Sigma_{n+1}^A$ -индекс множества  $B$ .

(Пункт (б) иногда называют теоремой Поста.)

**Доказательство.** По теореме 9-IV (а)  $\Rightarrow$  (б). Остается доказать (а) и (с).

(а) Проведем индукцию.

$n = 0$ . Согласно релятивизированной теореме о проекции,  $B \in \Sigma_1^A \Leftrightarrow B$  рекурсивно перечислимо в  $A (= A^{(0)})$ .

$n = k + 1$ . Предполагая, что (а) верно для  $n = k$ , покажем, что  $B \in \Sigma_{k+2}^A \Leftrightarrow B$  рекурсивно перечислимо относительно  $A^{(k+1)}$ .

$\Leftarrow$ . Пусть  $B = W_{z_0}^{A^{(k+1)}}$ . Тогда  $B = \{x \mid (\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle x, y, u, v \rangle \in \in W_{\rho(z_0)} \& D_u \subset A^{(k+1)} \& D_v \subset A^{(k+1)}]\}$ . Рассмотрим множество  $\{u \mid D_u \subset A^{(k+1)}\}$ . Множество  $A^{(k+1)}$  рекурсивно перечислимо в  $A^{(k)}$ , следовательно, по индуктивному предположению,  $A^{(k+1)} \in \Sigma_{k+1}^A$ . Кроме того,  $D_u \subset A^{(k+1)} \Leftrightarrow (\forall y \leq u)[y \in D_u \Rightarrow y \in A^{(k+1)}]$ . Следовательно, опуская ограниченный квантор и проводя очевидные преобразования, получаем, что  $\{u \mid D_u \subset A^{(k+1)}\} \in \Sigma_{k+1}^A$ . Аналогично получаем, что  $D_v \subset A^{(k+1)} \Leftrightarrow (\forall y \leq v)[y \in D_v \Rightarrow y \in A^{(k+1)}]$  и, согласно индуктивному предположению,  $A^{(k+1)} \in \Sigma_{k+1}^A$ . Следовательно,  $\{v \mid D_v \subset A^{(k+1)}\} \in \Sigma_{k+1}^A$ .

Учитывая, что  $\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z_0)} \Leftrightarrow (\exists w)T_1(\rho(z_0), \langle x, y, u, v \rangle, w)$ , получаем, что  $B$  определимо через  $A$ -рекурсивные отношения. Это определение имеет такой вид:

$$\underbrace{\exists \exists}_{k+1} \underbrace{\exists \& \exists}_{k+1} \underbrace{A \dots \& \exists \dots}_{k+1}.$$

Применяя алгоритм Тарского — Куратовского, получим

$$\underbrace{\exists A}_{k+2} \underbrace{\exists \dots}_{k+1}$$

Следовательно,  $B \in \Sigma_{k+2}^A$ .

$\Rightarrow$ . Пусть  $B \in \Sigma_{k+2}^A$ , т. е.  $B = \{x \mid (\exists y)S(x, y)\}$ , где  $S \in \Pi_{k+1}^A$ . Тогда  $\bar{S} \in \Sigma_{k+1}^A$  и по индуктивному предположению  $\bar{S}$  рекурсивно перечислимо относительно  $A^{(k)}$ . Следовательно, по теореме 13-1 отношение  $\bar{S}$  рекурсивно в  $A^{(k+1)}$ . Но тогда и  $S$  рекурсивно в  $A^{(k+1)}$  и, согласно релятивизированной теореме о проекции,  $B$

должно быть рекурсивно перечислимым в  $A^{(k+1)}$  (см. также упр. 14-9). Итак, (а) доказано.

(с) доказываем индукцией. Для  $n = 0$  равномерность очевидна, так как индексы одни и те же (см. определение  $T_1^A$  в § 14.2). Предположим, что имеет место равномерность в обе стороны для  $n = k$ . Просматривая доказательство пункта (а) и учитывая равномерность, имеющуюся в следствии 13-1, теореме III и релятивизированной теореме о проекции, получаем равномерность в обе стороны и для  $n = k + 1$ . ■

Изложим пункты (а) и (б) в нерелятивизированном виде.

**Следствие VIII (а).** Для любого  $n$  и любого множества  $B$

$$B \in \Sigma_{n+1} \Leftrightarrow B \text{ рекурсивно перечислимо в } \emptyset^{(n)};$$

и

$$B \in \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1} \Leftrightarrow B \leq_T \emptyset^{(n)}.$$

**Доказательство очевидно.** ■

**Следствие VIII (б) (теорема о полноте).** Для любых  $A$  и  $n > 0$

$$B \in \Sigma_n^A \Leftrightarrow B \leq_1 A^{(n)};$$

$$B \in \Pi_n^A \Leftrightarrow B \leq_1 \overline{A^{(n)}};$$

$$B \in \Sigma_n \Leftrightarrow B \leq_1 \emptyset^{(n)};$$

$$B \in \Pi_n \Leftrightarrow B \leq_1 \overline{\emptyset^{(n)}}.$$

**Следствие VIII (с) (теорема об иерархии).** Пусть дано  $A$ , тогда для любого  $n$  существует такое множество  $B$ , что  $B \in (\Sigma_{n+1}^A - \Pi_{n+1}^A)$  ( $n$ , следовательно,  $\bar{B} \in (\Pi_{n+1}^A - \Sigma_{n+1}^A)$ ).

**Доказательство.** Пункт (б) следует из теоремы 13-1. Чтобы доказать (с), рассмотрим

$$B = A^{(n+1)}.$$

По пункту (а) теоремы  $A^{(n+1)} \in \Sigma_{n+1}^A$ . Но  $A^{(n+1)} \notin \Pi_{n+1}^A$ , в противном случае по пункту (б) теоремы  $A^{(n+1)} \leq_T A^{(n)}$ ; что противоречит теореме 13-1. (В упр. 14-3 приводится более короткое и прямое доказательство пункта (с), предложенное Клини.) ■

Если  $n = 0$ , то  $\Sigma_n = \Pi_n$  и  $\Sigma_n = \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$ . Согласно (с), ни одно из этих равенств не выполняется для  $n > 0$ .

**Определение.** Множество  $B$  называется  $\Sigma_n^A$ -полным (или максимальным в  $\Sigma_n^A$ ), если  $B \in \Sigma_n^A$  и  $(\forall C)[C \in \Sigma_n^A \Rightarrow C \leq_1 B]$ . Аналогично определяется  $\Gamma_n^A$ -полнота.

Согласно следствию VIII (б), множество  $B$   $\Sigma_n^A$ -полно  $\Leftrightarrow B \equiv A^{(n)}$ . Заметим, что  $B$   $\Sigma_n^A$ -полно  $\Leftrightarrow \bar{B}$   $\Pi_n^A$ -полно.

Напомним, что в § 13.1 вводятся понятия *арифметического множества* и *множества, арифметического относительно A*. Эти понятия связаны с понятиями арифметической иерархии и арифметической иерархии относительно A.

**Следствие VIII (d).** *Множество B арифметическое  $\Leftrightarrow$  B входит в арифметическую иерархию; B арифметическое относительно A  $\Leftrightarrow$  B входит в арифметическую иерархию относительно A.*

**Доказательство.** Множество B входит в арифметическую иерархию относительно A  $\Leftrightarrow (\exists n)[B \in \Sigma_{n+1}^A \cap \Pi_{n+1}^A]$  (по теоремам I и III)  $\Leftrightarrow (\exists n)[B \leqslant_T A^{(n)}]$  (по теореме VIII)  $\Leftrightarrow$  B арифметическое относительно A (по определению в § 13.1). ■

Совместно с теоремой VII следствие VIII (d) объясняет, почему в § 13.1 используется слово *арифметический*. Отметим, что в упр. 13-10 и следствии VII приводятся два различных доказательства транзитивности отношения „арифметический относительно“. Отныне вместо фраз „входит в арифметическую иерархию“ и „входит в арифметическую иерархию относительно A“ мы будем очень часто использовать фразы „арифметический“ и „арифметический относительно A“ соответственно.

Пусть  $B = \{z \mid W_z \text{ бесконечно}\}$ . При доказательстве теоремы 13-VIII нам пришлось приложить некоторые усилия, чтобы показать, что  $B \leqslant_1 \emptyset^{(2)}$ . Алгоритм Тарского — Кулатовского вместе с сильной теоремой об иерархии дает более простой и более эффективный метод для доказательства подобных предложений. В нашем примере имеем  $W_z \text{ бесконечно} \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)[y > x \& y \in W_z] \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall \exists[\& \exists] \Leftrightarrow \forall \exists$ . Следовательно,  $B \in \Pi_2$ . Согласно следствию VIII (b),  $B \leqslant_1 \emptyset^{(2)}$ . (В теореме 13-VIII этот результат был получен с помощью более сложной конструкции.)

## § 14.6. СТЕПЕНИ

Рассмотрим  $\Sigma_n^A$  и  $\Pi_n^A$  как классы множеств. Классы  $\Sigma_n^A$  и  $\Pi_n^A$  рекурсивно инвариантны, и, более того, они замкнуты относительно т-сводимости (см. упр. 14-12). Для  $n > 0$  каждый класс содержит максимальный тип рекурсивного изоморфизма, представителем максимального типа в  $\Sigma_n^A$  является множество  $A^{(n)}$ , а в  $\Pi_n^A$  — множество  $\overline{A^{(n)}}$ . Классы  $\Sigma_0$  и  $\Pi_0$  имеют максимальный тип, представителем которого является  $\{x \mid x \text{ четно}\}$ ; согласно теореме 9-XVII, для  $\Sigma_0^K = \Pi_0^K$  невозможен максимальный тип. См. упр. 14-14.

Для  $n > 0$  классы  $\Sigma_n^A$  и  $\Pi_n^A$  не замкнуты относительно tt-сводимости и T-сводимости; так,  $A^{(n)} \equiv_{tt} \overline{A^{(n)}}$ , но по следст-

вию VIII (c)  $A^{(n)} \in (\Sigma_n^A - \Pi_n^A)$ , а  $\overline{A^{(n)}} \in (\Pi_n^A - \Sigma_n^A)$ . С другой стороны, класс  $\Sigma_{n+1}^A \cap \Pi_{n+1}^A$  замкнут относительно T-сводимости и по теореме VIII состоит из всех множеств, T-сводимых к  $A^{(n)}$ .

Согласно следствию II,  $\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A \subset \Sigma_{n+1}^A \cap \Pi_{n+1}^A$ . Является ли это включение строгим? Для  $n = 0$  нет, так как  $\Sigma_1 \cap \Pi_1 = \Sigma_0 = \Pi_0$ . Для  $n > 0$  включение строгое, так как, например, множество  $A^{(n)} \oplus \overline{A^{(n)}}$  принадлежит  $\Sigma_{n+1}^A \cap \Pi_{n+1}^A$  (по теореме VIII (b)), но не принадлежит  $\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A$ . (Если бы это множество принадлежало  $\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A$ , то как  $A^{(n)}$ , так и  $\overline{A^{(n)}}$  были бы рекурсивно перечислимые относительно  $A^{(n-1)}$ , что противоречило бы теореме 13-I.)

Множество  $A^{(n)} \oplus \overline{A^{(n)}}$  можно представить в виде объединения двух множеств из  $\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A$  (см. упр. 14-13). Согласно теореме VIII и упр. 9-16, класс  $\Sigma_{n+1}^A \cap \Pi_{n+1}^A$  образует булеву алгебру множеств. Порождается ли эта булева алгебра классом  $\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A$ ? Для  $n > 0$  следующая теорема дает отрицательный ответ.

**Определение.** Для данного множества B положим  $\mathcal{M}(B) = \{C \mid C \leqslant_m B\}$ . Символом  $\mathcal{B}_m(B)$  обозначим булеву алгебру множеств, порожденную множеством  $\mathcal{M}(B)$ .

**Теорема IX.** *Если B не совпадает ни с N, ни с  $\emptyset$ , то для любого множества C имеем  $C \leqslant_{tt} B \Leftrightarrow C \in \mathcal{B}_m(B)$ .*

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Для всякой  $n$ -местной булевой функции  $\gamma$  (см. определение и свойства булевых функций в § 8.3) символом  $\gamma(B_1, \dots, B_n)$  обозначим множество с характеристической функцией  $\lambda x[\gamma(c_{B_1}(x), c_{B_2}(x), \dots, c_{B_n}(x))]$ . Тогда имеем:  $C \in \mathcal{B}_m(B) \Leftrightarrow$  существует такое  $n$ , что для некоторой булевой функции  $\gamma$  и некоторых множеств  $B_1, \dots, B_n$  из  $\mathcal{M}(B)$   $C = \gamma(B_1, \dots, B_n)$ . Пусть  $B_1, \dots, B_n$  т-сводятся к B с помощью функций  $f_1, \dots, f_n$  соответственно. Тогда для любого  $x$  имеем  $x \in C \Leftrightarrow$  tt-условие  $\langle\langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle, \gamma \rangle$  выполняется на B. Это tt-условие равномерно вычисляется по x, его норма равна n. Следовательно,  $C \leqslant_{tt} B$ .

$\Rightarrow$ . Пусть  $C \leqslant_{tt} B$ , при этом  $B \neq N$  и  $B \neq \emptyset$ . Тогда, согласно упр. 8-28, имеются общерекурсивная функция g, число n и n-местная булева функция  $\gamma$ , такие, что для любого  $x$   $g(x)$  есть tt-условие, содержащее в качестве булевой функции функцию  $\gamma$ , и  $g(x)$  выполняется на B тогда и только тогда, когда  $x \in C$ . Определим  $f_1, \dots, f_n$  так, что  $\langle\langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle, \gamma \rangle$  — это n-ка из tt-условия  $g(x)$ . В качестве  $B_1, \dots, B_n$  возьмем  $f_1^{-1}(B), \dots, f_n^{-1}(B)$  соответственно. Тогда  $B_1, \dots, B_n$  принадлежат  $\mathcal{M}(B)$  и  $C = \gamma(B_1, \dots, B_n)$ . ■

Вернемся к нашему вопросу: для  $n > 0$  является ли  $\Sigma_{n+1}^A \cap \Pi_{n+1}^A$  булевой алгеброй, порожденной классом  $\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A$ ? Ответ содержится в таком следствии (для  $n = 1$ ).

**Следствие IX (а).** *Множество  $B$  содержитется в булевой алгебре, порожденной классом  $\Sigma_1^A \cup \Pi_1^A \Leftrightarrow B \in \mathcal{B}_m(A') \Leftrightarrow B \leqslant_{\text{бт}} A'$ .*

(b)  *$B$  в классе  $\Sigma_2^A \cap \Pi_2^A$  имеется множество, не принадлежащее  $\mathcal{B}_m(A')$ .*

(c) *Класс  $\Sigma_2^A \cap \Pi_2^A$  не содержит максимального типа рекурсивного изоморфизма.*

**Доказательство.** (a) Это следует из того, что, согласно следствию VIII и тому факту, что  $A'$  — цилиндр,  $\Sigma_1^A = \mathcal{M}(A')$ .

(b) Можно релятивизовать доказательство теоремы 9-I, чтобы показать, что для любого  $A$  имеется такое  $\tilde{A}$ , что  $\tilde{A} \leqslant_t A'$  и что  $\tilde{A} \not\leqslant_{\text{бт}} A'$  (см. упр. 14-14).

(c) См. доказательство теоремы 9-I и упражнение 14-14. ■

Почти все результаты о степенях из гл. 13 можно переформулировать в терминах иерархии; так можно выразить основные соотношения Т-сводимости, рекурсивной перечислимости и скачка. Например,  $A \leqslant_t B \Leftrightarrow A \in \Sigma_1^B \cap \Pi_1^B$ ;  $A$  рекурсивно перечислимо относительно  $B \Leftrightarrow A \in \Sigma_1^B$ ;  $A \equiv_t B' \Leftrightarrow (\exists C)[C \equiv_t A \& C \in \Sigma_1^B \& (\forall D)[D \in \Sigma_1^B \Rightarrow D \leqslant_t C]]$  (см. упр. 14-15). Является ли арифметическая иерархия „монотонной“ в том смысле, что любое множество из  $\Sigma_n$  Т-сводимо к любому множеству из  $(\Sigma_{n+1} - \Sigma_n)$ ? Теорема 10-III дает отрицательный ответ, показывая, что имеется множество в  $(\Sigma_2 - \Sigma_1)$ , не сравнимое с некоторым множеством в  $\Sigma_1$  (упр. 14-16). Наконец, следствие 13-IX показывает, что для любого  $n > 0$  должно существовать множество в  $(\Sigma_{n+2} - \Sigma_n)$ , не сравнимое с некоторым множеством из  $\Sigma_1$  (упр. 14-17).

## § 14.7. ПРИЛОЖЕНИЯ В ЛОГИКЕ

Пусть  $V$  — множество истинных высказываний элементарной арифметики. В § 7.8 мы показали, что  $V$  — продуктивное множество. Какова его степень неразрешимости? Следующая теорема дает ответ на этот вопрос.

**Теорема X.** *Множество истинных высказываний элементарной арифметики  $V$  рекурсивно изоморфно множеству  $\emptyset^{(\omega)}$ ; следовательно,  $V$  — множество степени  $0^{(\omega)}$ .*

**Доказательство.** Согласно следствию 13-I (c) и теореме VIII (c), существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что для любого  $n$  число  $f(n)$  есть  $\Sigma_n$ -индекс множества  $\emptyset^{(n)}$ . Сле-

довательно,

$$\langle x, n \rangle \in \emptyset^{(\omega)} \Leftrightarrow x \in \emptyset^{(n)} \Leftrightarrow (\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n(f(n), x, x_1, x_2, \dots).$$

Используя равномерность из следствия V, можно эффективно по  $x$  и  $f(n)$  найти высказывание элементарной арифметики, истинное тогда и только тогда, когда  $(\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n(f(n), x, x_1, x_2, \dots)$ . Поэтому  $\emptyset^{(\omega)} \leqslant_m V$ .

Наоборот, пусть  $F$  — высказывание элементарной арифметики. Пусть  $(Q_1 a_1) \dots (Q_m a_m) G$  — предваренная форма высказывания  $F$ . Рассмотрим выражение  $(\exists b)(Q_1 a_1) \dots (Q_m a_m)[c = c \& b = b \& G]$ , где  $b$  и  $c$  — переменные, не входящие в  $(Q_1 a_1) \dots (Q_m a_m) G$ . Это выражение определяет  $\Sigma_n$ -форму (при некотором  $n > 0$ ), так как  $G$  определяет рекурсивное отношение. ( $G$  состоит из переменных, нумералов,  $+, \times, =$  и пропозициональных связок.) Пусть  $B$  — множество, выразимое именно в этой  $\Sigma_n$ -форме. Тогда  $B = N$ , если  $F$  истинно, и  $B = \emptyset$ , если  $F$  ложно. По  $F$  можно соответствующую  $\Sigma_n$ -форму найти равномерно, а по  $\Sigma_n$ -форме можно равномерно, согласно теореме III, находить  $\Sigma_n$ -индекс множества  $B$ . По  $\Sigma_n$ -индексу  $B$  в силу теоремы VIII (c) можно равномерно найти индекс  $B$  как множества, рекурсивно перечислимого относительно  $\emptyset^{(n-1)}$ . По этому индексу, согласно следствию 13-I (c), можно равномерно найти индекс такой рекурсивной функции  $g$ , что  $B \leqslant_1 \emptyset^{(n)}$  посредством  $g$ . Следовательно,  $F$  истинно  $\Leftrightarrow 0 \in B \Leftrightarrow g(0) \in \emptyset^{(n)} \Leftrightarrow \langle g(0), n \rangle \in \emptyset^{(\omega)}$ . Таким образом,  $V \leqslant_m \emptyset^{(\omega)}$ .

Нетрудно показать, что как  $V$ , так и  $\emptyset^{(\omega)}$  — цилиндры (см. упр. 14-18). Следовательно,  $V \equiv \emptyset^{(\omega)}$ . ■

Высказывания элементарной арифметики можно классифицировать по виду префикса.

**Определение.** Высказывание элементарной арифметики (в предваренной форме) называется  $\Sigma_n$ -высказыванием, если его префикс является  $\Sigma_n$ -префиксом, и  $\Pi_n$ -высказыванием, если его префикс является  $\Pi_n$ -префиксом.

**Определение.** Символом  $V_n$  обозначим множество всех истинных  $\Sigma_n$ -высказываний.

**Следствие X.** Для любого  $n > 0$  имеем  $V_n \leqslant_1 \emptyset^{(n)}$ .

**Доказательство.** Это следует из второй части доказательства теоремы и из того факта, что  $\emptyset^{(n)}$  — цилиндр<sup>1)</sup>. ■

<sup>1)</sup> Таким образом, хотя  $V$  не определимо в элементарной арифметике, для любого  $n$  определимо  $V_n$ .

Выполняется ли  $\emptyset^{(n)} \leqslant_1 V_n$ , неизвестно (как уже отмечалось в связи с десятой проблемой Гильберта) <sup>1)</sup>.

Предположим, что имеется некоторое кодирование высказываний элементарной арифметики натуральными числами. (Подобное кодирование молчаливо подразумевалось в предыдущих рассуждениях.)

**Определения.** Аксиоматизацией называется (произвольное) рекурсивно перечислимое множество высказываний. Высказывание  $x$  доказуемо в данной аксиоматизации, если оно выводимо по правилам элементарной логики из конечного подмножества аксиоматизации. Высказывание  $y$  выводимо из высказывания  $x$  в некоторой аксиоматизации, если  $[x \Rightarrow y]$  доказуемо в этой аксиоматизации, где „ $x \Rightarrow y$ ” обозначает высказывание, полученное соединением предложений  $x$  и  $y$  с помощью знака  $\Rightarrow$ . Высказывания  $x$  и  $y$  называются эквивалентными в аксиоматизации, если каждое из них выводимо из другого в аксиоматизации.

Пусть дана аксиоматизация. Тогда  $\{\langle x, y \rangle \mid y \text{ выводимо из } x \text{ в аксиоматизации}\}$  рекурсивно перечислимо (так как можно перенумеровать все доказательства элементарной логики) и можно равномерно по гёделеву номеру аксиоматизации найти гёделев номер этого множества.

Пусть дана некоторая аксиоматизация. (Эта аксиоматизация может, например, состоять из всех аксиом Пеано. Тогда доказуемые высказывания образуют арифметику Пеано, определенную в § 7.8.) Для данного высказывания  $F$  каково наименьшее  $n$ , такое, что имеется  $\Sigma_n$ -высказывание  $G$ , эквивалентное  $F$  в данной аксиоматизации? Следующее обобщение теоремы Гёделя о неполноте показывает, что (при подходящем выборе  $F$ ) значение  $n$  может оказаться сколь угодно большим, если аксиоматизация семантически непротиворечива (см. § 7.8).

**Теорема XI.** Пусть дана семантически непротиворечивая аксиоматизация элементарной арифметики. Тогда для любого  $n$  можно указать такое истинное высказывание  $F_n$ , что для любого  $m \leq n$  не существует  $\Sigma_m$ -предложения, эквивалентного  $F_n$  в данной аксиоматизации. Более того, для всякого  $n$  можно равномерно построить такое  $F_n$ .

**Доказательство.** Пусть дано  $n$ . Пусть  $a$  — гёделев номер данной аксиоматизации. Пусть  $V_n$  (как и раньше) — множество всех истинных  $\Sigma_n$ -высказываний и  $D(V_n) = \{y \mid (\exists x)$

<sup>1)</sup> Из результатов Ю. В. Матиясевича следует, что  $\emptyset^{(n)} \leqslant_1 V_n$ . — Прим. перев.

$[x \in V_n \& y \text{ выводимо из } x \text{ в данной аксиоматизации}] \}$  <sup>1)</sup>). Согласно следствию X,  $V_n \leqslant_1 \emptyset^{(n)}$ . Следовательно, множество  $V_n$  рекурсивно перечислимо относительно  $\emptyset^{(n-1)}$  и (согласно сильной теореме об иерархии и алгоритму Тарского — Куратовского)  $D(V_n)$  рекурсивно перечислимо относительно  $\emptyset^{(n-1)}$ . Положим  $\neg D(V_n) = \{x \mid \text{отрицание } x \text{ принадлежит } D(V_n)\}$ ; тогда  $\neg D(V_n)$  рекурсивно перечислимо относительно  $\emptyset^{(n-1)}$  и  $\neg D(V_n) = W_{z_1}^{\emptyset^{(n-1)}}$ , при этом  $z_1$  можно получить равномерно по  $n$  и  $a$ . В силу семантической непротиворечивости  $D(V_n) \subset V$  и  $\neg D(V_n) \subset \bar{V}$ . Пусть  $h$  — такая общерекурсивная функция (построенная в первой части доказательства теоремы X), что  $\emptyset^{(\omega)} \leqslant_m V$  посредством  $h$ . Тогда  $h^{-1}(\neg D(V_n)) \subset \emptyset^{(\omega)}$ . По определению  $\emptyset^{(\omega)} = \{\langle x, y \rangle \mid x \in \emptyset^{(y)}\}$ . Положим

$$B = \pi_1(h^{-1}(\neg D(V_n)) \cap (N \times \{n\})).$$

Имеем  $B \subset \emptyset^{(n)}$  и  $B = W_{z_2}^{\emptyset^{(n-1)}}$  при этом  $z_2$  можно равномерно получить по  $z_1$ . Так как  $\emptyset^{(n)} = \{z \mid z \in W_z^{\emptyset^{(n-1)}}\}$ , то  $z_2 \in \emptyset^{(n)} \cap \bar{B}$ . Поэтому  $\langle z_2, n \rangle \notin \emptyset^{(\omega)}$  и  $h(\langle z_2, n \rangle) \notin \bar{V}$ . В качестве  $F_n$  возьмем отрицание высказывания  $h(\langle z_2, n \rangle)$ . Тогда  $F_n \in V$ . Если  $F_n \in \neg D(V_n)$ , то  $h(\langle z_2, n \rangle) \in \neg D(V_n)$  и  $z_2 \in B$  (согласно определению  $B$  и  $h$ ), что противоречит уже доказанному соотношению  $z_2 \notin B$ . Следовательно,  $F_n \notin D(V_n)$ . Итак,  $F_n$  — это истинное высказывание, не выводимое из никакого истинного  $\Sigma_n$ -высказывания и, следовательно, не эквивалентное никакому истинному  $\Sigma_n$ -высказыванию. В силу семантической непротиворечивости высказывание  $F_n$  не может быть эквивалентно ложному  $\Sigma_n$ -высказыванию. Таким образом,  $F_n$  — истинное высказывание, не эквивалентное (в данной аксиоматизации) никакому  $\Sigma_n$ -высказыванию.

Высказывание  $F_n$  не эквивалентно и никакому  $\Sigma_m$ -высказыванию для  $m < n$ . Очевидно, что  $F_n$  можно равномерно построить по  $z_2$  и, следовательно, по  $a$  и  $n$ . ■

**Следствие XI.** В качестве  $F_n$  (в теореме) можно взять некоторое  $\Pi_{n+2}$ -высказывание.

**Доказательство.** Из первой части доказательства теоремы X видно, что  $h(\langle z_2, n \rangle)$  получается применением теоремы VI (теоремы о представимости) к выражению  $(\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n(y, z_2, x_1 \dots)$ . По следствию V высказывание  $h(\langle z_2, n \rangle)$  можно получить с  $\Sigma_{n+2}$ -префиксом. У его отрицания  $F_n$  будет  $\Pi_{n+2}$ -префикс. ■

<sup>1)</sup> Заметим, что любая конечная конъюнкция высказываний из  $V_n$  эквивалентна некоторому высказыванию из  $V_n$ . Поэтому  $D(V_n)$  состоит из всех высказываний, выводимых (в аксиоматизации) из конечных множеств высказываний из  $V_n$ . В доказательстве этот факт не используется.

Понятия иерархии можно применить для классификации высказываний теории множеств<sup>1)</sup>. До конца параграфа мы будем предполагать фиксированной какую-нибудь стандартную аксиоматизацию теории множеств: для большей точности рассмотрим аксиоматизацию, данную в упр. 11-23. Мы называем эту аксиоматизацию *ZF*.

Почти всю современную математику можно сформулировать в теории множеств и почти все доказательства можно провести в *ZF*. В частности, высказываниям элементарной арифметики можно сопоставить определенные высказывания теории множеств; поэтому мы будем считать высказывания элементарной арифметики *погруженными* в теорию множеств<sup>2)</sup>. Доказываемые как высказывания теории множеств, высказывания элементарной арифметики образуют *теоретико-множественную арифметику* (ранее определенную в § 7.8). Нетрудно показать, что в теоретико-множественную арифметику входят аксиомы Пеано<sup>3)</sup>. Интуитивно теоретико-множественную арифметику можно рассматривать как совокупность всех высказываний элементарной арифметики, доказуемых с помощью всех известных математических методов. Теорема Гёделя о неполноте, примененная к арифметике Пеано, дает высказывание, доказуемое в теоретико-множественной арифметике, но не доказуемое в арифметике Пеано (см. замечание на стр. 133)<sup>4)</sup>.

Некоторые высказывания теории множеств эквивалентны (в *ZF*) высказываниям элементарной арифметики. Такие высказывания назовем *арифметически выражимыми*. Можно было бы использовать понятия  $\Sigma_n$ -высказывания и  $\Pi_n$ -высказывания (элементарной арифметики) для классификации арифметически выражимых высказываний теории множеств. Однако более плодотворным является следующий подход. Сначала мы дадим грубый

<sup>1)</sup> Под *высказываниями теории множеств* понимаются все высказывания некоторой формальной системы, а не только те, которые доказываются в данной аксиоматизации для системы. Здесь мы вступаем в некоторое противоречие с теми случаями, когда термин „теория“ употребляется для обозначения подмножества высказываний системы.

<sup>2)</sup> Это погружение получается так: числу 0 сопоставляется  $\emptyset$ , если числу  $n$  сопоставлено  $\alpha_n$ , то числу  $n + 1$  сопоставляется  $\alpha_n \cup \{\alpha_n\}$  (см. введение к § 11.7); операциям сложения и умножения над числами сопоставляются соответствующие отношения.

<sup>3)</sup> Аксиомы Пеано рассматриваются, как в § 7.8, хотя возможна (более сильная) формулировка, в которой аксиома индукции дается как одно предложение теории множеств. (Эта более сильная аксиома индукции также доказуема в нашей аксиоматизации теории множеств.)

<sup>4)</sup> Применяя конструкцию Гёделя — Россера (см. упр. 7-65) к теоретико-множественной арифметике, мы получим предложение, не доказуемое и не опровергаемое в ней (если аксиоматизация теории множеств непротиворечива); однако мы не умеем определять, истинно или ложно это предложение, так как не доказана непротиворечивость аксиоматизации теории множеств.

набросок, затем введем более точные определения. Будем говорить, что высказывание теории множеств принадлежит классу  $\Sigma_n^{ZF}$ , если оно эквивалентно (в *ZF*) высказыванию вида  $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)R(x_1, \dots, x_n)$ , где  $Q_1 \dots Q_n$  есть  $\Sigma_n$ -префикс, а  $R$  — рекурсивное отношение. Чтобы сделать это определение точным, следует использовать имя, т. е. индекс рекурсивного отношения. Рассмотрим высказывания элементарной арифметики, полученные применением следствия V к выражениям вида  $(\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n(z, 0, x_1, x_2, \dots)$  для различных фиксированных  $z$  и  $n$ . Для данных  $z$  и  $n$  символом  $(\exists a_1)(\forall a_2) \dots T_n(z, 0, a_1, \dots)$  обозначим высказывание арифметики, соответствующее выражению  $(\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n(z, 0, x_1, \dots)$ . Достаточно рассматривать такие специальные высказывания и их отрицания, так как (i) любое  $n$ -местное рекурсивное отношение  $R$  есть

$$\{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid (\exists x_{n+1})T_{n+1}(z_1, 0, x_1, \dots, x_{n+1}) \} = \\ = \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid (\forall x_{n+1}) \neg T_{n+1}(z_2, 0, x_1, \dots, x_{n+1}) \}$$

при подходящем выборе  $z_1$  и  $z_2$  и (ii) всякое высказывание элементарной арифметики эквивалентно (в *ZF*) некоторому такому специальному высказыванию (согласно алгоритму Тарского — Куравского, правилу сжатия кванторов и теореме III<sup>1)</sup>).

**Определение.** Для  $n > 0$  символом  $\Sigma_n^{ZF}$  обозначим совокупность всех высказываний  $F$  теории множеств, эквивалентных (для подходящих  $z$ ) предложению  $(\exists a_1)(\forall a_2) \dots T_n(z, 0, a_1, \dots, a_n)$ . Аналогично определяется для  $n > 0$  класс  $\Pi_n^{ZF}$ . Классы  $\Sigma_0^{ZF}$  и  $\Pi_0^{ZF}$  — это класс всех высказываний, эквивалентных в *ZF* или высказыванию „ $0 = 0$ “, или высказыванию „ $0 = 1$ “.

Использование фиктивных кванторов (как в § 14.1) дает, что  $\Sigma_n^{ZF} \cup \Pi_n^{ZF} \subset \Sigma_{n+1}^{ZF} \cap \Pi_{n+1}^{ZF}$ . Модифицируя (и упрощая) доказательство теоремы XI, можно доказать такую теорему.

**Теорема XII.** Если теоретико-множественная арифметика семантически непротиворечива, то для любого  $n$  можно указать высказывание теории множеств из класса  $(\Sigma_{n+1}^{ZF} - \Pi_{n+1}^{ZF})$  (и, следовательно, высказывание из  $(\Pi_{n+1}^{ZF} - \Sigma_{n+1}^{ZF})$ ).

**Доказательство.** Доказательство намечается в упр. 14-21. В этом упражнении приводятся также еще несколько результатов на ту же тему. ■

Такую же теорему можно доказать и для арифметики Пеано ( $P$ ), если класс  $\Sigma_n^P$  определить аналогично классу  $\Sigma_n^{ZF}$ . Гипотезу

<sup>1)</sup> Можно формально доказать общую „метатеорему“ об этих эквивалентностях в *ZF*.

о семантической непротиворечивости можно опустить, так как арифметика Пеано семантически непротиворечива; не очевидно, что всякое высказывание элементарной арифметики эквивалентно (в  $P$ ) некоторому специальному высказыванию, однако можно привести достаточно подробное доказательство.

Высказывание теории множеств из класса  $(\Sigma_n^{ZF} - \Pi_n^{ZF})$  нельзя ни доказать, ни опровергнуть (в теории множеств), в противном случае оно было бы эквивалентно (в  $ZF$ ) или „ $0 = 0$ ”, или „ $0 = 1$ ” и принадлежало бы классу  $\Sigma_0^{ZF}$ .

Что известно о классификации различных гипотез в математике? Большая теорема Ферма принадлежит классу  $\Pi_1^{ZF}$  (так как она утверждает, что  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)[w > 2 \Rightarrow x^w + y^w \neq z^w]$ ). Гипотеза Римана (о том, что действительная часть всех нулей  $\xi$ -функции Римана  $w = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$  (здесь  $z$  — комплексное число), действительная часть которых заключена между 0 и 1, равна только  $\frac{1}{2}$ ) также входит в  $\Pi_1^{ZF}$  (доказывается, используя конечные аппроксимации). Известно, что теорема о простых числах (о том, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n) \log n}{n} = 1$ , где  $P(n)$  — число простых чисел  $\leq n$ ) входит в  $\Sigma_0^{ZF}$ , так как она доказана. Однако поверхностное исследование (без рассмотрения доказательства) дает, что эта теорема входит в  $\Pi_3^{ZF}$ , так как утверждается, что

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z) \left[ [x > 0 \& z > y] \Rightarrow \left| \frac{P(z) \log z}{z} \right| < \frac{1}{x} \right].$$

Нетрудно заметить при относительно поверхностном исследовании, что почти все гипотезы, которые (i) интенсивно рассматриваются математиками и (ii) выражимы в арифметике, находятся на довольно низком уровне в классификации  $\Sigma_n^{ZF}$ . По-видимому, можно полагать, что человеческий мозг способен только понимать и изучать предложения с не более чем четырьмя-пятью переменными кванторов. Более того, можно считать, что всякие изобретения, подтеории и главные леммы в различных частях математики — это приспособления в помощь мозгу при работе с одной или двумя дополнительными переменными кванторов. Разумеется, согласно теореме XII, имеются высказывания произвольно высокого арифметического уровня, однако они обнаруживаются с помощью диагонализации, а не непосредственно. Большую часть теории рекурсивных функций можно рассматривать как науку о переменных кванторах.

Все ли высказывания теории множеств выражимы в арифметике? Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос.

**Теорема XIII.** Если аксиоматизация  $ZF$  теории множеств непротиворечива, то имеется высказывание теории множеств, не выражимое в арифметике.

**Доказательство.** Мы используем кодирование как высказываний, так и формул со свободными переменными. В нашей конструкции воспользуемся гёделевой функцией подстановки (§ 11.6). Заметим, что множество  $\{x \mid x \text{ есть высказывание элементарной арифметики}\}$  рекурсивно и, следовательно, определимо в элементарной арифметике и что множество  $\{x \mid x \text{ есть истинное высказывание элементарной арифметики}\}$  определимо в теории множеств. Выберем  $z_0$ , так, чтобы  $W_{z_0} = \{\langle x, y \rangle \mid x \text{ эквивалентно (в } ZF \text{) высказыванию } y\}$ . Для каждого  $y$  число  $z_0$  дает эффективное перечисление множества  $\{x \mid x \text{ эквивалентно (в } ZF \text{) высказыванию } y\}$  (см. следствие 5-V). Это перечисление назовем *стандартным* перечислением множества  $\{x \mid x \text{ эквивалентно } y\}$ . Рассмотрим следующую формулу теории множеств:  $(\forall b)[[b \text{ есть первое высказывание элементарной арифметики в стандартном перечислении всех формул, эквивалентных (в } ZF \text{) высказыванию } \sigma(a, a)] \Rightarrow [b \text{ — ложное высказывание элементарной арифметики}]]$ ; здесь  $\sigma$  — гёделева функция подстановки. Пусть  $i$  — кодовый номер этой формулы, и пусть  $F$  — результат подстановки нумерала, выражающего  $i$ , вместо переменной  $a$  в эту формулу. Тогда  $\sigma(i, i)$  — кодовый номер высказывания  $F$  и  $F$  — высказывание „ $c$  обращением к самому себе”, утверждающее „если  $F$  эквивалентно (в  $ZF$ ) некоторому высказыванию элементарной арифметики, то первое такое высказывание (в стандартном перечислении) ложно“.

Предположим, что  $F$  эквивалентно некоторому  $G$ , где  $G$  — высказывание элементарной арифметики.

Первое такое  $G$  в стандартном перечислении назовем  $H$ . В теории множеств мы можем рассуждать так: „Допустим  $H$ ; отсюда выведем  $F$ ; затем выведем  $\neg H$  ложно“ (проверяя, что  $H$  — первое предложение элементарной арифметики в стандартном пересчете, связанном с  $F$ ); отсюда выведем  $\neg \neg H$ . С другой стороны, допустим  $\neg H$ ; отсюда выведем  $\neg F$ ; отсюда выведем  $\neg H$  истинно“ (используя стандартное перечисление); отсюда выведем  $H$ . Следовательно, наше предположение ведет к противоречию в теории множеств. ■

Из теоремы XIII в упр. 14-23 мы получим *вторую теорему Гёделя о неполноте* (для  $ZF$ ).

## § 14.8. ВЫЧИСЛИМЫЕ СТЕПЕНИ НЕРАЗРЕШИМОСТИ

По данному описанию множества с помощью алгоритма Тарского — Куратовского часто можно получить верхнюю оценку уровня этого множества в арифметической иерархии. Какими методами

можно получать нижние оценки? В этом параграфе мы приведем несколько результатов.

**Определение.** Пусть  $\mathcal{C}$  — класс рекурсивно перечислимых множеств. Положим  $P_{\mathcal{C}} = \{z \mid W_z \in \mathcal{C}\}$ . Если  $A = P_{\mathcal{C}}$  для некоторого  $\mathcal{C}$ , то  $A$  называется *индексным множеством*.

В наших примерах мы ограничимся индексными множествами; однако большинство методов применимо и в более общих случаях.

Один из подходов к проблеме нижних оценок состоит в отыскании простого структурного критерия (на  $\mathcal{C}$ ) вхождения  $P_{\mathcal{C}}$  в различные классы арифметической иерархии. Такой критерий можно найти для  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$  (и, следовательно, для  $\Pi_1$ ). Этот критерий дается теоремами Райса и Шапиро, упомянутыми в § 2.1 и упр. 5-37. Сейчас мы докажем эти теоремы.

**Теорема XIV (а) (Райс).**  $P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_0 \Leftrightarrow \mathcal{C}$  пусто или  $\mathcal{C}$  — класс всех рекурсивно перечислимых множеств.

(b) (Райс, Шапиро).  $P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_1 \Leftrightarrow [\mathcal{C} = \emptyset \text{ или } (\exists \text{ общерекурсивная функция } f)[\mathcal{C} = \{A \mid A \text{ рекурсивно перечислимо и } (\exists u)[D_{f(u)} \subset \subset A]\}]]$ .

**Доказательство.** (a)  $\Leftarrow$ . Если  $P_{\mathcal{C}} = \emptyset$  или  $P_{\mathcal{C}} = N$ , то результат очевиден.

$\Rightarrow$ . Пусть  $P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_0$  (т. е. пусть  $P_{\mathcal{C}}$  рекурсивно), пусть  $A \in \mathcal{C}$  и  $B \notin \mathcal{C}$ . Предположим также, что  $A \cup B \in \mathcal{C}$ . (Доказательство для  $A \cup B \notin \mathcal{C}$  аналогично.) Тогда  $B \subset A \cup B$  и  $B \neq A \cup B$ . Определим такую общерекурсивную функцию  $h$ , что для любого  $x$

$$W_{h(x)} = \begin{cases} B, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ расходится;} \\ A \cup B, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ сходится.} \end{cases}$$

Из рекурсивности множества  $P_{\mathcal{C}}$  следует, что  $\{x \mid \varphi_x(x) \text{ сходится}\} = h^{-1}(P_{\mathcal{C}})$  рекурсивно и что разрешима проблема остановки. Противоречие. (В упр. 11-10 приводится другое доказательство.).

(b)  $\Leftarrow$ . Если  $\mathcal{C} = \emptyset$ , то  $P_{\mathcal{C}} = \emptyset \in \Sigma_0 \subset \Sigma_1$ . Пусть  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , и пусть  $f$  — такая общерекурсивная функция, что  $\mathcal{C} = \{A \mid A \text{ рекурсивно перечислимо и } (\exists u)[D_{f(u)} \subset \subset A]\}$ . Тогда  $x \in P_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (\exists u)[D_{f(u)} \subset \subset W_x]$ . В силу алгоритма Тарского — Куратовского  $P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_1$ .

$\Rightarrow$ . Пусть  $P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_1$  и  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Сформулируем две леммы о  $\mathcal{C}$ .

**Первая лемма.** Пусть  $P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_1$ . Тогда  $[A \in \mathcal{C} \& A \subset B \& B \text{ рекурсивно перечислимо}] \Rightarrow B \in \mathcal{C}$ .

**Вторая лемма.** Пусть  $P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_1$ . Тогда  $A \in \mathcal{C} \Rightarrow (\exists B)[B \text{ конечно} \& B \subset A \& B \in \mathcal{C}]$ .

**Доказательство.** Отрицание любой из лемм ведет к разрешимости проблемы остановки (см. упр. 14-24).

Продолжим доказательство теоремы. Пусть  $g$  — такая общерекурсивная функция, что для любого  $x$  имеем  $W_{g(x)} = D_x$ . Тогда  $g^{-1}(P_{\mathcal{C}})$  — рекурсивно перечислимое множество и в силу второй леммы не пусто. Пусть  $f$  — общерекурсивная функция, область значений которой есть  $g^{-1}(P_{\mathcal{C}})$ . Из обеих лемм непосредственно следует, что  $f$  обладает желаемыми свойствами относительно  $P_{\mathcal{C}}$ <sup>1</sup>. ■

Мы дадим несколько примеров использования теоремы XIV для вычисления уровня множества в арифметической иерархии.

**Пример 1.** Пусть  $\mathcal{C} = \{K\}$ . Очевидно, что ни  $\mathcal{C}$ , ни  $\bar{\mathcal{C}}$  не удовлетворяют критерию для  $\Sigma_1$ . Согласно алгоритму Тарского — Куратовского (см. упр. 14-6),  $P_{\mathcal{C}} \in \Pi_2$ . Следовательно,  $P_{\mathcal{C}} \in (\Pi_2 - (\Sigma_1 \cup \Pi_1))$ .

**Пример 2.** Пусть  $\mathcal{C} = \{A \mid A \text{ рекурсивно перечислимо и } A \neq \emptyset\}$ . Тогда  $\mathcal{C}$  удовлетворяет критерию для  $\Sigma_1$  (возьмем в качестве  $f$  функцию  $\lambda x[x + 1]$ , напомним, что  $D_0 = \emptyset$ ). Следовательно,  $P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_1$ . Класс  $\mathcal{C}$  не удовлетворяет критерию для  $\Sigma_0$ . Следовательно,  $P_{\mathcal{C}} \in (\Sigma_1 - \Sigma_0)$ .

**Пример 3.** Пусть  $\mathcal{C} = \{A \mid A \text{ конечно}\}$ . Согласно алгоритму Тарского — Куратовского,  $P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_2$ . Ни  $\mathcal{C}$ , ни  $\bar{\mathcal{C}}$  не удовлетворяют критерию для  $\Sigma_1$ . Следовательно,  $P_{\mathcal{C}} \in (\Sigma_2 - (\Sigma_1 \cup \Pi_1))$ .

Для классов  $\Sigma_n$ ,  $n \geq 2$ , не обнаружены простые структурные критерии, подобные критериям для  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$ . В § 15.1 и 15.2 мы обсудим эту проблему более подробно<sup>2</sup>.

Рассмотрим другой подход к проблеме нижних оценок. Этот подход, который мы назовем *подходом по сводимости*, состоит в выборе определенных множеств в качестве эталонных “отправных” точек и в получении нижних оценок уровня (и степени) любого множества путем установления соотношений по сводимости между этим множеством и одним или несколькими из эталонных множеств. В большинстве случаев в качестве эталонных множеств

<sup>1</sup>) В пункте (a) утверждается, что  $\mathcal{C}$  как открыто, так и замкнуто (в топологии упр. 11-35 (a)). В пункте (b) утверждается, что  $\mathcal{C}$  открыто в этой топологии и, кроме того, есть “рекурсивное объединение” базисных открытых множеств. Позже, в гл. 15, будут рассмотрены топологические аспекты иерархии.

<sup>2</sup>) Автор не знает ответа на следующий вопрос. Если  $P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_3$ , то является ли  $\mathcal{C}$  пересечением классов, открытых в топологии упр. 11-35 (a)? См. следующую сноску.

мы будем использовать множества, полные в  $\Sigma_n$  или  $\Pi_n$  ( $n > 0$ ), при этом будет использоваться  $m$ -сходимость.

Подход по сводимости особенно полезен при получении нижних оценок уровня (и степени). В сочетании с алгоритмом Тарского — Куратовского (и сильной теоремой об иерархии) этот подход иногда позволяет определить не только уровень, но и тип рекурсивного изоморфизма данного множества.

**Пример 1.** Если мы с помощью алгоритма Тарского — Куратовского установили, что данное множество  $B$  входит в  $\Sigma_3$ , и если мы показали, что  $\emptyset^{(2)} \leq_m B$ , то мы можем заключить, что  $B \in (\Sigma_3 - \Sigma_2)$ .

**Пример 2.** Если с помощью алгоритма Тарского — Куратовского мы установили, что данное множество  $B \in \Sigma_3$ , и если мы покажем, что  $\emptyset^{(3)} \leq_m B$ , то мы можем заключить, что  $B \in (\Sigma_3 - (\Sigma_2 \cup \Pi_2))$ , и, более того, можно заключить, что  $B$  является  $\Sigma_3$ -полным (и  $\equiv \emptyset^{(3)}$ ) (см. упр. 14-10).

В качестве эталонных множеств полезно выбирать множества с интуитивно простыми описаниями<sup>1)</sup>. Например, для  $\Sigma_2$  удобно эталонное множество  $\{x \mid W_x \text{ конечно}\}$ , для  $\Pi_2$  удобно множество  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$ . (По теореме 13-VIII множество  $\{x \mid W_x \text{ конечно}\}$   $\Sigma_2$ -полно, а  $\{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}$   $\Pi_2$ -полно.) В § 13.2 мы уже обсуждали связь между некоторыми интуитивно простыми определениями и некоторыми степенями неразрешимости.

**Пример.** Пусть  $A = \{x \mid W_x = K\}$ . Какова степень множества  $A$ ? Согласно алгоритму Тарского — Куратовского, как уже отмечалось,  $A \in \Pi_2$ . Пусть

$$B = \{x \mid W_x \text{ бесконечно}\}.$$

**Лемма.** Пусть  $A$  и  $B$  — множества, определенные выше. Тогда  $B \leq_m A$ .

**Доказательство леммы.** Пусть  $W_{x_0} = K$ . Существует такая общерекурсивная функция  $g$ , что для любого  $z$

$$\Phi_g(z) = \begin{cases} \Phi_{x_0}(x), & \text{если в перечислении множества} \\ & W_z \text{ (по } z\text{) появилось хотя} \\ & \text{бы } x \text{ чисел;} \\ & \text{расходится в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем  $g(z) \in A \Leftrightarrow z \in B$ , следовательно,  $B \leq_m A$ . ■

<sup>1)</sup> Если  $A$   $\Sigma_n$ -полно, то  $A \leq_m C \Leftrightarrow (\forall B)[B \in \Sigma_n \Rightarrow B \leq_m C]$ . Поэтому  $A$  можно не упоминать. Однако использование эталонных множеств удобно как в техническом смысле, так и для интуитивного представления, поэтому мы описываем подход по сводимости с помощью эталонных множеств.

Таким образом, множество  $A$   $\Pi_2$ -полно. Мы определили не только его уровень, но и его тип рекурсивного изоморфизма.

Следующая теорема дает хорошее эталонное множество для  $\Sigma_3$  (и, следовательно, продолжает рассмотрения § 13.2, связанные с  $0^{(3)}$ )<sup>2)</sup>.

**Теорема XV.** Множество  $\{x \mid (\exists y)[y \in W_x \& W_y \text{ бесконечно}\}\}$  является  $\Sigma_3$ -полным, и, следовательно, оно рекурсивно изоморфно  $\emptyset^{(3)}$ .

**Доказательство.** Пусть  $B = \{x \mid (\exists y)[y \in W_x \& W_y \text{ бесконечно}\}\}$ . Согласно упр. 14-10, достаточно показать, что  $B \equiv_m \emptyset^{(3)}$ . В силу алгоритма Тарского — Куратовского  $B \in \Sigma_3$  (см. упр. 14-26). Следовательно,  $B \leq_m \emptyset^{(3)}$ . Осталось показать, что  $\emptyset^{(3)} \leq_m B$ . Пусть  $\emptyset^{(3)}$  определяется как  $\{z \mid (\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)R(z, x_1, x_2, x_3)\}$ . Фиксируем  $x_1$  и  $z$ . Определим  $\psi$  так:

$$\psi(0) = 0, \quad \text{если } (\exists x_3)R(z, x_1, 0, x_3);$$

$$\psi(n+1) = \begin{cases} 0, & \text{если определено } \psi(n) \text{ и} \\ & (\exists x_3)R(z, x_1, n+1, x_3) \\ & \text{расходится в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть  $g$  — такая общерекурсивная функция, что  $\psi = \Phi_{g(x_1, z)}$ . Тогда  $W_{g(x_1, z)}$  бесконечно  $\Leftrightarrow (\forall x_2)(\exists x_3)R(z, x_1, x_2, x_3)$ . Возьмем такую общерекурсивную функцию  $h$ , что

$$W_{h(z)} = \text{Val}(\lambda x_1[g(x_1, z)]).$$

Имеем  $z \in \emptyset^{(3)} \Leftrightarrow (\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)R(z, x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow (\exists x_1)[W_{g(x_1, z)} \text{ бесконечно}] \Leftrightarrow (\exists y)[y \in W_{h(z)} \& W_y \text{ бесконечно}] \Leftrightarrow h(z) \in B$ . Итак,  $\emptyset^{(3)} \leq_m B$ . ■

Это эталонное множество используется в следующей теореме.

**Теорема XVI.** Множество  $\{x \mid W_x \text{ рекурсивно}\}$  является  $\Sigma_3$ -полным, и, следовательно, оно рекурсивно изоморфно  $\emptyset^{(3)}$ <sup>2)</sup>.

**Доказательство.** Пусть  $C = \{x \mid W_x \text{ рекурсивно}\}$ . В первом примере § 14.3 мы показали, что  $C \in \Sigma_3$ .

Получим нижнюю оценку по сводимости. Пусть

$$B = \{x \mid (\exists y)[y \in W_x \& W_y \text{ бесконечно}\}\}.$$

В силу теоремы XV достаточно показать, что  $B \leq_m C$ . Используем конструкцию, аналогичную конструкции из теоремы 10-III.

<sup>1)</sup> Читатель мог бы заметить, что вопросы из § 13.2 наибольшей комбинаторной трудности разрешаются здесь алгоритмом Тарского — Куратовского.

<sup>2)</sup> Эта теорема была доказана независимо Мостовским и автором. Доказательство Мостовского проще, но не дает следствия XVI.

Фиксируем  $z$ . Возьмем один *основной список* всех чисел. С элементами списка мы будем связывать маркеры  $\boxed{0}, \boxed{1}, \dots$ , мы будем также иногда писать *плюс* рядом с элементами списка или *передвигать* маркеры, или производить обе операции одновременно. Пусть  $A$  — множество всех чисел, помеченных знаком *плюс*. Наша конструкция будет такова, что будут выполняться  $[z \in B \Rightarrow A \text{ коконечно}]$  и  $[z \notin B \Rightarrow A \text{ не рекурсивно}]$ . Множество  $A$  будет эффективно строиться по  $z$ . Следовательно, мы получим такую общерекурсивную функцию  $h$ , что  $A = W_{h(z)}$  и что  $z \in B \Leftrightarrow h(z) \in C$ . Таким образом будет доказано, что  $B \leq_m C$ .

Сначала опишем *вспомогательную процедуру* (не затрагивающую наш основной список).

*Этап k.* Сделайте  $k$  шагов в перечислении (по  $z$ ) множества  $W_z$ . Возьмите все появившиеся  $y \in W_z$  и сделайте  $k$  шагов в перечислении (по  $y$ ) множества  $W_y$ .

Опишем теперь *основную процедуру*. Элемент основного списка назовем *свободным*, если с ним не связан и до этого момента не связывался ни один маркер, элемент основного списка назовем *вакантным*, если он не помечен знаком *плюс*.

*Этап 2n.* Маркер  $\boxed{n}$  свяжем с наименьшим свободным элементом основного списка. Пусть  $x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$  — текущие положения маркеров  $\boxed{0}, \dots, \boxed{n}$ . Сделаем  $n$  шагов в перечислениях множеств  $W_0, W_1, \dots, W_n$ . Пометим знаком *плюс* все те вакантные элементы  $x_i^{(n)} (0 \leq i \leq n)$ , которые появились в соответствующих перечислениях множеств  $W_i$ .

*Этап 2n + 1.* Сделаем  $n$  этапов *вспомогательной процедуры*. Проверим, имеется ли такое  $y$ , что:  $y \leq n$ ,  $y$  появляется в  $W_z$  на не более, чем  $n$ -м этапе вспомогательной процедуры и на  $n$ -м этапе вспомогательной процедуры впервые появляется по крайней мере еще одно  $u$  из  $W_y$ . Если такого  $y$  нет, то переходим к этапу  $2n + 2$ . Если же такое  $y$  есть, то возьмем наименьшее такое  $y$  и обозначим его через  $y_n$ . Пометим знаком *плюс* все вакантные  $x_i^{(n)}$ , если  $y_n \leq i \leq n$ , и передвижем маркеры  $\boxed{y_n}, \boxed{y_n+1}, \dots$

$\dots, \boxed{n}$  вниз к наименьшим  $n - y_n + 1$  свободным элементам основного списка.

Итак, мы определили множество  $A$ . Ясно, что  $A$  определяется равномерно по  $z$ . Если  $(\forall y)[y \in W_z \Rightarrow W_y \text{ конечно}]$ , то (согласно нечетным этапам основной процедуры) каждый маркер будет двигаться только конечное число раз. Пусть  $x_n$  — последнее положение маркера  $\boxed{n}$ . Тогда (согласно четным этапам)  $x_n \in A \Leftrightarrow x_n \in W_n$ . Следовательно, множество  $A$  не может быть рекурсив-

но перечислимым и  $A$  не рекурсивно. Если  $(\exists y)[y \in W_z \& W_y \text{ бесконечно}]$ , то некоторый маркер будет двигаться бесконечно много раз и все числа, лежащие ниже его первой позиции, помечаются знаком *плюс*. Следовательно,  $A$  будет коконечным. Этим завершается доказательство. ■

**Следствие XVI.** *Множество  $\{x \mid W_x \text{ коконечно}\}$  является  $\Sigma_3$ -полным.*

**Доказательство.** Согласно алгоритму Тарского — Куратовского,  $\{x \mid W_x \text{ коконечно}\} \in \Sigma_3$ . Конструкция теоремы дает, что  $B \leq_m \{x \mid W_x \text{ коконечно}\}$ , это и требуется. ■

Можно ли для больших  $n$  указать эталонные  $\Sigma_n$ -полные множества с более простым описанием, чем  $\mathcal{O}^{(n)}$ ? Чтобы ответить на этот вопрос, введем понятие квантора бесконечности (см. Марквальд [1954]).

**Обозначение.**  $(Ux)[\dots x\dots]$  понимается так: „для бесконечно многих  $x \dots x\dots$ “.

Во многих отношениях квантор бесконечности  $U$  похож на кванторы  $\exists$  и  $\forall$ . Правила движения квантора налево те же, что и для  $\exists$ ; т. е. если  $a$  не свободна в  $G$ , то следующие пары выражений эквивалентны:

$$\begin{aligned} (Ua)F \vee G, & \quad (Ua)[F \vee G]; \\ (Ua)F \& G, & \quad (Ua)[F \& G]; \\ G \Rightarrow (Ua)F, & \quad (Ua)[G \Rightarrow F]; \\ (Ua)F \Rightarrow G, & \quad \neg (Ua) \neg [F \Rightarrow G]. \end{aligned}$$

Однако в отличие от  $\exists$  и  $\forall$  квантор бесконечности не коммутирует сам с собой. Так,  $(Ux)(Uy)[x < y]$  — верное утверждение о неотрицательных числах, а  $(Uy)(Ux)[x < y]$  ложно.

**Определение.** Будем говорить, что отношение  $R$  выражимо в  $Q_1 \dots Q_m$ -форме (где для  $i \leq m$   $Q_i$  есть либо  $\exists$ , либо  $\forall$ , либо  $U$ ), если имеется такое рекурсивное отношение  $S$ , что

$$R = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid (Q_1 y_1) \dots (Q_m y_m) S(x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_m)\}.$$

**Теорема XVII.**  $R \in \Pi_2 \Leftrightarrow R$  выражимо в  $U$ -форме.

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Пусть  $R = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid (Uy)S(x_1, \dots, x_n, y)\}$ . Тогда  $(Uy)S(x_1, \dots, x_n, y) \Leftrightarrow (\forall u)(\exists y)[y > u \& S(x_1, \dots, x_n, y)]$ . Следовательно,  $R \in \Pi_2$ .

$\Rightarrow$ . Пусть  $R \in \Pi_2$  и  $R$  есть  $n$ -местное отношение. Тогда, согласно теореме 13–VIII,  $\tau^n(R) \leq_1 \{z \mid W_z \text{ бесконечно}\}$  с помощью некоторой общерекурсивной функции  $f$ . Но  $W_z$  бесконечно  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall y)S(z, y)$ , где  $S$  — рекурсивное отношение  $\{\langle z, y \rangle \mid \varphi_z(\pi_1(y))$  сходится точно за  $\pi_2(y)$  шагов}. Следовательно,

$$R = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid (\forall y)S(f\tau^n(x_1, \dots, x_n), y)\}.$$

Запишем сокращенно результат этой теоремы как  $\Pi_2 \Leftrightarrow U$ . Аналогично из теоремы XV получаем, что  $\Sigma_3 \Leftrightarrow \exists U$  (см. упр. 14-27). Обобщение на более высокие уровни требует некоторой извротливости. Это было проделано Крейселом, Шёнфильдом и Ван Хао [1960]. Обозначим  $\underbrace{UU\dots U}_{n}$  через  $U^{(n)}$ .

Теорема XVIII (Крейсел, Шёнфильд, Ван Хао). Для любого  $n$

$$\begin{aligned}\Pi_{2n} &\Leftrightarrow U^{(n)}; \\ \Pi_{2n+1} &\Leftrightarrow U^{(n)}\forall.\end{aligned}$$

Доказательство. Случай  $\Pi_0$  и  $\Pi_1$  выполняются по определению. Случай  $\Pi_2$  выполняется в силу теоремы XVII. Для случая  $\Pi_3$  мы докажем релятивизованный вариант.

Лемма. Пусть дано множество  $A$ . Тогда для любого  $n$ -местного отношения  $R$

$$R \in \Pi_3^A \Leftrightarrow R = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid (\forall y)(\forall z)S(x_1, \dots, x_n, y, z)\} \text{ для некоторого } A\text{-рекурсивного отношения } S.$$

Доказательство леммы.  $\Leftarrow$ . Очевидно, так как

$$(\forall y)(\forall z)S(\dots) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)[y \geq x \& S(\dots)].$$

$\Rightarrow$ . Пусть  $R \in \Pi_3^A$ . В силу релятивизованного варианта теоремы XV множество  $\{z \mid (\exists y)[y \in W_z^A \& W_y^A \text{ бесконечно}\}$  является  $\Sigma_3^A$ -полным (см. упр. 14-28). Непосредственная модификация доказательства дает релятивизованный вариант следствия XVI: множество  $\{z \mid W_z^A \text{ кобесконечно}\}$  является  $\Sigma_3^A$ -полным. Следовательно,  $\{z \mid W_z^A \text{ кобесконечно}\}$  является  $\Pi_3^A$ -полным (см. упр. 14-29). Следовательно,  $\tau^n(R) \leqslant \{z \mid W_z^A \text{ кобесконечно}\}$  посредством некоторой общерекурсивной функции  $f$ . Но  $W_z^A \text{ кобесконечно} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\forall y)[y \notin W_z^A] \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x) \neg T_1^A(z, y, x)$ . Итак,

$$R = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid (\forall y)(\forall x) \neg T_1^A(f\tau^n(x_1, \dots, x_n), y, x)\}$$

и лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Доказательство проводим по индукции. Случай  $\Pi_0$ ,  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  уже рассмотрены.

Импликация  $\Leftarrow$  во всех случаях очевидна, согласно алгоритму Тарского — Куратовского.

Пусть  $\Pi_{2n} \Leftrightarrow U^{(n)}$ , и пусть  $R \in \Pi_{2n+2}$  ( $n > 0$ ). Тогда  $\Pi_{2n+2} = \forall \exists A \Sigma_{2n-1}$  (такая запись очевидным образом указывает, что после  $\forall \exists A$  идет  $\Sigma_{2n-1}$ -префикс). Следовательно, согласно сильной теореме об иерархии (теорема VIII),  $R \in \Pi_3^A$ , где  $A = \emptyset^{(2n-1)}$ . Согласно лемме,

$$R = \{\langle \dots \rangle \mid (\forall y)(\forall x)S(\dots, y, x)\},$$

где  $S$  рекурсивно в  $\emptyset^{(2n-1)}$ . По теореме VIII  $S \in \Sigma_{2n} \cap \Pi_{2n}$ . Следовательно,  $R$  выражимо в  $U \forall \Pi_{2n}$ -форме. Но  $U \forall \Pi_{2n} = U \forall A \exists \Pi_{2n-2} \Leftrightarrow U \forall \Pi_{2n-2} = U \Pi_{2n}$  (сжатием кванторов). Итак,  $R$  выражимо в  $U \Pi_{2n}$ -форме. Так как по предположению индукции  $\Pi_{2n} \Leftrightarrow U^{(n)}$ , то  $R$  выражимо в  $U^{(n+1)}$ -форме. Следовательно,

$$\Pi_{2n+2} \Leftrightarrow U^{(n+1)}.$$

Аналогично, пусть  $\Pi_{2n+1} \Leftrightarrow U^{(n)}\forall$ , и пусть  $R \in \Pi_{2n+3}$  ( $n > 0$ ). Имеем  $\Pi_{2n+3} \Leftrightarrow \forall \exists A \Sigma_{2n}$ . Применяя снова лемму, получаем  $\forall \exists A \Sigma_{2n} \Leftrightarrow U \forall \Pi_{2n+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned}U \forall \Pi_{2n+1} &= U \forall A \exists \Pi_{2n-1} \Leftrightarrow U \forall \exists \Pi_{2n-1} = \\ &= U \Pi_{2n+1} \Leftrightarrow U^{(n+1)}\forall \text{ (по индукции).}\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Pi_{2n+3} \Leftrightarrow U^{(n+1)}\forall.$$

Теперь мы опишем некоторые эталонные  $\Pi_n$ -полные множества.

Следствие XVIII. Для  $n > 1$  множество  $\{z \mid (Ux_1) \dots (Ux_{n-1})[W_{x_{n-1}} \text{ бесконечно} \& x_{n-1} \in W_{x_{n-2}} \& \dots \& x_1 \in W_z]\}$  является  $\Pi_{2n}$ -полным; для  $n > 0$  множество

$\{z \mid (Ux_1) \dots (Ux_n)[W_{x_n} = \emptyset \& x_n \in W_{x_{n-1}} \& \dots \& x_1 \in W_z]\}$  является  $\Pi_{2n+1}$ -полным.

Доказательство. Тот факт, что эти множества входят в  $\Pi_{2n}$  и  $\Pi_{2n+1}$  соответственно, проверяется алгоритмом Тарского — Куратовского. Остается показать, что всякое множество, выраженное в  $U^{(n)}$ -форме, т-сводится к первому множеству, а всякое множество в  $U^{(n)}\forall$ -форме т-сводится ко второму множеству. Это доказывается непосредственно (см. упр. 14-30). ■

Вычисление степени неразрешимости с помощью описанных методов иногда позволяет установить, что два множества, по-разному описанные, различны на самом деле<sup>1)</sup>.

1) Первым обратил внимание автора на это обстоятельство Норман Шапиро.

В некоторых случаях установление степени неразрешимости одного множества в сочетании с применением алгоритма Тарского — Куратовского к другому множеству позволяет установить, что эти множества не совпадают. Например, согласно теореме XVI, множество  $\{z \mid W_z \text{ не рекурсивно}\}$  является  $\Pi_3$ -полным. Согласно алгоритму Тарского — Куратовского,  $\{z \mid W_z \text{ креативно}\} \in \Sigma_3$  (см. упр. 14-7). Следовательно (в силу теоремы об иерархии),  $\{z \mid W_z \text{ креативно}\} \neq \{z \mid W_z \text{ не рекурсивно}\}$  и (учитывая нерекурсивность креативных множеств) можно заключить, что существуют рекурсивно перечислимые множества, которые не рекурсивны и не креативны. (Это было доказано в гл. 8 построением простого множества.)

Таким же способом можно получить решение проблемы Поста (теорема 10-III). В работе Роджерса [1959] показано, что  $\emptyset^{(3)} \leqslant_1 \{x \mid W_x \equiv_T K\}$ . Так как  $\{x \mid W_x \text{ не рекурсивно}\} = \overline{\emptyset^{(3)}}$  и так как  $\emptyset^{(3)} \not\leqslant_1 \overline{\emptyset^{(3)}}$  (см. теорему 13-1), то  $\{x \mid W_x \text{ не рекурсивно}\} \neq \{x \mid W_x \equiv_T K\}$ . (Ейтс показал, что  $\{x \mid W_x \equiv_T K\}$  является  $\Sigma_4$ -полным, см. ниже.) Дальнейшие приложения этого метода будут даны в § 15.3 (теорема 15-XXXVI).

Исследование на  $\Sigma_n$ -полноту и  $\Pi_n$ -полноту почти всех арифметических множеств с интуитивно простыми определениями проводилось с помощью описанных выше методов. Причина этого (т. е. связь интуитивной простоты определения с полнотой или неполнотой) не очень понятна.

Почти во всех случаях, когда найдены точные оценки уровня в классификации, этот уровень получается при достаточно разумном использовании алгоритма Тарского — Куратовского (с устранением ограниченных кванторов). Этот феномен также не получил полного объяснения.

Общие результаты об индексных множествах получил Ейтс; он показал, что, каково бы ни было рекурсивно перечислимое множество  $[A]$ , (i) множество  $\{z \mid W_z \equiv_T A\}$  является  $\Sigma_3^A$ -полным; (ii) если  $A \neq \emptyset$  и  $\bar{A} \neq \emptyset$ , то  $\{z \mid W_z \equiv_m A\}$  является  $\Sigma_3$ -полным. (Как частные случаи отсюда следуют пункт (iii) упр. 14-31 и определение степени множества  $\{z \mid W_z \equiv_T K\}$ .) Ейтс показал также, что множества  $\{z \mid W_z \text{ максимально}\}$  и  $\{z \mid W_z \text{ гипергиперпросто}\}$  являются  $\Pi_4$ -полными. В связи с (i) заметим, что троекратное применение равномерности из следствия 13-XXV (b) дает, что для любой степени  $b$ , рекурсивно перечислимой в  $0^{(3)}$  и такой, что  $0^{(3)} < b < 0^{(4)}$ , можно указать такое рекурсивно перечислимое  $a$ , что  $a^{(3)} = b$ . В частности, для такого  $b$  если  $A \in a$ , то  $A^{(3)}$  является  $\Sigma_3^A$ -полным и  $K^{(2)} <_T A^{(3)} <_T K^{(3)}$ . Тогда  $\{x \mid W_x \equiv_T A\}$  — пример индексного множества, содержащегося в  $(\Sigma_4 - \Pi_4)$  и не являющегося  $\Sigma_4$ -полным.

## § 14.9. УПРАЖНЕНИЯ

### § 14.1

14-1. Пусть  $P$  и  $C$  обозначают операции проектирования и взятия дополнения соответственно. Пусть последовательность таких символов означает соответствующую последовательность операций (в обратном порядке применения). Так,  $PPCP$  означает взятие дополнения с последующими проекциями.

(a) Покажите, что применение  $CPPCP$  к отношению  $R$  можно выразить навешиванием префикса  $\forall A \exists E$  на  $R$ .

(b) Покажите, что  $CPPCPC$  можно выразить навешиванием префикса  $\forall A \exists A$  на отрицание отношения  $R$ .

Согласно (a) и (b), можно сказать, что как  $CPPCP$ , так и  $CPPCPC$  соответствуют префиксу  $\forall A \exists E$ .

(c) Найдите префиксы, соответствующие  $PCP$ ,  $CCCP$ ,  $PCPCPCP$ .

(d) Найдите последовательности операций проектирования и взятия дополнения, соответствующие  $\forall A \exists E A$ .

### § 14.2

14-2. Покажите, что не существует нумерации рекурсивных множеств в  $\Sigma_0$ , допустимой в смысле § 14.2. (Указание. Используйте метод диагонализации.)

Δ 14-3 (Клини) (теорема об иерархии). Докажите, что для  $n > 0$  имеем  $(\Sigma_n^A - \Pi_n^A) \neq \emptyset$  и  $(\Pi_n^A - \Sigma_n^A) \neq \emptyset$ . (Указание. Проведите следующую диагональную конструкцию. Пусть  $B = \{z \mid (\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n^A(z, z, x_1, \dots, x_n)\}$ . Тогда  $B \in \Sigma_n^A$ . Предположив, что  $B \in \Pi_n^A$ , найдите  $\Pi_n^A$ -индекс для  $B$  и получите противоречие.)

### § 14.3

14-4. Покажите, что (i) ограниченный квантор общности можно двигать направо через квантор общности; (ii) ограниченный квантор существования можно двигать направо через квантор общности и (iii) ограниченный квантор существования можно двигать направо через квантор существования.

14-5. Пусть  $(\forall a \leqslant f(b))F$  — сокращение для  $(\forall a)[a \leqslant f(b) \Rightarrow F]$ , и пусть  $(\exists a \leqslant f(b))F$  — сокращение для  $(\exists a)[a \leqslant f(b) \& F]$ . Покажите, что если  $f$  — некоторая общерекурсивная функция, то эти *рекурсивно ограниченные кванторы* в алгоритме Тарского — Куратовского можно рассматривать как ограниченные кванторы.

14-6. Примените алгоритм Тарского — Куратовского к множеству

$$\{x \mid W_x = K\}.$$

Δ 14-7. Определите место в классификации следующих множеств:

- (i)  $\{x \mid W_x \text{ гиперпросто}\};$
- (ii)  $\{x \mid W_x \text{ гипергиперпросто}\};$
- (iii)  $\{x \mid W_x \text{ креативно}\};$
- (iv)  $\{x \mid W_x \text{ Т-полно}\} = \{x \mid W_x \equiv_T K\};$
- (v)  $\{x \mid W_x \text{ максимально}\}.$

(Указание. Наилучшие результаты суть  $\Pi_3$  для (i),  $\Pi_4$  для (ii),  $\Sigma_3$  для (iii),  $\Sigma_4$  для (iv) и  $\Pi_4$  для (v).)

### § 14.4

14-8. Покажите, что  $B$  входит в арифметическую иерархию относительно  $A$  тогда и только тогда, когда  $B$  определимо в расширенной элементарной арифметике, получаемой при добавлении „релятивизованных кванторов”

типа  $(\forall x)_A$  и  $(\exists x)_A$ , где  $(\forall x)_A$  означает „для всех  $x$  из  $A$ ”, а  $(\exists x)_A$  означает „существует  $x$  из  $A$ , такое, что...“ (Указание. Покажите, что  $A$  само определимо в так расширенной системе, и используйте теорему VII.)

### § 14.5

14-9. Докажите релятивизованную теорему о проекции (теорема 9-IX). Имеется ли равномерность?

14-10. Пусть даны  $A$  и  $n > 0$ .

(a) Покажите, что всякое  $\Sigma_n^A$ -полное множество есть цилиндр.

(b) Покажите, что все  $\Sigma_n^A$ -полные множества образуют 1-степень, являющиеся также  $t$ -степенью.

▲ 14-11. Рассмотрим высказывание чистой логики предикатов, т. е. чистого исчисления предикатов первого порядка с равенством (см. книгу Чёрча [1956]).

**Числовая модель высказывания** — это (i) непустое множество чисел, называемое областью определения модели и (ii) конечный набор отношений (на этом множестве), которые соотносятся с предикатными символами высказывания, при этом если областью допустимых значений переменных (и квантифицированных переменных) является это множество, а предикатные символы интерпретируются как соответствующие отношения, то высказывание истинно. Покажите, что если высказывание выполняется на некоторой числовой модели, то оно имеет числовую модель, область определения которой рекурсивна и все отношения лежат в классе  $\Sigma_2 \cap \Pi_2$ . (Указание. Рассмотрите доказательство Хенкина (в книге Чёрча [1956]), что всякое непротиворечивое предложение имеет модель, и покажите, что на самом деле получается числовая модель, рекурсивная относительно  $K$ .)

### § 14.6

14-12. Покажите, что  $\Sigma_n^A$  и  $\Pi_n^A$  замкнуты относительно  $\leq_m$  (упр. 14-10).

14-13. (a) Покажите, что  $A^{(n)} \oplus \overline{A^{(n)}}$  — объединение двух множеств из  $\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A$ .

(b) Покажите, что  $A^{(n)} \times \overline{A^{(n)}}$  — пересечение двух множеств из  $\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A$ .

14-14. Обобщите доказательство теоремы 9-I, чтобы показать, что для любого  $A$ , такого, что  $K \leq_{\text{tt}} A$ , Т-степень множества  $A$  не содержит максимальной  $tt$ -степени и, следовательно, не содержит максимальной 1-степени. (Замечание. Мартин доказал существование нерекурсивной Т-степени, обраzuющей одну  $tt$ -степень. Это упражнение показывает, что такая степень не может лежать выше 0').

14-15. Проверьте, что  $A \equiv_T B' \Leftrightarrow (\exists C)[C \in \Sigma_1^A \cap \Pi_1^A \& A \in \Sigma_1^C \cap \Pi_1^C \& C \in \Sigma_1^B \& (\forall D)[D \in \Sigma_1^B \Rightarrow D \in \Sigma_1^C \cap \Pi_1^C]]$ .

14-16. Используйте теорему 10-III, чтобы показать, что в  $(\Sigma_2 - \Sigma_1)$  существует множество, не сравнимое (по Т-сводимости) с некоторым множеством из  $\Sigma_1$ .

14-17. Используйте следствие 13-IX (a), чтобы показать, что для любого  $n > 0$  имеется множество в  $(\Sigma_{n+2} - \Sigma_n)$ , не сравнимое с некоторым множеством из  $\Sigma_1$ .

### § 14.7

14-18. Покажите, что  $V$  и  $\emptyset^{(\omega)}$  — цилиндры.

14-19. Пусть дано  $A$ . Рассмотрим расширенную элементарную арифметику, описанную в теореме VII. Пусть  $V^A$  — множество всех истинных высказываний этой арифметики. Покажите, что  $V^A \equiv A^{(\omega)}$ .

14-20. Покажите, что при любой аксиоматизации всякое истинное  $\Sigma_1$ -высказывание (элементарной арифметики) эквивалентно (в аксиоматизации) некоторому  $\Sigma_0$ -высказыванию.

△ 14-21. (a) Докажите теорему XII. (Указание. Для  $n \geq 0$  положим  $S_n^\Sigma =$  множество всех высказываний (элементарной арифметики) специального вида  $(\exists a_1)(\forall a_2) \dots T_n(z, 0, a_1, \dots, a_n)$ , пусть  $S_n^\Pi =$  множество всех высказываний специального вида  $(\forall a_1)(\exists a_2) \dots T_n(z, 0, a_1, \dots, a_n)$ .

Положим  $S_0^\Sigma = S_0^\Pi =$  множество, состоящее из высказываний „ $0 = 0$ “ и „ $0 = 1$ “. Пусть  $V =$  множество всех истинных высказываний элементарной арифметики. Положим  $V^\Sigma = V \cap S_n^\Sigma$  и  $V_n^\Pi = V \cap S_n^\Pi (n \geq 0)$ . Для любого множества высказываний  $A$  символом  $D(A)$  обозначим множество всех высказываний элементарной арифметики, выводимых (в  $ZF$ ) из (конечных множеств) высказываний из  $A$ .

(i) Покажите, что  $V_n^\Sigma = \emptyset^{(n)}$  и  $V_n^\Pi = \overline{\emptyset^{(n)}}$ .

(ii) Выберите, что  $D(V_n^\Pi)$  рекурсивно перечислимо в  $\emptyset^{(n)}$ .

(iii) Покажите что  $V_{n+1}^\Sigma \subset D(V_n^\Pi)$  и что, следовательно,  $D(V_{n+1}^\Sigma) \subset D(V_n^\Pi)$ .

(iv) Покажите, что  $S_{n+1}^\Pi \cap D(V_n)$  рекурсивно перечислимо в  $\emptyset^{(n)}$  и в силу семантической непротиворечивости  $S_{n+1}^\Pi \cap D(V_n^\Pi) \subset V_{n+1}^\Pi$ .

(v) Покажите, что так как  $V_{n+1}^\Pi = \emptyset^{(n+1)}$  и  $\emptyset^{(n+1)}$  не рекурсивно перечислимо в  $\emptyset^{(n)}$ , то существует высказывание  $x$ , такое, что  $x \in (V_{n+1}^\Pi - D(V_n^\Pi))$  и что, следовательно,  $x \in (V_{n+1}^\Pi - D(V_{n+1}^\Sigma))$ .

(vi) Выберите, что по построению  $x \in \Pi_{n+1}^{ZF}$  и в силу семантической непротиворечивости  $x \notin \Sigma_{n+1}^{ZF}$ .

(vii) Выберите, что  $x \in (\Pi_{n+1}^{ZF} - \Sigma_{n+1}^{ZF})$  и что отрицание  $x$  входит в  $(\Sigma_{n+1}^{ZF} - \Pi_{n+1}^{ZF})$ .

(b) Покажите, что  $\Sigma_1^{ZF} \cap \Pi_1^{ZF} = \Sigma_0^{ZF} = \Pi_0^{ZF}$ .

(c) Пусть дано  $n > 0$ . Предполагая семантическую непротиворечивость, опровергните такое утверждение: всякое высказывание из  $\Sigma_{n+1}^{ZF} \cap \Pi_{n+1}^{ZF}$  эквивалентно (в  $ZF$ ) пропозициональной комбинации высказываний из  $\Sigma_n^{ZF} \cup \Pi_n^{ZF}$ . (Указание. Используйте конструкцию из теоремы 9-I, чтобы получить такое множество  $\tilde{A}$ , что  $\tilde{A} \leq_{\text{tt}} \emptyset^{(n)}$  и что  $\tilde{A} \not\leq_{\text{tt}} \emptyset^{(n)}$ . В силу теоремы VIII  $\tilde{A} \in \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$ . Используйте нормальные формы для  $\tilde{A}$  в  $\Sigma_{n+1}$  и в  $\Pi_{n+1}$ , получите такие общерекурсивные функции  $f$  и  $g$ , что  $\text{Val } f \subset S_{n+1}^\Sigma$ ,  $\text{Val } g \subset S_{n+1}^\Pi$ , для любого  $n$  имеет место  $[n \in \tilde{A} \Leftrightarrow f(n) \text{ истинно}]$  и для любого  $n$  доказуемо  $[f(n) \Leftrightarrow g(n)]$ . Тогда для любого  $n$   $f(n) \in \Sigma_{n+1}^{ZF} \cap \Pi_{n+1}^{ZF}$ . Предположите, что для всякого  $n$  предложение  $f(n)$  эквивалентно (в  $ZF$ ) пропозициональной комбинации предложений из  $\Sigma_n^{ZF} \cup \Pi_n^{ZF}$ . Выберите отсюда противоречие:  $\tilde{A} \leq_{\text{tt}} \emptyset^{(n)}$ .)

(d) Рассмотрим предложения чистой логики предикатов. Высказывание назовем  $\Sigma_n$ -высказыванием, если в предваренной форме оно имеет  $\Sigma_n$ -префикс. Аналогично определяются  $\Pi_n$ -высказывания. Пусть  $\Sigma_n^Q$  — класс всех высказываний, эквивалентных (в элементарной логике)  $\Sigma_n$ -высказываниям. Анало-

гично определяем класс  $\Pi_n^Q$ . Шёнфильдом доказана такая теорема: *всякое высказывание из  $\Sigma_{n+1}^Q \cap \Pi_{n+1}^Q$  эквивалентно (в элементарной логике) пропозициональной комбинации высказываний из  $\Sigma_n^Q \cup \Pi_n^Q$ .*

Предположим, что (с) доказано с  $ZF$  вместо  $ZF$ , т. е. для арифметики Пеано. Выведите из результата Шёнфильда, что арифметика Пеано не является конечно аксиоматизируемой. (Впервые этот результат был получен Мостовским и Рыль-Нардаевским.) (*Указание.* Покажите, что если бы арифметика Пеано была конечно аксиоматизируемой, то, взяя достаточно большое  $n$ , мы получили бы противоречие между (с) и результатом Шёнфильда.)

$\triangle 14-22$ . Пусть  $S$  — предложение теории множеств, утверждающее, что теоретико-множественная арифметика семантически непротиворечива. Покажите, что если теоретико-множественная арифметика семантически непротиворечива, то  $S$  не выражимо арифметически. (Это более слабая форма теоремы XIII.) (*Указание.* Доказательство упр. 14-21 показывает, что для всякого  $n > 0$  имеется высказывание из  $(\Pi_n^{ZF} - \Sigma_n^{ZF})$ , выводимое из  $S$ .)

$\triangle 14-23$ . (Вторая теорема Гёделя о неполноте (для  $ZF$ ).) Пусть  $C$  — утверждение о непротиворечивости  $ZF$ . Покажите, что  $C$  арифметически выражимо. Выведите из теоремы XIII, что если  $ZF$  непротиворечива, то  $C$  не доказуемо в  $ZF$ . (*Указание.* Если  $C$  доказуемо в  $ZF$ , то, согласно теореме XIII, мы получим доказательство того, что  $F$  (в теореме XIII) не выражимо арифметически. Но это сразу же дает доказательство  $F$  (так как  $F$  имеет такой вид: „если  $F$  не выражимо арифметически, то...“). Следовательно,  $F \in \Sigma_0^{ZF}$ . Но тогда имеется доказательство арифметической выражимости  $F$ . Полученное противоречие влечет за собой противоречивость  $ZF$ . (В этом доказательстве мы полагаем, что все наши результаты, включая теорему XIII, выражимы и доказуемы в  $ZF$ .) (Вторую теорему Гёделя о неполноте можно доказать для арифметики Пеано, показав сначала, что теорема Гёделя — Россера для арифметики Пеано (см. упр. 7-65) выражима в элементарной арифметике и доказуема в арифметике Пеано. См. работу Феффермана [1960].)

#### § 14.8

14-24. Докажите леммы в теореме XIV, и завершите доказательство теоремы.

14-25. Покажите, что всякое индексное множество есть цилиндр.

14-26. Покажите, что  $\{x \mid (\exists y)[y \in W_x \text{ & } W_y \text{ бесконечно}]\} \in \Sigma_3$ .

14-27. Покажите, что  $\Sigma_3 \Leftrightarrow \exists U$ .

14-28. Докажите релятивизированный вариант теоремы XV.

14-29. Докажите релятивизированные варианты теоремы XVI и следствия XVI. (*Указание.* Используйте упр. 14-28.)

14-30. Завершите доказательство следствия XVIII. (*Указание.* Воспользуйтесь  $s\text{-}m\text{-}n$ -теоремой и следствием 5-V.)

14-31. Покажите, что:

$\triangle(i)$   $\{x \mid W_x \text{ просто}\} \Pi_3\text{-полно};$

$\triangle(ii)$   $\{x \mid W_x \text{ гиперпросто}\} \Pi_3\text{-полно};$

$\triangle(iii)$   $\{x \mid W_x \text{ креативно}\} \Sigma_3\text{-полно}.$

(*Указание.* Для (i) и (ii) воспользуйтесь теоремой 9-XVI и упр. 9-25.

Пункт (iii) доказан в работе Роджерса [1959].)

## Глава 15. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ (часть 2)

§ 15.1. Иерархия классов множеств 429

§ 15.2. Иерархия классов функций 444

§ 15.3. Функционалы 459

§ 15.4. Упражнения 471

#### § 15.1. ИЕРАРХИЯ КЛАССОВ МНОЖЕСТВ

Пусть  $\mathcal{N}(=2^N)$  — множество всех подмножеств множества  $N$ .

Пусть  $\mathcal{N}^k \times N^l$  — декартово произведение  $\mathcal{N} \times \dots \times \mathcal{N} \times N \times \dots \times N$ , где  $\mathcal{N}$  повторяется  $k$  раз, а  $N$  повторяется  $l$  раз ( $k, l \geq 0$ ).

Пусть  $l \geq 1$ , отношение  $R \subset \mathcal{N}^k \times N^l$  назовем однозначным, если для любого кортежа  $\langle X_1, \dots, X_k, x_1, \dots, x_{l-1} \rangle$  существует не более одного такого  $x_l$ , что  $\langle X_1, \dots, x_{l-1}, x_l \rangle$  принадлежит  $R$ .

**Определение.** Однозначное отношение  $\psi$ , принадлежащее  $\mathcal{N}^k \times N^l$ , назовем функцией  $k$  множественных переменных и  $l$  числовых переменных.

Как и для функции  $k$  (числовых) переменных в гл. 1, вводятся понятия области определения (обозначение Arg) и области значений (обозначение Val). Функцию  $k$  множественных переменных и  $l$  числовых переменных назовем *всюду определенной функцией*, если ее область определения есть  $\mathcal{N}^k \times N^{l-1}$ .

Нам хотелось бы ввести понятие *частичнорекурсивной функции*  $k$  множественных переменных и  $l$  числовых переменных. Дадим неформальное определение. Пусть  $\psi$  — функция  $k$  множественных переменных и  $l$  числовых переменных. Назовем  $\psi$  частичнорекурсивной функцией  $k$  множественных переменных и  $l$  числовых переменных, если имеется такой набор инструкций  $P$ , что для любого  $y$  и любого кортежа  $\langle X_1, \dots, X_k, x_1, \dots, x_l \rangle$  выполняется следующее условие:  $\psi(X_1, \dots, x_l) = y \Leftrightarrow$  [если снабдить  $P$  „оракулами“ для множеств  $X_1, \dots, X_k$ , то при входе  $\langle x_1, \dots, x_l \rangle$  получается выход  $y$ ]. Таким образом,  $P$  алгоритмически преобразует вход  $\langle x_1, \dots, x_l \rangle$ , с тем исключением, что (i) иногда задаются вопросы вида „принадлежит ли  $z$  множеству  $X_j$ ?“ (где  $1 \leq j \leq k$ ) и (ii) вычисление продолжается после того, как кто-то извне (оракул) сообщил правильный ответ на поставленный вопрос.

С помощью определений гл. 9 дадим соответствующее формальное определение.

<sup>1)</sup> При  $k > 0$  функцию  $k$  множественных переменных и  $l$  числовых переменных иногда называют функционалом. Такая терминология и связанные с этим вопросы рассматриваются дальше в § 15.3.

**Определение.** Пусть  $k > 0$  и  $l > 0$ . Функция  $\psi$  называется *частичнорекурсивной функцией  $k$  множественных переменных и  $l$  числовых переменных*, если существует такое  $z$ , что

$$\psi = \lambda X_1 \dots X_k x_1 \dots x_l [\varphi_z^{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_l)].$$

Пусть  $k > 0$  (и  $l = 0$ ). Функция  $\psi$  называется *частичнорекурсивной функцией  $k$  множественных переменных*, если существует такое  $z$ , что  $\psi = \lambda X_1 \dots X_k [\varphi_z^{X_1, \dots, X_k}(0)]$  (упр. 15-1).

Число  $z$  называется *гёделевым номером или индексом* функции  $\psi$ .

Большинство определений теории частичнорекурсивных функций переносится на частичнорекурсивные функции множественных и числовых переменных.

**Определение.** Отношение  $R \subset \mathcal{N}^k \times N^l$  рекурсивно, если характеристическая функция отношения  $R$  является (всюду определенной) рекурсивной функцией  $k$  множественных переменных и  $l$  числовых переменных.

**Пример.** Отношение  $\{(X, x) \mid x \in X\}$  рекурсивно (относительно  $\mathcal{N} \times N$ ).

*Рекурсивно перечислимые* отношения следовало бы определять как области определения частичнорекурсивных функций.

**Пример.** Множество  $\{X \mid X \neq \emptyset\}$  совпадает с областью определения функции  $\psi$ , где  $\psi(X) = \varphi_z^X(0)$ , при этом  $z$  выбрано так, что  $\varphi_z^X(x) = 1$ , если  $X \neq \emptyset$ , и  $\varphi_z^X(x)$  расходится в противном случае.

Однако термин „рекурсивно перечислимый“ не совсем удачен, так как области определения частичнорекурсивных функций могут быть и несчетными. Поэтому мы будем использовать терминологию теории арифметической иерархии. Наши рассуждения будут, очевидно, параллельны исследованию арифметической иерархии в гл. 14. Однако для большей ясности мы будем опускать релятивизированные определения и результаты.

## Проекции

Проекции (и вообще кванторы) будут рассматриваться только по отношению к числовым переменным. В гл. 16 будет рассмотрен более общий случай (проекций относительно множественных переменных).

## Иерархия

**Определение.** Отношение  $R \subset \mathcal{N}^k \times N^l$  называется *арифметическим*, если  $R$  рекурсивно или существует такое рекурсивное отношение  $S \subset \mathcal{N}^k \times N^m$  (где  $m > l$ ), что  $R$  может быть получено

из  $S$  путем последовательного применения некоторой конечной последовательности операций взятия дополнения и проектирования, при этом операции проектирования применяются только по числовым переменным.

Аналог теоремы 14-I очевиден.

**Теорема I.** Отношение  $R \subset \mathcal{N}^k \times N^l$  арифметическое  $\Leftrightarrow$  [отношение  $R$  рекурсивно или при некотором  $n > 0$  имеем  $R = \{\langle X_1, \dots, x_l \rangle \mid (Q_1 x_{l+1}) \dots (Q_n x_{l+n}) S(X_1, \dots, x_{l+n})\}$ , где для  $1 \leq i \leq n$  символами  $Q_i$  обозначаются или  $\forall$ , или  $\exists$ , а отношение  $S \subset \mathcal{N}^k \times N^{l+n}$  рекурсивно].

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 14-I. ■

Как в § 14.1, определяются  $\Sigma_n$ -предиксы и  $\Pi_n$ -предиксы. Применение  $\Sigma_n$ -предикса к рекурсивному отношению, принадлежащему  $\mathcal{N}^k \times N^l$ , дает  $\Sigma_n^{(s)}$ -форму; аналогично получаются  $\Pi_n^{(s)}$ -формы<sup>1</sup>). (Верхний индекс ( $s$ ) показывает на возможность присутствия множественных переменных.) Вместе с рекурсивным отношением из  $\mathcal{N}^k \times N^l$   $\Sigma_n^{(s)}$ -форма (и  $\Pi_n^{(s)}$ -форма) определяет отношение из  $\mathcal{N}^k \times N^m$  (для некоторого  $m \leq l$ ). Будем говорить, что так определенное отношение *выразимо в данной форме*.

**Определение.** Символом  $\Sigma_n^{(s)}$  обозначим класс всех отношений, выражимых в  $\Sigma_n^{(s)}$ -формах. Символом  $\Pi_n^{(s)}$  обозначим класс всех отношений, выражимых в  $\Pi_n^{(s)}$ -формах<sup>2</sup>).

**Следствие I.** Отношение  $R \subset \mathcal{N}^k \times N^l$  арифметическое  $\Leftrightarrow (\exists n)[R \in \Sigma_n^{(s)} \text{ или } R \in \Pi_n^{(s)}]$ .

Доказательство очевидно. ■

Используя „фиктивные“ кванторы, получаем аналог теоремы 14-II.

### Теорема II.

- (a)  $\Sigma_n^{(s)} \cup \Pi_n^{(s)} \subset \Sigma_{n+1}^{(s)} \cap \Pi_{n+1}^{(s)}$ ;
- (b)  $R \in \Sigma_n^{(s)} \Leftrightarrow \bar{R} \in \Pi_n^{(s)}$ .

Доказательство проводится, как в теореме 14-II. ■

<sup>1)</sup> Таким образом,  $\Sigma_n^{(s)}$ -форма состоит из (i)  $\Sigma_n$ -предикса, (ii) рекурсивного отношения и (iii) однозначного соответствия между кванторами предикса и числовыми переменными этого отношения.

<sup>2)</sup> В литературе верхний индекс ( $s$ ) обычно опускается.

### Нормальные формы

Правила сжатия кванторов приведены в § 14.2.

**Определение.** Пусть  $k > 0$  и  $l > 0$ . Положим

$T_{k,l} = \{\langle X_1, \dots, X_k, z, x_0, \dots, x_l \rangle \mid \varphi_z^{X_1, \dots, X_k}(x_0, \dots, x_{l-1})$   
сходится на  $x_l$ -м шаге перечисления множества  $W_{\rho(z)}$  (по  $\rho(z)$ )\}.

Более формально,  $T_{k,l}(X_1, \dots, X_k, z, x_0, \dots, x_l) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle x_0, \dots, x_{l-1}, y, u, v \rangle$  появляется на  $x_l$ -м шаге перечисления множества  $W_{\rho(z)}$  (по  $\rho(z)$ )  $\& D_u \subset (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_k) \& D_v \subset (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_k)]$ .

Если  $k > 0$  и  $l = 0$ , то  $T_{k,0} = \{\langle X_1, \dots, X_k, z, x_0 \rangle \mid \varphi_z^{X_1, \dots, X_k}(0)$   
сходится на  $x_0$ -м шаге перечисления множества  $W_{\rho(z)}$  (по  $\rho(z)$ )\}.

Очевидно, что отношение  $T_{k,l}$  (при  $k > 0$  и  $l \geq 0$ ) рекурсивно.

**Соглашение.** В дальнейшем наряду с записью  $T_{k,l}(X_1, \dots, X_k, z, x_0, \dots, x_l)$  будет употребляться запись

$$T_{k,l}(z, X_1, \dots, X_k, x_0, \dots, x_l).$$

Сейчас мы покажем, что отношение является областью определения частичнорекурсивной функции тогда и только тогда, когда оно входит в класс  $\Sigma_1^{(s)}$ .

**Теорема III.** Пусть  $R \subset \mathcal{N}^k \times N^l$ . Тогда  $R \in \Sigma_1^{(s)} \Leftrightarrow R = \text{Arg } \psi$  для некоторой частичнорекурсивной функции  $\psi$  от  $k$  множественных и  $l$  числовых переменных.

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Пусть  $R = \text{Arg } \psi$  и  $\psi$  — частичнорекурсивная функция. По определению найдется такое  $z$ , что  $R = \{\langle X_1, \dots, x_l \rangle \mid (\exists w) T_{k,l}(z, X_1, \dots, X_k, x_1, \dots, x_l, w)\}$  и, следовательно,  $R \in \Sigma_1^{(s)}$ .

$\Rightarrow$ . Обратно, пусть  $R = \{\langle X_1, \dots, x_l \rangle \mid (\exists w) S(X_1, \dots, x_l, w)\}$ , где  $S$  — рекурсивное отношение. Возьмем такое  $z$ , что  $\varphi_z^{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_l)$  вычисляется по таким инструкциям: получив  $x_1, \dots, x_l$ , проверьте  $S(X_1, \dots, x_l, w)$  для  $w = 0, 1, 2, \dots$  поочередно; если (и только если) получится положительный ответ при этой проверке, то выдайте выход нуль. Положим  $\psi = \lambda X_1 \dots x_l [\varphi_z^{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_l)]$ . Тогда  $\text{Arg } \psi = R$ . ■

Теперь можно получить теорему о нормальной форме и нумерации.

**Теорема IV (Клини).** Каковы бы ни были  $n > 0$  и отношение  $R \in \Sigma_n^{(s)}$  (причем  $R \subset \mathcal{N}^k \times N^l$ ), найдется такое  $z$ , что  $R = \{\langle X_1, \dots, X_k, x_0, \dots, x_{l-1} \rangle \mid (\exists x_l)(\forall x_{l+1})(\exists x_{l+2}) \dots$   
 $\dots T_{k,l+n-1}(z, X_1, \dots, X_k, x_0, \dots, x_{l+n-1})\}$

(при этом перед  $T$  стоит знак отрицания, если  $n$  четно). Число  $z$  назовем  $\Sigma_n^{(s)}$ -индексом отношения  $R$ . По произвольной  $\Sigma_n^{(s)}$ -форме отношения  $R$  (т. е. по тройке: префикс, индекс характеристической функции рекурсивного отношения и соответствие между кванторами префикса и переменными) можно эффективно найти  $\Sigma_n^{(s)}$ -индекс отношения  $R$ . Аналогичное утверждение имеет место для  $n > 0$  и  $R \in \Pi_n^{(s)}$ .

**Доказательство** очевидно. ■

Заметим, что  $z$  есть  $\Sigma_n^{(s)}$ -индекс отношения  $R \Leftrightarrow z$  есть  $\Pi_n^{(s)}$ -индекс отношения  $\bar{R}$ .

### Алгоритм Тарского—Куратовского

**Определение.** Пусть выражение  $F(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k, a_1, \dots, a_l)$  построено в логике предикатов из propositionальных связок, знаков  $=$ , переменных для чисел, кванторов по числовым переменным, переменных  $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k$  для множеств и переменных для отношений (на множествах и числах), причем  $a_1, \dots, a_l$  — свободные числовые переменные. Пусть переменные для отношений интерпретируются как некоторые фиксированные отношения  $S_1, S_2, \dots$ . Будем говорить, что отношение

$$R = \{\langle X_1, \dots, X_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid F(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k, a_1, \dots, a_l)$$
  
истинно, если  $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k$  интерпретируются как  $X_1, \dots, x_l$  соответственно\}

определимо в логике предикатов через отношения  $S_1, S_2, \dots$ , с кванторами только по числовым переменным; выражение  $F(\hat{A}_1, \dots, a_l)$  называется определением отношения  $R$  через  $S_1, S_2, \dots$

Имеет место следующий аналог теоремы 14-IV.

**Теорема V.** Если отношение  $R \subset \mathcal{N}^k \times N^l$  определимо в логике предикатов через рекурсивные отношения, с кванторами только по числовым переменным, то  $R$  — арифметическое отношение.

**Доказательство.** Для данного случая выполняются пункты 1-4 из § 14.3. Отсюда следует требуемое<sup>1</sup>). ■

Следовательно, можно точно так же, как и раньше, использовать алгоритм Тарского — Куратовского.

**Пример 1.** Рассмотрим множество  $\{X \mid X \neq \emptyset\}$ . Имеем  $A \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists x)[x \in A] \Leftrightarrow \exists$ , следовательно, это множество множеств входит в  $\Sigma_1^{(s)}$ .

<sup>1)</sup> Согласно теореме I, обращение теоремы V очевидно.

Пример 2. Рассмотрим множество  $\{X \mid X \text{ конечно}\}$ . Имеем  $A \text{ конечно} \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)[y > x \Rightarrow y \notin A] \Leftrightarrow \exists \forall$ , следовательно, это множество множеств принадлежит  $\Sigma_2^{(s)}$ .

Пример 3. Рассмотрим множество  $\{X \mid X \text{ рекурсивно}\}$ . Множество  $A$  рекурсивно  $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)[A = W_y \wedge \bar{A} = W_z] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)[(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow x \in W_y] \wedge (\forall x)[x \notin A \Leftrightarrow x \in W_z] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \exists [\forall [ \Leftrightarrow \exists] \wedge \forall [ \Leftrightarrow \exists]] \Leftrightarrow \exists \exists^1). \end{aligned}$$

Следовательно, это множество множеств входит в  $\Sigma_3^{(s)}$ .

### Представимость

Обобщим теорему 14-VI.

Теорема VI. Пусть  $R \subset \mathcal{N}^k \times N^l$ .

(a) Отношение  $R$  арифметическое  $\Leftrightarrow$  отношение  $R$  определимо в логике предикатов через рекурсивные отношения над числами и отношение  $\{\langle x, X \rangle \mid x \in X\}$ , с кванторами только по числовым переменным.

(b) Рассмотрим элементарную арифметику, расширенную путем введения элементарных формул вида  $a \in \hat{A}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , где  $a$  — произвольная числовая переменная,  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots$  — множественные переменные. Отношение  $R$  арифметическое  $\Leftrightarrow$  отношение  $R$  определимо в этой расширенной элементарной арифметике.

Доказательство. (a)  $\Leftarrow$ . Очевидно в силу теоремы V.  $\Rightarrow$ . Согласно теореме IV, отношение  $R$  определимо через  $T_{k, m}$  для некоторого  $m$ . Тогда  $T_{k, m}(z, X_1, \dots, x_m) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle \langle x_0, \dots, x_{m-1} \rangle, y, u, v \rangle \text{ появляется на } x_m \text{-м шаге перечисления } W_{\rho(z)} \wedge (\forall w)[w \in D_u \Rightarrow w \in (X_1 \oplus \dots \oplus X_k)] \wedge (\forall w)[w \in D_v \Rightarrow w \notin (X_1 \oplus \dots \oplus X_k)]]$ ; кроме того,

$$\begin{aligned} y \in (X_1 \oplus \dots \oplus X_k) &\Leftrightarrow [(\exists y_1)[y = 2y_1 + 1 \wedge y_1 \in X_k] \vee \\ &\vee (\exists y_2)(\exists y_3)[y = 2y_2 + 1 \wedge y_2 \in X_{k-1} \wedge \dots]. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили желаемое определение отношения  $R$ .

(b)  $\Leftarrow$ . Очевидно.

$\Rightarrow$ . Очевидно в силу (a) и теоремы 14-VI. ■

### Топология

В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать отношения с одной множественной переменной и без числовых переменных, т. е. множества множеств натуральных чисел. Иногда (но

<sup>1)</sup> Формула  $x \in W_y$  представляется как  $\exists$ , так как  $x \in W_y \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\exists u)T(y, x, u)$ . Аналогично трактуется  $x \in W_z$ .

не всегда) они будут называться *классами* множеств. Для обозначения таких классов будут использоваться буквы  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ . Выполняется ли общая теорема об иерархии? То есть существует ли для каждого  $n > 0$  такой класс  $\mathcal{A}$ , что  $\mathcal{A} \in (\Sigma_n^{(s)} - \Pi_n^{(s)})$  (и что, следовательно,  $\bar{\mathcal{A}} \in (\Pi_n^{(s)} - \Sigma_n^{(s)})$ )?

Прежде чем ответить на этот вопрос, вернемся к топологии канторова множества, рассмотренной в § 13.3 и в упр. 11-35.

Элементы множества  $\mathcal{N}$ , т. е. множества чисел, можно отождествить с их характеристическими функциями. Тогда бэрсовская метрика, введенная в § 13.3, определяет топологию на  $\mathcal{N}$ . Относительно этой метрики  $\mathcal{N}$  полно (см. упр. 13-25). Если рассмотреть

$\dot{I} = \{0, 1\}$ , ввести дискретную топологию на  $\dot{I}$  и, учитывая, что  $\mathcal{N} = \dot{I}^N$ , рассмотреть произведение топологий на  $\mathcal{N}$  (см. упр. 13-24), то получим ту же самую топологию канторова множества. Согласно последнему подходу, *базисными окрестностями* являются такие классы  $\mathcal{D}$ , что  $\mathcal{D} = \{X \mid D_u \subset X \wedge D_v \subset \bar{X}\}$  для некоторых  $u$  и  $v$  (см. § 13.3). Пространство  $\mathcal{N}$  компактно (см. упр. 9-40).

### $\Sigma_0^{(s)}$ -классы

В следующей теореме описываются классы, входящие в  $\Sigma_0^{(s)}$  ( $= \Pi_0^{(s)}$ ).

Теорема VII. (1) Класс  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(s)} \Leftrightarrow$  (2) класс  $\mathcal{A}$  открытозамкнут (в топологии канторова множества на  $\mathcal{N}$ )  $\Leftrightarrow$  (3) существует такое tt-условие  $x$ , что

$$\mathcal{A} = \{X \mid X \text{ удовлетворяет } x\}.$$

Доказательство. (1)  $\Rightarrow$  (3). Пусть  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(s)}$ . Пусть  $\psi$  — характеристическая функция (одной множественной переменной) класса  $\mathcal{A}$ . По определению  $\psi$  общекурсивна. Следовательно,  $\psi = \lambda X[\phi_z^X(0)]$  для некоторого  $z$ . Как это уже делалось в § 9.2, можно порождать диаграмму вычисления для  $\phi_z^X(0)$  (для переменных  $X$ ). Так как  $\phi_z^X(0)$  определено для любого  $X$ , то все ветви должны обрываться. Следовательно, по теореме компактности для деревьев (урп. 9-40) вся диаграмма конечна. Поэтому (как и в доказательстве теоремы 9-XIX) существует такое tt-условие  $x$ , что  $\psi(A) = 1 \Leftrightarrow$  условие  $x$  выполняется на  $A$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $x$  — некоторое tt-условие. Пусть  $B$  — множество, ассоциированное с этим условием. Пусть  $D_{u_0}, \dots, D_{u_k}$  — конечные подмножества множества  $B$ , на которых выполняется  $x$ . Пусть

$$\mathcal{D}_i = \{A \mid D_{u_i} \subset A \wedge (B - D_{u_i}) \subset \bar{A}\}, \quad i \leq k.$$

Тогда  $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{D}_i$  для некоторого  $i \leq k$ . Следовательно,  
 $\mathcal{A} = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_k$ .

Итак,  $\mathcal{A}$  является (быть может, пустым) объединением базисных окрестностей, следовательно,  $\mathcal{A}$  открыто. Пусть  $D_{v_0}, \dots, D_{v_l}$  — конечные подмножества множества  $B$ , на которых не выполняется  $x$ . Пусть

$$\mathcal{E}_i = \{A \mid D_{v_i} \subset A \text{ & } (B - D_{v_i}) \subset \bar{A}\}, \quad i \leq l.$$

Тогда  $A \in \bar{\mathcal{A}} \Leftrightarrow A \in \mathcal{E}_i$  для некоторого  $i \leq l$ . Следовательно,  
 $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_l$ .

Итак,  $\bar{\mathcal{A}}$  является (быть может, пустым) объединением базисных окрестностей, следовательно,  $\bar{\mathcal{A}}$  открыто. Таким образом,  $\mathcal{A}$  — открыто-замкнутый класс.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Пусть класс  $\mathcal{A}$  открыто-замкнут. Тогда  $\mathcal{A}$  и  $\bar{\mathcal{A}}$  представляются в виде объединения базисных окрестностей. Совокупность окрестностей из обоих объединений образует открытое покрытие пространства  $\mathcal{N}$ . В силу компактности можно выделить конечное подпокрытие. Отсюда, в частности, следует, что  $\mathcal{A}$  — конечное объединение базисных окрестностей. Но список этих базисных окрестностей дает конечный набор инструкций для вычисления характеристической функции класса  $\mathcal{A}$ . Следовательно,  $\mathcal{A}$  рекурсивно и  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(s)}$ . ■

**Следствие VII.** Класс  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(s)} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{D}_0 \cup \dots \cup \mathcal{D}_k$  для некоторой конечной совокупности базисных окрестностей  $\mathcal{D}_0, \dots, \mathcal{D}_k$ .

**Доказательство** очевидно. ■

**Пример.** Пусть  $\mathcal{A} = \{X \mid X \neq \emptyset\}$ . Как уже отмечалось,  $\mathcal{A} \in \Sigma_1^{(s)}$ . Класс  $\mathcal{A}$  не замкнут, так как  $\bar{\mathcal{A}} = \{X \mid X = \emptyset\} = \{\emptyset\}$  не открыто. Следовательно,  $\mathcal{A} \in (\Sigma_1^{(s)} - \Sigma_0^{(s)})$ .

### $\Sigma_1^{(s)}$ -классы и $\Pi_1^{(s)}$ -классы

Приведем необходимые условия принадлежности классам  $\Sigma_1^{(s)}$  и  $\Pi_1^{(s)}$ .

**Теорема VIII.** (а) Класс  $\mathcal{A} \in \Sigma_1^{(s)} \Rightarrow$  класс  $\mathcal{A}$  открыт (в топологии канторова множества на  $\mathcal{N}$ ).

(б) Класс  $\mathcal{A} \in \Pi_1^{(s)} \Rightarrow$  класс  $\mathcal{A}$  замкнут (в топологии канторова множества на  $\mathcal{N}$ ).

**Доказательство.**  $\mathcal{A} \in \Sigma_1^{(s)} \Rightarrow \mathcal{A} = \{X \mid (\exists x)R(X, x)\}$  для некоторого рекурсивного отношения  $R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \bigcup_{x=0}^{\infty} \{X \mid R(X, x)\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  класс  $\mathcal{A}$  — объединение открыто-замкнутых множеств  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  класс  $\mathcal{A}$  открыт. Аналогично,  $\mathcal{A} \in \Pi_1^{(s)} \Rightarrow$  класс  $\mathcal{A}$  — пересечение открыто-замкнутых множеств  $\Rightarrow$  класс  $\mathcal{A}$  замкнут. ■

Ясно, что условия теоремы VIII не достаточны, так как имеется несчетное количество открытых и замкнутых классов (например, для любого  $A$  класс  $\{A\}$  замкнут), в то время как  $\Sigma_1^{(s)}$  и  $\Pi_1^{(s)}$  состоят из счетного количества классов (см. теорему IV).

**Следствие VIII.**  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(s)} \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \Pi_0^{(s)} \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \Sigma_1^{(s)} \cap \Pi_1^{(s)}$ .

**Доказательство.**  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(s)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Pi_1^{(s)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Sigma_1^{(s)} \cap \Pi_1^{(s)}$  в силу теоремы II. Класс  $\mathcal{A} \in \Sigma_1^{(s)} \cap \Pi_1^{(s)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Sigma_0^{(s)}$ , согласно теоремам VIII и VII. ■

### $\Sigma_2^{(s)}$ -классы и $\Pi_2^{(s)}$ -классы

Необходимые условия для классов  $\Sigma_1^{(s)}$  и  $\Pi_1^{(s)}$  дают необходимые условия для классов  $\Sigma_2^{(s)}$  и  $\Pi_2^{(s)}$ .

**Теорема IX (а).** Класс  $\mathcal{A} \in \Sigma_2^{(s)} \Rightarrow$  класс  $\mathcal{A}$  — объединение замкнутых множеств.

(б) Класс  $\mathcal{A} \in \Pi_2^{(s)} \Rightarrow$  класс  $\mathcal{A}$  — пересечение открытых множеств.

**Доказательство.** Как в доказательстве теоремы VIII, квантор существования дает объединение, квантор общности дает пересечение. Дальнейшее очевидно. ■

При определении уровня данного класса в иерархии иногда полезными оказываются категорные рассуждения.

**Пример.** Рассмотрим  $\mathcal{A} = \{X \mid X \text{ конечно}\}$ . Как уже отмечалось, по алгоритму Тарского — Куратовского  $\mathcal{A} \in \Sigma_2^{(s)}$ . Согласно теореме IX, класс  $\mathcal{A}$  — счетное объединение замкнутых множеств. Так как в любой базисной окрестности имеется бесконечное множество, то каждое из этих замкнутых множеств не может быть плотным. Следовательно,  $\mathcal{A}$  — множество первой категории. Предположим, что  $\bar{\mathcal{A}} \in \Sigma_2^{(s)}$ . Тогда  $\bar{\mathcal{A}}$  — счетное объединение замкнутых множеств. Так как в любой базисной окрестности имеется конечное множество, то каждое из этих замкнутых множеств не может быть плотным. Следовательно,  $\bar{\mathcal{A}}$  — множество

первой категории. Получили противоречие, так как  $\mathcal{N} = \mathcal{A} \cup \overline{\mathcal{A}}$  — множество второй категории. Итак, имеем, что  $\mathcal{A} \in (\Sigma_2^{(s)} - \Pi_2^{(s)})$  и  $\overline{\mathcal{A}} \in (\Pi_s^{(s)} - \Sigma_s^{(s)})$ .

Приведённые примеры, очевидно, параллельны примерам в § 14.8. Например, в § 14.8 мы установили, что  $\{x \mid W_x \neq \emptyset\} \in \epsilon(\Sigma_1 - \Pi_1)$  и  $\{x \mid W_x \text{ конечно}\} \in (\Sigma_2 - \Pi_2)$ ; в свою очередь оказалось, что  $\{X \mid X \neq \emptyset\} \in (\Sigma_1^{(s)} - \Pi_1^{(s)})$  и  $\{X \mid X \text{ конечно}\} \in (\Sigma_2^{(s)} - \Pi_2^{(s)})$ . Следует ли ожидать, что существует такое семейство „просто определяемых“ (в некотором смысле) классов, что для всех классов  $\mathcal{C}$  из этого семейства  $\{x \mid W_x \in \mathcal{C}\}$  и  $\{X \mid X \in \mathcal{C}\}$  находятся на одних и тех же ступенях в соответствующих иерархиях? По-видимому, нет; так в § 14.6 было установлено, что  $\{x \mid W_x \text{ коконечно}\} \in (\Sigma_3 - \Pi_3)$ , в то время как алгоритм Тарского — Куратовского дает  $\{X \mid X \text{ коконечно}\} \in \Sigma_2^{(s)}$  (заметим, что  $\Sigma_2^{(s)} \subset \Pi_3^{(s)}$ ). См. также упр. 15-4.

## Классическая иерархия Бореля

Определим классы множеств  $\Sigma_n^*$  и  $\Pi_n^*$  следующим образом.  
 $\Sigma_0^* = \Pi_0^* = \Sigma_0^{(s)} = \Pi_0^{(s)}$  — семейство всех открыто-замкнутых классов.

$\Sigma_{n+1}^*$  — семейство всех счетных объединений классов из  $\Pi_n^*$ .  
 $\Pi_n^*$  — семейство всех счетных пересечений классов из  $\Sigma_n^*$ .

$\Sigma_{n+1}$  — семейство всех счетных пересечений классов из  $\Sigma_n$ .  
 $\Sigma_1^*$  состоит из открытых множеств,  $\Pi_1^*$  состоит из замкнутых множеств.

$\Sigma_2^*$  состоит из так называемых  $F_\sigma$ -множеств,  $\Pi_2^*$  состоит из так называемых  $G_\delta$ -множеств и т. д. Эти классы образуют *конечную иерархию Бореля на канторовом множестве*. Обобщим теорему IX.

**ТЕОРЕМА X.** *Каково бы ни было  $n$ , [класс  $\mathcal{A} \in \Sigma_n^{(s)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Sigma_n^*$ ] и [ $\mathcal{A} \in \Pi_n^{(s)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Pi_n^*$ ].*

## Доказательство очевидно.

В силу мощностных соображений, каково бы ни было  $n > 0$ , имеются классы из  $\Sigma_n^*$ , не входящие в  $\Sigma_n^{(s)}$ , и классы из  $\Pi_n^*$ , не входящие в  $\Pi_n^{(s)}$ . Иногда говорят, что классы  $\Sigma_n^{(s)}$  и  $\Pi_n^{(s)}$  образуют эффективную конечную иерархию Бореля на  $\mathcal{N}$ . Эффективную иерархию можно рассматривать как иерархию Бореля с „рекурсивными“ объединениями и пересечениями (см. упр. 15-8). Мы рассмотрим этот вопрос в § 15.2, где будет показано, что как классическую, так и эффективную иерархии можно изучать на общей теоретической основе.

## Теорема об иерархии

Докажем теорему об иерархии для классов множеств.

**Теорема XI.** Для любого  $n > 0$  существует такой класс  $\mathcal{A}$ , что  $\mathcal{A} \in (\Sigma_n^{(s)} - \Pi_n^{(s)})$  и что, следовательно,  $\bar{\mathcal{A}} \in (\Pi_n^{(s)} - \Sigma_n^{(s)})$ .

Доказательство.  $n = 1$ . Ранее было показано, что  $\{X \mid X = \emptyset\} \in (\Pi_1^{(s)} - \Sigma_1^{(s)})$  и что  $\{X \mid X \neq \emptyset\} \in (\Sigma_1^{(s)} - \Pi_1^{(s)})$ .

$n = 2$ . Ранее было показано, что  $\{X \mid X \text{ конечно}\} \in (\Sigma_2^{(s)} - \Pi_2^{(s)})$  и что  $\{X \mid X \text{ бесконечно}\} \in (\Pi_2^{(s)} - \Sigma_2^{(s)})$ .

Лемма. Для любого  $n \geq 3$  имеем (i)  $\mathcal{A}_B \in \Sigma_n^{(s)} \Leftrightarrow B \in \Sigma_n$  и (ii)  $\mathcal{A}_B \in \Pi_n^{(s)} \Leftrightarrow B \in \Pi_n$ .

Доказательство леммы. (i)  $\Rightarrow$ . Пусть  $\mathcal{A}_B \in \Sigma_n^{(s)}$ . Тогда

$$\mathcal{A}_B = \{X \mid (\exists x_1) (\forall x_2) \dots R(X, x_1, \dots, x_n)\},$$

причем  $R$  — рекурсивное отношение в  $\mathcal{N} \times N^n$ . Положим

$$S = \{\langle x, x_1, \dots, x_n \rangle \mid R(\{x\}, x_1, \dots, x_n)\}.$$

Тогда  $B = \{x \mid (\exists x_1)(\forall x_2) \dots S(x, x_1, \dots, x_n)\}$  и  $S$  рекурсивно. Следовательно,  $B \in \Sigma_n$ .

(ii)  $\Rightarrow$ . Доказывается аналогично.

(i)  $\Leftarrow$ . Пусть  $B \in \Sigma_n$ , и пусть  $B = \{x \mid (\exists x_1) \dots S(x, x_1, \dots, x_n)\}$ . Тогда

$$\mathcal{A}_B = \{X \mid (\exists x)[(\forall y)[y \in X \Leftrightarrow y = x] \ \& \\ \ \& (\exists x_1) \dots S(x, x_1, \dots, x_n)]\}.$$

Так как  $n \geq 2$ , то алгоритм Тарского — Куратовского дает, что  $\mathcal{A}_B \in \Sigma_n^{(s)}$ .

(ii)  $\Leftarrow$ . Пусть  $B \in \Pi_n$ , и пусть  $B = \{x \mid (\forall x_1) \dots S(x, x_1, \dots, x_n)\}$ . Тогда

$$\mathcal{A}_B = \{X \mid (\exists x)(\forall y)[y \in X \Leftrightarrow y = x] \text{ and } (\forall x)[x \in X \Rightarrow (\forall x_1) \dots S(x, x_1, \dots, x_n)]\}.$$

Так как  $n \geq 3$ , то алгоритм Тарского — Кулатовского дает, что  $\mathcal{A}_B \in \Pi_n^{(s)}$ . Лемма доказана.

Из теоремы об иерархии для множеств чисел (следствие 14-VIII (c)) следует требуемый результат. ■

## Степени

Понятия сводимости и степени приводят к более тонкой классификации арифметической иерархии множеств. Аналогичная тонкая классификация арифметической иерархии классов не изучалась, мы не располагаем также результатами, соответствующими сильной теореме об иерархии. Подходящим инструментом такого исследования может оказаться решетка Медведева.

## Неявная определимость

Наиболее естественный путь получения теоремы об иерархии для классов множеств из теоремы об иерархии для множеств состоял бы в доказательстве, что для любого  $B$  и любого  $n \geq 3$  имеют место (i)  $\{B\} \in \Sigma_n^{(s)} \Leftrightarrow B \in \Sigma_n$  и (ii)  $\{B\} \in \Pi_n^{(s)} \Leftrightarrow B \in \Pi_n$ . Однако такой путь невозможен из-за следующего замечательного результата, полученного Гильбертом и Бернайсом [1939] и Кузнецовым и Трахтенбротом [1955]: существует такое множество  $B$ , что  $\{B\}$  является арифметическим классом, а само  $B$  — неарифметическое множество. В следующей теореме мы докажем этот факт.

**Теорема XII** (Гильберт, Бернайс, Кузнецов, Трахтенброт). Пусть  $V$  — множество всех истинных высказываний элементарной арифметики. Тогда  $\{V\} \in \Pi_2^{(s)}$ .

Будем говорить, что множество  $A$  явно определимо в элементарной арифметике, если  $A$  определимо в элементарной арифметике в смысле § 14.4. Будем говорить, что  $A$  неявно определимо в элементарной арифметике, если существует такое выражение  $F(\hat{A})$  в расширенной элементарной арифметике теоремы VI (b) со свободной множественной переменной  $\hat{A}$ , что  $F(\hat{A})$  истинно тогда и только тогда, когда  $\hat{A}$  интерпретируется как  $A$ . Итак, в силу теоремы VI множество  $A$  неявно определимо в элементарной арифметике  $\Leftrightarrow \{A\}$  — арифметический класс. Согласно теореме Тарского (упр. 11-45) или теоремам 14-X, 14-VIII и 14-VI, множество  $V (= \emptyset^{(\omega)})$  не является явно определимым в элементарной арифметике. Теорема XII показывает, что  $V$  неявно определимо в элементарной арифметике, так как  $\{V\} = \{X \mid (\forall y)(\exists z) R(X, y, z)\}$  для некоторого рекурсивного отношения  $R$  и так как такое  $R$  определимо в расширенной элементарной арифметике теоремы VI (b) (см. теорему VI (b)).

Доказательство теоремы XII. Если  $R \subset \mathcal{N} \times N^2$  — рекурсивное отношение и  $h$  — рекурсивная перестановка, то рекурсивно отношение  $S = \langle X, y, z \rangle \mid R(h(X), y, z)$ . Следова-

тельно, если  $\{A\} = \{X \mid (\forall y)(\exists z) R(X, y, z)\} \in \Pi_2^{(s)}$ , то

$$\{h^{-1}(A)\} = \{X \mid (\forall y)(\exists z) S(X, y, z)\} \in \Pi_2^{(s)}.$$

Поэтому достаточно показать, что  $\{\emptyset^{(\omega)}\} \in \Pi_2^{(s)}$ , так как, согласно теореме 14-X, имеем  $\emptyset^{(\omega)} \equiv V$ .

**Лемма.** Существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что для любого  $n$  число  $f(n)$  является  $\Pi_2^{(s)}$ -индексом класса  $\{\emptyset^{(n)}\}$ , т. е. для любого  $n$  имеем  $\{\emptyset^{(n)}\} = \{X \mid (\forall y)(\exists z) T_{1,1}(f(n), X, y, z)\}$ .

Доказательство леммы. Функцию  $f$  определим по индукции. Положим  $f(0) = z_0$ , где  $z_0$  есть  $\Pi_2^{(s)}$ -индекс класса  $\{\emptyset\}$ . Такое  $z_0$  существует, так как уже отмечалось, что  $\{\emptyset\} \in \Pi_1^{(s)}$ .

Предположим, что  $\{\emptyset^{(n)}\} = \{X \mid (\forall y)(\exists z) T_{1,1}(f(n), X, y, z)\}$ . Покажем, как вычислять  $f(n+1)$ . В силу следствия 13-I существует такая общерекурсивная функция  $g$ , что для любого  $A$  имеем  $A \leqslant_1 A'$  посредством  $g$  и существует такое число  $w_0$ , что для любого  $A$  имеем  $A' = W_{w_0}^A$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} A = \emptyset^{(n+1)} &= (\emptyset^{(n)})' \Leftrightarrow [g^{-1}(A) = \emptyset^{(n)} \& A = (g^{-1}(A))'] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [g^{-1}(A) = \emptyset^{(n)} \& (\forall x)[x \in A \Leftrightarrow (\exists y)(\exists u)(\exists v) \\ &[\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho(w_0)} \& D_u \subset g^{-1}(A) \& D_v \subset \overline{g^{-1}(A)}]]] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall y)(\exists z) T_{1,1}(f(n), g^{-1}(A), y, z) \& (\forall x)[x \in A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho(w_0)} \& g(D_u) \subset A \& g(D_v) \subset \\ &\subset \overline{A}]]. \end{aligned}$$

Применяя алгоритм Тарского — Куратовского и теорему IV, получим выражение вида  $(\forall y)(\exists z) T_{1,1}(z_{n+1}, A, y, z)$ , где  $z_{n+1}$  в силу теоремы IV эффективно получается из  $f(n)$ . Положим  $f(n+1) = z_{n+1}$ . Тогда  $f(n+1)$  будет  $\Pi_2^{(s)}$ -индексом класса  $\{\emptyset^{(n+1)}\}$ . Лемма доказана.

По определению  $\emptyset^{(\omega)} = \{u, v \mid u \in \emptyset^{(v)}\}$ . Взяв  $f$  из леммы, получим, что

$$X = \emptyset^{(\omega)} \Leftrightarrow (\forall v)(\forall y)(\exists z) T_{1,1}(f(v), \{u \mid \langle u, v \rangle \in X\}, y, z).$$

Очевидно, что отношение  $\{\langle X, v, y, z \rangle \mid T_{1,1}(f(v), \{u \mid \langle u, v \rangle \in X\}, y, z)\}$  рекурсивно, так как для произвольного  $v$  всякий вопрос о принадлежности множеству  $\{u \mid \langle u, v \rangle \in X\}$  эквивалентен соответствующему вопросу о принадлежности множеству  $X$ . Следовательно,  $\{\emptyset^{(\omega)}\} \in \Pi_2^{(s)}$ . Этим завершается доказательство теоремы. ■

### Определение уровней в иерархии

Закончим рассмотрение уровней в иерархии классов для примеров, аналогичных примерам из § 14.8 для иерархии множеств.

**Теорема XIII** (Шёнфильд [1958]). Класс  $\{X \mid X \text{ рекурсивно перечислим}\} \in (\Sigma_3^{(s)} - \Pi_3^{(s)})$ .

**Доказательство.** Множество  $A$  рекурсивно перечислимо  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\exists x)[A = W_x] \Leftrightarrow (\exists x)[(\forall y)[y \in A \Leftrightarrow y \in W_x]] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists \vdash \exists \Leftrightarrow \exists \vdash \exists.$$

Следовательно,  $\{X \mid X \text{ рекурсивно перечислим}\} \in \Sigma_3^{(s)}$ .

Предположим, что  $\{X \mid X \text{ рекурсивно перечислим}\} \in \Pi_3^{(s)}$ . Дословное повторение доказательства теоремы 14-XVIII дает, что тогда существует такое рекурсивное отношение  $R$ , что для любого  $A$  имеем  $A$  рекурсивно перечислимо  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)R(A, x, y)$ . Для произвольного  $X$  положим  $C_X = \{x \mid (\forall y)R(X, x, y)\}$ . Тогда  $X$  рекурсивно перечислимо  $\Leftrightarrow C_X$  бесконечно.

Для произвольного  $Y$  положим  $\mathcal{S}_Y = \{X \mid C_X = C_Y\}$ . Так как имеется не более чем счетное количество таких  $C_Y$ , что  $Y$  рекурсивно перечислимо (класс всех рекурсивно перечислимых множеств счетен), и так как имеется не более счетного количества таких  $C_Y$ , что  $Y$  не рекурсивно перечислимо (класс всех конечных множеств счетен), то имеется не более чем счетное количество различных  $\mathcal{S}_Y$ , когда  $Y$  пробегает все  $\mathcal{N}$ . С другой стороны, эти классы покрывают все  $\mathcal{N}$ . Так как объединение этих классов — множество второй категории, то по крайней мере один из этих классов не является неплотным. Возьмем такое  $Y_0$ , что  $\mathcal{S}_{Y_0}$  не является неплотным, т. е. замыкание  $\mathcal{S}_{Y_0}$  содержит непустой открытый класс.

Для любого  $x$  класс  $\{X \mid x \in C_X\} = \{X \mid (\forall y)R(X, x, y)\} \in \Pi_1^{(s)}$  и, следовательно, замкнут. Отсюда следует, что класс  $\{Y \mid C_{Y_0} \subset C_Y\} = \bigcap_{x \in C_{Y_0}} \{X \mid x \in C_X\}$  является пересечением зам-

кнутых классов и потому сам тоже замкнут. Следовательно, замыкание класса  $\mathcal{S}_{Y_0}$  ( $= \{Y \mid C_{Y_0} = C_Y\}$ ) содержится в  $\{Y \mid C_{Y_0} \subset C_Y\}$  и класс  $\{Y \mid C_{Y_0} \subset C_Y\}$  содержит окрестность. Но в любой окрестности содержится множество, не являющееся рекурсивно перечислимым, поэтому в  $\{Y \mid C_{Y_0} \subset C_Y\}$  содержится не рекурсивно перечислимое множество. Но отсюда следует, что  $C_{Y_0}$  конечно. Пусть  $x_0, x_1, x_2, \dots$  — элементы коконечного множества  $\bar{C}_{Y_0}$  в возрастающем порядке.

До конца доказательства отождествим множества с их характеристическими функциями. Открытый класс, содержащийся в замы-

кании класса  $\mathcal{S}_{Y_0}$ , содержит окрестность вида  $\{f \mid f_0 \subset f\}$  при некотором начальном сегменте  $f_0$  (характеристической функции). Определим общерекурсивную характеристическую функцию  $g$  путем последовательных продолжений. Пусть число  $z$  выбрано так, что  $\varphi_z^X(x, y) = 1$ , если выполнено  $R(X, x, y)$ , и  $\varphi_z^X(x, y) = 0$ , если  $R(X, x, y)$  не выполняется. (Как и в гл. 13, для обозначения конечных начальных сегментов функций будут использоваться буквы  $f_0, g_0, g_1, \dots$ ; для всякого сегмента  $h$  запись  $\varphi_z^{[h]}(x, y) = w$  означает, что  $\varphi_z^h(x, y)$  сходится с выходом  $w$ , причем при вычислении задаются вопросы о  $\tau(h)$  только для тех аргументов, на которых определен сегмент  $h$ .)

**Этап 0.** Положим  $g_0 = f_0$ .

**Этап  $n+1$ .** Рассмотрим  $\{g \mid g_n \subset g\}$ . Эта окрестность содержится в  $\{g \mid g_0 \subset g\}$  и потому содержит такое множество  $X$  (его характеристическую функцию), что  $C_X = C_{Y_0}$  и что, следовательно, не верно, что  $(\forall y)R(X, x_n, y)$ . Можно эффективно перечислить такие конечные продолжения  $\tilde{g}$  функции  $g_n$ , что  $(\exists y)[\varphi_z^{[\tilde{g}]}(x_n, y) = 0]$ . В качестве  $g_{n+1}$  возьмем первое продолжение в этом перечислении.

Положим  $g = \bigcup_n g_n$ . Функция  $g$  рекурсивна и является характеристической функцией некоторого рекурсивного множества  $B$ . По построению  $C_B \subset C_{Y_0}$  и  $C_{Y_0}$  конечно. Это противоречит нашему более раннему утверждению:  $X$  рекурсивно перечислимо  $\Rightarrow C_X$  бесконечно. Итак,  $\{X \mid X \text{ рекурсивно перечислим}\} \in \Pi_3^{(s)}$ . ■

**Следствие XIII** (Шёнфильд). Класс  $\{X \mid X \text{ рекурсивно}\} \in \Sigma_3^{(s)} - \Pi_3^{(s)}$ .

**Доказательство.** Как уже отмечалось, алгоритм Тарского — Куратовского дает, что этот класс входит в  $\Sigma_3^{(s)}$ . То, что он не входит в  $\Pi_3^{(s)}$ , следует из доказательства теоремы (см. упр. 15-5). ■

### Релятивизация

Материалу этого параграфа не придавалась релятивизованная форма. Релятивизация легко проводится. Отношение  $R \subset \mathcal{N}^k \times N^l$  назовем *A-рекурсивным*, если существует такое рекурсивное отношение  $S \subset \mathcal{N}^{k+1} \times N^l$ , что

$$R = \{(X_1, \dots, x_l) \mid S(A, X_1, \dots, x_l)\}.$$

Сразу получаем теорему о нормальной форме и нумерации. Например,  $\mathcal{A} \in \Sigma_3^{(s)A} \Leftrightarrow$  существует такое  $z$ , что  $\mathcal{A} = \{X \mid (\exists x_0)(\forall x_1)$

$(\exists x_2)T_{2,2}(z, A, X, x_0, x_1, x_2)\}$ . Топологические замечания для классов множеств остаются в силе, с заменой „рекурсивных“ объединений и пересечений на объединения и пересечения, „рекурсивные относительно  $A$ “. В частности,  $\Sigma_0^{(s)} = \Sigma_0^{(s)A}$ . Однако для нерекурсивного  $A$  и  $n > 0$  в классе  $\Sigma_n^{(s)A}$  имеются множества, не принадлежащие  $\Sigma_n^{(s)}$  (упр. 15-6). Теорема об иерархии доказывается так же, как и раньше (упр. 15-7).

## § 15.2. ИЕРАРХИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Можно определить иерархию классов функций. Мы проведем наше исследование параллельно § 15.1.

Пусть  $\mathcal{F}$  — множество всех всюду определенных функций одного числового аргумента, т. е. множество всех всюду определенных функций, отображающих  $N$  в  $N$ . Определим  $\mathcal{F}^k \times N^l$  таким же образом, как  $\mathcal{N}^k \times N^l$  (заменив  $\mathcal{N}$  на  $\mathcal{F}$ ). Определим функцию  $k$  функциональных переменных и  $l$  числовых переменных таким же образом, как функцию  $k$  множественных переменных и  $l$  числовых переменных (с заменой  $\mathcal{N}$  на  $\mathcal{F}$ ). Такие функции иногда называют функционалами (§ 15.3). Функцию  $k$  функциональных переменных и  $l$  числовых переменных, область определения которой есть  $\mathcal{F}^k \times N^l$ , назовем *всюду определенной функцией* ( $k$  функциональных переменных и  $l$  числовых переменных).

Неформальное определение *частично рекурсивной функции*  $k$  функциональных переменных и  $l$  числовых переменных аналогично определению частично рекурсивной функции  $k$  множественных переменных и  $l$  числовых переменных (в § 15.1), только вместо оракулов для  $X_1, \dots, X_k$  используются оракулы для  $\tau(f_1), \dots, \dots, \tau(f_k)$  (где  $f_1, \dots, f_k$  — функциональные аргументы). Отметим следующие отличительные особенности случая функциональных переменных; если дан оракул для  $\tau(f)$ , то можно не только получать ответы на вопросы типа „содержится ли  $\langle x, y \rangle$  в  $f$ “, но и „вычислять“  $f$ . Для данного  $x$  можем найти  $f(x)$ , задавая по порядку вопросы: „содержится ли  $\langle x, 0 \rangle$  в  $f$ “, „содержится ли  $\langle x, 1 \rangle$  в  $f$ “... Если  $f$  всюду определена, то когда-нибудь оракул даст положительный ответ. Как мы увидим, эта особенность вычисления функций придает специфические черты иерархии классов функций.

Формальное определение *частично рекурсивной функции*  $k$  функциональных переменных и  $l$  числовых переменных аналогично определению для множественных переменных в § 15.1.

**Определение.** Пусть  $k > 0$  и  $l > 0$ . Функция  $\psi$  называется *частично рекурсивной функцией*  $k$  функциональных переменных и

$l$  числовых переменных, если для некоторого  $z$

$$\psi = \lambda f_1 \dots f_k x_1 \dots x_l [\varphi_z^{f_1}, \dots, f_k(x_1, \dots, x_l)].$$

Пусть  $k > 0$  (и  $l = 0$ ), тогда  $\psi$  называется *частично рекурсивной функцией*  $k$  функциональных переменных, если для некоторого  $z$  выполняется  $\psi = \lambda f_1 \dots f_k [\varphi_z^{f_1}, \dots, f_k(0)]$ .

Число  $z$  называется *гёделевым номером* или *индексом* функции  $\psi$ .

Очевидна связь введенных понятий с понятиями, введенными в § 15.1, так как по определению  $\varphi_z^{f_1}, \dots, f_k = \varphi_z^{\tau(f_1)}, \dots, \tau(f_k)$ . Так, например,  $\psi$  является частично рекурсивной функцией одной функциональной переменной тогда и только тогда, когда существует такая частично рекурсивная функция  $\varphi$  одной множественной переменной, что  $\psi = \lambda f[\varphi(\tau(f))]$ . Заметим, что  $\varphi_z^f$  может быть всюду определенной для любых  $f$ , в то время как  $\varphi_z^X$  не является всюду определенной для всех  $X$  (пример очевиден).

**Определение.** Отношение  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$  называется *рекурсивным*, если характеристическая функция отношения  $R$  является всюду определенной рекурсивной функцией  $k$  функциональных переменных и  $l$  числовых переменных.

**Пример 1.** Класс  $\{f \mid f(5) \neq 0\}$  рекурсивен (хотя  $\{X \mid (\exists y)[y \neq 0 \& \langle 5, y \rangle \in X]\}$  не является рекурсивным классом множеств).

**Пример 2.** Если  $A$  рекурсивно, то класс  $\{f \mid f(5) \in A\}$  рекурсивен.

**Пример 3.** Отношение  $\{\langle f, g \rangle \mid f(g(5)) = 0\}$  рекурсивно, и класс  $\{f \mid f(f(5)) = 0\}$  рекурсивен.

**Пример 4.** Класс  $\{f \mid f(0) = \mu y[0 < y \& 0 < f(y)]\}$  рекурсивен.

Эти примеры показывают что, вообще говоря, рекурсивные классы функций более сложны по структуре, чем рекурсивные классы множеств.

**Пример 5.** Класс  $\{f \mid 5 \in \text{Val } f\}$  является областью определения частично рекурсивной функции одного функционального переменного (упр. 15-10).

### Иерархия

Определим иерархию, применяя операции взятия дополнения и проектирования по числовым переменным к рекурсивным отношениям. В гл. 16 будут рассмотрены проекции по функциональным переменным (см. также упр. 15-19).

**Определение.** Отношение  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$  назовем *арифметическим*, если  $R$  рекурсивно или существует такое рекурсивное отношение  $S \subset \mathcal{F}^k \times N^m$ , что  $R$  можно получить из  $S$  путем применения конечной последовательности операций взятия дополнения и проектирования, причем проектирования производятся только по числовым переменным.

Аналог теоремы I очевиден.

**Теорема XIV.** Отношение  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$  арифметическое  $\Leftrightarrow$  [отношение  $R$  рекурсивно или при некотором  $m > 0$  имеем  $R = = \{(f_1, \dots, x_l) \mid (Q_1 x_{l+1}) \dots (Q_m x_{l+m}) S(f_1, \dots, x_{l+m})\}$ , где  $Q_i$  есть  $\forall$  или  $\exists$  ( $1 \leq i \leq m$ ), а отношение  $S \subset \mathcal{F}^k \times N^{l+m}$  рекурсивно].

**Доказательство.** Проводится аналогично доказательству теоремы 14-I. ■

Точно так же, как  $\Sigma_n^{(s)}$ -формы и  $\Pi_n^{(s)}$ -формы, определяются  $\Sigma_n^{(fn)}$ -формы и  $\Pi_n^{(fn)}$ -формы. (Верхний индекс (fn) говорит о возможном присутствии функциональных переменных.) Выразимость в данной форме определяется, как раньше.

**Определение.**  $\Sigma_n^{(fn)}$  — класс всех отношений, выражимых в  $\Sigma_n^{(fn)}$ -форме.  $\Pi_n^{(fn)}$  — класс всех отношений, выражимых в  $\Pi_n^{(fn)}$ -форме.

**Следствие XIV.** Отношение  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$  арифметическое  $\Leftrightarrow$   $\Leftrightarrow (\exists n)[R \in \Sigma_n^{(fn)} \text{ или } R \in \Pi_n^{(fn)}]$ .

**Доказательство очевидно.** ■

Используя фиктивные кванторы, получаем следующее.

**Теорема XV.** (a)  $\Sigma_n^{(fn)} \cup \Pi_n^{(fn)} \subset \Sigma_{n+1}^{(fn)} \cap \Pi_{n+1}^{(fn)}$ .

(b)  $R \in \Sigma_n^{(fn)} \Leftrightarrow \bar{R} \in \Pi_n^{(fn)}$ .

**Доказательство** проводится, как в теореме 14-II. ■

### Нормальные формы

Правила сжатия кванторов действуют, как раньше.

**Определение.** Пусть  $k > 0$  и  $l \geq 0$ , положим

$$T'_{k,l} = \{\langle f_1, \dots, f_k, z, x_0, \dots, x_l \rangle \mid \langle \tau(f_1), \dots, \tau(f_k), z, x_0, \dots, x_l \rangle \in T_{k,l}\}.$$

**Соглашение.** Как и для  $T_{k,l}$ , вместо  $T'_{k,l}(f_1, \dots, f_k, z, x_0, \dots, x_l)$  мы будем писать

$$T'_{k,l}(z, f_1, \dots, f_k, x_0, \dots, x_l).$$

Следующие теоремы являются аналогами теорем III и IV.

**Теорема XVI.** Пусть  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$ . Тогда  $R \in \Sigma_1^{(fn)} \Leftrightarrow R = = \text{Arg } \psi$  для некоторой частично рекурсивной функции  $\psi$  ( $k$  функциональных переменных и  $l$  числовых переменных).

**Доказательство** проводится, как в теореме III. ■

**Теорема XVII (Клини).** Для любого  $n > 0$  и любого отношения  $R \in \Sigma_n^{(fn)}$  (где  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$ ) существует такое число  $z$ , что

$$\begin{aligned} R = \{&\langle f_1, \dots, f_k, x_0, \dots, x_{l-1} \rangle \mid (\exists x_l)(\forall x_{l+1})(\exists x_{l+2}) \dots \\ &\dots T'_{k,l+n-1}(z, f_1, \dots, f_k, x_0, \dots, x_{l+n-1})\} \end{aligned}$$

(перед  $T$  стоит знак отрицания, если  $n$  четно). Назовем  $z$   $\Sigma_n^{(fn)}$ -индексом отношения  $R$ . По любой  $\Sigma_n^{(fn)}$ -форме отношения  $R$  (см. теорему IV) можно равномерно найти  $\Sigma_n^{(fn)}$ -индекс отношения  $R$ . Аналогичное предложение имеет место и для  $R \in \Pi_n^{(fn)}$  ( $n > 0$ ).

**Доказательство очевидно.** ■

### Алгоритм Тарского—Куратовского

**Определение.** Пусть выражение  $F(p_1, \dots, p_k, a_1, \dots, a_l)$  построено в логике предикатов из пропозициональных связок,  $=$ , числовых переменных, кванторов по числовым переменным, переменных  $p_1, \dots, p_k$  для функций (одной переменной) и переменных для отношений (на функциях и числах), и пусть  $a_1, \dots, a_l$  являются свободными числовыми переменными этого выражения. Пусть переменные для отношений интерпретируются, как конкретные отношения  $S_1, S_2, \dots$

Будем говорить, что отношение

$$R = \{\langle f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid F(p_1, \dots, p_k, a_1, \dots, a_l) \text{ истинно, если } p_1, \dots, a_l \text{ интерпретируются как } f_1, \dots, x_l \text{ соответственно}\}$$

определенко в логике предикатов через  $S_1, S_2, \dots$  с кванторами только по числовым переменным, а выражение  $F(p_1, \dots, a_l)$  будем называть *определением* отношения  $R$  через  $S_1, S_2, \dots$ . Заметим, что допускается гнездность функциональных переменных, например,  $(\exists b)[p(p(b)) = a]$  определяет отношение  $\{\langle f, x \rangle \mid x \in \text{Val } \lambda y [ff(y)]\}$ .

Имеет место следующий аналог теоремы V.

**Теорема XVIII.** Если  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$  определено в логике предикатов через рекурсивные отношения, с кванторами только по числовым переменным, то  $R$  является арифметическим отношением.

**Доказательство** проводится, как в теореме V<sup>1)</sup>. ■  
Следовательно, можно, как и раньше, использовать алгоритм Тарского — Куратовского.

**Пример 1.** Рассмотрим множество  $\{f \mid \text{Val } f \text{ бесконечна}\}$ . Тогда  $\text{Val } f \text{ бесконечна} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)[y > x \& y \in \text{Val } f] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)[y > x \& \exists z[f(z) = y]] \Leftrightarrow \forall \exists \Leftrightarrow \exists, \\ &\text{следовательно, это множество функций входит в } \Pi_2^{(fn)}. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Рассмотрим множество  $\{f \mid f \text{ — общерекурсивная функция}\}$ . Имеем: всюду определенная функция  $f$  рекурсивна  $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\exists z)[f = \varphi_z] \Leftrightarrow (\exists z)(\forall x)[f(x) = \varphi_z(x)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists z)(\forall x)(\exists y)(\exists w)[\varphi_z(x) = y \text{ за } w \text{ шагов} \& y = f(x)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \forall \exists, \text{ следовательно, это множество функций входит в } \Sigma_3^{(fn)}. \end{aligned}$$

### Представимость

**Теорема XIX.** Пусть  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$ .

(a) Отношение  $R$  арифметическое  $\Leftrightarrow$  отношение  $R$  определимо в логике предикатов через рекурсивные отношения на числах и отношение  $\{\langle f, x, y \rangle \mid f(x) = y\}$  с кванторами только по числовым переменным.

(b) Расширим элементарную арифметику, введя унарные операторные символы (т. е. функциональные переменные)  $p_1, p_2, \dots$ . Тогда отношение  $R$  арифметическое  $\Leftrightarrow$  отношение  $R$  определимо в расширенной таким образом элементарной арифметике.

**Доказательство.** (a)  $\Leftarrow$ . Очевидно в силу теоремы XVIII.

$\Rightarrow$ . Доказательство проводится, как в теореме VI; заметим, что

$$D_u \subset \tau(f) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)[\langle x, y \rangle \in D_u \Rightarrow f(x) = y].$$

(b)  $\Leftarrow$ . В силу теоремы XVIII. Хотя и возможна гнездность операторных символов, но любое такое гнездо определяет рекурсивное отношение.

$\Rightarrow$ . Согласно (a) и теореме 14-VI. ■

### Топология

В дальнейшем для простоты мы ограничимся отношениями с одной функциональной переменной и без числовых переменных, т. е. множествами функций. Иногда (но не всегда) мы такие мно-

<sup>1)</sup> В силу теоремы XIV обращение теоремы XVIII очевидно.

жества будем называть *классами* функций. Для их обозначения будем использовать буквы  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ . Прежде чем переходить к теореме об иерархии, мы введем топологию на  $\mathcal{F}$ , аналогичную топологии на  $\mathcal{N}$ . Как мы увидим, топологические пространства  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{N}$  сильно отличаются.

**Определение.** Определим в  $\mathcal{F}$  бэрсовскую метрику. Положим

$$d(f, g) = \begin{cases} 0, & \text{если } f = g; \\ \frac{1}{\mu x [f(x) \neq g(x)] + 1}, & \text{если } f \neq g. \end{cases}$$

Функция  $d$  является метрикой, а пространство  $\mathcal{F}$  (с такой метрикой) является полным метрическим пространством (упр. 15-11). Следовательно, можно применять теорему 13-XII и можно пользоваться доказательствами, использующими понятие категории. Пространство  $\mathcal{F}$  принято называть *бэрзовским пространством*.

Ту же самую топологию на  $\mathcal{F}$  можно получить, если взять дискретную топологию на  $N$  и, учитывая, что  $\mathcal{F} = N^N$ , рассмотреть произведение топологий на  $N^N = N \times N \times \dots$  (упр. 15-12).

Элементы пространства  $\mathcal{F}$  можно отождествить с иррациональными числами, лежащими между 0 и 1, с помощью бесконечных непрерывных цепных дробей (упр. 15-13). Топология  $\mathcal{F}$  как бэрзовского пространства будет изоморфна топологии на иррациональных числах, индуцированной обычной топологией на действительных числах. (Разумеется, в метрике действительных чисел пространство  $\mathcal{F}$  не полно<sup>1)</sup>.) Для наглядности бэрзовское пространство можно рассматривать как пространство всех бесконечных ветвей в функциональном дереве (см. ниже и упр. 9-42), при этом топология порождается следующей базой: базисные окрестности — это классы вида  $\{f \mid \tilde{f} \subset f\}$ , где  $\tilde{f}$  — конечный начальный сегмент.

**Определение.** Класс функций  $\mathcal{A}$  назовем *базисной окрестностью*, если  $\mathcal{A} = \{f \mid \tilde{f} \subset f\}$  для некоторого конечного начального сегмента  $\tilde{f}$  (упр. 15-14).

Пространство  $\mathcal{F}$  не компактно (упр. 15-15). С этим фактом связаны некоторые важные различия между арифметической иерархией классов функций и арифметической иерархией классов множеств.

### Открыто-замкнутые классы

Пусть  $\mathcal{U}^*$  — функциональное дерево, определенное в упр. 9-42. Определим поддерево и ветвь, как в упр. 9-42. Каждую ветвь дерева  $\mathcal{U}^*$  можно отождествить с элементом из  $\mathcal{F}$  (и наоборот).

<sup>1)</sup> Как известно, пространство может быть полным в одной метрике и не полным в другой метрике, хотя обе метрики дают одну и ту же топологию.

*Подветвь* — это начальный сегмент ветви. Каждая вершина дерева  $\mathcal{J}^*$  определяет конечную подветвь дерева  $\mathcal{J}^*$  (и наоборот), каждую конечную подветвь дерева  $\mathcal{J}^*$  можно отождествить с конечным начальным сегментом всюду определенной функции (и наоборот). Таким образом, каждая конечная подветвь дерева  $\mathcal{J}^*$  определяет базисную окрестность в  $\mathcal{F}$  (и наоборот), при этом окрестность, определяемая данной конечной подветвью, состоит из тех функций, которые соответствуют ветвям дерева  $\mathcal{J}^*$ , начинаяющимся данной подветвью.

**Определение.** Поддерево  $\mathcal{J}$  дерева  $\mathcal{J}^*$  назовем деревом с конечными путями, если любая ветвь дерева  $\mathcal{J}$  конечна.

**Теорема XX.** Класс  $\mathcal{A} (\subset \mathcal{F})$  открыто-замкнут  $\Leftrightarrow$  существует такое дерево с конечными путями  $\mathcal{J}$ , что  $\mathcal{A}$  есть объединение всех окрестностей, определяемых ветвями дерева  $\mathcal{J}$ .

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Для любой непустой конечной подветви  $f$  дерева  $\mathcal{J}^*$  символом  $f^-$  обозначим конечную подветвь, получаемую из  $f$  отбрасыванием последнего элемента ветви  $f$ . Пусть дано дерево с конечными путями  $\mathcal{J}$ , и пусть  $\mathcal{A}$  — объединение всех окрестностей, определяемых ветвями дерева  $\mathcal{J}$ . Рассмотрим совокупность всех таких конечных подветвей  $f$  дерева  $\mathcal{J}^*$ , что (i) подветвь  $f$  не является подветвью дерева  $\mathcal{J}$ ; (ii) если существует  $f^-$  (т. е. если  $f \neq \emptyset$ ), то  $f^-$  — подветвь дерева  $\mathcal{J}$ , но  $f^-$  не является ветвью дерева  $\mathcal{J}$ . Пусть  $\mathcal{J}'$  — объединение подветвей из этой совокупности. Тогда  $\mathcal{J}'$  — дерево с конечными путями, так как всякая бесконечная ветвь дерева  $\mathcal{J}'$  была бы ветвью дерева  $\mathcal{J}$ , что противоречило бы условию, что  $\mathcal{J}$  — дерево с конечными путями. По определению никакая ветвь дерева  $\mathcal{J}'$  не начинает ветви дерева  $\mathcal{J}$  и никакая ветвь дерева  $\mathcal{J}$  не начинает ветви дерева  $\mathcal{J}'$ . Кроме того, всякая ветвь дерева  $\mathcal{J}^*$  начинается или ветвью дерева  $\mathcal{J}$ , или ветвью дерева  $\mathcal{J}'$ . Следовательно,  $\mathcal{A}$  — объединение окрестностей, определяемых ветвями дерева  $\mathcal{J}$ , а  $\bar{\mathcal{A}}$  — объединение окрестностей, определяемых ветвями дерева  $\mathcal{J}'$ . Итак,  $\mathcal{A}$  — открыто-замкнутый класс<sup>1)</sup>.

$\Rightarrow$ . Пусть  $\mathcal{A}$  — открыто-замкнутый класс. Каждой функции  $f$  в  $\mathcal{F}$  сопоставим самый короткий конечный начальный сегмент  $\tilde{f}$  функции  $f$ , такой, что или  $\{f \mid \tilde{f} \subset f\} \subset \mathcal{A}$ , или  $\{f \mid \tilde{f} \subset f\} \subset \bar{\mathcal{A}}$ . Такой сегмент  $\tilde{f}$  всегда существует, так как и  $\bar{\mathcal{A}}$ , и  $\mathcal{A}$  открыты. Конечные подветви дерева  $\mathcal{J}^*$ , отождествляемые с этими сегмен-

<sup>1)</sup> Заметим, что это доказательство проходит для частных случаев  $\mathcal{J} = \{\emptyset\}$  (дерево  $\mathcal{J}$  состоит из пустого кортежа) и  $\mathcal{J} = \emptyset$  (дерево  $\mathcal{J}$  пусто). Если  $\mathcal{J} = \{\emptyset\}$ , то  $\mathcal{J}' = \emptyset$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{F}$  и  $\bar{\mathcal{A}} = \emptyset$ . Если  $\mathcal{J} = \emptyset$ , то  $\mathcal{J}' = \{\emptyset\}$ ,  $\mathcal{A} = \emptyset$  и  $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{F}$ .

тами, образуют дерево с конечными путями (так как для каждой ветви  $f$  дерева  $\mathcal{J}^*$  выбирается конечная подветвь  $\tilde{f}$ ). Все ветви  $\tilde{f}$ , для которых  $\{f \mid \tilde{f} \subset f\} \subset \mathcal{A}$ , определяют поддерево этого дерева с конечными путями. Следовательно, это поддерево будет деревом с конечными путями и  $\mathcal{A}$  — объединение всех окрестностей, определяемых ветвями этого поддерева. ■

**Следствие XX.** Существует  $2^{\aleph_0}$  открыто-замкнутых классов.

**Доказательство.** Любое множество чисел определяет дерево с конечными путями, длина каждой ветви которого равна 1. Два различных таких дерева определяют различные открыто-замкнутые классы. Так как существует  $2^{\aleph_0}$  множеств чисел, то имеется по крайней мере  $2^{\aleph_0}$  открыто-замкнутых классов.

Существует  $\aleph_0$  базисных окрестностей, всякий открытый класс — объединение базисных окрестностей. Следовательно, имеется самое большое  $2^{\aleph_0}$  открыто-замкнутых классов функций. ■

### $\Sigma_0^{(fn)}$ -классы

Так как в  $\Sigma_0^{(fn)}$  содержится лишь счетное количество классов, то теорема VII для  $\Sigma_0^{(fn)}$  не верна. Однако имеется следующее необходимое условие.

**Теорема XXI.** Класс  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(fn)} \Rightarrow$  класс  $\mathcal{A}$  открыто-замкнут (в топологии бэрровского пространства на  $\mathcal{F}$ ).

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(fn)}$ . Пусть  $\psi$  — характеристическая функция (одной функциональной переменной) класса  $\mathcal{A}$ . По определению  $\psi$  общерекурсивна. Поэтому  $\psi = \lambda f[\varphi_z^{(f)}(0)]$  для некоторого  $z$ . Рассмотрим совокупность всех конечных начальных сегментов  $\tilde{f}$ , таких, что (i)  $\varphi_z^{(\tilde{f})}(0)$  сходится, причем в этом вычислении задаются вопросы о  $t(\tilde{f})$ , включающие аргументы только из области определения  $\tilde{f}$ , и (ii)  $\varphi_z^{(\tilde{f})}(0)$  не сходится, когда задаются вопросы о  $t(\tilde{f})$ , содержащие аргументы только из области определения какого-нибудь более короткого начального подсегмента сегмента  $\tilde{f}$ ; т. е. (в обозначениях гл. 13)  $\varphi_z^{(\tilde{f})}(0)$  сходится, а  $\varphi_z^{(\tilde{g})}(0)$  не сходится ни для какого собственного начального подсегмента  $\tilde{g}$  сегмента  $\tilde{f}$ . В силу рекурсивности множества  $\mathcal{A}$  всякая функция  $f$  из  $\mathcal{F}$  содержит такой начальный сегмент. Как в доказательстве теоремы XX, эти сегменты определяют дерево с конечными путями и  $\mathcal{A}$  — объединение окрестностей, определяемых ветвями некоторого поддерева этого дерева с конечными путями.

Следовательно, это поддерево является деревом с конечными путями и  $\mathcal{A}$  — открыто-замкнутый класс. ■

(Таким образом, рекурсивным классам сопоставляется некоторое счетное подсемейство семейства всех деревьев с конечными путями. В гл. 16 мы рассмотрим это „рекурсивное“ подсемейство и некоторые другие, связанные с ним, подсемейства.)

**Следствие XXI.** Пусть  $\mathcal{A}$  — область определения частично-рекурсивной функции одной функциональной переменной. Тогда  $\mathcal{A}$  — открытый класс.

**Доказательство.** Класс  $\mathcal{A}$  — объединение окрестностей, определяемых такими начальными сегментами  $\tilde{f}$ , что  $\varphi_z^{\tilde{f}}(0)$  сходится. ■

**Пример.** Пусть  $\mathcal{A} = \{f \mid 0 \in \text{Val } f\}$ . Как уже отмечалось,  $\mathcal{A} \in \Sigma_1^{(fn)}$ . Для любого начального сегмента  $\tilde{f}$  существует такая функция  $f \in \mathcal{F}$ , что  $\tilde{f} \subset f$  и что  $0 \in \text{Val } f$ ; следовательно,  $\mathcal{A}$  не содержит никакой базисной окрестности и  $\mathcal{A}$  не открыто. Поэтому  $\mathcal{A} \in (\Sigma_1^{(fn)} - \Sigma_0^{(fn)})$ .

### $\Sigma_1^{(fn)}$ -классы и $\Pi_1^{(fn)}$ -классы

Теорема VIII сохраняется и для классов функций.

**Теорема XXII.** (a) Класс  $\mathcal{A} \in \Sigma_1^{(fn)} \Rightarrow$  класс  $\mathcal{A}$  открыт.  
 (b) Класс  $\mathcal{A} \in \Pi_1^{(fn)} \Rightarrow$  класс  $\mathcal{A}$  замкнут.

**Доказательство** следует из теоремы XVI и следствия XXI. ■

**Следствие XXII.**  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(fn)} \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \Pi_0^{(fn)} \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \Sigma_1^{(fn)} \cap \Pi_1^{(fn)}$ .

**Доказательство.** Из теоремы XV следует, что  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(fn)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Pi_0^{(fn)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Sigma_1^{(fn)} \cap \Pi_1^{(fn)}$ . Пусть  $\mathcal{A} \in \Sigma_1^{(fn)} \cap \Pi_1^{(fn)}$ . Тогда  $\mathcal{A} = \text{Arg } \psi_1$  и  $\bar{\mathcal{A}} = \text{Arg } \psi_2$  для некоторых частично-рекурсивных функций (одной функциональной переменной)  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . С помощью следующих инструкций определим частично-рекурсивную функцию (одной функциональной переменной)  $\psi$ . Пусть дана функция  $f$  (дан оракул для  $f$ ), начинайте вычисления  $\psi_1(f)$  и  $\psi_2(f)$ ; если  $\psi_1(f)$  сходится раньше, чем  $\psi_2(f)$ , то выдайте 1, если  $\psi_2(f)$  сходится раньше, чем  $\psi_1(f)$ , то выдайте 0. Функция  $\psi$  является общерекурсивной функцией одной функциональной переменной и является, кроме того, характеристической функцией класса  $\mathcal{A}$ . Следовательно,  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(fn)}$ . ■

### Классическая иерархия Бореля

Для множества  $\mathcal{F}$  можно определить так же, как и для множества  $\mathcal{N}$  в § 15.1, иерархию борелевых классов.

**Определение.**  $\Sigma_0^{**} = \Pi_0^{**} = [\text{семейство всех открыто-замкнутых классов, принадлежащих множеству } \mathcal{F}]$ .

$\Sigma_{n+1}^{**} = [\text{семейство всех счетных объединений классов, принадлежащих } \Pi_n^{**}]$ .

$\Pi_{n+1}^{**} = [\text{семейство всех счетных пересечений классов, принадлежащих } \Sigma_n^{**}]$ .

**Теорема XXIII.** Каково бы ни было  $n$ ,  $[\mathcal{A} \in \Sigma_n^{(fn)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Sigma_n^{**}] \& [\mathcal{A} \in \Pi_n^{(fn)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Pi_n^{**}]$ .

**Доказательство очевидно.** ■

В частности, всякий класс из  $\Sigma_2^{(fn)}$  является множеством типа  $F_\sigma$  и всякий класс из  $\Pi_2^{(fn)}$  является множеством типа  $G_\delta$ . (Множества типа  $F_\sigma$  и  $G_\delta$  определяются так же, как и для иерархии в множестве  $\mathcal{N}$ .) (Имея в виду упр. 15-13, иерархию Бореля в множестве  $\mathcal{F}$  (по конечным уровням) иногда называют *конечной иерархией борелевских множеств ирациональных чисел*.)

**Пример.** Пусть  $\mathcal{A} = \{f \mid \text{множество } f^{-1}(0) \text{ конечно}\}$ . Объединяя алгоритм Тарского — Куратовского с доказательствами, использующими понятие категории, можно показать, что  $\mathcal{A} \in (\Sigma_2^{(fn)} - \Pi_2^{(fn)})$ . (Доказательство проводится так же, как для соответствующего примера, приведенного после теоремы IX в § 15.1. См. упр. 15-17.)

### Теорема об иерархии

Теорема об иерархии для классов функций получается легче (из теоремы 14-VII), чем соответствующая теорема об иерархии для классов множеств.

**Теорема XXIV.** Для любого  $n > 0$  можно указать такой класс  $\mathcal{A}$ , что  $\mathcal{A} \in (\Sigma_n^{(fn)} - \Pi_n^{(fn)})$  (и что, следовательно,  $\bar{\mathcal{A}} \in (\Pi_n^{(fn)} - \Sigma_n^{(fn)})$ ).

**Доказательство.** Для любого множества  $B$  положим  $\mathcal{A}_B = \{f \mid f(0) \in B\}$ . Покажем, что для любого  $n$  имеет место следующее: (i)  $\mathcal{A}_B \in \Sigma_n^{(fn)} \Leftrightarrow B \in \Sigma_n$ ; и (ii)  $\mathcal{A}_B \in \Pi_n^{(fn)} \Leftrightarrow B \in \Pi_n$ .

Левая часть равенства (i) очевидна. Правая часть равенства (i) доказывается следующим образом. Пусть  $B = \{x \mid (Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) R(x, x_1, \dots, x_n)\}$ , где  $R \subset N^{n+1}$  — рекурсивное отношение. Тогда  $\mathcal{A}_B = \{f \mid (Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) R(f(0), x_1, \dots, x_n)\}$ . Очевидно, что отношение  $\{(f, x_1, \dots, x_n) \mid R(f(0), x_1, \dots, x_n)\}$  — рекурсивное отношение

454 ГЛ. 15. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ (ЧАСТЬ 2).

в  $\mathcal{F} \times N^n$ . Следовательно,  $B \in \Sigma_n \Rightarrow \mathcal{A}_B \in \Sigma_n^{(fn)}$  и  $B \in \Pi_n \Rightarrow \mathcal{A}_B \in \Pi_n^{(fn)}$ .

$\Rightarrow$ . Пусть  $\mathcal{A}_B = \{f \mid (\text{Q}_1x_1) \dots (\text{Q}_n x_n) S(f, x_1, \dots, x_n)\}$ , где  $S$  — рекурсивное отношение в  $\mathcal{F} \times N^n$ . Определим  $R = \{(x, x_1, \dots, x_n) \mid S(\lambda y[x], x_1, \dots, x_n)\}$ . Очевидно, что  $R$  — рекурсивное отношение в  $N^{n+1}$  и что

$$B = \{x \mid (\text{Q}_1x_1) \dots (\text{Q}_n x_n) R(x, x_1, \dots, x_n)\}.$$

Следовательно,  $\mathcal{A}_B \in \Sigma_n^{(fn)} \Rightarrow B \in \Sigma_n$  и  $\mathcal{A}_B \in \Pi_n^{(fn)} \Rightarrow B \in \Pi_n$ .

Остается только применить теорему 14-VIII. ■

Заметим, что определенные в этом доказательстве классы  $\mathcal{A}_B$  открыто-замкнуты. Таким образом, на всех уровнях арифметической иерархии имеются классы, находящиеся на уровне  $\Sigma_0^{**}$  в классической иерархии Бореля.

Что можно сказать о соотношении иерархии множеств функций и иерархии множеств множеств? В частности, какие связи имеются между классификацией классов  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  и классификацией соответствующих классов  $\tau(\mathcal{A}) \subset \mathcal{N}$ ?

Теорема XXV. Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ .

Для любого  $n$  имеем  $\tau(\mathcal{A}) \in \Sigma_n^{(s)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Sigma_n^{(fn)}$ .

Для любого  $n$  имеем  $\tau(\mathcal{A}) \in \Pi_n^{(s)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Pi_n^{(fn)}$ .

Если  $n \geq 3$ , то  $\mathcal{A} \in \Sigma_n^{(fn)} \Rightarrow \tau(\mathcal{A}) \in \Sigma_n^{(s)}$ .

Если  $n \geq 2$ , то  $\mathcal{A} \in \Pi_n^{(fn)} \Rightarrow \tau(\mathcal{A}) \in \Pi_n^{(s)}$ .

Доказательство. Пусть  $\tau(\mathcal{A}) = \{X \mid (\text{Q}_1x_1) \dots (\text{Q}_n x_n) R(X, x_1, \dots, x_n)\}$ , где  $R$  — рекурсивное отношение в  $\mathcal{N} \times N^n$ . Положим  $S = \{(f, x_1, \dots, x_n) \mid R(\tau(f), x_1, \dots, x_n)\}$ . Тогда  $S \subset \mathcal{F} \times N^n$  — рекурсивное отношение и

$$\mathcal{A} = \{f \mid (\text{Q}_1x_1) \dots (\text{Q}_n x_n) S(f, x_1, \dots, x_n)\}.$$

Следовательно,  $\tau(\mathcal{A}) \in \Sigma_n^{(s)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Sigma_n^{(fn)}$  и  $\tau(\mathcal{A}) \in \Pi_n^{(s)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Pi_n^{(fn)}$ .

Наоборот, пусть  $\mathcal{A} \in \Sigma_n^{(fn)}$  и  $n \geq 3$ . Тогда для некоторого  $z$

$$\mathcal{A} = \{f \mid (\exists x_0)(\forall x_1) \dots T_{1, n-1}(z, f, x_0, \dots, x_{n-1})\}.$$

По определению предиката  $T'$  имеем  $\mathcal{A} = \{f \mid (\exists x_0)(\forall x_1) \dots T_{1, n-1}(z, \tau(f), x_0, \dots, x_{n-1})\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{A}) &= \{X \mid (\forall x)(\forall y)(\forall u)[\langle x, y \rangle \in X \& \langle x, u \rangle \in X \Rightarrow y = u] \& \\ &\quad \& (\forall x)(\exists y)[\langle x, y \rangle \in X] \& (\exists x_0)(\forall x_1) \dots \\ &\quad \dots T_{1, n-1}(z, X, x_0, \dots, x_{n-1})\}. \end{aligned}$$

Применение алгоритма Тарского — Куратовского дает  $\text{EA} \& \text{EA} \& \text{EA} \dots \Leftrightarrow \text{EA} \& \text{EA} \& \text{EA} \dots$ . Следовательно,  $\tau(\mathcal{A}) \in \Sigma_n^{(s)}$ .

Аналогично, если  $\mathcal{A} \in \Pi_n^{(fn)}$  и  $n \geq 2$ , то получаем  $[\text{A} \& \& \text{A} \& \text{A} \& \text{A} \dots] \Leftrightarrow \text{A} \& \text{A} \& \text{A} \dots$  и, следовательно,  $\tau(\mathcal{A}) \in \Pi_n^{(s)}$ . ■

Следствие XXV. Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ . Класс  $\mathcal{A}$  является арифметическим  $\Leftrightarrow$  класс  $\tau(\mathcal{A})$  как подкласс класса  $\mathcal{N}$  является арифметическим.

Доказательство очевидно. ■

Можно также рассмотреть соотношение классификации классов  $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$  и классификации соответствующих классов

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \{f \mid (\exists X)[X \in \mathcal{A} \& f = cx]\} \subset \mathcal{F}.$$

Теорема XXVI. Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ .

Для любого  $n$   $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \in \Sigma_n^{(fn)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Sigma_n^{(s)}$ .

Для любого  $n$   $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \in \Pi_n^{(fn)} \Rightarrow \mathcal{A} \in \Pi_n^{(s)}$ .

Если  $n \geq 2$ , то  $\mathcal{A} \in \Sigma_n^{(s)} \Rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}) \in \Sigma_n^{(fn)}$ .

Если  $n \geq 1$ , то  $\mathcal{A} \in \Pi_n^{(s)} \Rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}) \in \Pi_n^{(fn)}$ .

Доказательство. Доказательство аналогично, в общих чертах, доказательству теоремы XXV (упр. 15-18). ■

Следствие XXVI. Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ . Класс  $\mathcal{A}$  является арифметическим  $\Leftrightarrow$  класс  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  как подкласс класса  $\mathcal{F}$  является арифметическим.

Доказательство очевидно. ■

### Определимость и неявная определимость

Определение. Функция  $f$  называется арифметической, если  $f$  как отношение является арифметическим отношением.

Читатель легко проверит, что для любого множества  $A$  [множество  $A$  арифметическое  $\Leftrightarrow$  функция  $c_A$  арифметическая].

Определение. Функция  $f$  явно определима в элементарной арифметике, если  $f$  как отношение определимо в элементарной арифметике в смысле § 14.4.

В силу теоремы 14-VI функция  $f$  арифметическая  $\Leftrightarrow$  функция  $f$  явно определима в элементарной арифметике. Следовательно, для любого множества  $A$  имеем: множество  $A$  арифметическое  $\Leftrightarrow$  функция  $c_A$  явно определима в элементарной арифметике. (Читатель также легко проверит следующее утверждение: функция  $f$  арифметическая  $\Leftrightarrow$  множество  $\tau(f)$  арифметическое  $\Leftrightarrow$  множество  $\tau(f)$  явно определимо в элементарной арифметике.)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция  $f$  неявно определима в элементарной арифметике, если существует такое выражение  $F(p)$  в расширенной элементарной арифметике теоремы XIX (b) со свободной функциональной переменной  $p$ , что  $F(p)$  истинно тогда и только тогда, когда  $p$  интерпретируется как  $f$ .

Согласно теореме XIX, функция  $f$  неявно определима в элементарной арифметике  $\Leftrightarrow$  класс  $\{f\}$  является арифметическим классом. Пусть  $V$  определяется как в теореме XII. По теореме XXVI класс  $\{c_V\} \in \Pi_2^{(fn)}$ . Следовательно, имеются неарифметические функции, неявно определимые в элементарной арифметике, и, в частности, характеристическая функция множества всех истинных высказываний элементарной арифметики неявно определима в элементарной арифметике.

### Определение уровней в иерархии

Методы, используемые в иерархии классов множеств, можно использовать и в иерархии классов функций. Например, доказательство, аналогичное доказательству теоремы XIII, дает, что  $\{f \mid f \text{ общерекурсивная функция}\} \in (\Sigma_3^{(fn)} - \Pi_3^{(fn)})$  (см. упр. 15-24).

### Релятивизация

Материал этого параграфа не излагался в релятивизованной форме. Релятивизация легко проводится, если ввести понятие  $A$ -рекурсивной функции  $k$  функциональных, переменных и  $l$  числовых переменных (например, функция  $\psi$  одной функциональной переменной  $A$ -рекурсивна, если  $\psi = \lambda f \psi_z^A, \tau(f)(0)$  для некоторого  $z$ ). Нормальные формы определяются с помощью предиката  $T_{m,n}^A$ , где, например,  $T_{1,n}^A = \{\langle f, z, x_0, \dots, x_n \rangle \mid T_{2,n}(z, A, \tau(f), x_0, \dots, x_n)\}$ ; определение  $T_{2,n}$  см. в § 15.1. Мы отмечали в § 15.1, что при релятивизации не изменяется самый низкий уровень в иерархии классов множеств; т. е. для любого  $A$  класс  $\Sigma_0^{(s)}$  совпадает с классом  $\Sigma_0^{(s)A}$ . Для классов функций это не так:  $\Sigma_0^{(fn)}$  может отличаться от  $\Sigma_0^{(fn)A}$  (см. упр. 15-20).

Ниже мы рассмотрим релятивизацию несколько другого типа.

### Обобщенная теорема об иерархии

Аддисон [1955] построил общую теорию для (конечной) классической иерархии Бореля в  $\mathcal{F}$  и для арифметической иерархии в  $\mathcal{F}$ . Более конкретно, пусть  $\mathcal{C}$  — произвольный класс множеств. Рассмотрим отношения  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Отношение  $R$  рекурсивно в (относительно)  $\mathcal{C}$ , если  $R$  рекурсивно относительно некоторого множества  $A$  из класса  $\mathcal{C}$ .

Таким же образом, как  $\Sigma_n^{(fn)}$ -формы и  $\Pi_n^{(fn)}$ -формы, определяются  $\Sigma_n^{(fn)}[\mathcal{C}]$ -формы и  $\Pi_n^{(fn)}[\mathcal{C}]$ -формы (с заменой в определении рекурсивных отношений на отношения, рекурсивные в  $\mathcal{C}$ ).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $\Sigma_n^{(fn)}[\mathcal{C}]$  — класс всех отношений, выразимых в  $\Sigma_n^{(fn)}[\mathcal{C}]$ -форме.

$\Pi_n^{(fn)}[\mathcal{C}]$  — класс всех отношений, выразимых в  $\Pi_n^{(fn)}[\mathcal{C}]$ -форме.

Заметим, что классы отношений  $\Sigma_n^{(fn)}[\mathcal{C}]$  и  $\Pi_n^{(fn)}[\mathcal{C}]$  могут быть несчетными. В частности, если  $\mathcal{C} = \mathcal{N}$ , то  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(fn)}[\mathcal{C}] \Leftrightarrow \mathcal{A} = \text{открыто-замкнутый класс}$  (упр. 15-21). Несмотря на эту возможную несчетность, можно доказать следующую обобщенную теорему о нормальной форме и нумерации.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

$$\begin{aligned} T_n^* = & \{\langle g, f, x_1, \dots, x_n \rangle \mid T'_{2,n-1}(g(0), \lambda x[g(x+1)], f, x_1, \dots, \\ & \dots, x_n) = \{\langle g, f, x_1, \dots, x_n \rangle \mid T_{2,n-1}(g(0), \\ & \tau(\lambda x[g(x+1)]), \tau(f), x_1, \dots, x_n)\}. \end{aligned}$$

**ТЕОРЕМА XXVII** (теорема о нормальной форме и нумерации). Для любого  $n > 0$ : класс  $\mathcal{A} \in \Sigma_n^{(fn)}[\mathcal{C}] \Leftrightarrow$  для некоторого множества  $A$  из  $\mathcal{C}$  и некоторой всюду определенной функции  $g$ , рекурсивной относительно  $A$ , имеем  $\mathcal{A} = \{f \mid (\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n^*(g, f, x_1, \dots, x_n)\}$  (причем перед  $T_n^*$  стоит знак отрицания, если  $n$  четно). Аналогичное предложение имеет место для  $\Pi_n^{(fn)}[\mathcal{C}]$ .

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Очевидно, так как [функция  $g$  рекурсивна относительно  $A$  и  $A \in \mathcal{C}$ ] влечет за собой, что отношение  $\{\langle f, x_1, \dots, x_n \rangle \mid T_n^*(g, f, x_1, \dots, x_n)\}$  рекурсивно относительно  $\mathcal{C}$ .

$\Rightarrow$ . Пусть  $\mathcal{A} \in \Sigma_n^{(fn)}[\mathcal{C}]$ .

Рассмотрим случай (i) число  $n$  нечетно. Тогда для некоторого множества  $A$  из класса  $\mathcal{C}$

$$\mathcal{A} = \{f \mid (\exists x_1)(\forall x_2) \dots (\exists x_n)R(f, x_1, \dots, x_n)\},$$

при этом отношение  $R$  рекурсивно относительно  $A$ . В силу релятивизованного варианта теоремы XVI отношение  $\{\langle f, x_1, \dots, x_{n-1} \mid (\exists x_n)R(f, x_1, \dots, x_n)\}$  является областью определения функции  $\psi$  одной функциональной переменной и  $n-1$  числовых переменных, причем  $\psi = \lambda f x_1 \dots x_{n-1} [\varphi_z^A, \tau(f)(x_1, \dots, x_{n-1})]$  для некоторого  $z$ . Следовательно,

$$(\exists x_n)R(f, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow (\exists x_n)T_{2,n-1}(z, A, \tau(f), x_1, \dots, x_n).$$

Выберем  $z'$  так, чтобы  $T_{2, n-1}(z, A, \tau(f), x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow T_{2, n-1}(z', \tau(c_A), \tau(f), x_1, \dots, x_n)$ . Тогда  $\mathcal{A} = \{f \mid (\exists x_1)(\forall x_2) \dots (\exists x_n) T_n^*(g, f, x_1, \dots, x_n)\}$ . Существует такая функция  $g$ , что  $g(0) = z'$  и что  $\lambda x[g(x + 1)] = c_A$ . Функция  $g$  рекурсивна относительно  $A$  и

$$\mathcal{A} = \{f \mid (\exists x_1)(\forall x_2) \dots (\exists x_n) T_n^*(g, f, x_1, \dots, x_n)\}.$$

Рассмотрим случай (ii) число  $n$  четно. Достаточно для  $\bar{\mathcal{A}}$  провести построение, как в случае (i), и затем взять отрицание.

Аналогично проводится доказательство для  $\Pi_n^{(fn)}$  [C]. ■

Таким образом, функции, рекурсивные относительно множеств из  $\mathcal{C}$ , можно рассматривать как гёделевы номера для любого уровня в  $[\mathcal{C}]$ -арифметической иерархии. В частности, когда  $g$  пробегает класс общерекурсивных функций, то получим для данного  $n$  все классы из  $\Sigma_n^{(fn)}$  и все классы из  $\Pi_n^{(fn)}$ .

С помощью простой диагонализации получим обобщенную теорему об иерархии.

**Теорема XXVIII.** Для любого  $n > 0$  существует такой класс  $\mathcal{A}$ , что для любого класса  $\mathcal{C}$

$$\mathcal{A} \in (\Sigma_n^{(fn)} [\mathcal{C}] - \Pi_n^{(fn)} [\mathcal{C}]).$$

**Доказательство.** Возьмем  $\mathcal{A} = \{f \mid (\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n^*(f, f, x_1, \dots, x_n)\}$ . Тогда  $\mathcal{A} \in \Sigma_n^{(fn)} \subset \Sigma_n^{(fn)} [\mathcal{C}]$ . Допустим, что  $\mathcal{A} \in \Pi_n^{(fn)} [\mathcal{C}]$ . Тогда

$$\mathcal{A} = \{f \mid (\forall x_1)(\exists x_2) \dots T_n^*(g, f, x_1, \dots, x_n)\}$$

для некоторой функции  $g$ , рекурсивной относительно  $\mathcal{C}$ . Следовательно,

$$\bar{\mathcal{A}} = \{f \mid (\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n^*(g, f, x_1, \dots, x_n)\}.$$

Имеем  $g \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (\exists x_1)(\forall x_2) \dots T_n^*(g, g, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow g \in \bar{\mathcal{A}}$ . Получили противоречие. ■

Мы показали в теореме XXIV, что на любом уровне арифметической иерархии есть открыто-замкнутые классы, т. е. классы из уровня  $\Sigma_0^{**}$  в классической иерархии Бореля. Теорема XXVIII показывает, что, с другой стороны, на всех уровнях имеются классы, находящиеся на одинаковых уровнях в арифметической и классической иерархиях.

### § 15.3. ФУНКЦИОНАЛЫ

Рассмотрим функции и всюду определенные функции одного (числового) аргумента.

**Определение.**  $\mathcal{F}$  — класс всех функций.

$\mathcal{FR}$  — класс всех частичнорекурсивных функций.

$\mathcal{F}$  — класс всех всюду определенных функций.

$\mathcal{R}$  — класс всех общерекурсивных функций.

Имеем  $\mathcal{R} \subset \mathcal{FR} \subset \mathcal{F}$  и  $\mathcal{R} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$ .

Сначала мы бегло рассмотрим понятие функционала на  $\mathcal{F}$ , затем подробно рассмотрим более простое понятие функционала на  $\mathcal{F}$ .

#### Функционалы на $\mathcal{F}$

**Определение.** Функционал на  $\mathcal{F}$  — это однозначное подмножество множества  $\mathcal{F} \times (N \cup \{\omega\})$ . Для обозначения функционалов будут использоваться буквы  $F, G, \dots$ . Если  $x \in N$  и  $\langle \varphi, x \rangle \in F$ , то говорят, что  $F$  строго определен на функции  $\varphi$  и что  $F(\varphi) = x$ . Если  $\langle \varphi, \omega \rangle \in F$ , то говорят, что  $F$  слабо определен на функции  $\varphi$  и что  $F(\varphi)$  расходится. Если  $\langle \varphi, \omega \rangle \notin F$  и  $(\forall x)[\langle \varphi, x \rangle \notin F]$ , то говорят, что  $F$  абсолютно не определен на функции  $\varphi$  и что  $F(\varphi)$  абсолютно не определено. Назовем  $F^{-1}(N \cup \{\omega\})$  областью слабого определения функционала  $F$ , назовем  $F^{-1}(N)$  областью строгого определения функционала  $F$ .

Всякий оператор пересчета  $\Phi$  следующим образом определяет функционал  $F$  на  $\mathcal{F}$ . Область слабого определения функционала  $F$  — это множество  $\{\varphi \mid \text{множество } \Phi(\tau(\varphi)) \text{ не пусто}\}$ . Область полного определения функционала  $F$  — это множество  $\{\varphi \mid \text{множество } \Phi(\tau(\varphi)) \text{ состоит в точности из одного элемента}\}$ . Для функции  $\varphi$  из области строгого определения функционала  $F$  в качестве  $F(\varphi)$  выступает единственный элемент множества  $\Phi(\tau(\varphi))$ .

**Определение.** Если функционал  $F$  определяется (как описано выше) оператором пересчета, то  $F$  называется частичнорекурсивным функционалом на  $\mathcal{F}$ .

**Определение.** Пусть  $F$  — частичнорекурсивный функционал на  $\mathcal{F}$ .

Функционал  $F$  называется рекурсивным функционалом на  $\mathcal{F}$ , если область слабого определения функционала  $F$  совпадает с  $\mathcal{F}$  (это равносильно тому, что  $\mathcal{F}$  содержится в области слабого определения функционала  $F$ ; см. теорему 9-XXII и упражнение 15-26).

Функционал  $F$  называется *общерекурсивным функционалом на  $\mathcal{F}$* , если в области полного определения функционала  $F$  содержится класс  $\mathcal{F}$ . Таким образом, общерекурсивный функционал на  $\mathcal{F}$  является (в силу упр. 15-26) рекурсивным функционалом на  $\mathcal{FR}$ .

Очевидна связь (и сходство) определенных выше понятий с понятиями частичнорекурсивного оператора, рекурсивного оператора и общерекурсивного оператора, введенными в гл. 9. В частности, можно очевидным образом обобщить понятие частичнорекурсивного функционала на  $\mathcal{F}$  на случай функционалов на  $\mathcal{F} \times N$ . Между частичнорекурсивными функционалами такого типа и частичнорекурсивными операторами, определенными в гл. 9, устанавливается естественное взаимно однозначное соответствие. Всякому функционалу  $F$  такого типа соответствует частичнорекурсивный оператор  $\Phi(\varphi) = \lambda x[F(\varphi, x)]$ , если считать, что функция  $\Phi(\varphi)$  не определена на числе  $x$ , когда  $F(\varphi, x) = \omega$ , и что  $\Phi$  не определен (как оператор) на функции  $\varphi$ , когда  $(\exists x)[\langle \varphi, x \rangle \text{ не принадлежит области слабой определенности функционала } F]$ . Наоборот, всякому частичнорекурсивному оператору  $\Phi$  соответствует частичнорекурсивный функционал  $F(\varphi, x) = \Phi(\varphi)(x)$ , если считать, что  $F(\varphi, x) = \omega$ , когда оператор  $\Phi$  определен на функции  $\varphi$ , но функция  $\Phi(\varphi)$  не определена на числе  $x$ . Заметим, что при таком естественном соответствии устанавливаются взаимно однозначные соответствия между рекурсивными функционалами и рекурсивными операторами и между общерекурсивными функционалами и общерекурсивными операторами.

### Функционалы на $\mathcal{FR}$

Рекурсивный функционал на  $\mathcal{F}$  можно рассматривать как функционал на  $\mathcal{FR}$ , такое ограничение на  $\mathcal{FR}$  функционала на  $\mathcal{F}$  можно определить некоторой частичнорекурсивной функцией на гёделевых номерах, и наоборот. Это составляет содержание следующей теоремы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Отображение  $F$  класса  $\mathcal{FR}$  в множество  $N \cup \{\omega\}$  называется *эффективной операцией* на классе  $\mathcal{FR}$ , если существует такая частичнорекурсивная функция  $\psi$ , что

- (i)  $F(\varphi_x) = \psi(x)$ , если  $\psi(x)$  сходится,
- и
- (ii)  $F(\varphi_x) = \omega$ , если  $\psi(x)$  расходится.

**Теорема XXIX** (Майхилл и Шепердсон). (a) *Всякий рекурсивный функционал на  $\mathcal{F}$  определяет эффективную операцию на  $\mathcal{FR}$ .*

(b) *Всякая эффективная операция на  $\mathcal{FR}$  является ограничением на  $\mathcal{FR}$  некоторого рекурсивного функционала на  $\mathcal{F}$ .*

**Доказательство.** (a) Пусть  $F$  — рекурсивный функционал на  $\mathcal{F}$ . Функционал  $F$  определяется некоторым оператором пересчета  $\Phi$ . Положим:  $\psi(x)$  равно единственному элементу множества  $\Phi(\tau(\varphi_x))$ , если множество  $\Phi(\tau(\varphi_x))$  не пусто, и  $\psi(x)$  не определено в противном случае. Так как можно равномерно по  $x$  перечислять множество  $\Phi(\tau(\varphi_x))$ , то функция  $\psi$  частичнорекурсивна. Функция  $\psi$  определяет требуемую эффективную операцию на  $\mathcal{FR}$ .

(b) Возьмем такую строго возрастающую общерекурсивную функцию  $f$ , что для любого  $u$  если множество  $D_u$  однозначно, то  $\Phi_{f(u)} = \tau^{-1}(D_u)$ . Положим

$$B = \{y \mid (\exists u)[D_u \text{ — однозначное множество и } y = f(u)]\}.$$

Рекурсивное множество  $B$  содержит по одному гёделеву номеру любой конечной функции. Возьмем такую общерекурсивную функцию  $g$ , что для любого  $u$  выполняется равенство  $gf(u) = u$ . Такая функция  $g$  по любому гёделеву номеру из множества  $B$  выдает соответствующий канонический индекс.

Пусть функция  $\psi$  определяет эффективную операцию на  $\mathcal{FR}$ . Определим следующим образом оператор  $\Phi$ :

$$\Phi(A) = \{x \mid (\exists y)[y \in B \ \& \ D_{g(y)}(=\tau(\varphi_y)) \subset A \ \& \ x = \psi(y)]\}.$$

Очевидно, что  $\Phi$  — оператор пересчета. Он определяет некоторый частичнорекурсивный функционал  $F$  на  $\mathcal{F}$ . Покажем, что (i) функционал  $F$  рекурсивен и (ii) на классе  $\mathcal{FR}$  функционал  $F$  совпадает с эффективной операцией, определенной функцией  $\psi$ .

Чтобы доказать (i), предположим, что функционал  $F$  не рекурсивен. Тогда существует такая функция  $\varphi$ , что в множестве  $\Phi(\tau(\varphi))$  имеется по крайней мере два различных элемента. Но тогда существуют такие числа  $y_1, y_2 \in B$ , что  $\varphi_{y_1} \subset \varphi$ ,  $\varphi_{y_2} \subset \varphi$ ,  $\psi(y_1)$  и  $\psi(y_2)$  сходятся и что  $\psi(y_1) \neq \psi(y_2)$ . Это дает решение проблемы остановки (упр. 15-27).

Чтобы доказать (ii), предположим, что функционал  $F$  на функции  $\varphi_x$  отличается от эффективной операции, определенной функцией  $\psi$ . Это может быть только тогда, когда или  $F(\varphi_x) \neq \omega$  и  $\psi(x)$  расходится, или  $F(\varphi_x) = \omega$  и  $\psi(x)$  сходится. Каждый из этих случаев ведет к разрешимости проблемы остановки (упр. 15-27; доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 14-XIV). ■

### Функционалы на $\mathcal{F}$

Рассмотрим отображения класса всюду определенных функций в множество натуральных чисел. При таком ограничении можно ввести понятия рекурсивного функционала и общерекурсивного функционала более естественным (но эквивалентным) способом. Сначала мы докажем теорему, указывающую на соответствие

между рекурсивными функционалами на  $\mathcal{F}$  и частично-рекурсивными функциями одной функциональной переменной (на  $\mathcal{F}$ ), введенными в § 15.2.

**Теорема XXX.** Пусть  $F$  — рекурсивный функционал на  $\mathcal{F}$ . Для всякой функции  $f \in \mathcal{F}$  положим:  $\psi(f) = F(f)$ , если  $F(f) \in N$ , и  $\psi(f)$  расходится, если  $F(f) = \omega$ . Функция  $\psi$  является частично-рекурсивной функцией одной функциональной переменной.

Обратно, пусть  $\psi$  — частично-рекурсивная функция одной функциональной переменной. Положим  $F(f) = \psi(f)$ , если  $\psi(f)$  сходится, и  $F(f) = \omega$ , если  $\psi(f)$  расходится. Функционал  $F$  является ограничением на  $\mathcal{F}$  некоторого рекурсивного функционала на  $\mathcal{F}$ .

**Доказательство.** Пусть дан рекурсивный функционал  $F$  и дана всюду определенная функция  $f$ . Можно вычислять  $\psi(f)$ , перечисляя элементы множества  $\tau(f)$  и применяя оператор пересчета, определяющий функционал  $F$ . Для того чтобы перечислять множество  $\tau(f)$ , достаточно располагать оракулом для установления принадлежности множеству  $\tau(f)$ , следовательно,  $\psi(f) = \varphi_z^{\tau(f)}(0)$  для некоторого  $z$ . Поэтому функция  $\psi$  частично-рекурсивна.

Обратно, пусть дана такая функция  $\psi$ , что  $\psi(f) = \varphi_z^{\tau(f)}(0)$ . Определим оператор пересчета  $\Phi$  следующим образом. Для любого множества  $A$  пусть  $\Phi(A) = \{y \mid y = \varphi_z^{\tau(f)}(0) \text{ для некоторого конечного начального сегмента } f, \text{ такого, что } \tau(f) \subset A\}$ . Как легко проверить, оператор  $\Phi$  определяет требуемый рекурсивный функционал (упр. 15-28). ■

**Следствие XXX.** Пусть  $F$  — общерекурсивный функционал на  $\mathcal{F}$  (в старом смысле), тогда ограничение функционала  $F$  на класс  $\mathcal{F}$  является общерекурсивной функцией одной функциональной переменной. Обратно, пусть  $\psi$  — общерекурсивная функция одной функциональной переменной, тогда  $\psi$  является ограничением на  $\mathcal{F}$  некоторого общерекурсивного функционала на  $\mathcal{F}$ .

**Доказательство очевидно. ■**

Отметим мимоходом следующее обстоятельство. Пусть  $F$  — частично-рекурсивный функционал на  $\mathcal{F}$ . Для любой функции  $f \in \mathcal{F}$  положим:  $\psi(f) = F(f)$ , если  $F(f) \in N$ , и  $\psi(f)$  расходится в противном случае. Функция  $\psi$  не всегда будет частично-рекурсивной функцией одной функциональной переменной. С другой стороны, используя конструкцию теоремы 9-XIII, всякую такую функцию  $\psi$  можно продолжить до частично-рекурсивной функции одной функциональной переменной (упр. 15-29).

Имея в виду теорему XXX, следующим образом введем понятие функционала на  $\mathcal{F}$ .

**Определение.** Функционал на  $\mathcal{F}$  — это функция одной функциональной переменной.

Рекурсивный функционал на  $\mathcal{F}$  — это частично-рекурсивная функция одной функциональной переменной.

Общерекурсивный функционал на  $\mathcal{F}$  — это общерекурсивная функция одной функциональной переменной.

В дальнейшем, если не оговорено противное, термин „функционал“ будет означать функционал на  $\mathcal{F}$ , кроме того, мы будем обходиться без использования буквы  $\omega$  для представления расходимости функционала.

**Замечание к терминологии.** В литературе обычно рассматриваются функционалы над  $\mathcal{F}$ . Результаты же о функционалах над  $\mathcal{F}$  часто получают в форме результатов о функциональных операторах (чтобы избежать строгого рассмотрения областей слабого и полного определения). Теорема XXIX сначала была получена именно в такой форме (см. формулировку в § 11.5). В терминологии для функционалов над  $\mathcal{F}$  имеются расхождения. То, что мы называем рекурсивными функционалами, иногда называют частично-рекурсивными функционалами, а то, что мы называем общерекурсивными функционалами, иногда называют рекурсивными функционалами. (Такая терминология довольно естественна, так как в этой терминологии „частично-рекурсивным функционалом“ соответствуют частично-рекурсивные функции одной функциональной переменной, а „рекурсивным функционалом“ соответствуют (обще)рекурсивные функции одной функциональной переменной.)

Заметим, что в бэрковской топологии на  $\mathcal{F}$  и дискретной топологии на  $N$  всякий рекурсивный функционал  $F$  является непрерывным отображением своей области определения (так как для любого  $x$  класс  $F^{-1}(x) \in \Sigma_1^{(fn)}$  и, следовательно, класс  $F^{-1}(x)$  открыт).

### Функционалы на $\mathcal{K}$

Рассмотрим ограничения на  $\mathcal{K}$  функционалов на  $\mathcal{F}$ .

Множество общерекурсивных функций плотно в  $\mathcal{F}$ . Верно ли, что если в области определения рекурсивного функционала содержится класс  $\mathcal{K}$ , то в этой области содержится и класс  $\mathcal{F}$  (т. е. что функционал общерекурсивен)? Простой пример, построенный в упр. 15-30, дает отрицательный ответ на этот вопрос; частично-рекурсивная функция одной функциональной переменной может быть всюду определенной на  $\mathcal{K}$  и не быть всюду определенной на  $\mathcal{F}$ .

Понятие эффективной операции на  $\mathcal{K}$  можно ввести следующим образом.

**Определение.** Пусть  $F$  — ограничение на  $\mathcal{R}$  некоторого функционала на  $\mathcal{F}$ . Функционал  $F$  называется *эффективной операцией* на  $\mathcal{R}$ , если существует такая частично рекурсивная функция (одной числовой переменной)  $\psi$ , что для любого  $x$  если  $\varphi_x \in \mathcal{R}$ , то  $[F(\varphi_x) \text{ сходится} \Leftrightarrow \psi(x) \text{ сходится}] \& [F(\varphi_x) \text{ сходится} \Rightarrow F(\varphi_x) = \psi(x)]$ .

Имеет ли место аналог теоремы XXIX? Отрицательный ответ был получен Фридбергом [1958а].

**Теорема XXXI** (Фридберг). *Существует эффективная операция на  $\mathcal{R}$ , которая не является ограничением на  $\mathcal{R}$  никакого рекурсивного функционала на  $\mathcal{F}$ .*

**Доказательство.** Определим частично рекурсивную функцию  $\psi$  следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } (\forall y)[y \leqslant x \Rightarrow \varphi_x(y) = 0] \\ & \text{или } (\exists z)[\varphi_x(z) \neq 0 \& (\forall y)[y < z \Rightarrow \\ & \Rightarrow \varphi_x(y) = 0] \& (\exists x')[x' < z \& \\ & (\forall u)[u \leqslant z \Rightarrow \varphi_x(u) = \varphi_x(u)]]]; \\ & \text{расходится в противном случае.} \end{cases}$$

Легко проверить, что функция  $\psi$  определяет эффективную операцию  $F$  на  $\mathcal{R}$ . Предположим, что  $F$  есть ограничение на  $\mathcal{R}$  некоторого рекурсивного функционала  $G$ . Тогда  $G(\lambda x[0]) = 0$ . Так как  $G$  — рекурсивный функционал, то при вычислении любого его значения используются ответы на конечное число вопросов об аргументе. Следовательно, существует такое число  $n$ , что  $(\forall f)[(\forall x)[x < n \Rightarrow f(x) = 0] \Rightarrow G(f) = 0]$ . Определим общерекурсивную функцию  $g$  следующим образом:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \quad \text{если } x \neq n; \\ g(n) &= k, \end{aligned}$$

где  $k$  выбрано так, чтобы любой гёделев номер функции  $g$  был не меньше чем  $n$ . Тогда по определению функции  $\psi$  не определено  $F(g)$ . Но  $G(g)$  должно равняться 0. Получили противоречие. ■

Однако можно получить аналог теоремы XXIX, если ограничиться рассмотрением операций и функционалов, определенных на всех функциях класса  $\mathcal{R}$ .

**Определение.** Пусть  $F$  — ограничение на  $\mathcal{R}$  некоторого функционала на  $\mathcal{F}$ . Функционал  $F$  называется *всюду определенной эффективной операцией* на  $\mathcal{R}$ , если существует такая частично рекурсивная функция  $\psi$ , что для любого  $x$  если  $\varphi_x \in \mathcal{R}$ , то  $[\psi(x) \text{ определено} \Rightarrow F(\varphi_x) = \psi(x)]$ .

**Теорема XXXII** (Крейсел, Лакомб, Шёнфильд [1957]). *Функционал  $F$  является всюду определенной эффективной операцией на*

$\mathcal{R} \Leftrightarrow$  функционал  $F$  является ограничением на  $\mathcal{R}$  некоторого рекурсивного функционала, всюду определенного на  $\mathcal{R}$ .

(Заметим, что, как показывает упр. 15-30, отсюда не следует, что всякая всюду определенная эффективная операция на  $\mathcal{R}$  является ограничением на  $\mathcal{R}$  некоторого общерекурсивного функционала.)

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Пусть  $F$  — ограничение на  $\mathcal{R}$  некоторого рекурсивного функционала, всюду определенного на  $\mathcal{R}$ . Тогда для того, чтобы вычислить  $F$  на функции  $f \in \mathcal{R}$ , достаточно задать только конечное число вопросов о функции  $f$ . Определим частично рекурсивную функцию  $\psi$  следующим образом. Чтобы вычислить  $\psi(y)$ , вычисляйте  $\varphi_y(0), \varphi_y(1), \dots$  до тех пор, пока не получится достаточно много результатов, чтобы можно было вычислить  $F(f)$  для любой функции  $f$ , совпадающей с функцией  $\varphi_y$  на этих аргументах. Если (и только если) это произойдет, положите  $\psi(y) = F(f)$ . Функция  $\psi$  определит требуемую всюду определенную эффективную операцию на  $\mathcal{R}$ .

$\Rightarrow$ . Пусть частично рекурсивная функция  $\psi$  определяет всюду определенную эффективную операцию на  $\mathcal{R}$ . Пусть дан конкретный набор инструкций для функции  $\psi$ . До конца доказательства введем следующие обозначения. Если  $f$  — конечный начальный сегмент, то  $\tilde{f}^0$  — функция, совпадающая с  $\tilde{f}$  на области определения функции  $\tilde{f}$  и равная 0 вне этой области. Заметим, что по явному описанию функции  $\tilde{f}$ , т. е. по каноническому индексу множества  $\tau(\tilde{f})$ , можно равномерно получить гёделев номер функции  $\tilde{f}^0$ . Если  $\varphi$  — функция, то  $\varphi^{[w]}$  — это (конечное) ограничение функции  $\varphi$  на множество аргументов  $\{0, 1, \dots, w\}$ .

Фиксируем числа  $y$  и  $z$ . Приведем инструкции для частично рекурсивной функции  $\eta$ . Инструкции для вычисления  $\eta(x)$  таковы.

Вычисляйте  $\psi(y)$ . Если  $\psi(y)$  расходится, то  $\eta(x)$  расходится. Если процесс вычисления  $\psi(y)$  закончился, то *посмотрите, заканчивается ли* процесс вычисления  $\psi(z)$  быстрее чем за  $x$  шагов (процесс вычисления разворачивается на основе данного набора инструкций для функции  $\psi$ ). Если нет, то положите  $\eta(x) = \varphi_y(x)$ . Если да, то *проверьте, выполняется ли* равенство  $\psi(z) = \psi(y)$ . Если не выполняется, то положите  $\eta(x) = \varphi_y(x)$ . Если выполняется, то обозначьте буквой  $w$  число шагов процесса вычисления  $\psi(z)$  (заметим, что  $w < x$ ); вычисляйте значения функции  $\varphi_y$  до тех пор, пока не определятся  $\varphi_y(u)$  для всех  $u \leqslant w$  (если это не произойдет, то  $\eta(x)$  не определится). Пусть  $f_w$  — конечный начальный сегмент, определенный последовательностью  $\varphi_y(0), \dots, \varphi_y(w)$ . Испытайте по очереди все конечные продолжения  $\tilde{f} \supset f_w$ . Для каждого такого продолжения  $\tilde{f}$  возьмите гёделев номер  $v_{\tilde{f}}$  функции  $\tilde{f}^0$  и проверьте, выполняется ли соотношение  $\psi(v_{\tilde{f}}) \neq \psi(y)$ .

Если не обнаружится такое продолжение  $\tilde{f}$  (для которого  $\psi(v_{\tilde{f}}) \neq \psi(y)$ ), то  $\eta(x)$  не определится. Если такое продолжение  $\tilde{f}$  обнаружится, то положите  $\eta(x) = \tilde{f}^0(x)$ .

В итоге мы имеем

$$\eta = \begin{cases} \text{всюду расходится, если } \psi(y) \text{ расходится;} \\ \Phi_y, & \text{если } \psi(y) \text{ сходится и } \psi(z) \text{ расходится;} \\ \Psi_y, & \text{если } \psi(y) \text{ сходится, } \psi(z) \text{ сходится и } \psi(y) \neq \psi(z); \\ \tilde{f}^0, & \text{если } \psi(y) \text{ сходится, } \psi(z) \text{ сходится точно за } w \text{ шагов, } \psi(y) = \psi(z), \{0, \dots, w\} \subset \subset \text{Arg } \Phi_y \text{ и } \tilde{f} \text{ — такое продолжение функции } \Phi_y^{[w]}, \text{ что } F(\tilde{f}^0) \neq \psi(y); \\ \Phi_y^{[w]} & \text{в остальных случаях (} w \text{ — число шагов процесса вычисления } \psi(z)). \end{cases}$$

Набор инструкций для функции  $\eta$  можно эффективно получить по  $y$  и  $z$ . Следовательно, применяя теорему о рекурсии, можно указать такое число  $n$ , что

$$\Phi_n = \begin{cases} \text{всюду расходится, если } \psi(y) \text{ расходится;} \\ \Phi_y, & \text{если } \psi(y) \text{ сходится и } \psi(n) \text{ или расходится или не равно } \psi(y); \\ \tilde{f}^0, & \text{если } \psi(y) \text{ сходится, } \psi(n) \text{ сходится за } w \text{ шагов, } \psi(y) = \psi(n), \{0, \dots, w\} \subset \subset \text{Arg } \Phi_y \text{ и } \tilde{f} \text{ — такое продолжение функции } \Phi_y^{[w]}, \text{ что } F(\tilde{f}^0) \neq \psi(y); \\ \Phi_y^{[w]} & \text{в остальных случаях (} w \text{ — число шагов процесса вычисления } \psi(n)). \end{cases}$$

причем, число  $n$  можно получить равномерно по числу  $y$ .

Пусть функция  $\Phi_y$  всюду определена. Тогда  $\psi(y)$  определено. Следовательно,  $\psi(n)$  должно быть определено,  $\psi(n) = \psi(y)$  и не существует такого продолжения  $\tilde{f}$  функции  $\Phi_y^{[w]}$ , что  $F(\tilde{f}^0) \neq \psi(y)$  (в противном случае функция  $\Phi_n$  совпадала бы с функцией  $\tilde{f}^0$  и выполнялось бы соотношение  $\psi(n) \neq \psi(y)$ ). Поэтому для любой общерекурсивной функции  $\Phi_y$  функция  $\psi$  определена на  $n(y)$ , и если  $w$  — число шагов процесса вычисления  $\psi(n(y))$ , то функционал  $F$  отображает любое продолжение вида  $\tilde{f}^0$  функции  $\Phi_y^{[w]}$  в число  $\psi(y)$ .

Приведем инструкции для вычисления рекурсивного функционала  $G$ . Пусть дана функция  $f$ , разыскивайте такие числа  $y$  и  $w$ , что (i)  $\psi(y)$  сходится; (ii)  $\psi(n(y))$  сходится за  $w$  шагов; (iii) функция  $\Phi_y$  определена на множестве  $\{0, \dots, w\}$  и (iv) на множестве

$\{0, \dots, w\}$  функции  $f$  и  $\Phi_y$  совпадают. Если (и только если) обнаружились такие  $y$  и  $w$ , то возьмите гёделев номер  $u$  функции  $(f^{lw})^0$  и вычисляйте  $\psi(u)$ . Положите  $G(f) = \psi(u)$ . Если таких чисел  $y$  и  $w$  нет, то  $G(f)$  не определится. Читатель может проверить, что  $G$  корректно определен и что  $G$  совпадает с  $F$  на классе  $\mathcal{R}$  (упр. 15-31). ■

**З а м е ч а н и е.** Приведенное выше доказательство показывает, что на самом деле функционал  $F$  непрерывен на  $\mathcal{R}$  и что для любой общерекурсивной функции  $\Phi_y$  можно по  $y$  вычислить модуль непрерывности  $w$ . (Число  $w$  назовем модулем непрерывности функционала  $F$  на функции  $f$ , если  $F(g) = F(f)$  для любой такой функции  $g$  из области определения функционала  $F$ , что  $g \supset f^{lw}$ .)

Итак, мы видим, что класс всюду определенных эффективных операций на  $\mathcal{R}$  совпадает (на  $\mathcal{R}$ ) с классом рекурсивных функционалов, всюду определенных на  $\mathcal{R}$ . Помимо этих классов изучались два других, более общих, класса функционалов на  $\mathcal{R}$ . Рассмотрим кратко эти классы.

**Обозначения.** Пусть  $\tilde{f}$  — конечная функция, тогда символом  $[\tilde{f}]$  обозначим канонический индекс множества  $\tau(\tilde{f})$  (как в доказательстве теоремы XXXII),  $\tilde{f}^0$  — это функция, совпадающая с функцией  $\tilde{f}$  на области ее определения и равная нулю вне этой области. Пусть  $f$  — функция, тогда (как в доказательстве теоремы XXXII) символом  $f^{[x]}$  обозначим ограничение функции  $f$  на множество  $\{0, \dots, x\}$ .

**Определение.** Функционал  $F$  *всюду определен на  $\mathcal{R}$* , если  $\mathcal{R} \subset \text{Arg } F$ . Пусть  $F$  — всюду определенный на  $\mathcal{R}$  функционал. Функционал  $F$  называется *предельным*, если существует такая частичнорекурсивная функция  $\psi$ , что (i)  $\psi([\tilde{f}])$  сходится для любого конечного начального сегмента  $\tilde{f}$  и (ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi([f^{[x]}])$  существует и равен  $F(f)$  для любой общерекурсивной функции  $f$ .

**Определение.** Пусть функционал  $F$  всюду определен на  $\mathcal{R}$ . Функционал  $F$  называется *функционалом Банаха — Мазура*, если для любой общерекурсивной функции  $f$  двух переменных существует такая общерекурсивная функция  $g$ , что для любого  $x$  выполняется равенство

$$F(\lambda y[f(x, y)]) = g(x).$$

Ниже мы покажем, что класс предельных функционалов включает класс функционалов Банаха — Мазура и что класс функционалов Банаха — Мазура включает (на  $\mathcal{R}$ ) класс рекурсивных функционалов, всюду определенных на  $\mathcal{R}$ . Мы покажем, что эти включения строгие.

**Теорема XXXIII.** Ограничение на  $\mathcal{R}$  любого рекурсивного функционала, всюду определенного на  $\mathcal{R}$ , является функционалом Банаха — Мазура.

**Доказательство.** Пусть  $F$  — рекурсивный функционал, всюду определенный на  $\mathcal{R}$ . По теореме XXXII функционал  $F$  является всюду определенной эффективной операцией. Из  $s\text{-}m\text{-}n$ -теоремы немедленно следует требуемый результат. ■

**Теорема XXXIV** (Мазур, Крейсел, Пур-Эль). Всякий функционал Банаха — Мазура является предельным функционалом.

**Доказательство.** Докажем сначала следующую лемму.

**Лемма.** Пусть  $F$  — функционал Банаха — Мазура. Тогда, если функция  $f$  общерекурсивна, то  $F(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(f^{[x]})^0$ .

**Доказательство леммы.** Определим функцию  $j$  следующим образом:

$$j(x, y) = \begin{cases} \tilde{f}^0(y), & \text{если } x = |\tilde{f}| \text{ для некоторого конечного} \\ & \text{начального сегмента } \tilde{f}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как  $F$  — функционал Банаха — Мазура, то существует такая общерекурсивная функция  $g$ , что  $F(\lambda y[j(x, y)]) = g(x)$ . Следовательно, для любого начального сегмента  $\tilde{f}$  выполняется равенство  $F(\tilde{f}^0) = g(|\tilde{f}|)$ . Предположим, что для некоторой общерекурсивной функции  $f$  имеем  $F(f) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} F(f^{[x]})^0$ . Для каждого числа  $z$  определим функцию  $h_z$  следующим образом:

$$h_z(y) = \begin{cases} f(y), & \text{если } \varphi_z(z) \text{ не сходится за менее чем } y \\ & \text{шагов;} \\ (f^{[x]})^0(y), & \text{если } \varphi_z(z) \text{ сходится за } w \text{ шагов,} \\ & \text{причем } w < y \text{ и} \\ & x = \mu u [w \leq u \& g([f^{[u]}]) \neq F(f)]. \end{cases}$$

Очевидно, что  $\lambda z y[h_z(y)]$  — общерекурсивная функция двух переменных. Так как  $F$  — функционал Банаха — Мазура, то существует такая общерекурсивная функция  $k$ , что  $F(\lambda y[h_z(y)]) = k(z)$ . Но для любого  $z$  тогда имеем  $[k(z) = F(f) \Leftrightarrow z \notin K]$  и, следовательно, разрешима проблема остановки. Получили противоречие, лемма доказана.

■ Используя свойство функции  $g$  из доказательства леммы, получаем теорему. ■

**Теорема XXXV** (Пур-Эль [1960]). Существует предельный функционал, не являющийся функционалом Банаха — Мазура.

**Доказательство.** Определим функцию  $\psi$  следующим образом:

$$\psi(\tilde{f}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_z(z) \text{ сходится за менее чем } w \text{ шагов,} \\ & \text{где } z = \tilde{f}(0) \text{ и } w \text{ равно длине сегмента } \tilde{f}; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция  $\psi$  определяет предельный функционал  $F$ . Предположим, что  $F$  — функционал Банаха — Мазура. Пусть  $h(z, y) = z$  для любых чисел  $z$  и  $y$ . Тогда существует такая общерекурсивная функция  $k$ , что для любого  $z$  выполняется равенство  $F(\lambda y[h(z, y)]) = k(z)$ . Но тогда функция  $k$  будет характеристической функцией множества  $K$ , получили противоречие. ■

**Теорема XXXVI** (Фридберг [1958]). Существует функционал Банаха — Мазура, не совпадающий (на  $\mathcal{R}$ ) ни с каким рекурсивным функционалом, всюду определенным на  $\mathcal{R}$ .

**Доказательство.** В доказательстве определяются степени неразрешимости некоторых множеств. Мы опускаем детали и даем набросок доказательства. Рассмотрим частично рекурсивные функции, определяющие предельные функционалы. В частности, рассмотрим следующие множества:

$A_1 = \{z \mid \text{функция } \varphi_z \text{ определяет предельный функционал,} \\ \text{яляющийся функционалом Банаха — Мазура}\};$

$A_2 = \{z \mid \text{функция } \varphi_z \text{ определяет предельный функционал,} \\ \text{совпадающий (на } \mathcal{R} \text{) с некоторым рекурсивным функционалом,} \\ \text{всюду определенным на } \mathcal{R}\}.$

Используя методы § 14.8, Фридберг показал, что множество  $A_2$  является  $\Sigma_4$ -полным; с другой стороны, алгоритм Тарского — Куратовского показывает, что множество  $A_1$  входит в класс  $\Pi_4$  (упр. 15-33). Из теоремы об иерархии (теорема 14-VIII) следует требуемый результат. (Определение степени неразрешимости множества  $A_2$  является более сложной задачей, чем в случае любого примера из § 14.8.) ■

### Релятивизация

Очевидным образом функционалы можно релятивизовать относительно данного множества или семейства множеств. Таким способом можно развивать, например, теорию арифметических функционалов. Изучались также обобщения на функционалы более высоких типов (у таких отображений в качестве аргументов могут выступать сами функционалы). Для функционалов более высоких типов можно вводить понятие эффективной операции. В дальнейшем этот материал рассматриваться не будет.

## Приложение функционалов

Функционалы применялись как важный инструмент исследования в классической математике. Одной из областей такого применения явилось изучение эффективных объектов в классической математике. Например, если действительные числа отождествлять с последовательностями вложенных отрезков с рациональными концами, то отображение действительных чисел в действительные числа становится функциональным оператором (а интеграл становится функционалом более высокого типа). Если ограничиться рассмотрением только рекурсивных операторов, то можно развивать соответствующую теорию „рекурсивного анализа“. (См. упражнение 15-35, где показывается, что всякий такой рекурсивный оператор определяет непрерывное отображение действительных чисел в действительные числа.)

Второй областью приложений явилось изучение счетных структур, аналогичных несчетным структурам классической математики, с отображениями на этих счетных структурах, задаваемыми рекурсивными операторами. Например, рекурсивные последовательности вложенных рациональных отрезков можно рассматривать как „рекурсивные действительные числа“, эффективные операторы на номерах (этих „рекурсивных действительных чисел“) можно рассматривать как „функции“ (упр. 15-35). (При таком рассмотрении, интеграл — это эффективный оператор на номерах „функций“.)

Третьей областью приложений явилось изучение „эффективного содержания“ конкретных предложений и доказательств классической математики. Приведем результаты этого рода, полученные Крейселом [1951].

## Интерпретация опровержением контрпримера

Пусть все высказывания элементарной арифметики даны в предваренной форме. Такое высказывание можно следующим образом преобразовать в эквивалентное утверждение о рекурсивных функционалах. (Для примера мы рассматриваем префикс  $\forall A \exists E$ ; но этот метод является общим.)

$$\begin{aligned}
 & (\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)R(x, y, z, w) \text{ истинно} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists w) \neg R(x, y, z, w) \text{ ложно} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\exists f^{(1)})(\exists g^{(2)})(\forall x)(\forall z) \neg R(x, f(x), z, g(x, z)) \text{ ложно} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\forall f^{(1)})(\forall g^{(2)})(\exists x)(\exists z)R(x, f(x), z, g(x, z)) \text{ истинно} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\exists F)(\exists G)(\forall f^{(1)})(\forall g^{(2)})R(F(f), f(F(f)), G(f, g), g(F(f), G(f, g))) \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{истинно} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\exists \text{ рекурсивный функционал } F)(\exists \text{ рекурсивный функционал } G) \\
 & \qquad \qquad (\forall f^{(1)})(\forall g^{(2)})R(F(f), f(F(f)), G(f, g), g(F(f), G(f, g))) \text{ истинно.}
 \end{aligned}$$

Последний переход возможен потому, что в четвертом от начала выражении для любых функций  $f$  и  $g$  соответствующие числа  $x$  и  $z$  (т. е. значения  $F(f)$  и  $G(f, g)$ ) можно найти, используя оракулы для  $f$  и  $g$  для испытания всех результатов на  $x$  и  $z$ ; поэтому  $F$  и  $G$  будут рекурсивными функционалами<sup>1)</sup>.

Описанные логические преобразования называют *интерпретацией опровержением контрпримера*, так как в нашем примере функции  $f$  и  $g$  можно рассматривать как возможные контрпримеры к первоначальному утверждению. Рекурсивные функционалы  $F$  и  $G$  по любым предполагаемым контрпримерам  $f$  и  $g$  вычисляют числа, на которых  $f$  и  $g$  не годятся в роли контрпримеров.

Крейssel показал, что доказательство высказывания некоторой стандартной аксиоматизации, например в аксиоматике Пеано, дает дополнительную информацию о соответствующих функционалах, опровергающих контрпримеры. Более того, доказуемость высказывания в некоторой аксиоматизации можно охарактеризовать с помощью соответствующих свойств функционалов. Как можно было ожидать, оказалось, что более элементарным аксиоматизациям соответствуют более „эффективные“ функционалы (в том смысле, в котором примитивнорекурсивная функция более „эффективна“, чем общерекурсивная функция, не являющаяся примитивнорекурсивной).

## § 15.4. УПРАЖНЕНИЯ

### § 15.1

15-1. Обсудите (на основе неформальной дискуссии) формальное определение частичнорекурсивной функции *к множественным переменным*.

15-2. Сформулируйте и докажите аналог теорем 1-IX и 1-X для частичнорекурсивных функций одной множественной переменной.

15-3. Докажите следующие результаты о tt-сводимости и T-сводимости.

(i)  $A \leq_{tt} B \Leftrightarrow A = \{x \mid R(B, x)\}$  для некоторого  $R \in \Sigma_0^{(s)}$ .

(ii)  $A \leq_T B \Leftrightarrow A = \{x \mid R(B, x)\} = \{x \mid S(B, x)\}$  для некоторых  $R \in \Sigma_1^{(s)}$  и  $S \in \Pi_1^{(s)}$ . (Указание. Покажите, что множество  $A$  рекурсивно перечислимо относительно множества  $B \Leftrightarrow A = \{x \mid R(B, x)\}$  для некоторого  $R \in \Sigma_1^{(s)}$ .)

15-4 (Джокуш). Для произвольного класса  $\mathcal{C}$  множеств положим  $P_{\mathcal{C}} = \{x \mid W_x \in \mathcal{C}\}$ . Докажите следующие предложения для произвольного класса  $\mathcal{C}$ :

(i)  $\mathcal{C} \in \Sigma_n^{(s)} \Rightarrow P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_{n+1} (n \geq 1)$ ;

<sup>1)</sup> В том случае, когда впереди стоят кванторы общности, они не заменяются на функциональные кванторы на третьем шаге, а остаются числовыми кванторами (число можно рассматривать как „функцию нуля переменных“). В этом случае в качестве переменных для функционалов, возникающих на предпоследнем шаге, будут не только функций, но и числа.

$$(ii) \mathcal{C} \in \Pi_n^{(s)} \Rightarrow P_{\mathcal{C}} \in \Pi_{n+1} \quad (n \geq 1);$$

$$(iii) \mathcal{C} \in \Sigma_0^{(s)} \Rightarrow P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_2 \cap \Pi_2.$$

Докажите следующие предложения для произвольного класса  $\mathcal{C}$  рекурсивно перечислимых множеств:

$$(iv) P_{\mathcal{C}} \in \Sigma_n \Rightarrow \mathcal{C} \in \Sigma_n^{(s)} \quad (n \geq 3);$$

$$(v) P_{\mathcal{C}} \in \Pi_n \Rightarrow \mathcal{C} \in \Sigma_{n+1}^{(s)} \quad (n \geq 2).$$

Приведите примеры, показывающие, что (iii) и (iv) нельзя усилить. (Указание. Для (iii) возьмите  $\mathcal{C} = \{X \mid 0 \in X \ \& \ 1 \notin X\}$ , для (iv) используйте теорему XIII.)

15-5. (a) Более детально рассмотрите конструкцию в доказательстве теоремы XII, приводящую к  $f(n+1)$ .

(b) Докажите следствие XIII.

15-6. Пусть  $A$  — нерекурсивное множество. Покажите, что  $\Sigma_0^{(s)} = \Sigma_0^{(s)A}$ , но существует класс  $\mathcal{A} \in (\Sigma_1^{(s)A} - \Sigma_1^{(s)})$ .

15-7. Пусть дано  $A$ . Докажите теорему об иерархии для иерархий  $\Sigma_n^{(s)A}$ ,  $\Pi_n^{(s)A}$

15-8. (a) Рассмотрим открыто-замкнутые классы. Введем понятие канонического индекса для таких классов и назовем эти индексы 0-индексами. Обозначим символом  $\mathcal{D}_x$  класс, 0-индекс которого равен  $x$ . Покажите, что

$\mathcal{A} \in \Sigma_1^{(s)} \Leftrightarrow (\exists \text{ общерекурсивная функция } f) [\mathcal{A} = \bigcup_{x=0}^{\infty} \mathcal{D}_{f(x)}]$ . Докажите аналогичное для  $\Pi_1^{(s)}$ .

(b) Положим: число  $z$  есть 1-индекс для  $\mathcal{A}$ , если  $\varphi_z$  общерекурсивна и  $\mathcal{A} = \bigcup_{x=0}^{\infty} \mathcal{D}_{f(x)}$ , где  $f = \varphi_z$ . Обозначим символом  $\mathcal{G}_z$   $\Sigma_1^{(s)}$ -класс с 1-индексом  $z$ . Покажите, что  $\mathcal{A} \in \Pi_2^{(s)} \Leftrightarrow (\exists \text{ общерекурсивная функция } f) [\mathcal{A} = \bigcap_{x=0}^{\infty} \mathcal{G}_{f(x)}]$ .

(c) Распространите указанную процедуру на все уровни арифметической иерархии.

△15-9 (Гильберт, Бернайс). (a) Определим множества  $V_n$ , как в § 14.6.

Положим  $V^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ . Сформулируйте индуктивное определение множеств  $V_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), и получите, что  $\{V^*\} \in \Pi_2^{(s)}$ . (Указание. Заметим, что множество  $V_0$  рекурсивно и что для любого  $n$  множество  $V_{n+1} = \{x \mid x \text{ есть } \Sigma_{n+1}\text{-высказывание и некоторая подстановка в } "P_n\text{-часть"} \text{ высказывания } x \text{ верна}\}$ ).

(b) Непосредственно выведите из изложенного выше, что  $\{V\} \in \Pi_2^{(s)}$

### § 15.2.

15-10. Покажите, что класс  $\{f \mid 5 \in \text{Val } f\}$  является областью определения частичнорекурсивной функции одной функциональной переменной.

15-11. Покажите, что функция  $d$ , определенная в § 15.2, является метрикой и что пространство  $\mathcal{F}$  полно относительно этой метрики.

<sup>1)</sup> Автор крайне признателен Ван Хао, обратившему его внимание на такое доказательство теоремы XII.

15-12. Покажите, что произведение топологий, определенное для  $\mathcal{F}$  в § 15.2, совпадает с топологией, задаваемой бэрковской метрикой.

△15-13. Для любого действительного числа  $\beta$  символом  $[\beta]$  обозначим наибольшее целое число  $\leqslant \beta$ . Пусть  $\alpha$  — действительное число между 0 и 1. Определим две последовательности  $n_0, n_1, n_2, \dots$  и  $r_0, r_1, \dots$  следующим образом:

$$r_0 = \alpha,$$

$$n_i = \left[ \frac{1}{r_i} \right], \text{ если } r_i \neq 0,$$

$$r_{i+1} = \frac{1}{r_i} - n_i.$$

Последовательность (быть может, конечная)  $n_0, n_1, \dots$  называется *непрерывной дробью* для числа  $\alpha$ , так как последовательность

$$\alpha_0 = \frac{1}{n_0}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{n_0 + \frac{1}{n_1}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}}}, \dots$$

или оканчивается числом  $\alpha$  (если последовательность конечна), или сходится к числу  $\alpha$ . Заметим, что если эта последовательность бесконечна, то все ее элементы положительны.

(a) Покажите, что для любого действительного числа  $\alpha$ , такого, что  $0 < \alpha < 1$ , можно указать непрерывную дробь, значением которой является это число  $\alpha$ .

(b) Покажите, что непрерывная дробь бесконечна тогда и только тогда, когда ее значение  $\alpha$  иррационально.

(c) Покажите, что любая бесконечная последовательность положительных целых чисел определяет непрерывную дробь для некоторого иррационального числа между 0 и 1.

(d) Отождествим всякий элемент  $f$  пространства  $\mathcal{F}$  с непрерывной дробью  $f(0) + 1, f(1) + 1, \dots$ . В силу (a) и (c) это отождествление дает взаимно-однозначное соответствие между  $\mathcal{F}$  и множеством иррациональных чисел между 0 и 1. Покажите, что всякая базисная окрестность в пространстве  $\mathcal{F}$  определяет открытое множество иррациональных чисел (в естественной топологии иррациональных чисел) и что всякий открытый класс в пространстве  $\mathcal{F}$  определяет открытый класс в пространстве иррациональных чисел, что соответствует, установленное между  $\mathcal{F}$  и иррациональными числами, является гомеоморфизмом.

15-14. Объясните, почему базисные окрестности образуют базу окрестностей пространства  $\mathcal{F}$ .

15-15. Докажите, что  $\mathcal{F}$  не компакт. (Указание. Постройте покрытие пространства  $\mathcal{F}$  базисными окрестностями, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие.)

15-16. Докажите или опровергните следующее утверждение. Дерево  $\mathcal{J}$  является деревом с конечными путями тогда и только тогда, когда дерево  $\mathcal{J}$  есть объединение попарно не сравнимых конечных подветвей дерева  $\mathcal{J}^*$ . (Две подветви несравнимы, если ни одна из них не есть начало другой.)

15-17. Используйте понятия категории, чтобы доказать, что класс  $\{f \mid f^{-1}(0) \text{ конечно}\} \in (\Sigma_2^{(fn)} - \Pi_2^{(fn)})$ .

15-18. Докажите теорему XXVI.

△15-19. Рассмотрим множества чисел, получаемые из рекурсивных отношений в  $\mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^l$  (для произвольных  $k \geq 0, l \geq 0$ ) операциями проектирования и взятия дополнения, когда разрешаются проектирования не только по числовым, но и по множественным переменным. Пусть  $\mathcal{A}_1$  — класс всех

таких множеств. Рассмотрим множества чисел, получаемые из рекурсивных отношений в  $\mathcal{F}^k \times N^l$  (для произвольных  $k \geq 0, l \geq 0$ ) операциями проектирования и взятия дополнения, когда разрешаются проектирования не только по числовым, но и по функциональным переменным. Пусть  $\mathcal{A}_2$  — класс всех таких множеств. Покажите, что  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ . (Указание. См. доказательства теорем XXV и XXVI.) Множества этих классов называются *аналитическими множествами*. Такие множества будут исследованы в гл. 16.

**15-20.** Покажите, что для подходящего множества  $A$  класс  $\Sigma_0^{(fn)} A$  содержит классы, не входящие в класс  $\Sigma_0^{(fn)}$ . (Указание. Покажите, что для любого открыто-замкнутого класса  $\mathcal{A}$  существует такое множество  $A$ , что  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(fn)} A$ . Выберите множество  $A$  так, чтобы в нем была закодирована достаточная информация о дереве с конечными путями, определяющем класс  $\mathcal{A}$ .)

**15-21.** Покажите, что  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(fn)} [\mathcal{N}] \Leftrightarrow \mathcal{A}$  открыто-замкнутый класс. (Указание. См. указание для упр. 15-20.)

$\triangle 15-22.$  Покажите, что утверждение теорем XXV и XXVI нельзя усилить.

**15-23.** Если  $\mathcal{A} \in \Sigma_0^{(fn)}$ , то должен ли существовать такой класс  $\mathcal{B} \in \Sigma_0^{(s)}$ , что  $\mathcal{A} = \{f \mid \tau(f) \in \mathcal{B}\}$ ?

**15-24.** Переделайте доказательство теоремы XIII, чтобы показать, что класс  $\{f \mid f — общерекурсивная функция\} \in (\Sigma_3^{(fn)} — \Pi_3^{(fn)})$ .

$\triangle 15-25.$  Будем говорить, что функция  $\psi$  *арифметическая*, если множество  $\tau(\psi)$  арифметическое. Приведите подходящую *нумерацию* арифметических функций. Постройте теорию (базирующуюся на арифметических функциях), аналогичную теории (базирующейся на частично-рекурсивных функциях), построенной в гл. 1, 4 и 5. Особенное внимание обратите на различия между двумя теориями. (Понятие арифметической вычислимости является естественным обобщением понятия рекурсивной вычислимости. Дальнейшие обобщения будут рассмотрены в гл. 16.)

### § 15.3.

**15-26.** Пусть  $F$  — частично-рекурсивный функционал на  $\mathcal{P}$ . (а) Покажите, что функционал  $F$  рекурсивен на  $\mathcal{P}$  тогда и только тогда, когда класс  $\mathcal{F}$  принадлежит области слабого определения функционала  $F$ .

(б) Покажите, что если область строгого определения функционала  $F$  совпадает с классом  $\mathcal{P}$ , то  $F$  — константа.

**15-27.** (а) Закончите доказательство пункта (б) теоремы XXIX, показав, что отрицание как (i), так и (ii) приводит к разрешимости проблемы остановки.

(б) Выведите теорему упр. 11-43 из теоремы XXIX.

**15-28.** Покажите, что оператор  $\Phi$  в доказательстве теоремы XXX определяет требуемый функционал.

$\triangle 15-29.$  (а) Найдите частично-рекурсивный функционал  $F$  на  $\mathcal{P}$  и функцию  $\psi$  одной функциональной переменной, такие, что (i)  $\psi(f) = F(f)$ , если  $F$  полностью определен на функции  $f$ ; (ii)  $\psi(f)$  расходится в противном случае и (iii) функция  $\psi$  не является частично-рекурсивной функцией одной функциональной переменной. (Указание. Определим функционал  $F$  с помощью такого оператора пересчета  $\Phi$ , что

$$\Phi(\tau(f)) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } f(0) \notin K; \\ \{0, 1\}, & \text{если } f(0) \in K. \end{cases}$$

(б) Пусть  $F$  — частично-рекурсивный функционал на  $\mathcal{P}$ . Пусть функция  $\psi$  получается из  $F$  по (i) и (ii) в пункте (а). Покажите, что функцию  $\psi$  можно продолжить до частично-рекурсивной функции одной функциональной переменной. (Указание. См. теорему 9-XXIII.)

**15-30.** (а) Укажите частично-рекурсивную функцию одной функциональной переменной, всюду определенную на  $\mathcal{R}$ , но не всюду определенную на  $\mathcal{F}$ . (Указание. Положим  $\psi(f) = 0$ , если  $(\exists x)[f(x) = \varphi_x(x)]$ ;  $\psi(f)$  расходится в противном случае.)

(б) Укажите частично-рекурсивную функцию одной функциональной переменной, всюду определенную на  $\mathcal{R}$ , не продолжимую до функции, всюду определенной на  $\mathcal{F}$ . (Указание. Положим  $\psi(f)$  равным первому такому числу  $x$  в эффективном перечислении множества  $K$ , что  $f(x) = \varphi_x(x)$ , если такое  $x$  существует;  $\psi(f)$  не определено в противном случае.)

(в) Выведите, что не всякая всюду определенная эффективная операция на  $\mathcal{R}$  является ограничением на  $\mathcal{R}$  общерекурсивного функционала.

**15-31.** В доказательстве теоремы XXXII проверьте, что  $G$  корректно определен (т. е. что может быть найдено не более одного значения  $\psi(u)$ ) и что  $G$  совпадает с  $F$  на классе  $\mathcal{R}$ .

**15-32** (Крейслер, Лакомб, Шён菲尔д). Пусть  $R$  — множество гёделевых номеров всех общерекурсивных функций. Пусть  $\mathcal{A}$  — класс общерекурсивных функций. Положим  $P_{\mathcal{A}} = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ . Будем говорить (в данной задаче), что класс  $\mathcal{A}$  *рекурсивен*, если существуют два непересекающихся рекурсивно перечислимых множества  $A_1$  и  $A_2$ , таких, что  $R \subset A_1 \cup A_2$  и  $P_{\mathcal{A}} = A_1 \cap R$ ; будем говорить, что класс  $\mathcal{A}$  *рекурсивно перечислим*, если существует такое рекурсивно перечислимое множество  $A$ , что  $P_{\mathcal{A}} = A \cap R$ .

(а) Покажите, что класс  $\mathcal{A}$  рекурсивен тогда и только тогда, когда существуют непересекающиеся рекурсивно перечислимые множества  $B$  и  $C$ , такие, что

$$f \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (\exists \text{ начальный сегмент } \tilde{f}) [f \supset \tilde{f} \& [\tilde{f}] \in B]$$

и что

$$f \notin \mathcal{A} \Leftrightarrow (\exists \text{ начальный сегмент } \tilde{f}) [f \supset \tilde{f} \& [\tilde{f}] \in C],$$

где  $[\tilde{f}]$  — канонический индекс множества  $\tau(f)$ . (Указание.  $\Leftarrow$  очевидно. Для  $\Rightarrow$  используйте теорему XXXII, чтобы из эффективной операции получить рекурсивный функционал.)

(б) Покажите, что если класс  $\mathcal{A}$  рекурсивно перечислим, то не обязательно имеется такое рекурсивно перечислимое множество  $B$ , что

$$f \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (\exists \text{ начальный сегмент } \tilde{f}) [f \supset \tilde{f} \& [\tilde{f}] \in B].$$

(Указание. Используйте конструкцию из теоремы XXXI.)

**15-33.** Пусть  $A_1$  и  $A_2$  — множества, указанные в наброске доказательства теоремы XXXVI.

(а) Покажите, что  $A_1 \in \Pi_4$ .

(б) Покажите, что  $A_2 \in \Sigma_4$ .

(в) Покажите, что  $A_2$  является  $\Sigma_4$ -полным. (Указание. Используйте теорему 14-XVIII.)

$\triangle 15-34.$  Отождествим действительные числа с подклассом класса  $\mathcal{F}$  следующим образом. Фиксируем эффективное кодирование пар рациональных чисел натуральными числами. Пусть  $f$  — такая всюду определенная функция, что  $f(0), f(1), \dots$  — последовательность (кодовых номеров) стягивающихся вложенных рациональных отрезков. Если действительное число  $\alpha$  является общей точкой всех отрезков, то будем говорить, что функция  $f$  *представляет действительное число  $\alpha$* . Очевидно, что всякое действительное число может быть представлено бесконечным количеством функций. Действительное число назовем *рекурсивным*, если оно представляется общерекурсивной функцией. Натуральное число  $z$  назовем *индексом* рекурсивного действительного числа  $\alpha$ , если  $\varphi_z$  представляет  $\alpha$ .

(а) Покажите, что действительное число рекурсивно тогда и только тогда, когда можно эффективно задать его десятичное разложение.

(б) Покажите, что операции сложения и умножения на рекурсивных действительных числах можно задать эффективными операциями на индексах рекурсивных действительных чисел.

(с) (Райс [1954]). Комплексное число назовем *рекурсивным*, если его действительная и мнимая части являются рекурсивными действительными числами. Покажите, что рекурсивные комплексные числа образуют алгебраически замкнутое поле. (*Указание*. Используйте подходящую эффективную аппроксимационную процедуру для „решения“ произвольного полиномиального уравнения.)

(д) Покажите, что для рекурсивных действительных чисел можно равномерно переходить от (инструкций для) десятичных разложений к соответствующим последовательностям вложенных отрезков (их индексам). Покажите, что невозможен равномерный переход в обратном направлении. (Таким образом, некоторые эффективные отображения на рекурсивных действительных числах можно определить, если используются представления вложенными отрезками, и нельзя определить, если используются десятичные разложения. Именно по этой причине эффективные десятичные разложения не подходят в качестве базисных.)

$\triangle 15\text{-}35$ . Пусть  $\mathcal{F}^*$  — класс всех всюду определенных функций, представляющих действительные числа (см. упр. 15-34). Пусть рекурсивный оператор  $\Phi$  отображает  $\mathcal{F}^*$  в  $\mathcal{F}^*$  и определяет соответствующее корректное отображение действительных чисел в действительные числа. Покажите, что  $\Phi$  определяет непрерывное отображение из действительных чисел в действительные числа. (*Указание*. Представьте  $\Phi$  как функционал на  $\mathcal{F}^* \times N$ , и используйте непрерывность этого функционала на своей области определения.)

$\triangle 15\text{-}36$  (Московакис). Пусть  $R^*$  — множество всех индексов рекурсивных действительных чисел (определения см. в упр. 15-34). Пусть частично рекурсивная функция  $\varphi$  отображает  $R^*$  в  $R^*$  и определяет соответствующее корректное отображение рекурсивных действительных чисел в рекурсивные действительные числа. Покажите, что это отображение непрерывно на любом рекурсивном действительном числе. (*Указание*. См. теорему XXXII и упр. 15-35.) Покажите, что такое отображение не обязательно является ограничением на рекурсивные действительные числа непрерывного отображения на действительных числах. (*Указание*. Определим эффективную последовательность открытых интервалов с рациональными концами, покрывающую все рекурсивные действительные числа, такую, что суммарная длина всех интервалов не превосходит 1. Чтобы сделать это, будем вычислять для произвольного  $z$  значение  $\varphi_z(0), \varphi_z(1), \dots$ . Если (и только если) найдется такое  $n$ , что (i)  $\varphi_z(y)$  определено для  $y \leq n$ , (ii)  $\varphi_z(0), \dots, \varphi_z(n)$  — конечная последовательность (кодовых номеров) вложенных рациональных интервалов и (iii) длина интервала с номером  $\varphi_z(n)$  меньше чем  $1/2^{z+1}$ , то к общему списку открытых интервалов добавляется открытый интервал длины  $1/2^z$ , содержащий интервал с номером  $\varphi_z(n)$ . Общий список, порождаемый таким способом, образует требуемое покрытие. Пусть  $I_0, I_1, \dots$  — эффективное перечисление интервалов этого покрытия. Для каждого  $k$  определим непрерывную функцию  $h_k$  одного действительного переменного, равную нулю на множестве  $I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_k$  и равную единице вне этого множества и некоторого рекурсивно задаваемого множества интервалов суммарной длины  $1/2^k$ . Для любого рекурсивного действительного числа  $\alpha$  положим  $g(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\alpha)$ . Покажите, что ряд

конечен (для всякого рекурсивного действительного числа), что  $g$  можно задать частично рекурсивной функцией  $\psi$  (удовлетворяющей условиям, описанным в начале нашей задачи) и что  $g$  не является ограничением на рекурсивные действительные числа непрерывного отображения на действительных

числах. Чтобы доказать последнее, покажите, что функция  $g$  не ограничена на любом интервале длины 3. (Это показывает, между прочим, что теорема Гейне — Бореля не верна для замкнутого отрезка рекурсивных действительных чисел с данным рекурсивным бесконечным открытым покрытием.) Дальнейшие результаты о „рекурсивном анализе“ см. в работах Московакиса [1963] и Клауза [1961].

$\triangle 15\text{-}37$ . (Хоуда [1962]). Понятие рекурсивного действительного числа, введенное в упр. 15-34, можно обобщить, введя понятие *арифметического действительного числа*, если вместо частично рекурсивных функций использовать арифметические функции (см. упр. 15-25). Покажите, что из всякого арифметического открытого покрытия (т. е. арифметической последовательности открытых интервалов с рациональными концами) замкнутое отрезка арифметических действительных чисел можно выделить конечное подпокрытие. (*Указание*. Покажите, что имеет место арифметический вариант теоремы Больцано — Вейерштрасса.) (Рекурсивный вариант не верен, см. указание к упр. 15-36.) (*Замечание*. Для арифметических действительных чисел можно сформулировать и доказать теорему Гейне — Бореля в несколько более общей форме. В этом и других отношениях теория „арифметического анализа“ ближе к классическому анализу, чем теория „рекурсивного анализа“ в упр. 15-35 или 15-36. См. также работу Риттера [1962].)

$\triangle 15\text{-}38$ . Приведите интерпретацию опровержения контрапримера для теоремы о простых числах (см. § 14.7), и опишите, как вычисляется соответствующий рекурсивный функционал.

- § 16.1. Аналитическая иерархия 478
- § 16.2. Аналитическое представление; приложения к логике 492
- § 16.3. Деревья с конечными путями 502
- § 16.4.  $\Pi_1^1$ -множества и  $\Delta_1^1$ -множества 508
- § 16.5. Обобщенная вычислимость 515
- § 16.6. Гиперстепени и гиперскакачок;  $\Sigma_2^1$ -множества и  $\Delta_2^1$ -множества 523
- § 16.7. Результаты о базисе и неявная определимость 535
- § 16.8. Гиперарифметическая иерархия 556
- § 16.9. Упражнения 570

### § 16.1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ

В § 15.2 мы рассматривали отношения, полученные из рекурсивных отношений на  $\mathcal{F}^k \times N^l$  (для всех  $k \geq 0$  и  $l \geq 0$ ) с помощью операций взятия дополнения и проектирования по числовым координатам. В этой главе мы рассмотрим более широкий класс отношений, который получается, если дополнительно разрешить брать проекции по функциональным осям. Эти отношения называются *аналитическими*. Они распадаются в естественную иерархию, впервые изучавшуюся Клини [1955] и [1955a].

#### Иерархия

Рекурсивные отношения на  $\mathcal{F}^k \times N^l$  (для всех  $k \geq 0$  и  $l \geq 0$ ) были определены в § 15.2.

**Определение.** Отношение  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$  называется *аналитическим*, если  $R$  рекурсивно или если существует такое рекурсивное отношение  $S \subset \mathcal{F}^m \times N^n$ , что  $R$  может быть получено из отношения  $S$  с помощью конечного числа применений операций взятия дополнения и (или) проектирования.

Тотчас получается аналог теоремы 14-I.

**Теорема I.**  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$  аналитично  $\Leftrightarrow R$  рекурсивно или для некоторых  $m$  и  $n$

$$R = \{(f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l) \mid (Q_1 \xi_1) (Q_2 \xi_2) \dots \\ \dots (Q_{m+n-k-l} \xi_{m+n-k-l}) S(f_1, \dots, f_m, x_1, \dots, x_n)\},$$

где  $S \subset \mathcal{F}^m \times N^n$  рекурсивно,  $Q_i$  есть  $\forall$  или  $\exists$  при  $1 \leq i \leq m+n-k-l$ , а  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+n-k-l}$  суть  $f_{k+1}, \dots, f_m, x_{l+1}, \dots, x_n$ , взятые, возможно в ином порядке<sup>1)</sup>.

**Доказательство.** Как в теореме 14-I. ■

**Определение.** Назовем квантором *типа 1* всякий квантор, применяемый к функциональной переменной; квантором *типа 0* — всякий квантор, применяемый к числовой переменной. Для некоторых целей, именно при рассмотрении алгоритма Тарского — Курашевского, мы используем символы „ $\forall^1$ “ и „ $\exists^1$ “ для квантификаций типа 1 и символы „ $\forall^0$ “ и „ $\exists^0$ “ для квантификаций типа 0<sup>2)</sup>.

*Предикатная форма* определяется так же, как в § 14.1 (однако с тем изменением, что теперь допускаются функциональные координаты и кванторы типа 1). Далее термин „предикатная форма“ будет чаще использоваться в этом новом обобщенном смысле, а не в смысле § 14.1. Предикатная форма очевидным образом определяет соответствующее аналитическое отношение. Будем говорить, что это отношение *представляется* данной формой. Две предикатные формы назовем эквивалентными, если они представляют одно и то же отношение.

**Определение.** Кортеж кванторов (возможно, пустой) данной предикатной формы, помеченный их типами, называется *префиксом* этой формы. (Так, например,  $(\forall x_2)(\exists f_1)(\exists x_1)(\forall f_2)R(f_1, f_2, x_1, x_2, x_3)$  имеет префикс  $\forall^0 \exists^1 \exists^0 \forall^1$ .) *Приведенным префиксом* называется (возможно, пустой) кортеж кванторов, полученный из префикса опусканием всех кванторов типа 0. (Например, форма с префиксом  $\forall^1 \exists^1 \exists^0 \forall^1$  имеет приведенный префикс  $\exists^1 \forall^1$ .)

Мы получим аналитическую иерархию, классифицируя формы в соответствии с числом перемен типов кванторов в приведенном префиксе. ■

**Определение.** Если  $n > 0$ ,  $\Sigma_n^1$ -префикс есть префикс, приведенный префикс которого начинается с  $\exists^1$  и имеет  $n - 1$  перемен типов кванторов.

$\Sigma_0^1$ -префикс есть префикс, приведенный префикс которого пуст.

Если  $n > 0$ ,  $\Pi_n^1$ -префикс есть префикс, приведенный префикс которого начинается с  $\forall^1$  и имеет  $n - 1$  перемен типов кванторов.

<sup>1)</sup> В соответствии с тем как мы поступали ранее в этой книге и чтобы избежать смешения с другими обозначениями (например,  $\alpha, \beta, \dots$  для ординалов), мы продолжаем обозначать всюду определенные функции буквами  $f, g, h, \dots$

<sup>2)</sup> Вообще в теории иерархий натуральные числа часто называют *объектами типа 0*, множества чисел и функций числовых переменных — *объектами типа 1*, множества объектов типа 1 и функционалы на них — *объектами типа 2* и т. д. Изучение рекурсивных отношений и функционалов для объектов типа выше 1 было начато Клини [1959], [1963] (см. также Кларк [1964]).

$\Pi_0^1$ -префикс есть префикс, приведенный префикс которого пуст. (Таким образом, понятия  $\Sigma_0^1$ -префикса и  $\Pi_0^1$ -префикса совпадают.)

**Определение.** Предикатная форма называется  $\Sigma_n^1$ -формой, если она имеет  $\Sigma_n^1$ -префикс, и  $\Pi_n^1$ -формой, если она имеет  $\Pi_n^1$ -префикс.

**Определение.**  $\Sigma_n^1$  есть класс всех отношений (на  $\mathcal{F}^k \times N^l$ ,  $k \geq 0$ ,  $l \geq 0$ ), представимых в  $\Sigma_n^1$ -форме.

$\Pi_n^1$  есть класс всех отношений (на  $\mathcal{F}^k \times N^l$ ,  $k \geq 0$ ,  $l \geq 0$ ), представимых в  $\Pi_n^1$ -форме.

Класс  $\Sigma_0^1 (= \Pi_0^1)$  состоит, таким образом, из арифметических отношений, определенных и изученных в § 15.2.

В конце этого параграфа мы распространим эти обозначения на отношения на  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times N^m$ ,  $k \geq 0$ ,  $l \geq 0$ ,  $m \geq 0$ .

**Следствие I.** Отношение  $R$  ( $\subset \mathcal{F}^k \times N^l$ ) аналитично  $\Leftrightarrow (\exists n)[R \in \Sigma_n^1 \text{ или } R \in \Pi_n^1]$ .

**Доказательство.** Очевидно. ■

С помощью введения фиктивных кванторов, как в теореме 14-II, может быть доказана следующая

**Теорема II.** (a)  $\Sigma_n^1 \cup \Pi_n^1 \subset \Sigma_{n+1}^1 \cap \Pi_{n+1}^1$ .

(b)  $R \in \Sigma_n^1 \Leftrightarrow \bar{R} \in \Pi_n^1$ .

**Доказательство.** Аналогично теореме 14-II. ■

Следующая теорема дает правила, обобщающие правило склеивания кванторов из § 14.2. Она показывает, что, если  $n > 0$ , произвольное отношение из  $\Sigma_n^1 \cup \Pi_n^1$  может быть представлено предикатной формой, имеющей не более  $n$  кванторов типа 1 и не более одного квантора типа 0, причем квантор типа 0 будет последним в префиксе.

**Теорема III (Клини).** Допустимы следующие преобразования префиксов, т. е., в каждом случае, для любой предикатной формы с данным префиксом получится эквивалентная предикатная форма с новым префиксом:

- (i)  $\dots A^0 A^0 \dots \rightarrow \dots A^0 \dots$
- $\dots E^0 E^0 \dots \rightarrow \dots E^0 \dots$
- (ii)  $\dots A^1 A^1 \dots \rightarrow \dots A^1 \dots$
- $\dots E^1 E^1 \dots \rightarrow \dots E^1 \dots$
- (iii)  $\dots A^0 \dots \rightarrow \dots A^1 \dots$
- $\dots E^0 \dots \rightarrow \dots E^1 \dots$
- (iv)  $\dots A^0 E^1 \dots \rightarrow \dots E^1 A^0 \dots$
- $\dots E^0 A^1 \dots \rightarrow \dots A^1 E^0 \dots$

(Из теоремы об иерархии будет следовать, что обращения (iii) и (iv) не имеют места; см. упр. 16-1.)

**Доказательство.** Опишем, как нужно изменить рекурсивное отношение данной предикатной формы. Рекурсивность нового отношения и эквивалентность старой и новой предикатных форм легко проверяются (см. упр. 16-2).

(i) Так же, как в § 14.2.

(ii) Дано форма  $\dots (\forall f_1)(\forall f_2) \dots R(\_, f_1, \_, f_2, \_)$ ; возьмем  $\langle f, \_, \_, \_ \rangle | R(\_, \pi_1 f, \_, \neg \pi_2 f, \_)$ . Аналогично в случае  $\dots (\exists f_1)(\exists f_2) \dots$

(iii) Дано  $\dots (\forall x) \dots R(\_, x, \_)$ ; возьмем  $\langle f, \_, \_ \rangle | R(\_, f(0), \_)$ . Аналогично для  $\dots (\exists x) \dots$

(iv) Дано  $\dots (\forall x)(\exists f) \dots R(\_, f, \_, x, \_)$ ; возьмем  $\langle f, x, \_, \_ \rangle | R(\_, \lambda y[f(x, y)], \_, x, \_)$ . Так же и для  $\dots (\exists x)(\forall f) \dots$  ■

**Следствие III.** При  $n > 0$  всякое отношение  $R$  из  $\Sigma_n^1$  представимо предикатной формой с префиксом, состоящим из  $n + 1$  чередующихся кванторов, из которых первые  $n$  — типа 1, последний — типа 0, причем первый квантор —  $\exists^1$ . Для отношений из  $\Pi_n^1$  дело обстоит так же, только первым стоит квантор  $\forall^1$ .

**Доказательство.** Из теоремы вытекает (см. упр. 16-3) следующая систематическая процедура (с использованием, если понадобится, фиктивных кванторов). Ограничимся рассмотрением примера. Пусть дан префикс  $A^0 E^0 A^0 E^0 A^1$ . Преобразуем префикс:

- $A^1 E^0 A^1 \rightarrow A^1 E^0 A$  (iii),
- $\rightarrow A^1 E^0 A$  (ii),
- $\rightarrow E^1 A^0 A^1 \rightarrow E^1 A^0 A^1$  (iv),
- $\rightarrow E^1 A^0 A^1 \rightarrow A^1 A^1 E$  (iii),
- $\rightarrow A^1 E \rightarrow A^1 E$  (ii),

$\rightarrow \exists^1 A^1 E^0$  (добавление фиктивного квантора). ■

Предикатная форма может быть определена, если заданы ее (i) префикс, (ii) индекс характеристической функции рекурсивного отношения, (iii) отображение префиксных кванторов в совокупность переменных этого отношения. Назовем это *описанием* формы. Правила преобразования кванторов из теоремы III, очевидно, равномерны в том смысле, что описание результата применения какого-либо из этих правил к предикатной форме может быть равномерно получено по описанию исходной формы.

### Нормальная форма и нумерация

Определим  $T'_{k,l}$  так же, как в § 15.2. (То есть,  $T'_{k,l}(z, f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l, w) \Leftrightarrow \varphi_z^{t(f_1)}, \dots, \varphi_z^{t(f_k)}(x_1, \dots, x_l)$  вычисляется на  $w$ -м шаге при перечислении множества  $W_{\rho(z)}$ )

(с индексом  $\rho(z)$ ); здесь  $k > 0$ ,  $l > 0$ .) По теореме 15-XVII для любой предикатной формы  $(\exists w) R(f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l, w)$  мы можем равномерно найти такое  $z$ , что форма  $(\exists w) T'_{k,l}(z, f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l, w)$  представляет то же отношение. Это утверждение является частным случаем следующей теоремы.

**Теорема IV (Клини).** Пусть  $n > 0$  четно. Тогда для любого  $R \in \Sigma_n^1$  (где  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$ ) существует такое  $z$ , что

$$R = \{\langle f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid (\exists g_1)(\forall g_2) \dots \dots (\forall g_n)(\exists w) T'_{k+n,l}(z, f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_l, w)\}.$$

Пусть  $n$  не четно. Тогда для любого  $R \in \Sigma_n^1$  (где  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$ ) существует такое  $z$ , что

$$R = \{\langle f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid (\exists g_1)(\forall g_2) \dots \dots (\exists g_n)(\forall w) \neg T'_{k+n,l}(z, f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_l, w)\}.$$

В обоих случаях такое  $z$  будет называться  $\Sigma_n^1$ -индексом отношения  $R$ . Если дана произвольная  $\Sigma_n^1$ -форма для  $R$ , то некоторый  $\Sigma_n^1$ -индекс отношения  $R$  может быть найден равномерно (в смысле теоремы 15-IV).

Аналогичное утверждение справедливо для  $\Pi_n^1$ .

**Доказательство.** Непосредственно применим теорему 15-XVII и доказательство следствия III. ■

Выберем некоторое отображение (кодирование) совокупности всех конечных последовательностей чисел (включая пустую последовательность) на множество  $N$ . Например, возьмем кодирование, определяемое функцией  $\tau^*$  из § 5.6. Введем следующее обозначение.

Определение.

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \tau^*(\langle f(0), f(1), \dots, f(x-1) \rangle), & \text{если } x > 0; \\ \tau^*(\emptyset) = 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Таким образом,  $\bar{f}(x)$  есть кодовый номер конечного начального сегмента функции  $f$  длины  $x$ . Назовем  $\bar{f}(x)$  кодовым числом кортежа длины  $x$ , определяемого функцией  $f$ <sup>1)</sup>.

Наиболее полезная нормальная форма, отправляющаяся от рекурсивных отношений на числах (а не на функциях и числах), может быть получена следующим образом.

<sup>1)</sup> В гл. 13 и 15 использовались другие обозначения таких кодовых чисел. Настоящее обозначение обычно при рассмотрении аналитической иерархии будет использоваться всюду в гл. 16.

Определение. Для  $k > 0$  и  $l \geq 0$  определим

$T_{k,l}^* = \{\langle z, y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid \text{существуют такие функции } f_1, \dots, f_k \text{ и число } w, \text{ что для всех } i, 1 \leq i \leq k, y_i = \bar{f}_i(w) \text{ и } T_{k,l}^*(z, f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l, w), \text{ причем при вычислении } T_{k,l}^* \text{ все вопросы относительно } f_1, \dots, f_k \text{ касаются значений аргументов, меньших } w\}$ <sup>1)</sup>.

Очевидно, что  $T_{k,l}^*$  — рекурсивное отношение, так как длина любого кортежа эффективно находится по кодовому числу этого кортежа. Следующий результат очевиден.

**Теорема V (Клини)** (другой вариант теоремы о нормальной форме). Пусть  $n > 0$ ,  $R(\subset \mathcal{F}^k \times N^l)$  — отношение из  $\Sigma_n^1$ ,  $z$  — некоторый  $\Sigma_n^1$ -индекс для  $R$ . Если  $n$  четно, то

$$R = \{\langle f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid (\exists g_1)(\forall g_2) \dots (\forall g_n)(\exists w) T_{k+n,l}^*(z, \bar{f}_1(w), \dots, \bar{f}_k(w), \bar{g}_1(w), \dots, \bar{g}_n(w), x_1, \dots, x_l)\}.$$

Если  $n$  не четно, то

$$R = \{\langle f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid (\exists g_1)(\forall g_2) \dots (\exists g_n)(\forall w) \neg T_{k+n,l}^*(z, \bar{f}_1(w), \dots, \bar{f}_k(w), \bar{g}_1(w), \dots, \bar{g}_n(w), x_1, \dots, x_l)\}.$$

Аналогично для  $\Pi_n^1$ .

**Доказательство.** Непосредственно по определению. ■  
В качестве частного случая получаем

Следствие V.

$$A \in \Pi_n^1 \Leftrightarrow (\exists R)[R \text{ рекурсивно} \& R \subset N^2 \& A = \{x \mid (\forall f)(\exists w) R(\bar{f}(w), x)\}].$$

**Доказательство.** Возьмем  $R = \{\langle y, x \rangle \mid T_{1,1}^*(z, y, x)\}$ , где  $z$  — некоторый  $\Pi_n^1$ -индекс отношения  $A$ . ■

Алгоритм Тарского—Куратовского

Пусть  $F(p_1, \dots, p_k, a_1, \dots, a_l)$  — выражение логики предикатов, построенное из числовых переменных, переменных для функций (одного переменного), символов отношений (на функциях и числах), пропозициональных связок,  $=$ , кванторов для числовых переменных и кванторов для функциональных переменных,

<sup>1)</sup> В обозначениях гл. 13 (и в случае  $l > 0$ ),  $T_{k,l}^*(z, y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_l) \Leftrightarrow (\exists w)[y_1, \dots, y_k \text{ — кодовые числа для начальных сегментов } [f_1], \dots, [f_k] \text{ и } \varphi_z^{[f_1], \dots, [f_k]}(x_1, \dots, x_l) \text{ вычисляется на } w\text{-м шаге перечисления множества } W_{\rho(z)}]$ .

имеющеее  $p_1, \dots, p_k$  своими свободными переменными для функций и  $a_1, \dots, a_l$  свободными числовыми переменными. Пусть символы отношений интерпретируются некоторыми фиксированными отношениями  $S_1, \dots, S_m$ . Тогда отношение

$$R = \{ \langle f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid F(p_1, \dots, p_k, a_1, \dots, a_l) \text{ истинно при подстановке } f_1, \dots, x_l \text{ вместо } p_1, \dots, a_l \text{ соответственно} \}$$

называется определимым в логике предикатов через отношения  $S_1, \dots, S_m$ . Назовем  $F(p_1, \dots, a_l)$  определением отношения  $R$  через  $S_1, \dots, S_m$ .

Справедлив следующий аналог теоремы 14-IV.

**Теорема VI.** Если  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$  определимо в логике предикатов через рекурсивные отношения, то отношение  $R$  аналитично.

**Доказательство.** Аналогично теореме 14-IV. ■

(Обращение теоремы VI также верно, согласно теореме I.)

Таким образом, можно, как и раньше, пользоваться алгоритмом Тарского — Куратовского, делая, однако, различие между кванторами типа 0 и типа 1. Помимо правил преобразования кванторов из теоремы III, для получения наиболее простой формы данного отношения бывают полезными и некоторые другие правила.

**Теорема VII** (Адисон и Клини [1957]). Допустимы (в смысле теоремы III) следующие преобразования префиксоков:

- (i)  $\dots \exists^1 \rightarrow \dots \exists^0$ ,
- (ii)  $\dots \forall^1 \rightarrow \dots \forall^0$ ,

где в обоих случаях изменяемый квантор стоит последним в префиксе;

- (ii)  $\dots (\forall f)(\exists x)(\exists g) \dots \rightarrow \dots (\exists g)(\forall f)(\exists x) \dots,$
- $\dots (\exists f)(\forall x)(\forall g) \dots \rightarrow \dots (\forall g)(\exists f)(\forall x) \dots,$

в обоих случаях при условии, что рекурсивное отношение данной предикатной формы есть отношение между кодовым числом  $\bar{f}(x)$  и отличными от функции  $f$  объектами.

**Доказательство.** (i) Пусть исходная предикатная форма есть  $\dots (\exists f)R(f, \dots)$ . Тогда в силу теоремы V мы имеем такое фиксированное  $z$ , что предикатная форма

$$\dots (\exists f)(\exists w)T^*(z, \bar{f}(w), \dots)$$

эквивалентна данной. Но она эквивалентна форме  $\dots (\exists y)(\exists w)[y — \text{кодовое число кортежа длины } w \& T^*(z, y, \dots)]$ . Склейвая одно-

именные числовые кванторы (по правилу (i) из теоремы III), получим желаемый результат. Доказательство в случае  $\forall^1$  аналогично.

(ii) Если дана форма  $\dots (\forall f)(\exists x)(\exists g) \dots R(\_, \bar{f}(x), \_, x, \_, g, \_)$ , в которой нет вхождений функции  $f$ , отличных от явно указанных, используем

$$\{\langle f, g, x, \dots \rangle \mid R(\_, \bar{f}(x), \_, x, \_, \lambda y[g(\bar{f}(x), y)])\}, \neg \}$$

Случай  $\dots (\exists f)(\forall x)(\forall g) \dots$  разбирается аналогично (упр. 16-4). ■

**Пример 1.** Определим  $W$ , как в упр. 11-61, т. е.

$$W = \{z \mid \varphi_z^{(2)} — \text{характеристическая функция некоторого вполне-упорядочения } (\leqslant) \text{ на некотором множестве чисел}\}.$$

Тогда  $z \in W \Leftrightarrow [\varphi_z — \text{характеристическая функция некоторого линейного упорядочения } (\leqslant), \text{ не содержащего бесконечных убывающих цепей}] \Leftrightarrow [\varphi_z — \text{характеристическая функция некоторого линейного упорядочения } (\leqslant) \text{ и } (\forall f)(\exists n)[f(n+1) = = f(n) \text{ или } \varphi_z(f(n+1), f(n)) = 0]] \Leftrightarrow \forall^0 \exists^0 \& \forall^0 \& \forall^0 \exists^0 \& \forall^0 \exists^0 \& \forall^1 \exists^0 \& \forall^1 \exists^0 \text{ (упр. 16-5)} \Leftrightarrow \forall^1 \exists^0$ . Поэтому  $W \in \Pi_1^1$ .

**Пример 2.** Пусть  $O$  — множество определенных в § 11-7 обозначений конструктивных ординалов. В упр. 11-61 мы обнаружили, что  $O \equiv W$ . Поэтому и  $O \in \Pi_1^1$ .

**Пример 3.** Возвращаясь к примеру, рассмотренному при доказательстве следствия III, видим, что отношение с префиксом  $\exists^1 \forall^0 \exists^0 \forall^1$  содержится на самом деле в  $\Sigma_1^1$ , так как  $\exists^1 \forall^1 \rightarrow \exists^1 \forall^0$  в силу теоремы VII.

### Теорема об иерархии

Для простоты мы ограничимся далее рассмотрением главным образом аналитических множеств натуральных чисел. Таким образом, при рассмотрении аналитической иерархии мы выделяем объекты, однотипные с теми, на которых в гл. 14 изучалась арифметическая иерархия. Распространение нашей теории на отношения в  $\mathcal{F}^k \times N^l$ ,  $k > 0$ , аналогично расширенному варианту арифметической иерархии, рассмотренному в § 15.2. Мы позже рассмотрим это расширение в § 16.7—16.8 и в упр. 16-39—16-41.

**Определение.** Для  $n > 0$  положим

$$E^n = \{z \mid (\exists f_1)(\forall f_2) \dots (\forall f_n)(\exists w)T'_{n-1}(z, f_1, \dots, f_n, z, w)\},$$

если  $n$  четно, и

$$E^n = \{z \mid (\exists f_1)(\forall f_2) \dots (\exists f_n)(\forall w) \neg T'_{n-1}(z, f_1, \dots, f_n, z, w)\},$$

если  $n$  нечетно.

Следующая теорема об иерархии аналогична следствию 14-VIII (с) для арифметической иерархии.

**Теорема VIII (Клини).** Если  $n > 0$ , то  $E^n \in \Sigma_n^1 - \Pi_n^1$  (а потому  $\bar{E}^n \in \Pi_n^1 - \Sigma_n^1$ ).

**Доказательство.** Пусть дано  $n > 0$ . Предположим, что  $n$  четно. (Случай нечетного  $n$  рассматривается аналогично.) Очевидно, что  $E^n \in \Sigma_n^1$ . Допустим, что  $E^n \in \Pi_n^1$ . Тогда по теореме II (б)  $\bar{E}^n \in \Sigma_n^1$  и по теореме IV

$$\bar{E}^n = \{z \mid (\exists f_1) \dots (\forall f_n)(\exists w) T'_{n-1}(z_0, f_1, \dots, f_n, z, w)\}$$

для некоторого  $z_0$ . Но тогда

$$\begin{aligned} z_0 \in \bar{E}^n &\Leftrightarrow (\exists f_1) \dots (\forall f_n)(\exists w) T'_{n-1}(z_0, f_1, \dots, f_n, z_0, w) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z_0 \in E^n \end{aligned}$$

(по определению  $E^n$ ) и получаем противоречие. Поэтому  $E^n \in \Sigma_n^1 - \Pi_n^1$  и  $\bar{E}^n \in \Pi_n^1 - \Sigma_n^1$ . ■

### Теорема о полноте

Множества  $E^n$  и  $\bar{E}^n$  обладают следующими свойствами полноты.

**Теорема IX (Клини).** Для всякого  $n > 0$  и всякого множества  $A$

$$A \in \Sigma_n^1 \Leftrightarrow A \leqslant_1 E^n,$$

$$A \in \Pi_n^1 \Leftrightarrow A \leqslant_1 \bar{E}^n.$$

**Доказательство.** Предположим, что  $A \leqslant_1 E^n$ . Тогда

$$A = \{z \mid (\exists f_1) \dots T'_{n-1}(g(z), f_1, \dots, f_n, g(z), w)\}$$

для некоторой общерекурсивной  $g$ . Поэтому  $A \in \Sigma_n^1$ .

Предположим обратное: пусть  $A \in \Sigma_n^1$ . Тогда

$$A = \{z \mid (\exists f_1) \dots T'_{n-1}(z_0, f_1, \dots, f_n, z, w)\}.$$

Для произвольного данного  $x$  положим

$$A_x = \{y \mid y = y \& (\exists f_1) \dots T'_{n-1}(z_0, f_1, \dots, f_n, x, w)\}.$$

Тогда  $A_x = N$ , если  $x \in A$ , и  $A_x = \emptyset$ , если  $x \notin A$ . По теореме IV  $A_x \in \Sigma_n^1$  и  $\Sigma_n^1$ -индекс множества  $A_x$  может быть найден равномерно по  $x$ . Пусть  $h$  — такая общерекурсивная функция, что  $h(x)$  есть  $\Sigma_n^1$ -индекс множества  $A_x$ . Согласно определению  $E^n$ ,  $x \in A \Leftrightarrow A_x = N \Leftrightarrow h(x) \in E^n$ . Поэтому  $A \leqslant_1 E^n$ . ■

**Определение.** Если  $n > 0$  и  $A \equiv E^n$ , то  $A$  называется  $\Sigma_n^1$ -*полным*, а  $\bar{A}$  называется  $\Pi_n^1$ -*полным*.

По теореме о нормальной форме существует только счетное число аналитических множеств. Поэтому существуют неаналитические множества. Мы получим пример такого множества следующим образом.

**Определение**  $E^\omega = \{\langle x, n \rangle \mid x \in E^n\}$ .

**Следствие IX.** Множество  $E^\omega$  не аналитично.

**Доказательство.** Допустим, что  $E^\omega$  аналитично. Тогда при некотором  $n$  по теореме IX  $E^\omega \leqslant_1 E^n$ . Но очевидно, что  $E^{n+1} \leqslant_1 E^\omega$ . Поэтому  $E^{n+1} \leqslant_1 E^n$  в противоречие с теоремами VIII и IX. ■

Множества  $E^n$  образуют строго возрастающую последовательность Т-степеней неразрешимости, как явствует из следующих теоремы и следствий. ( $A'$  есть *скакок* множества  $A$ , как это определялось в § 13.1.)

**Теорема X.** При всяком  $n$   $A \in \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1 \Rightarrow A' \in \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} A' = \{x \mid x \in W_x^A\} &= \{x \mid (\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho(x)} \& \\ &\& (\forall x)[x \in D_u \Rightarrow x \in A] \& (\forall x)[x \in D_v \Rightarrow x \notin A]\}\}. \end{aligned}$$

Вставляя в последнее выражение  $\Sigma_n^1$ -форму вместо первого вхождения символа  $A$  и  $\Pi_n^1$ -форму вместо второго вхождения символа  $A$ , получаем

$$\exists^0 \exists^0 [\exists^0 \& \forall^0 [\Rightarrow \Sigma_n^1] \& \forall^0 [\Rightarrow \Pi_n^1]].$$

Применение к этой форме алгоритма Тарского — Куратовского дает  $\Sigma_n^1$ -форму. Подобным образом, подставляя  $\Pi_n^1$ -форму вместо первого вхождения символа  $A$  и  $\Sigma_n^1$ -форму вместо второго, получим  $\Pi_n^1$ -форму для  $A'$ . Поэтому  $A' \in \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1$ . ■

**Следствие X.** (а) При всяком  $n$   $B \in \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1 \& A \leqslant_T B \Rightarrow A \in \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1$ .

(б) Если  $n > 0$ , то множество  $E^{n+1}$  имеет большую Т-степень, чем  $E^n$ .

**Доказательство.** (а) Заметим, что  $A \leqslant_T B \Rightarrow A \leqslant_1 B'$ . Доказываемое утверждение вытекает теперь из теоремы.

(б)  $E^n \in \Sigma_n^1 \subset \Sigma_{n+1}^1 \cap \Pi_{n+1}^1$ . Поэтому, согласно теореме,  $(E^n)' \in \Sigma_{n+1}^1 \cap \Pi_{n+1}^1 \subset \Sigma_{n+1}^1$ . Значит, по теореме IX  $(E^n)' \leqslant_1 E^{n+1}$ . ■

### Гиперарифметические множества

В арифметической иерархии выполняется важное равенство

$$\Sigma_1 \cap \Pi_1 = \Sigma_0 (= \Pi_0)$$

(теорема 15-XXII и следствие 15-XXII). Как мы сейчас увидим, в аналитической иерархии соответствующее утверждение не имеет места.

**Теорема XI.** *Существует такое множество  $A$ , что  $A \in \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$ , но  $A \notin \Sigma_0^1$ .*

**Доказательство.** Пусть  $A = V$ , а  $V$  определяется так же, как в § 14.7, т. е.  $V$  есть множество всех истинных высказываний элементарной арифметики. Так как множества из класса  $\Sigma_0^1$  — арифметические, а  $V$  арифметическим не является (см. доказательство теоремы 15-XII),  $V \notin \Sigma_0^1$ . С другой стороны, в силу теоремы 15-XII (о неявной определимости множества  $V$ ) существует такое рекурсивное отношение  $R(\subset \mathcal{N} \times N^2)$ , что  $(\forall y)(\exists z)R(X, y, z)$  истинно тогда и только тогда, когда  $X = V$ . Поэтому, согласно теореме 15-XXVI, существует такое рекурсивное множество  $S(\subset \mathcal{F} \times N^2)$ , что  $(\forall y)(\exists z)S(f, y, z)$  истинно тогда и только тогда, когда  $f = c_V$ . Поэтому для любого  $x$

$$\begin{aligned} x \in V &\Leftrightarrow (\forall f)[(\forall y)(\exists z)S(f, y, z) \Rightarrow f(x) = 1] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists f)[(\forall y)(\exists z)S(f, y, z) \& f(x) = 1]. \end{aligned}$$

Но это означает, что  $V \in \Pi_1^1$  и  $V \in \Sigma_1^1$ , т. е.  $V \in \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$ .

**Следствие XI.** Для всякого  $n$  существуют множества из  $\Sigma_{n+1}^1 \cap \Pi_{n+1}^1$ , не содержащиеся в совокупности  $\Sigma_n^1 \cup \Pi_n^1$ .

**Доказательство.** Случай  $n = 0$  разобран в теореме XI. Если же  $n > 0$ , рассмотрим  $A = E^n \oplus \bar{E}^n$ ; тогда  $A \in \Sigma_{n+1}^1 \cap \Pi_{n+1}^1$ , но  $A \notin \Sigma_n^1 \cup \Pi_n^1$  (см. упр. 16-7).

Следующие общеупотребительные обозначения и терминология будут использованы в дальнейшем.

**Определение.** Для всякого  $n$  положим  $\Delta_n^1 = \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1$ . Отношения из  $\Delta_n^1$  называют *отношениями, представимыми в обеих формах с  $n$  функциональными кванторами*.

**Определение.** Множество  $R$  называется *гиперарифметическим*, если  $R \in \Delta_1^1$ .

Итак,  $\Delta_0^1 (= \Sigma_0^1 = \Pi_0^1)$  есть класс арифметических отношений, а  $\Delta_1^1 (= \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1)$  есть класс гиперарифметических отношений. Теорема XI показывает, что существуют гиперарифметические множества, не являющиеся арифметическими.

### Переменные для множеств и кванторы по множествам

Мы могли бы определить аналитическую иерархию, отправляясь от рекурсивных отношений в  $\mathcal{N}^k \times N^l$  (а не в  $\mathcal{F}^k \times N^l$ ) и пользуясь переменными для множеств и кванторами по множествам вместо функциональных переменных и кванторов по функциям, как это было сделано выше. Если бы мы так поступили, то получили бы те же самые отношения в  $N^l$  и ту же  $\Sigma_n^1, \Pi_n^1$ -классификацию этих отношений, что и раньше. Это следует из доказательства теорем 15-XXV и 15-XXVI (см. упр. 16-8).

Правила преобразования кванторов по множествам несколько менее удобны, чем правила (содержащиеся в теоремах III и VII) для кванторов по функциям. В частности, следствие III не имеет места для кванторов по множествам (ур. 16-9). Зато справедливо следующее: если  $n > 0$ , то всякое числовое множество из класса  $\Sigma_n^1$  представимо предикатной формой с кванторами по множествам, префикс которой состоит из  $n + 2$  чередующихся кванторов, первые  $n$  из которых — кванторы по множествам, а последние два — по числам, причем первым стоит квантор существования; аналогичное утверждение справедливо для класса  $\Pi_n^1$  (ур. 16-10).

Более того, оказывается, что при исследовании аналитической иерархии кванторы по функциям имеют большее эвристическое значение, чем кванторы по множествам. Правила преобразования функциональных кванторов (из теорем III и VII) оказываются чрезвычайно мощным орудием. Глубина и элегантность дальнейших результатов этой главы во многом зависят от использования этих правил. По этим причинам мы пользуемся в наших определениях и нормальных формах функциональными кванторами.

Мы можем также определить некоторую иерархию, отправляясь от рекурсивных отношений в  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times N^m$  ( $k, l, m \geq 0$ ) и пользуясь одновременно кванторами по множествам и функциям (а также, конечно, кванторами по числам). Если мы так поступим и, приписав кванторам по множествам тип 1, будем считать их неотличимыми от кванторов по функциям для целей классификации префиксов (по классам  $\Sigma_n^1$  и  $\Pi_n^1$ ), то при этом получатся те же отношения в  $\mathcal{F}^k \times N^l$ , что и прежде, и классификация этих отношений по  $\Sigma_n^1, \Pi_n^1$  будет той же самой. Это вытекает из доказательств теорем 15-XXV и 15-XXVI. Но при этом также определяются аналитические отношения в  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times N^m$  ( $k, l, m \geq 0$ ) и дается классификация этих отношений. Более того, та же классификация тех же отношений получится, если мы воспользуемся только кванторами по функциям и числам (применительно к нашим рекурсивным отношениям в  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times N^m$ ), отказавшись от кванторов по множествам (ур. 16-8).

Подобным образом, мы можем определить арифметическую иерархию на отношениях в  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times N^m$ , отправляясь

от рекурсивных отношений в  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times N^m$ , пользуясь только кванторами по числам.

Примем на будущее следующее

**Соглашение об обозначениях. Арифметическая иерархия.**  $\Sigma_n^0$  есть класс всех отношений в  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times N^m$  ( $k, l, m \geq 0$ ), определимых через рекурсивные отношения с помощью  $\Sigma_n$ -префиксов.

$\Pi_n^0$  есть класс всех отношений в  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times N^m$  ( $k, l, m \geq 0$ ), определимых через рекурсивные отношения с помощью  $\Pi_n$ -префиксов.

$$\Delta_n^0 = \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0.$$

(Таким образом, класс  $\Sigma_n^0$  включает классы  $\Sigma_n$ ,  $\Sigma_n^{(s)}$  и  $\Sigma_n^{(fn)}$ , изучавшиеся в гл. 14 и 15. Мы не будем больше пользоваться верхними индексами (s) и (fn), введенными в гл. 15 для большей ясности.)

**Аналитическая иерархия.**  $\Sigma_n^1$  есть класс всех отношений в  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times N^m$  ( $k, l, m \geq 0$ ), определимых через рекурсивные отношения с помощью  $\Sigma_n^1$ -префиксов.

$\Pi_n^1$  есть класс всех отношений в  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times N^m$  ( $k, l, m \geq 0$ ), определимых через рекурсивные отношения с помощью  $\Pi_n^1$ -префиксов.

$$\Delta_n^1 = \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1.$$

Как уже отмечалось, главным образом мы будем интересоваться аналитическими множествами натуральных чисел. Иногда множества из класса  $\Sigma_n^1$  будут называться  $\Sigma_n^1$ -множествами. Аналогично для классов  $\Pi_n^1$ ,  $\Delta_n^1$ ,  $\Sigma_n^0$ ,  $\Pi_n^0$  и  $\Delta_n^0$ .

### Дальнейшее содержание этой главы

В § 16.2 мы докажем теорему о представлении для аналитических множеств, аналогичную теореме о представлении для арифметических множеств, доказанной в § 14.4. В частности, мы расширим элементарную арифметику добавлением переменных и кванторов по неотрицательным действительным числам и покажем, что множества натуральных чисел, определимые в этой обогащенной системе (которую мы называем *элементарным анализом*), суть в точности аналитические множества. По этой причине рассматриваемая в этой главе иерархия и называется *аналитической*.

В оставшейся части этой главы мы будем в основном иметь дело с гиперарифметическими и  $\Pi_1^1$ -множествами; теория этих множеств связана с многими задачами и результатами в логике и основаниях математики. В меньшей мере мы коснемся  $\Delta_2^1$ -множеств. Этот класс в последнее время вызывал значительный интерес. Практически про все множества, определимые с помощью

итерированных „конструктивных“ процедур<sup>1)</sup>, было показано, что они лежат в  $\Delta_2^1$ <sup>2)</sup>. Как уже отмечалось, возможности человеческого мозга в оперировании с объектами, которые задаются предикатными формами с более чем одной переменной функциональных кванторов, весьма ограничены (см. обсуждение вслед за теоремой 14-XII в § 14.7). Более высокие уровни аналитической иерархии не изучались так подробно, как  $\Delta_2^1$  и более низкие классы.

### Аналогии

Скажем теперь несколько слов об аналитической иерархии классов функций (подклассов класса  $\mathcal{F}$ , определяемых предикатными формами с одной свободной функциональной переменной и без свободных числовых переменных). В § 15.2 мы обнаружили, что арифметические классы функций аналогичны борелевским множествам конечного уровня в пространстве Бера. В теоремах 15-XVII и 15-XXVIII мы обнаружили, что арифметические классы и борелевские множества можно рассматривать с единой точки зрения. Это общее основание для их рассмотрения было распространено и на аналитическую иерархию (хотя мы здесь и не описываем это расширение, см. Адисон [1955]). При этом обнаруживаются следующие аналогии: (1) гиперарифметические классы соответствуют борелевским множествам (конечного и бесконечного уровня); (2)  $\Sigma_1^1$ -классы соответствуют множествам, известным в дескриптивной теории множеств как *аналитические*<sup>3)</sup>; (3) иерархия аналитических классов соответствует иерархии, известной в дескриптивной теории множеств под названием *иерархии проективных множеств*<sup>4), 5)</sup>.

В последнее время в исследованиях, посвященных этим параллелям, жирные символы  $\Sigma_n^1$ ,  $\Pi_n^1$  и  $\Delta_n^1$  использовались для обозначения.

<sup>1)</sup> Мы не будем пытаться сделать это понятие более точным.

<sup>2)</sup> Это свойство „поглощения“  $\Delta_2^1$  (а также  $\Delta_1^1$  и  $\Delta_0^1$ ) в некоторой степени иллюстрируется приведенной выше теоремой X.

<sup>3)</sup> Иногда их определяют как множества, получающиеся из борелевских с помощью операции **A**; см. Куратовский [1950]. (*Операция A* есть „обобщенное проектирование“, определяемое следующим образом. Если  $\Gamma$  есть класс подмножеств из  $\mathcal{F}$ , а  $R$  — произвольное отношение в  $N \times \mathcal{F}$ , для которого при всяком  $x$  выполняется  $\{g \mid R(x, g)\} \in \Gamma$ , то класс  $\{g \mid (\exists f)(\forall x) R(f(x), g)\}$  называется полученным из  $\Gamma$  „применением операции A“. Отношение  $R$  при этом иногда называют *решетом*.)

<sup>4)</sup> Сначала была замечена аналогия между арифметической иерархией теории рекурсивных функций и проективной иерархией дескриптивной теории множеств. Аналогия между аналитической и проективной иерархиями представляется, однако, более естественной (см. Адисон [1955]).

<sup>5)</sup> Следующие два предложения оригинала опущены, так как посвящены несуществующему в русской литературе различию между терминами „analytic“ („аналитический“ в дескриптивной теории множеств) и „analytical“ („аналитический“ в рекурсивной теории). — Прим. перев.

чения уровняй „классической“ проективной иерархии дескриптивной теории множеств, а символы  $\Sigma_n^0$ ,  $\Pi_n^0$  и  $\Delta_n^0$  (иногда  $\Sigma_n$ ,  $\Pi_n$  и  $\Delta_n$ ) обозначали конечные уровни „классической“ иерархии борелевских множеств.

## § 16.2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ; ПРИЛОЖЕНИЯ К ЛОГИКЕ

Определим логическую систему, известную под названием *арифметики второго порядка с переменными для множеств*. Основными символами здесь служат символы элементарной арифметики вместе с переменными для множеств и символом  $\in$ . При построении формул разрешается пользоваться, помимо элементарных выражений и формул элементарной арифметики, элементарными выражениями вида  $a \in \hat{A}$ , где  $a$  — переменная для чисел, а  $\hat{A}$  — переменная для множеств, а также, наряду с кванторами по числовым переменным, допускаются кванторы по переменным для множеств. Формулы, в которых все переменные (для множеств и чисел) связаны кванторами, называются *высказываниями*. Высказывания интерпретируются как утверждения об обычных сложении и умножении натуральных чисел, причем числовые переменные пробегают множество  $N$ , а переменные для множеств — совокупность всех подмножеств множества  $N$ . Каждое высказывание соответственно истинно или ложно. Например, высказывание

$$(\forall \hat{A})[(0 \in \hat{A} \& (\forall a)[a \in \hat{A} \Rightarrow a + 1 \in \hat{A}]) \Rightarrow (\forall a)[a \in \hat{A}]]$$

(выражающее принцип математической индукции на  $N$ ) истинно.

Логическая система, известная как *арифметика второго порядка с переменными для функций*, определяется следующим образом. Основные символы ее суть символы элементарной арифметики, а также переменные для функций одного переменного. Формулы строятся так же, как в элементарной арифметике, но с использованием переменных для функций одного переменного в качестве дополнительных символов операторов и навешиванием кванторов как по числовым переменным, так и по функциональным переменным. (Допускается, конечно, суперпозиция функциональных переменных.) Формулы, в которых все переменные (как числовые, так и функциональные) связаны кванторами, называются *высказываниями*. Высказывания интерпретируются как утверждения об обычных сложении и умножении натуральных чисел, причем числовые переменные пробегают множество  $N$ , а функциональные — совокупность всех всюду определенных функций из  $N$  в  $N$ . Всякое высказывание истинно или ложно. Например,

высказывание

$$(\forall p)[[p(0) = 1] \& (\forall a)[p(a) = 1 \Rightarrow p(a + 1) = 1]] \Rightarrow \\ \Rightarrow (\forall a)[p(a) = 1]]$$

(также выражающее принцип математической индукции на  $N$ ) истинно.

Следующая теорема вытекает непосредственно из предыдущих результатов.

**Теорема XII.** *Множество  $A$  аналитично  $\Leftrightarrow A$  определимо в арифметике второго порядка с переменными для множеств  $\Leftrightarrow A$  определимо в арифметике второго порядка с переменными для функций.*

**Доказательство.** Утверждение непосредственно вытекает из определения аналитического множества, упр. 15-19 (см. теоремы 15-XV и 15-XXVI) и из доказанных в § 15.1 и 15.2 теорем о представлении (теоремы 15-VI (b) и 15-XIX (b))<sup>1)</sup>.

Далее под *арифметикой второго порядка* мы будем понимать арифметику второго порядка с функциональными переменными. Иногда в литературе арифметику второго порядка называют *теорией чисел второго порядка*.

Определим теперь логическую систему, известную под названием *элементарного анализа*. Ее основными символами служат символы элементарной арифметики вместе с переменными для действительных чисел („действительными переменными“), отличными от переменных для натуральных чисел. Обозначим буквами  $\eta$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$ , ... переменные для действительных чисел. При построении формул разрешается навешивать кванторы как по действительным, так и по целочисленным переменным. Формулы, в которых все переменные связаны кванторами, называются *высказываниями*. Высказывания интерпретируются как утверждения об обычных сложении и умножении неотрицательных действительных чисел, причем целочисленные переменные пробегают совокупность всех неотрицательных целых чисел, а действительные переменные — совокупность всех неотрицательных действительных чисел. Каждое высказывание считается или истинным, или ложным. Например,  $(\forall a)(\exists \eta)[\eta \times \eta = a]$  — истинное высказывание.

<sup>1)</sup> Отметим, что теорема XII остается верной, если в арифметике второго порядка с переменными для множеств разрешить также пользоваться символами  $k$ -местных отношений в  $N$  и кванторами по этим переменным или в арифметике второго порядка с переменными для функций разрешить пользоваться символами функций нескольких переменных и кванторами по этим новым переменным; действительно, рекурсивная функция  $\tau$  пересчета пар представима в элементарной арифметике и с ее помощью символы отношений (или функций нескольких переменных) можно заменить символами множеств (или функций одного переменного).

зываение (означающее, что из каждого неотрицательного целого числа можно извлечь неотрицательный действительный квадратный корень).

Назовем множество  $A$  определимым в элементарном анализе, если существует такая формула  $Fa$  элементарного анализа с единственной свободной (целочисленной) переменной  $a$ , что  $A = \{x \mid Fx \text{ истинно}\}$ , где  $Fx$  для любого целого  $x$  означает высказывание, получающееся подстановкой нумерала для  $x$  в  $Fa$  вместо переменной  $a$ . Мы получаем следующую теорему о представлении.

**Теорема XIII.**  $A$  аналитично  $\Leftrightarrow A$  определимо в элементарном анализе.

**Доказательство.** Рассмотрим следующие пять логических систем.

$S_1$  — элементарная арифметика с переменными для неотрицательных действительных чисел ( $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots$ ), т. е. элементарный анализ.

$S_2$  — элементарная арифметика с переменными для неотрицательных рациональных чисел ( $r, r_1, r_2, \dots$ ) и переменными для неотрицательных иррациональных чисел ( $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ ).

$S_3$  — элементарная арифметика с переменными для неотрицательных иррациональных чисел ( $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ ).

$S_4$  — элементарная арифметика с функциональными переменными ( $p, p_1, p_2, \dots$ ), в которой, однако, не разрешается строить суперпозиции из функциональных переменных.

$S_5$  — элементарная арифметика с функциональными переменными ( $p, p_1, p_2, \dots$ ), в которой разрешено построение суперпозиций, т. е. арифметика второго порядка.

(Более детальные определения систем  $S_2, S_3$  и  $S_4$  формулируются так же, как приведенные выше определения систем  $S_1$  и  $S_5$ .)

Мы покажем, что каково бы ни было множество  $A$ ,  $[A \text{ определимо в } S_1] \Leftrightarrow [A \text{ определимо в } S_2] \Leftrightarrow [A \text{ определимо в } S_3] \Leftrightarrow [A \text{ определимо в } S_4] \Leftrightarrow [A \text{ определимо в } S_5]$ . Искомый результат следует тогда из теоремы XI.

Для каждой пары соседних систем покажем, как формулы со свободными числовыми переменными одной системы можно перевести в эквивалентные (относительно интерпретации) формулы другой системы, также со свободными числовыми переменными. (Формулой со свободными числовыми переменными мы называем формулу, все свободные переменные которой — числовые. В частности, высказывания являются формулами со свободными числовыми переменными.) В каждом случае мы вкратце опишем метод перевода. В первых шести случаях (т. е. при рассмотрении первых трех эквивалентностей) предположим, что рассматриваемое выражение представлено в предваренной форме и затем все кванторы

общности ( $\forall$ ) заменяются кванторами существования и отрицаниями, т. е.  $\forall$  превращается в  $\exists$ ; затем опишем индуктивную процедуру для манипуляций с самым правым квантором существования по переменной, которая должна быть элиминирована. (На промежуточных этапах мы будем оперировать со „смешанными“ выражениями, содержащими символы обеих систем.) Доказательство эквивалентности данного выражения и его перевода отнесено в упр. 16-11.

(1)  $S_1 \rightarrow S_2$ :

$$(\exists \eta)M(\eta) \rightarrow (\exists r)M(r) \vee (\exists \zeta)M(\zeta).$$

$S_2 \rightarrow S_1$ :

$$(\exists \zeta)M(\zeta) \rightarrow (\exists \eta)[M(\eta) \& (\forall a)(\forall b)[b \neq 0 \Rightarrow a \neq b \times \eta]],$$

$$(\exists r)M(r) \rightarrow (\exists \eta)[M(\eta) \& (\exists a)(\exists b)[b \neq 0 \& a = b \times \eta]].$$

(2)  $S_2 \rightarrow S_3$ :

$$(\exists r)M(r) \rightarrow (\exists a)(\exists b)[b \neq 0 \& M(a/b)],$$

где  $M(a/b)$  — формула, полученная из  $M(r)$  подстановкой терма  $a/b$  вместо  $r$  с последующим избавлением от дробей по обычным правилам элементарной алгебры в каждой элементарной подформуле (т. е. равенстве).

$S_3 \rightarrow S_2$ : тривиально.

(3) Сопоставим каждой функции  $f$  неотрицательное иррациональное число  $\alpha$  следующим образом:  $[\alpha]$  (целая часть  $\alpha$ ) есть  $f(0)$ , а  $\alpha - [\alpha]$  разлагается в непрерывную дробь  $f(1) + 1, f(2) + 1, \dots$  (см. упр. 15-13). (Последовательные приближения числа  $\alpha$ , задаваемые последовательными начальными сегментами функции  $f$ , мы называем приближениями непрерывной дроби, задаваемой функцией  $f$ .) Таким образом, мы получаем взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{F}$  и совокупностью всех неотрицательных иррациональных чисел.

$S_3 \rightarrow S_4$ :

$$(\exists \zeta)M(\zeta) \rightarrow (\exists p)M'(p),$$

где  $M'(p)$  получается из  $M(\zeta)$  с помощью следующих преобразований каждой элементарной подформулы (т. е. равенства) формулы  $M(\zeta)$ . Пусть  $R(p, a, b, c)$  — формула системы  $S_4$ , определяющая (по теореме 15-XIX) рекурсивное отношение  $\{(f, x, y, z) \mid x/y \text{ есть } z\text{-е приближение непрерывной дроби, задаваемой } f\}$ . Пусть  $E_1(\zeta) = E_2(\zeta)$  — элементарная подформула формулы  $M(\zeta)$ . Заменим  $E_1(\zeta) = E_2(\zeta)$  на

$$\begin{aligned} & (\forall d) \left[ d \neq 0 \Rightarrow (\forall c_1)(\exists c_2)(\exists c) \left[ c = c_1 + c_2 \& (\exists a)(\exists b) \left[ R(p, a, b, c) \& \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \& (\exists a_1)(\exists a_2) \left[ a_2 \neq 0 \& \left( \left( E_1 \left( \frac{a}{b} \right) - E_2 \left( \frac{a}{b} \right) \right) \times \left( E_1 \left( \frac{a}{b} \right) - E_2 \left( \frac{a}{b} \right) \right) \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{d} \right] \right] \right], \end{aligned}$$

где  $E_1\left(\frac{a}{b}\right)$  и  $E_2\left(\frac{a}{b}\right)$  получены формальной подстановкой терма  $\frac{a}{b}$  вместо  $\zeta$ . Затем воспользуемся правилами элементарной алгебры, чтобы избавиться от дробей и исключить символ „—“ (с помощью простейших преобразований).

$S_4 \rightarrow S_3$ :

$$(\exists p)M(p) \rightarrow (\exists \zeta)M''(\zeta),$$

где  $M''(\zeta)$  получается с помощью следующих преобразований элементарных подформул. Пусть  $S(\zeta, a, b)$  утверждает, что если  $b = 0$ , то  $a = [\zeta]$ , а если  $b > 0$ , то  $a + 1$  есть  $b$ -й член разложения в непрерывную дробь числа  $\zeta - [\zeta]$ . Отправляясь от арифметического представления рекурсивных отношений (теорема 14-VI) и определений из упр. 15-13, легко показать, что  $S(\zeta, a, b)$  может быть задано формулой системы  $S_3$  (упр. 16-12). Пусть  $E(p(t_1), \dots, p(t_k))$  — некоторая элементарная подформула формулы  $M(p)$  с указанными  $k$  вхождениями переменной  $p$  ( $t_1, \dots, t_k$  — термы). Заменим  $E(p(t_1), \dots, p(t_k))$  на  $(\exists a_1) \dots (\exists a_k)[E(a_1, \dots, a_k) \& S(\zeta, a_1, t_1) \& \dots \& S(\zeta, a_k, t_k)]$  (где указаны подстановки в  $S$  и  $E$ ).

(4)  $S_4 \rightarrow S_5$ : тривиально.

$S_5 \rightarrow S_4$ : суперпозиции функциональных переменных в элементарных подформулах элиминируются так же, как в следующем примере:

$$p(p_1(a) + p(b)) = c \rightarrow (\exists a_1)(\exists b_1)[a_1 = p_1(a) \& b_1 = p(b) \& p(a_1 + b_1) = c].$$

В случае более сложных суперпозиций эта процедура последовательно выполняется нужное число раз, начиная с самых внешних вхождений функциональных переменных<sup>1)</sup>.

Этим завершается доказательство. ■

Пусть даны некоторое фиксированное кодирование (отображение) высказываний элементарного анализа на  $N$ , а также фиксированное кодирование высказываний арифметики второго порядка на  $N$ .

**Следствие XIII (а).** *Множество истинных высказываний элементарного анализа рекурсивно изоморфно множеству истинных высказываний арифметики второго порядка.*

<sup>1)</sup> Эта процедура, соединенная с процедурой замены функциональных символов символами отношений, известна в логике как метод *элиминирования описаний*.

**Доказательство.** Переводы, описанные в доказательстве теоремы, очевидно, отображают истинные высказывания в истинные, а ложные — в ложные. Отсюда следует, что множество истинных высказываний каждой системы 1-сводимо к множеству истинных высказываний другой системы<sup>1)</sup>. Отсюда по теореме 7-VI вытекает их рекурсивный изоморфизм. ■

**Определение.** Рассмотрим некоторое высказывание *арифметики второго порядка*, заданное в предваренной форме. Назовем это высказывание  $\Sigma_n^1$ -высказыванием, если его префикс есть  $\Sigma_n^1$ -префикс в смысле § 16.1. Аналогично для  $\Pi_n^1$ .

Рассмотрим высказывание *элементарного анализа*, заданное в предваренной форме. Назовем его  $\Sigma_n^1$ -высказыванием, если его префикс есть  $\Sigma_n^1$ -префикс в смысле § 16.1, если при этом кванторы по переменным для действительных чисел считать кванторами типа 1, а кванторы по переменным для натуральных чисел — кванторами типа 0. Аналогично для  $\Pi_n^1$ .

**Следствие XIII (б).** *Существует рекурсивная перестановка, отображающая истинные высказывания элементарного анализа на истинные высказывания арифметики второго порядка, которая также при всяком  $n$  отображает  $\Sigma_n^1$ -высказывания элементарного анализа на  $\Sigma_n^1$ -высказывания арифметики второго порядка, а  $\Pi_n^1$ -высказывания элементарного анализа — на  $\Pi_n^1$ -высказывания арифметики второго порядка.*

**Доказательство.** Легко проверяется, что  $\Sigma_n^1$ -высказывания переводятся в доказательство теоремы в высказывания, которые при приведении к предваренной форме становятся  $\Sigma_n^1$ -высказываниями. Изменения в процессе перевода, связанные с конструкцией из теоремы 7-VI, приводят к требуемому результату (упр. 16-13). ■

Дальнейшие результаты этого параграфа формулируются для элементарного анализа. Как видно из теоремы XIII и следствия XIII (б), эти результаты верны *mutatis mutandis* и для арифметики второго порядка. Такая „эквивалентность“ элементарного анализа и арифметики второго порядка, описанная в теореме XIII и ее следствиях, будет широко использоваться в доказательствах<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Автор, конечно, предполагает, что данные кодирования обладают обычными свойствами эффективности (см. § 1.10), благодаря которым эффективные (в нестрогом смысле) правила перевода порождают рекурсивные *свободные функции*. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Мы не будем касаться вопроса о формальной выводимости в этих системах (исключая подсистемы некоторой стандартной теории множеств, см. ниже). Если рассмотреть в арифметике второго порядка подходящий вариант аксиом Пеано вместе с аксиомами свертывания (все аксиомы *виде*

Отметим, между прочим, что если мы возьмем элементарную арифметику и заменим переменные для натуральных чисел переменными для действительных чисел, то мы получим намного более слабую систему, чем элементарный анализ; в самом деле, эта новая система (называемая нами *элементарной теорией действительных чисел*) разрешима (как отмечалось в § 2.2.) Отсюда в силу неразрешимости элементарной арифметики, а потому и систем  $S_5$  и  $S_1$  следует, что множество  $N$  не может быть определено в элементарной теории действительных чисел. Ниже мы увидим, что множество истинных высказываний элементарного анализа не является даже аналитическим.

В связи с теоремой XII отметим, что описанное в теореме 15-XII явление не может встретиться для аналитических множеств чисел. Если некоторое множество неявно определимо, то оно и явно определимо с помощью конструкции, использованной при доказательстве теоремы XI (упр. 16-14).

### Приложения к логике<sup>1)</sup>

**Определение.** Обозначим через  $V^*$  множество истинных высказываний элементарного анализа (при некотором фиксированном кодировании высказываний элементарного анализа натуральными числами).

Множество  $V^*$  не является аналитическим. Действительно, справедлив следующий аналог теоремы 14-X.

**Теорема XIV.**  $V^* \equiv E^\omega$ .

**Доказательство.** Сначала аналогичный результат доказывается для арифметики второго порядка, а затем применяется следствие XIII. Доказательство проводится так же, как и в теореме 14-X (упр. 16-15). ■

( $\forall \dots$ ) ( $\exists p$ ) ( $\forall a$ ) [ $p(a) = 0 \Leftrightarrow S$ ], где  $S$  — произвольная формула, не содержащая  $p$  в качестве свободной переменной, а ( $\forall \dots$ ) обозначает кванторы общности по всем свободным в формуле  $S$  переменным, отличным от  $a$ ) и если в элементарном анализе взяты аналоги этих аксиом, то при этих аксиоматизациях переводы из теоремы XIII (а потому и рекурсивная перестановка из следствия XIII (b)) сохраняют выводимость в исчислении предикатов. Выражения „арифметика второго порядка“ и „теория чисел второго порядка“ иногда используются в литературе для обозначения совокупности высказываний элементарной арифметики, выводимых из таких аксиом (эта совокупность — одна и та же для обеих систем). Мы, конечно, пользуемся термином „арифметика второго порядка“ как называнием логической системы, именуемой  $S_5$  в доказательстве теоремы XIII. Более того, мы рассматриваем также высказывания, содержащие переменные для функций (наряду с высказываниями элементарной арифметики), и занимаемся истинными высказываниями, а не выводимыми из некоторой системы аксиом.

**Определение.** Обозначим через  $V_n^*$  множество всех истинных  $\Sigma_n^1$ -высказываний элементарного анализа. (В частности,  $V_0^* \equiv V^1$ .)

**Следствие XIV.**  $V_n^* \equiv E^n$  при всяком  $n > 0$ .

**Доказательство.** В первой части доказательства теоремы (подобно доказательству теоремы 14-X) применение правил преобразования кванторов из теоремы III непосредственно приводит к тому, что для любого числа  $\langle x, n \rangle$  существует соответствующее  $\Sigma_n^1$ -высказывание, истинное тогда и только тогда, когда  $x \in E^n$ . Отсюда следует, что  $E^n \leqslant_1 V_n^*$ . Во второй части доказательства устанавливается, что  $V_n^* \leqslant_1 E^n$ . Поэтому  $V_n^* \equiv E^n$  (см. упр. 16-16). ■

**Следствие XIV** сильнее соответствующего результата для арифметической иерархии (следствия 14-X). Поэтому аналоги теорем 14-XI, 14-XII и 14-XIII могут быть доказаны проще (а для теоремы 14-XI и в более сильной форме). Мы даем лишь формулировки, оставляя доказательства в качестве упражнений. Эти результаты относятся к дальнейшему обобщению теоремы Гёделя о неполноте. Используемая нами ниже терминология введена в § 14.7.

**Теорема XV.** Пусть дана некоторая семантически непротиворечивая аксиоматизация элементарного анализа. Тогда для всякого  $n$  существует такое  $\Sigma_n^1$ -высказывание  $F_n$ , что ни для какого  $t < n$  не существует  $\Sigma_t^1$ -высказывания, эквивалентность которого высказыванию  $F_n$  была бы доказуема. Существует равномерная процедура, дающая по каждому  $n$  соответствующее  $F_n$ .

**Доказательство.** См. упр. 16-17. ■

**Следствие XV.** Пусть даны некоторая семантически непротиворечивая аксиоматизация элементарного анализа и некоторое множество  $A$  истинных высказываний,  $A \in \Sigma_n^1$ . Тогда существует истинное  $\Sigma_{n+1}^1$ -высказывание, не выводимое (при данной аксиоматизации) из множества  $A$ .

**Доказательство.** См. упр. 16-17. ■

Возьмем теперь, как и прежде, систему аксиом ZF теории множеств. Высказывания элементарного анализа могут быть отождествлены с некоторыми высказываниями теории множеств. Назовем совокупность всех высказываний элементарного анализа, соответствующих при этом вложении доказуемым высказываниям теории

1) Эти множества различны, так как  $V$  определено для кодирования высказываний элементарной арифметики натуральными числами, а  $V_0^*$  — для кодирования высказываний элементарного анализа.

множеств, теоретико-множественным анализом<sup>1)</sup>). Семантическая непротиворечивость теоретико-множественного анализа может быть выражена внутри теории множеств, так как в теории множеств определимо множество  $E^\omega$ .

**Определение.** Высказывание теории множеств называется *аналитически выражимым*, если в  $ZF$  может быть доказана его эквивалентность некоторому высказыванию элементарного анализа.

**Определение.** Обозначим через  $\Sigma_n^{1, ZF}$  множество всех высказываний теории множеств, эквивалентность которых  $\Sigma_n^1$ -высказываниям элементарного анализа доказуема в  $ZF$ . (Так что в обозначениях гл. 14  $\Sigma_0^{1, ZF} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n^{ZF}$ .) Аналогично определяются  $\Pi_n^{1, ZF}$ .

Используя фиктивные кванторы, получаем, что для всех  $n$

$$\Sigma_n^{1, ZF} \cup \Pi_n^{1, ZF} \subset \Sigma_{n+1}^{1, ZF} \cap \Pi_{n+1}^{1, ZF}.$$

Приходим теперь к следующему аналогу теоремы 14-XII.

**Теорема XVI.** Если теоретико-множественный анализ семантически непротиворечив, то при всяком  $n$  в  $\Sigma_{n+1}^{1, ZF} - \Pi_{n+1}^{1, ZF}$  (а потому и в  $\Pi_{n+1}^{1, ZF} - \Sigma_{n+1}^{1, ZF}$ ) существуют высказывания теории множеств.

Доказательство непосредственно следует из теоремы VIII и следствия XIV.

В теореме 14-XIII мы построили (в предположении, что система  $ZF$  непротиворечива) не выражимое арифметически высказывание теории множеств. Так как множество  $V$  аналитично, легко показать, что конкретное высказывание, указанное в том доказательстве, аналитически выражимо. Однако, используя тот же метод доказательства, мы можем получить следующий результат.

**Теорема XVII.** Если система аксиом  $ZF$  теории множеств непротиворечива, то существует не выражимое аналитически высказывание теории множеств.

Доказательство. См. упр. 16-18.

Неполнота анализа относительно любой аналитической аксиоматизации (следствие XV выше) представляет особый интерес

<sup>1)</sup> Мы применяем эту терминологию для краткости. Более точным названием, допускающим меньше разночтений, было бы „теоретико-множественный элементарный анализ“ или „теоретико-множественная арифметика второго порядка“. Наше сокращение неоправданно общо; в элементарном анализе, как мы его определили, нельзя, например, говорить о множествах действительных чисел.

ввиду чрезвычайно неконструктивной природы аналитических множеств более высоких уровней, чем  $\Delta_2^1$  (см. замечания о  $\Delta_2^1$  в § 16.1).

Из результатов об элементарном анализе получаются результаты, касающиеся чистой логики. Если мы будем интерпретировать „+“ и „×“ как не имеющие жесткой интерпретации символы, а „0“ и „1“ как не имеющие жесткой интерпретации символы чисел, все остальные нумералы и будем представлять как  $(\dots((1+1)+1\dots+1)(n\text{ раз}))$  и примем при этом семантические соглашения чистой логики второго порядка (т. е. будем считать, что для всякой непустой области  $\mathcal{D}$ , которую пробегают числовые переменные, функциональные переменные пробегают совокупность всех отображений области  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$ ), то можно указать такую формулу  $P$ , что для любого высказывания  $F$  арифметики второго порядка  $[P \Rightarrow F]$  есть универсально истинная (общезначимая) формула логики второго порядка (тогда и только тогда, когда  $F$  — истинное высказывание арифметики второго порядка). (Достаточно взять в качестве  $P$  конъюнкцию подходящих вариантов аксиом Пеано; эта конъюнкция может быть сделана конечной, потому что принцип индукции, приведенный в начале этого параграфа (как пример высказывания арифметики второго порядка) теперь допустим.) Теорема о неполноте чистой логики второго порядка вытекает теперь из теоремы XV. В действительности мы получаем даже, что множество всех истинных высказываний чистой логики второго порядка не является аналитическим<sup>1)</sup>.

Если мы откажемся от семантических соглашений логики второго порядка и вместо этого разрешим модели (т. е. семантической интерпретации) содержать (i) произвольную непустую совокупность объектов  $\mathcal{D}$ , которую пробегают числовые переменные, и (ii) произвольную непустую совокупность  $\mathcal{D}'$  отображений из  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$ , пробегаемую функциональными переменными<sup>2)</sup>, то окажется возможным получить интерпретации, в которых все истинные высказывания арифметики второго порядка выполняются, но  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}'$  оказываются счетными множествами. Такие интерпретации называются *счетными моделями* (для истинных высказываний арифметики второго порядка). (При построении всякой такой модели задается некоторое сопоставление символам „+“ и „×“ некоторых отображений из  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$  и сопоставление символам „0“ и „1“ некоторых элементов совокупности  $\mathcal{D}$ . Как

<sup>1)</sup> Чистая логика второго порядка определяется и рассматривается у Чёрча [1956, гл. 5].

<sup>2)</sup> Это означает (в действительности), что мы принимаем семантические соглашения логики (предикатов) первого порядка и интерпретируем высказывания арифметики второго порядка как высказывания двусортной системы первого порядка.

и раньше, мы представляем нумерал  $n$  ( $n > 1$ ) как  $(\dots((1 + 1) + 1) + \dots + 1)$  ( $n$  раз.).)

Интерпретация, в которой выполняются все истинные высказывания арифметики второго порядка и в которой  $\mathcal{D}$  есть множество  $N$ , а „0“, „1“, „+“ и „ $\times$ “ интерпретируются обычным образом, называется  $\omega$ -моделью (для истинных высказываний арифметики второго порядка). В упр. 16-20 мы обнаружим существование счетных  $\omega$ -моделей для истинных высказываний арифметики второго порядка.

### § 16.3. ДЕРЕВЬЯ С КОНЕЧНЫМИ ПУТЯМИ<sup>1)</sup>

Функциональное дерево  $\mathcal{J}^*$  было определено в упр. 9-42 и рассматривалось потом в § 15.2 при изучении открытых-замкнутых классов. В этих рассмотрениях использовались также понятия поддерева, ветви, подветви и дерева с конечными путями. Деревья с конечными путями будут играть важную роль в нашем исследовании аналитической иерархии.

Напомним, что функциональное дерево  $\mathcal{J}^*$  есть совокупность всех кортежей натуральных чисел, упорядоченная отношением „быть начальным отрезком кортежа“. Далее (в отличие от предыдущего) мы будем трактовать это отношение как  $\geqslant$ , т. е.  $a \geqslant b \Leftrightarrow a$  есть начальный отрезок кортежа  $b \Leftrightarrow a$  „выше“  $b \Leftrightarrow b$  „ниже“  $a$ . (Таким образом, мы представляем себе дерево „растущим вниз“.)

В дальнейшем, говоря о деревьях, мы подразумеваем поддеревья дерева  $\mathcal{J}^*$ . Образующие его кортежи называются элементами или вершинами. Всякое непустое дерево имеет  $\emptyset$ , пустой кортеж, своей наибольшей вершиной. Если у дерева есть минимальные вершины, то иногда мы называем их заключительными вершинами.

Проиллюстрируем нашу терминологию следующими примерами.

Пусть  $\mathcal{A}_1$  состоит из всех кортежей натуральных чисел.

Пусть  $\mathcal{A}_2$  состоит из  $\emptyset$  (пустого кортежа) и всех кортежей, построенных из нулей, т. е.  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \langle 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 0, 0 \rangle, \dots\}$ .

Пусть  $\mathcal{A}_3$  состоит из  $\emptyset, \langle 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle$  и  $\langle 0, 0, 0 \rangle$ .

Пусть  $\mathcal{A}_4$  состоит из  $\emptyset, \langle 0, 0 \rangle$  и  $\langle 0, 0, 0 \rangle$ .

Пусть  $\mathcal{A}_5$  состоит из  $\emptyset$  и всех кортежей вида  $\langle n, n + 1, \dots, m \rangle$ ,  $0 \leqslant n, n \leqslant m \leqslant 2n$ .

Пусть  $\mathcal{A}_6$  имеет  $\emptyset$  своим единственным элементом.

Пусть  $\mathcal{A}_7$  пусто.

Деревьями здесь будут  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6$  и  $\mathcal{A}_7$ ;  $\mathcal{A}_4$  — не дерево, так как в нем отсутствует вершина  $\langle 0 \rangle$ .  $\mathcal{A}_1$  есть дерево  $\mathcal{J}^*$ . Кажд-

<sup>1)</sup> В оставшихся параграфах этой главы временами предполагается некоторое знакомство с понятием конструктивного ординала и с системой обозначений  $O$  (§ 11.7 и 11.8).

ое дерево есть поддерево самого себя. Далее,  $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6$  и  $\mathcal{A}_7$  являются поддеревьями дерева  $\mathcal{A}_1$ ;  $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_6$  и  $\mathcal{A}_7$  — поддеревья дерева  $\mathcal{A}_2$ ;  $\mathcal{A}_6$  и  $\mathcal{A}_7$  — поддеревья дерева  $\mathcal{A}_5$ ; наконец,  $\mathcal{A}_7$  — поддерево дерева  $\mathcal{A}_6$ .  $\mathcal{A}_1$  имеет  $2^\infty$  бесконечных ветвей — по одной ветви на каждую бесконечную последовательность натуральных чисел (т. е. по одной ветви на каждый элемент совокупности  $\mathcal{F}$ ). Дерево  $\mathcal{A}_2$  имеет единственную бесконечную ветвь, соответствующую функции  $\lambda x[0]$ . Дерево  $\mathcal{A}_3$  имеет единственную ветвь, которая конечна и является подветвью ветви дерева  $\mathcal{A}_2$ . Дерево  $\mathcal{A}_5$  имеет  $\aleph_0$  ветвей, причем все они конечны. У  $\mathcal{A}_6$  — только одна ветвь; эта ветвь является подветвью всех ветвей деревьев  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_5$  и  $\mathcal{A}_6$ . Дерево  $\mathcal{A}_7$  имеет единственную ветвь; эта ветвь пуста и является подветвью всех ветвей всех деревьев.  $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6$  и  $\mathcal{A}_7$  — деревья с конечными путями;  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  не являются таковыми.

Обозначения. Деревья будут обозначаться буквами  $\tau, \tau_0, \tau_1, \dots$ . Всюду ниже из контекста будет ясно, обозначает символ „ $\tau$ “ дерево или функцию пересчета пар из § 5.3.

Для кодирования вершин мы будем пользоваться кодовыми числами соответствующих кортежей. Именно, для любых  $f$  и  $x$  кодовым числом  $(x + 1)$ -й вершины, принадлежащей ветви функционального дерева, определяемой функцией  $f$ , будет служить  $\bar{f}(x)$ . В частности,  $\bar{f}(0)$  есть код наибольшей вершины  $\emptyset$ . (Напомним, что для всех  $f$  имеем  $\bar{f}(0) = 0$ .) Для различных целей мы будем отождествлять вершины с кодовыми числами кортежей, а деревья — с некоторыми множествами кодовых чисел. Заметим, что дерево  $\tau$  является деревом с конечными путями тогда и только тогда, когда  $(\forall f)(\exists x)$  [вершина (закодированная посредством)  $\bar{f}(x)$  не принадлежит  $\tau$ ].

Одинарные числа могут быть использованы для классификации деревьев с конечными путями. Пусть дано дерево  $\tau$  с конечными путями. Если  $\tau$  не пусто, определим на вершинах  $\tau$  функцию  $o_\tau$ , значениями которой будут одинарные числа, следующим образом.

Если  $a$  — минимальная вершина дерева  $\tau$ , то положим  $o_\tau(a) = 1$ .

Если  $a$  не минимальна в  $\tau$ , то  $o_\tau(a) =$  наименьшей ординал, больший всех ординалов в множестве  $\{o_\tau(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ , где  $\mathcal{B} = \{b \mid b$  расположена ниже  $a$  в  $\tau\}$ .

Легко показать (пользуясь конечностью путей в  $\tau$ ), что это индуктивное определение задает единственную функцию на дереве  $\tau$ . Ординал, сопоставленный функцией  $o_\tau$  наибольшему элементу  $\tau$ , называется ординалом дерева  $\tau$  и обозначается  $o(\tau)$ . Если  $\tau$  пусто, мы полагаем его ординал равным 0. Заметим, что если

$\tau_1 \subseteq \tau_2$ , то  $o(\tau_1) \leq o(\tau_2)$ . В приведенных выше примерах  $o(\mathcal{A}_3) = 4$ ,  $o(\mathcal{A}_5) = \omega$ ,  $o(\mathcal{A}_6) = 1$  и  $o(\mathcal{A}_7) = 0$ <sup>1)</sup>.

Какие ординалы таким способом сопоставляются деревьям? Заметим сначала, что для фиксированного дерева  $\tau$  с конечными путями любой ненулевой ординал, меньший  $o(\tau)$ , появляется как значение функции  $o_\tau$  (упр. 16-23). Поэтому, так как множество вершин дерева  $\tau$  не более чем счетно,  $o(\tau)$  должен быть счетным ординалом. Обратно, всякий счетный ординал является ординалом некоторого дерева с конечными путями. Чтобы доказать это, допустим, что  $\alpha$  — некоторый счетный ординал. Для каждого предельного порядкового числа  $\beta$ ,  $\beta \leq \alpha$ , выберем некоторую фиксированную фундаментальную последовательность, имеющую  $\beta$  своим пределом. Сопоставим ординалы вершинам функционального дерева следующим образом. Если  $\alpha \neq 0$ , сопоставим  $\alpha$  наибольшей вершине функционального дерева. Пусть ординал  $\gamma$  сопоставлен некоторой вершине  $a$ . Если  $\gamma = \beta + 1$  и  $\beta \neq 0$ , поставим  $\beta$  в соответствие каждой из (бесконечно многих) вершин, лежащих непосредственно ниже вершины  $a$ . Если же  $\gamma$  — предельный ординал, мы сопоставляем ненулевые элементы выбранной ранее для  $\gamma$  фундаментальной последовательности порядковых чисел элементам (бесконечной) последовательности вершин, лежащих непосредственно ниже  $a$ . Рассмотрим те вершины, которым описанной индуктивной процедурой сопоставлены некоторые ординалы. Легко видеть, что они образуют дерево  $\tau$  с конечными путями, причем  $o(\tau) = \alpha$  (упр. 16-24). Итак, доказана следующая

**Теорема XVIII.** (а) Для каждого дерева  $\tau$  с конечными путями существует такой счетный ординал  $\alpha$ , что  $o(\tau) = \alpha$ .

(б) Для каждого счетного ординала  $\alpha$  существует такое дерево  $\tau$  с конечными путями, что  $o(\tau) = \alpha$ .

**Доказательство.** См. приведенное выше рассуждение<sup>2)</sup>. ■

Для деревьев с конечными путями можно естественным образом определить операции сложения и умножения. Мы дадим эти определения неформально. Пусть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — деревья с конечными путями. (1) Дерево  $\tau_1 + \tau_2$  — по определению дерево с конечными

<sup>1)</sup> Для некоторых целей (при трактовке понятия дерева с конечными путями как обобщения понятия ординального числа) было бы удобнее ограничиться рассмотрением непустых деревьев и определять  $o_\tau$ , полагая  $o_\tau(a) = 0$  на минимальных вершинах  $a$ . Мы не делаем этого, потому что хотим включить пустое дерево в число деревьев с конечными путями.

<sup>2)</sup> Деревья с конечными путями позволяют наглядно представлять себе ординалы. В частности, иногда легче представлять себе такие ординалы, как  $\omega$ ,  $\omega^\omega$  и  $\varepsilon_0$ , и работать с ними с помощью деревьев с конечными путями, а не с помощью полных упорядочений.

путями, получающееся „присоединением“ к каждому заключительному элементу дерева  $\tau_2$  копии дерева  $\tau_1$ . (2) Дерево  $\tau_1 \cdot \tau_2$  — по определению дерево с конечными путями, получающееся в результате „вставки“ по одному экземпляру дерева  $\tau_1$  в каждую вершину дерева  $\tau_2$ . Эти операции согласуются с обычными операциями сложения и умножения для ординалов:  $o(\tau_1 + \tau_2) = o(\tau_1) + o(\tau_2)$  и  $o(\tau_1 \cdot \tau_2) = o(\tau_1) \cdot o(\tau_2)$  (упр. 16-25).

**Определение.** Пусть даны натуральное число  $n$  и кодовое число  $y$  кортежа  $\langle y_1, \dots, y_k \rangle$ . Тогда  $n \otimes y$  есть по определению кодовое число кортежа  $\langle n, y_1, \dots, y_k \rangle$ <sup>1)</sup>.

**Определение.** Пусть  $\tau$  — некоторое дерево;  $n$ -м отростком дерева  $\tau$  назовем дерево, состоящее из всех таких кодовых чисел  $y$ , что  $n \otimes y$  принадлежит дереву  $\tau$ . (В примерах из начала этого параграфа всякий отросток дерева  $\mathcal{A}_1$  есть само  $\mathcal{A}_1$ ; все отростки  $\mathcal{A}_2$ , кроме 0-го, который есть само  $\mathcal{A}_2$ , пусты; всякий отросток  $\mathcal{A}_3$ , кроме 0-го, который есть  $\{\emptyset, \langle 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle\}$ , пуст; все отростки  $\mathcal{A}_6$  и  $\mathcal{A}_7$  пусты.)

Для некоторых видов индуктивных рассуждений полезно уметь сводить вопросы о свойствах деревьев с конечными путями к вопросам об их отростках. В следующей комбинаторной лемме мы показываем, как можно сравнивать ординальные размеры деревьев с конечными путями с помощью подходящего сравнения ординальных размеров их отростков.

**Основная лемма о деревьях.** Пусть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — деревья с конечными путями. Тогда

$$\begin{aligned} o(\tau_1) < o(\tau_2) &\Leftrightarrow [o(\tau_1) = 0 \& o(\tau_2) = 1] \vee (\exists \text{ отросток } \sigma_2 \text{ дерева } \tau_2) (\forall \text{ отросток } \sigma_1 \text{ дерева } \tau_1) [o(\sigma_1) < o(\sigma_2)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [o(\tau_2) \neq 0 \& o(\tau_1) = 0 \vee (\exists \text{ отросток } \sigma_2 \text{ дерева } \tau_2) (\forall \text{ отросток } \sigma_1 \text{ дерева } \tau_1) [o(\sigma_1) < o(\sigma_2)]]. \end{aligned}$$

**Доказательство:** См. упр. 16-26. ■

Всякое дерево можно рассматривать как совокупность кодовых чисел кортежей. Характеристическая функция этого множества кодовых чисел называется *характеристической функцией данного дерева*.

**Определение.** Пусть  $\tau$  — дерево. Назовем  $\tau$  *рекурсивным деревом*, если его характеристическая функция рекурсивна.

<sup>1)</sup> Если, в частности,  $y$  — кодовое число пустого кортежа, то  $n \otimes y$  есть кодовое число кортежа  $\langle n \rangle$ . В § 13.7 мы определили  $n \otimes f$  для натурального  $n$  и функции  $f$ . Эти два определения связаны так:  $n \otimes (f(x)) = (n \otimes f)(x + 1)$ .

Если  $\varphi_z$  — характеристическая функция дерева  $\tau$ , то, очевидно,  $\lambda y[\varphi_z(n \otimes y)]$  — характеристическая функция  $n$ -го отростка дерева  $\tau$ , и некоторый индекс этой характеристической функции может быть найден равномерно по  $z$  и  $n$ .

**Определение.** Пусть  $b$  — некоторая (фиксированная) общерекурсивная функция, такая, что  $\Phi_{b(n), z} = \lambda y[\varphi_z(n \otimes y)]$  при всех  $n$  и  $z$ .

**Определение.**  $T = \{z \mid \varphi_z \text{ есть характеристическая функция некоторого дерева с конечными путями}\}$ .

Можно считать, что элементы множества  $T$  суть „обозначения“ рекурсивных деревьев с конечными путями (наподобие „обозначений“ рекурсивных ординалов, рассмотренных в упр. 11-61).

**Определение.** Для  $z \in T$  положим  $\tau_z$  — дерево, определяемое функцией  $\varphi_z$ , а  $\|z\| = o(\tau_z)$ .

Какие ординалы соответствуют рекурсивным деревьям с конечными путями? На этот вопрос отвечает следующая

**Теорема XIX.** (а) Для всякого рекурсивного дерева  $\tau$  с конечными путями существует такой конструктивный ординал  $\alpha$ , что  $o(\tau) = \alpha$ .

(б) Для всякого конструктивного ординала  $\alpha$  существует такое рекурсивное дерево  $\tau$  с конечными путями, что  $\alpha = o(\tau)$ .

**Доказательство.** (а) Пусть  $\tau$  — произвольное дерево. Каждая вершина дерева  $\tau$  есть кортеж. Линейно упорядочим эти кортежи следующим отношением: положим  $a < b$ , если  $b$  — собственный начальный отрезок кортежа  $a$  или (если ни  $a$ , ни  $b$  не являются начальными отрезками друг друга) если первый элемент кортежа  $a$ , отличный от соответствующего элемента кортежа  $b$ , меньше, чем этот элемент кортежа  $b$ . Например,  $\langle 0, 4, 7, 9 \rangle$  меньше, чем  $\langle 0, 4 \rangle$ , а  $\langle 0, 3 \rangle$  меньше, чем  $\langle 0, 4, 7, 9 \rangle$ . Это упорядочение дерева  $\tau$  известно как *упорядочение Клини — Брауэра*. Легко показать, что упорядочение Клини — Брауэра является вполне-упорядочением тогда и только тогда, когда  $\tau$  — дерево с конечными путями, и что ординал упорядочения Клини — Брауэра больше или равен  $o(\tau)$  (упр. 16-27). Предположим, что  $\tau$  — рекурсивное дерево с конечными путями. Тогда упорядочение Клини — Брауэра дерева  $\tau$  есть рекурсивное вполне-упорядочение (упр. 16-27). Поэтому его порядковый тип есть рекурсивный ординал, а значит, по теореме 11-XX конструктивный ординал. Поэтому и  $o(\tau)$  — конструктивный ординал.

(б) Если  $\alpha = 0$ , то возьмем в качестве  $\tau$  пустое дерево, очевидно рекурсивное.

Пусть теперь  $\alpha$  — ненулевой конструктивный ординал. Возьмем некоторое обозначение ординала  $\alpha$  в системе обозначений  $O$  из § 11.7. Всякое предельное обозначение в системе  $O$  эффективно

и однозначно определяет некоторую фундаментальную последовательность обозначений. Если мы теперь построим дерево с конечными путями, использованное при доказательстве пункта (б) из теоремы XVIII, то увидим, что это дерево рекурсивно (упр. 16-28). ■

Можно определить и другие виды „эффективных“ деревьев с конечными путями. Мы упомянем здесь о двух таких подходах: (1) назовем дерево с конечными путями *рекурсивно перечислимым*, если его вершины (т. е. кодовые числа соответствующих кортежей) образуют рекурсивно перечислимое множество; (2) назовем дерево  $\tau$  с конечными путями *строго рекурсивным*, если существует такая общерекурсивная функция  $h$ , что  $h(x) = 2$ , если  $x$  есть незаключительная вершина (точнее, ее кодовое число) дерева  $\tau$ ,  $h(x) = 1$ , если  $x$  — заключительная вершина дерева  $\tau$ , и  $h(x) = 0$ , если  $x$  не есть вершина дерева  $\tau$ . „Рекурсивные“ деревья с конечными путями, упомянутые в § 15.2, суть в действительности строго рекурсивные деревья. Легко показать, что существуют рекурсивно перечислимые, но не рекурсивные деревья с конечными путями и что существуют рекурсивные деревья с конечными путями, не являющиеся строго рекурсивными. Также легко показать, что все три определения приводят к одним и тем же ординалам, именно к конструктивным ординалам (упр. 16-29).

Какова степень множества  $T$ ? Каково ее положение в аналитической иерархии? Мы ответим на эти вопросы следующей теоремой.

**Теорема XX.** Множество  $T$  есть полное  $\Pi_1^1$ -множество, т. е.  $(\forall A)[A \in \Pi_1^1 \Leftrightarrow A \leqslant_1 T]$  (и потому  $\bar{T} \equiv E^1$ ).

**Доказательство.** Покажем сначала, что  $T$  есть  $\Pi_1^1$ -множество. Заметим, что  $\varphi_z$  — характеристическая функция некоторого дерева  $\Leftrightarrow [(\forall x)[\varphi_z(x) = 0 \vee \varphi_z(x) = 1] \& (\forall x)(\forall y)[[\varphi_z(y) = 1 \& \text{вершина } (x, y) \text{ соответствующая кодовому числу } x \text{ есть начальный отрезок (т. е. лежит выше) вершины (соответствующей кодовому числу } y)] \Rightarrow \varphi_z(x) = 1]]$ . Применяя алгоритм Тарского — Куратовского, находим, что существует такое рекурсивное отношение  $C$ , что  $\varphi_z$  — характеристическая функция некоторого дерева  $\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)C(x, y, z)$ . Итак, мы имеем  $z \in T \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)C(x, y, z) \& (\forall f)(\exists x)[\varphi_z(f(x)) = 0]$ . Поэтому с помощью алгоритма Тарского — Куратовского получаем  $T \in \Pi_1^1$ .

Остается показать, что  $A \leqslant_1 T$  для всякого  $A \in \Pi_1^1$ . Пусть  $A \in \Pi_1^1$ . Тогда по теореме V  $A = \{x \mid (\forall f)(\exists w)T_{1, 1}^*(z, f(w), x)\}$  при некотором  $z$ . Пусть дано  $x$ . Определим функцию  $\psi$  следующим образом:

$$\psi(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \neg T_{1, 1}^*(z, y, x); \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из определения отношения  $T^*$  следует, что  $\psi$  — характеристическая функция некоторого дерева. Более того,  $\psi$  общерекурсивна, и ее индекс эффективно зависит от  $x$ . Возьмем такую взаимно однозначную общерекурсивную функцию  $h$ , что  $\psi = \Phi_{h(x)}$ . Тогда  $x \in A \Leftrightarrow \psi$  есть характеристическая функция некоторого дерева с конечными путями  $\Leftrightarrow h(x) \in T$ . Поэтому  $A \leqslant_1 T$  посредством функции  $h$ .

**Следствие XX.** (a) Существует такая общерекурсивная функция  $f^*$  двух переменных, что для всякого  $z$  множество с  $\Pi_1^1$ -индексом  $z$  сводится к  $T$  посредством функции  $\lambda x[f^*(z, x)]$ .

**Доказательство.** Индекс функции  $\psi$ , получающейся из доказательства теоремы, равномерно зависит от  $z$  и  $x$ .

**Следствие XX.** (b) Множества  $O$  и  $W$ , определенные в § 11.7 и упр. 11-61,  $\Pi_1^1$ -полны. Поэтому  $T \equiv O \equiv W$ .

**Доказательство.** В § 16.1 мы показали, что  $W \in \Pi_1^1$ . Поэтому  $W \leqslant_1 T$ . В упр. 16-27, используя упорядочение Клини — Брауэра, мы покажем, что  $T \leqslant_1 W$ . В упр. 11-61 показано, что  $O \equiv W$ . Поэтому  $T \equiv O \equiv W$ , и все три множества  $\Pi_1^1$ -полны.

Из теоремы об иерархии вытекает, что ни одно из этих трех множеств не гиперарифметично (и тем более не является арифметическим).

Мы воспользуемся рекурсивными деревьями с конечными путями при изучении  $\Pi_1^1$ -множеств, гиперарифметических множеств и  $\Delta_2^1$ -множеств. При доказательстве теоремы XX мы видели, каким образом произвольная предикатная форма  $\Pi_1^1$ -множества сопоставляет рекурсивные деревья с конечными путями элементам этого  $\Pi_1^1$ -множества. В следующем параграфе мы увидим, что степень неразрешимости  $\Pi_1^1$ -множества зависит от ординалов, задаваемых этими деревьями с конечными путями.

В заключение дадим следующее

**Определение.** Для любого ординала  $\alpha$  положим  $T_\alpha = \{z \mid z \in T \& \|z\| < \alpha\}$ .

Заметим, что  $\alpha < \beta \Rightarrow T_\alpha \subset T_\beta$ , что  $\alpha$  не конструктивен тогда и только тогда, когда  $T_\alpha = T$ , и что  $T_\alpha$  является цилиндром при всяком  $\alpha$ .

#### § 16.4. $\Pi_1^1$ -МНОЖЕСТВА И $\Delta_1^1$ -МНОЖЕСТВА

В этом параграфе мы получим некоторые фундаментальные результаты относительно  $\Delta_1^1$ -множеств и  $\Pi_1^1$ -множеств.

Первым эти результаты получил Спектор (используя главным образом рекурсивные ординалы, а не рекурсивные деревья с конечными путями).

**Определение.** Пусть  $A \in \Delta_1^1$ . Назовем  $w = \langle u, v \rangle$   $\Delta_1^1$ -индексом множества  $A$ , где  $u$  — некоторый  $\Sigma_1^1$ -индекс множества  $A$ , а  $v$  — некоторый его  $\Pi_1^1$ -индекс.

**Теорема XXI.** Для всякого конструктивного ординала  $\alpha$  имеем  $T_\alpha \in \Delta_1^1$ . Более того, этот результат верен равномерно в следующем смысле: ( $\exists$  общерекурсивная  $g$ ) ( $\forall z$ ) [ $z \in T \Rightarrow g(z)$  есть  $\Delta_1^1$ -индекс множества  $T_{\|z\|}$ ].

В доказательстве теоремы XXI используется теорема о рекурсии. Применение теоремы о рекурсии в этом доказательстве, а также в некоторых следующих ниже доказательствах оформлено в виде леммы, называемой нами леммой о рекурсии. Она обобщает упр. 11-33. Один из вариантов этой леммы содержится у Роджерса [1959a]; приводимый ниже вариант леммы имеется у Эндертона [1964].

**Определение.** Будем говорить, что частичное упорядочение удовлетворяет условию минимальности, если всякое непустое подмножество этого частичного упорядочения имеет минимальный элемент (или, эквивалентно (при наличии аксиомы выбора), если в нем нет бесконечных убывающих цепей).

**Лемма о рекурсии.** Пусть  $S \subset N$  частично упорядочено отношением  $<_S$ , где  $<_S$  — частичное упорядочение с условием минимальности. Для всякого  $y \in S$  положим  $S_y = \{x \mid x <_S y\}$ . Пусть  $R \subset N^2$  — некоторое данное отношение. Для всякого  $S' \subset S$  назовем функцию  $\varphi$  удовлетворительной на  $S'$  (относительно  $R$ ), если  $\varphi$  определена по крайней мере на  $S'$  и  $(\forall x)[x \in S' \Rightarrow R(x, \varphi(x))]$ . Предположим, что существует такая частичнорекурсивная функция  $\eta$  двух переменных, что при любом  $y \in S$  и любом  $z$  имеем  $[\varphi_z \text{ удовлетворительна на } S_y \Rightarrow [\eta(z, y) \text{ определено и } R(y, \eta(z, y))]]$ . Тогда существует частичнорекурсивная функция  $\psi$ , удовлетворительная на  $S$  (и a fortiori  $(\forall x)[x \in S \Rightarrow (\exists w)R(x, w)]$ ).

**Замечание о мотивировке.** В применении  $R$  будет отношением, для которого мы хотим доказать, что  $(\forall x)[x \in S \Rightarrow (\exists w)R(x, w)]$ . Например, в теореме XXI в роли  $S$  выступает  $T$ , а  $R$  есть  $\{\langle x, w \rangle \mid x \in T \& T_{\|x\|} \in \Delta_1^1 \& w \text{ есть } \Delta_1^1\text{-индекс множества } T_{\|x\|}\}$ .

**Доказательство леммы о рекурсии.** Возьмем такую общерекурсивную функцию  $g$ , что для всех  $z$

$$\Phi_{g(z)} = \lambda y[\eta(z, y)].$$

По теореме о рекурсии найдем такое  $z_0$ , что  $\Phi_{z_0} = \Phi_{g(z_0)} = \lambda y[\eta(z_0, y)]$ . Мы утверждаем, что  $\Phi_{z_0}$  есть искомая функция  $\psi$ .

Допустим противное. Тогда множество  $\{x \mid x \in S \& [\Phi_{z_0}(x) \text{ расходится или } R(x, \Phi_{z_0}(x)) \text{ ложно}\}$  должно иметь минимальный

элемент  $y_0$ . Но  $\varphi_{z_0}$  удовлетворительна на  $S_{y_0}$ , и в силу свойств функции  $\eta$   $\eta(z_0, y_0)$  сходится и  $R(y_0, \eta(z_0, y_0))$ . А так как  $\varphi_{z_0}(y_0) = \eta(z_0, y_0)$ , получаем противоречие. ■

Отсюда непосредственно вытекает

**Следствие леммы о рекурсии.** *Если  $\eta$  (из леммы) — общерекурсивная функция, то можно выбрать и  $\psi$  общерекурсивной.*

**Доказательство.** Непосредственно. ■

Заметим, что в лемме о рекурсии индекс функции  $\psi$  равномерно зависит от индекса функции  $\eta$ . Отсюда тривиально вытекает, что если функция  $\eta$  эффективно зависит от некоторых целочисленных параметров, то лемма верна равномерно относительно этих параметров (упр. 16-30).

**Доказательство теоремы XXI.** Лемма о рекурсии применяется следующим образом. Возьмем  $T$  в качестве  $S$ , а за отношение  $<_S$  примем  $\{(x, y) \mid x \in T \& y \in T \& \|x\| < \|y\|\}$ . (Тогда для любого  $y \in T$  справедливо  $S_y = T_{\|y\|}$ .) Очевидно, что  $<_S$  — частичное упорядочение с условием минимальности. Возьмем в качестве  $R$  (как уже отмечалось) отношение  $\{(x, w) \mid x \in T \& T_{\|x\|} \in \Delta_1^1 \& w \text{ есть } \Delta_1^1\text{-индекс множества } T_{\|x\|}\}$ . Остается убедиться в выполнении индуктивного предположения леммы о рекурсии, т. е. указать частично-рекурсивную функцию  $\eta$ . Напомним, что для любых  $n$  и  $y$ , если  $\Phi_y$  — характеристическая функция дерева  $\tau$ , то  $\Phi_{b(n, y)}$  — характеристическая функция  $n$ -го отростка дерева  $\tau$ .

Пусть дано  $y \in T$ , и предположим, что мы имеем такое  $z$ , что  $\varphi_z(x)$  есть  $\Delta_1^1$ -индекс множества  $T_{\|x\|}$  для всякого  $x \in S_y (= T_{\|y\|})$  (а потому  $\pi_1\varphi_z(x)$  есть  $\Sigma_1^1$ -индекс  $T_{\|x\|}$ , а  $\pi_2\varphi_z(x)$  есть  $\Pi_1^1$ -индекс  $T_{\|x\|}$ ). (Т. е. предположим, что функция  $\varphi_z$  удовлетворительна на  $S_y$ .)

По основной лемме о деревьях для  $y \in T$

$$\begin{aligned} x \in T_{\|y\|} &\Leftrightarrow [x \in T \& \|x\| < \|y\|] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\neg (\|y\| = 0) \& [(x \in T \& \|x\| = 0) \vee [x \in T \& \\ &\quad \& (\exists m)(\forall n)[b(n, x) \in T_{\|b(m, y)\|}]]]] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\varphi_y(0) = 1 \& [(\forall u)[\varphi_x(u) = 0] \vee [\varphi_x(0) = 1 \& \\ &\quad \& (\exists m)(\forall n)[b(n, x) \in T_{\|b(m, y)\|}]]]]. \end{aligned}$$

(Напомним, что 0 — кодовое число наибольшей вершины функционального дерева.)

Если теперь  $\|y\| \neq 0$ , то  $(\forall m)[b(m, y) \in T_{\|y\|}]$ ; поэтому по предположению для любых  $n$ ,  $m$  и  $x$

$$\begin{aligned} b(n, x) \in T_{\|b(m, y)\|} &\Leftrightarrow (\exists f)(\forall w) \neg T_{1, 1}^*(\pi_1\varphi_z(b(m, y)), \bar{f}(w), \\ &\quad b(n, x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall f)(\exists w) T_{1, 1}^*(\pi_2\varphi_z(b(m, y)), \bar{f}(w), b(n, x)). \end{aligned}$$

Так как любое из двух последних выражений может быть подставлено в заключительное из полученных выше выражений для  $x \in T_{\|y\|}$ , получаем с помощью алгоритма Тарского — Куратовского, что  $T_{\|y\|} \in \Delta_1^1$ .

Если  $\|y\| = 0$ , то с помощью тех же подстановок вновь получаем  $T_{\|y\|} \in \Delta_1^1$ , поскольку (i) и  $\Sigma_1^1$ -форма, и  $\Pi_1^1$ -форма, получаемые в результате вычислений по Тарскому — Куратовскому, представляют пустое множество (в силу условия  $\varphi_y(0) = 1$ ) и (ii)  $T_{\|y\|}$  в действительности представляет собой пустое множество.

Поэтому в силу утверждения о равномерности из теоремы IV мы находим  $\Delta_1^1$ -индекс множества  $T_{\|y\|}$  равномерно по  $z$  и  $y$ . Пусть  $\eta$  — частично-рекурсивная функция, дающая этот индекс по  $z$  и  $y$ . Функция  $\eta$  удовлетворяет предположениям леммы о рекурсии. В действительности легко видеть, что можно выбрать функцию  $\eta$  всюду определенной, а тогда применяется следствие леммы о рекурсии. Этим теорема XXI доказывается полностью. ■

Обратное утверждение, что  $A$  есть  $\Delta_1^1$ -множество тогда и только тогда, когда  $(\exists$  конструктивный ordinal  $\alpha)$   $[A \leqslant_T T_\alpha]$ , следует из теоремы XXII. Теорема XXII — основной результат этого параграфа. Вспомним, что, согласно теореме XX, для любого множества  $A$  справедливо  $A \in \Pi_1^1 \Leftrightarrow A \leqslant_1 T$ . Теорема XXII утверждает, что если  $A \leqslant_1 T$ , то  $A \in \Delta_1^1$  тогда и только тогда, когда образ  $A$  в  $T$  ограничен ( некоторым конструктивным ordinalом ).

**Теорема XXII (теорема об ограниченности).** *Пусть  $h$  — такая общерекурсивная функция, что  $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow h(x) \in T]$ . Тогда  $A \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow (\exists$  конструктивный ordinal  $\alpha)$   $(\forall x)[x \in A \Rightarrow \|h(x)\| < \alpha]$ .*

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Если такой ordinal  $\alpha$  существует, то  $A = \{x \mid h(x) \in T_\alpha\}$ . Но  $T_\alpha \in \Delta_1^1$  по теореме XXI; поэтому и  $A \in \Delta_1^1$ .

$\Rightarrow$ . Предположим, что такого конструктивного ordinala  $\alpha$  не существует. Тогда  $T = \{z \mid (\exists x)[x \in A \& z \in T_{\|h(x)\|}]\}$ . Предположим, что  $A \in \Delta_1^1$ ; тогда  $A \in \Sigma_1^1$  и, применяя теорему XXI и алгоритм Тарского — Куратовского, получаем, что  $T \in \Sigma_1^1$  в противоречие с теоремой XX. ■

**Следствие XXII (а).**  $A \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow (\exists$  конструктивный ordinal  $\alpha)$   $[A \leqslant_1 T_\alpha] \Leftrightarrow (\exists$  конструктивный ordinal  $\alpha)$   $[A \leqslant_T T_\alpha]$ .

**Доказательство.** Первая эквивалентность непосредственно вытекает из теорем XXI и XXII. Во второй эквивалентности  $\Rightarrow$  тривиально. Чтобы доказать  $\Leftarrow$ , допустим, что  $A \leqslant_T T_\alpha$ . Тогда  $A \leqslant_1 (T_\alpha)^*$ . По теореме X  $(T_\alpha)^* \in \Delta_1^1$ . Поэтому  $(T_\alpha)^* \leqslant_1 T_\beta$  для некоторого конструктивного ordinala  $\beta$  и  $A \leqslant_1 T_\beta$ . ■

В следствии (b) мы показываем, что для  $A \in \Delta^1_1$  ограничивающий ординал из теоремы XXII может быть найден равномерно (по  $\Delta^1_1$ -индексу для  $A$ ).

Следствие XXII (b). ( $\exists$  общерекурсивная функция  $g$ ) ( $\forall A$ ) ( $\forall w$ ) [ $[A \in \Delta^1_1 \& A \text{ имеет } \Delta^1_1\text{-индекс } w] \Rightarrow [g(w) \in T \& A \leqslant T_{||g(w)||}]$ ].

**Доказательство.** Пусть  $A \in \Delta^1_1$  и  $w = \langle u, v \rangle$  есть  $\Delta^1_1$ -индекс множества  $A$ .

Пусть  $W_z^1$  при всяком  $z$  обозначает  $\Pi^1_1$ -множество с  $\Pi^1_1$ -индексом  $z$ . Тогда  $E^1 = \{z \mid z \notin W_z^1\}$ , где  $E^1$  определено в § 16.1. Пусть  $p$  — такая рекурсивная перестановка, что  $p(\bar{T}) = E^1$  (такое  $p$  существует, так как множества  $\bar{T}$  и  $E^1$  оба  $\Sigma^1_1$ -полны).

Поскольку  $A \in \Delta^1_1$ , существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что  $A \leqslant_1 T$  посредством  $f$ , причем индекс функции  $f$  может быть найден равномерно по  $v$  (следствие XX (a)). Рассмотрим множество  $B = \{z \mid (\exists x)[x \in A \& z \in T_{||f(x)||}]\}$ . По предположению  $A \in \Sigma^1_1$ . Поэтому, согласно теореме XXI,  $B \in \Sigma^1_1$ , и его  $\Sigma^1_1$ -индекс равномерно находится по  $u$  и  $v$ . Значит,  $p(\bar{B}) \in \Pi^1_1$  с  $\Pi^1_1$ -индексом  $q$ , который находится равномерно по  $u$  и  $v$ . Итак,  $p(\bar{B}) = W_q^1$ . Поскольку  $B \subset T$ , имеем  $p(\bar{B}) \supseteq E^1$ . Поэтому по определению множества  $E^1$   $q \in W_q^1$  и  $q \notin E^1$ . Значит,  $p^{-1}(q) \notin B$  &  $p^{-1}(q) \in T$ . Далее,  $p^{-1}(q)$  находится равномерно по  $u$  и  $v$ . Пусть  $g'$  — общерекурсивная функция, дающая  $p^{-1}(q)$  равномерно по  $w = \langle u, v \rangle$ . Тогда наше построение показывает, что множество  $A$  1-сводится к  $T_{||g'(w)||+1}$  функцией  $f$ .

Положим для произвольного  $y$

$$\psi(r) = \begin{cases} \varphi_y(s), & \text{если } r = n \oplus s \text{ для некоторого } n, \\ 1 & \text{в противном случае, т. е. при } r = 0. \end{cases}$$

Пусть  $h$  — такая общерекурсивная функция, что  $\psi = \varphi_{h(y)}$  для всех  $y$ . Если  $y \in T$ , то  $h(y) \in T$  и, как легко проверяется,  $||h(y)|| = ||y|| + 1$ .

Положим теперь  $g = hg'$ , и доказательство окончено. ■

Доказывая последнее следствие, мы превратили доказательство теоремы XXII, основанное на сведении к противоречию, в конструктивное доказательство, воспользовавшись свойством “продуктивности” множества  $E^1$  (а потому и  $\bar{T}$ ), неявно содержащимся в определении  $E^1$ . Аналогичные варианты теоремы XXII имеют место для  $W$  и  $O$  (упр. 16-32).

Основными комбинаторными средствами, использованными при доказательстве теоремы XXII, были правила преобразования доказательства теоремы III. Читатель еще более убеждается в силе этих правил, если, например, попытается с помощью

прямого рассуждения относительно деревьев доказать, что ( $\forall$  конструктивный ординал  $\alpha$ ) ( $\exists$  конструктивный ординал  $\beta$ )  $\{T_\alpha \leqslant_1 T_\beta\}$ . (Этот результат есть следствие теорем XXI и XXII, получающееся с применением теоремы X.)

Верно ли, что  $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow T_\alpha \leqslant_T T_\beta$ ? Синглтерри [1965] показал, что это так.

Определение.  $T_\alpha^* = \{\langle x, y \rangle \mid x \in T \& y \in T \& ||x|| < ||y|| < \alpha\}$ .

Очевидно, что  $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow T_\alpha^* \leqslant_{\text{бт}} T_\beta^*$ . Взяв tt-цилиндры, мы получим такую вполне упорядоченную цепь 1-степеней, что, каково бы ни было множество  $A$ ,  $A \in \Delta^1_1 \Leftrightarrow$  1-степень множества  $A$  расположена ниже некоторого элемента этой цепи (упр. 16-33). В § 16.8 мы рассмотрим задачу о построении для  $\Delta^1_1$ -множеств наилучше естественного и инвариантного аналога цепи  $0, 0', 0'', \dots$  для арифметических множеств.

Следующая теорема содержит иную формулировку и обобщение теоремы XXI.

Теорема XXIII. (a) Если  $y \in T$ , то  $\{x \mid x \in T \& ||x|| \leqslant ||y||\} \in \Delta^1_1$  равномерно по  $y$  относительно некоторой всюду определенной функции (т. е. ( $\exists$  общерекурсивная функция  $g$ ) ( $\forall y$ ) [ $y \in T \Rightarrow g(y)$  есть некоторый  $\Delta^1_1$ -индекс множества  $\{x \mid x \in T \& ||x|| \leqslant ||y||\}$ ]).

(b) Если  $y \in T$ , то  $\{x \mid x \in T \& ||x|| = ||y||\} \in \Delta^1_1$  равномерно по  $y$  относительно всюду определенной функции.

(c)  $\{\langle x, y \rangle \mid x \in T \& y \in T \& ||x|| < ||y||\} \in (\Pi^1_1 - \Sigma^1_1)$ .

(d)  $\{\langle x, y \rangle \mid x \in T \& y \in T \& ||x|| = ||y||\} \in (\Pi^1_1 - \Sigma^1_1)$ .

**Доказательство.** (a) Это — теорема XXI.

(b) Возьмем общерекурсивную функцию  $h$ , определенную в конце доказательства следствия XXII (b). Тогда для  $y \in T$   $\{x \mid x \in T \& ||x|| = ||y||\} = \{x \mid x \in T \& ||x|| < ||y|| + 1 \& ||y|| < ||x|| + 1\} = \{x \mid x \in T_{||h(y)||} \& y \in T_{||h(x)||}\}$ .

Подставляя в это выражение  $\Pi^1_1$ - и  $\Sigma^1_1$ -формы, построенные (равномерно по  $h(y)$  и  $h(x)$ ) в теореме XXI, и применяя алгоритм Тарского — Куратовского, получим желаемый результат. Отметим, что формы, подставляемые вместо множества  $T_{||h(x)||}$ , выражают  $T_{||h(x)||}$  в случае, когда  $h(x) \in T$ . Что они выражают, когда  $h(x) \notin T$ , несущественно, потому что в этом случае формы множества  $T_{||h(y)||}$  сделают получающееся выражение ложным.

(c) Подставим в выражение из левой части  $\Pi^1_1$ -форму для предиката  $y \in T$ , даваемую теоремой XX, и  $\Pi^1_1$ -форму для  $x \in T \& ||x|| < ||y||$ , полученную (равномерно по  $y$ ) в пункте (a) выше. (Что выражает последняя из них при  $y \notin T$ , не имеет значения.) С помощью вычислений по алгоритму Тарского — Куратовского получим нужную нам  $\Pi^1_1$ -форму. Если бы  $\{\langle x, y \rangle \mid x \in T \& y \in$

$\in T \& \|x\| < \|y\|\}$  оказалось в совокупности  $\Sigma_1^1$ , то и множество  $T = \{x \mid (\exists y)[x \in T \& y \in T \& \|x\| < \|y\|]\}$

оказалось бы в  $\Sigma_1^1$  в противоречие с теоремой XX.

(d) Выводится аналогично из теоремы XX и пункта (b) выше (см. упр. 16-34). ■

Иногда бывает удобно пользоваться следующим линейным  $\Pi_1^1$ -упорядочением на  $T$ .

Определение. Положим  $x <^T y$ , если

$$\{x \in T \& y \in T \& [\|x\| < \|y\| \vee (\|x\| = \|y\| \& x < y)]\}.$$

Легко видеть, что это — вполне-упорядочение с порядковым типом наименьшего неконструктивного ординала (урп. 16-35).

Следствие XXIII. (a) Если  $y \in T$ , то  $\{x \mid x <^T y\} \in \Delta_1^1$  равномерно по  $y$  относительно некоторой всюду определенной функции.

$$(b) \{\langle x, y \rangle \mid x <^T y\} \in (\Pi_1^1 - \Sigma_1^1).$$

Доказательство. (a) Получается непосредственно подстановкой в выражение для  $x <^T y$  подходящих предикатных форм из пунктов (a) и (b) теоремы.

(b) Тот факт, что  $\{\langle x, y \rangle \mid x <^T y\} \in \Pi_1^1$ , доказывается с помощью подходящих предикатных форм из пунктов (c) и (d) теоремы. Если бы множество  $\{\langle x, y \rangle \mid x <^T y\}$  попало в  $\Sigma_1^1$ , то и  $T = \{x \mid (\exists y)[x <^T y]\}$  оказалось бы в  $\Sigma_1^1$ , что противоречит теореме XX. ■

Это следствие показывает, что существует линейное  $\Pi_1^1$ -упорядочение с порядковым типом наименьшего неконструктивного ординала.

Теорема XXII может быть сформулирована и доказана для линейного упорядочения  $<^T$ . Изменения, которые для этого нужно внести в приведенное нами доказательство, тривиальны. Мы сформулируем этот результат в рекурсивно инвариантной форме.

Теорема XXIV. Для всякого  $\Pi_1^1$ -полного множества  $A$  существует такое  $\Pi_1^1$ -полне-упорядочение множества  $A$ , что для любых  $\Pi_1^1$ -множества  $B$  и общерекурсивной функции  $f$  из того, что функция  $f$  сводит  $B$  к множеству  $A$ , вытекает, что  $B \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow f(B)$  ограничено сверху в этом линейном упорядочении множества  $A$ .

Доказательство аналогично теореме XXII (см. упр. 16-36). ■<sup>1)</sup>

1) Читатель, знакомый с теорией множеств, заметит аналогии между теоремой XXIV и некоторыми результатами теории множеств (см. особенно последнюю часть упр. 16-36).

1. Рассмотрим множество мощности  $n_1$  в качестве аналога множества  $A$  (из теоремы XXIV), а множества мощности  $n_0$  и меньше — в качестве анало-

## § 16.5. ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ

В некоторых отношениях теория § 16.1 аналогична теории арифметической иерархии, развитой в гл. 14. Мы исследуем теперь дальнейшие аналогии между аналитической и арифметической иерархиями. Более точно, мы рассмотрим аналогию, при которой гиперарифметические множества соответствуют рекурсивным множествам, а  $\Pi_1^1$ -множества соответствуют рекурсивно перечислимым множествам. Тот факт, что класс  $\Sigma_1$  состоит из рекурсивно перечислимых множеств, заставляет предположить, что аналогия между  $\Sigma_1^1$ -множествами и рекурсивно перечислимыми множествами была бы более естественной. Однако, как мы увидим, это не так. (Принцип редукции, например (см. теорему 5-XVII), будет справедлив для  $\Pi_1^1$ -множеств, но не для  $\Sigma_1^1$ -множеств.)

Перенося результаты и их обсуждение из § 5.7, мы начинаем исследование этой аналогии с доказательства теоремы об однозначности.

Определение. Для всякого  $z$  пусть  $W_z^1 = \{x \mid (\forall f)(\exists w) T_{1,1}^*(z, \bar{f}(w), x)\}$ . Таким образом,  $W_z^1$  есть  $\Pi_1^1$ -множество с  $\Pi_1^1$ -индексом  $z$ .

В § 5.7 мы определили область определения множества  $A$  (обозначаемую  $\text{Arg } A$ ) как  $\{x \mid (\exists y)[\langle x, y \rangle \in A]\}$ .

Теорема XXV (теорема об однозначности для  $\Pi_1^1$ -множеств). Существует такая общерекурсивная функция  $k$ , что для всех  $z$

(i)  $W_{k(z)}^1$  однозначно;

(ii)  $W_{k(z)}^1 \subset W_z^1$ ;

(iii)  $\text{Arg } W_{k(z)}^1 = \text{Arg } W_z^1$ . (Поэтому если множество  $W_z^1$  однозначно, то  $W_{k(z)}^1 = W_z^1$ .)

Доказательство. В следствии XX (a) мы построили такую общерекурсивную функцию  $f^*$ , что для любого  $z$  имеет место  $W_z^1 \leqslant_1 T$  посредством функции  $\lambda x[f^*(z, x)]$ . Определим

$$A_z = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in W_z^1 \& (\forall y')[y' \neq y \& \langle x, y' \rangle \in W_z^1] \Rightarrow \\ \Rightarrow f^*(z, \langle x, y \rangle) <^T f^*(z, \langle x, y' \rangle)\}.$$

гов  $\Delta_1^1$ -множеств; выберем теперь упорядочение по порядковому типу наименьшего несчетного ординала в качестве аналога  $\Pi_1^1$ -полне-упорядочения множества  $A$ .

2. В теории множеств Гёделя — Бернайса возьмем универсум за аналог множества  $A$ , классы — за аналоги  $\Pi_1^1$ -подмножеств множества  $A$ , множества — за аналоги  $\Delta_1^1$ -подмножеств множества  $A$  и примем вполне-упорядочение универсума за аналог  $\Pi_1^1$ -полне-упорядочения множества  $A$ . (В действительности определение обычного вполне-упорядочения универсума получается с помощью понятия ранга множества, весьма сходного с определением отношения  $<^T$ .)

Но это можно записать так:

$$A_z = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in W_z^1 \text{ & } (\forall y') \neg [f^*(z, \langle x, y' \rangle) <^T \\ <^T f^*(z, \langle x, y \rangle)] \}.$$

Теперь для всякого  $\langle x, y \rangle$  следствие XXIII (а) дает  $\Sigma_1^1$ -форму, выражающую  $\{u \mid u <^T f^*(z, \langle x, y \rangle)\}$ , если  $\langle x, y \rangle \in W_z^1$ . Используя эту форму (не важно, что она выражает, когда  $\langle x, y \rangle \notin W_z^1$ ) и  $\Pi_1^1$ -форму для множества  $W_z^1$  и применяя алгоритм Тарского — Куратовского, получаем, что  $A_z \in \Pi_1^1$ , причем  $\Pi_1^1$ -индекс множества  $A_z$  получается равномерно по  $z$ . Возьмем такую общерекурсивную функцию  $k$ , что  $A_z = W_{k(z)}$ . Требуемый результат получается теперь непосредственно. ■

**Определение.** Для каждого  $z$  положим  $\varphi_z^1 = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in W_{k(z)}^1\}$ . (Не всюду определенные) функции  $\varphi_z^1$  называются  $\Pi_1^1$ -функциями.

Заметим, что область определения  $\Pi_1^1$ -функции есть  $\Pi_1^1$ -множество (что доказывается применением алгоритма Тарского — Куратовского) и что всякое  $\Pi_1^1$ -множество есть область определения некоторой  $\Pi_1^1$ -функции. (Если дано  $\Pi_1^1$ -множество  $A$ , возьмем функцию  $\{ \langle x, x \rangle \mid x \in A\}$ .) Так же обстоит дело и с областью значений произвольной  $\Pi_1^1$ -функции.

Теперь мы имеем множества  $W_0^1, W_1^1, \dots$ , аналогичные рекурсивно перечислимым множествам  $W_0, W_1, \dots$ , функции  $\varphi_0^1, \varphi_1^1, \dots$ , аналогичные частично рекурсивным функциям, и гиперарифметические множества (т. е.  $\Pi_1^1$ -множества с  $\Pi_1^1$ -дополнениями), аналогичные рекурсивным множествам.

**Определение.** Всюду определенные  $\Pi_1^1$ -функции называются гиперарифметическими.

Заметим, что если  $\Pi_1^1$ -функция  $\psi$  всюду определена, то  $\tau(\psi) = \{ \langle x, y \rangle \mid \psi(x) = y\}$  есть гиперарифметическое множество. (По определению  $\tau(\psi) \in \Pi_1^1$ . Если же  $\psi$  всюду определена, мы также имеем  $\tau(\psi) = \{ \langle x, y \rangle \mid (\forall z)[\psi(x) = z \Rightarrow z = y]\}$ , а это влечет  $\tau(\psi) \in \Sigma_1^1$ . К тому же если  $\varphi_z^1$  всюду определена, то некоторый  $\Delta_1^1$ -индекс множества  $\tau(\varphi_z^1)$  может быть получен равномерно по  $z$  с помощью некоторой всюду определенной функции. Вообще в силу тех же аргументов  $f \in \Pi_n^1 \Leftrightarrow f \in \Sigma_n^1 \Leftrightarrow f \in \Delta_n^1$  при любых  $n$  и  $f^1$ .) Таким образом, наша терминология непротиворечива. Гиперарифметическая функция есть функция, которая, будучи рассматриваема как отношение, гиперарифметична. Заметим далее, что множество является гиперарифметическим тогда и только тогда, когда его характеристическая функция гиперарифметична.

<sup>1)</sup> Как обычно,  $f$  обозначает некоторую всюду определенную функцию. — Прим. перев.

Одна из основных теорем теории рекурсивных функций не сохраняется при нашей аналогии. В теории рекурсивных функций область значений общерекурсивной функции может не быть рекурсивной. Здесь же мы имеем следующую теорему (сообщенную автором Ходзом).

**Теорема XXVI.** Область значений гиперарифметической функции есть гиперарифметическое множество.

**Доказательство.** Пусть  $f$  — гиперарифметическая функция. Тогда

$$\text{Val } f = \{y \mid (\exists x)[f(x) = y]\}.$$

Так как  $f \in \Delta_1^1$ , результат получается непосредственно применением алгоритма Тарского — Куратовского. ■

Отсюда можно, однако, вывести аналог теоремы 5-IV.

**Следствие XXVI** (Лакхам). Всякое бесконечное  $\Pi_1^1$ -множество содержит бесконечное гиперарифметическое подмножество.

**Доказательство.** Пусть  $A$  — бесконечное  $\Pi_1^1$ -множество. Образуем  $\Pi_1^1$ -множество

$$B = \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \& y \in A\}.$$

Применим к  $B$  теорему об однозначности. В результате получим всюду определенную  $\Pi_1^1$ -функцию, область значений которой есть бесконечное подмножество множества  $A$ . Согласно теореме, это —  $\Delta_1^1$ -подмножество. ■

Другие теоремы § 5.7 тоже сохраняются при нашей аналогии.

**Теорема XXVII** (принцип редукции). Для любых  $\Pi_1^1$ -множеств  $A$  и  $B$  существуют такие  $\Pi_1^1$ -множества  $A'$  и  $B'$ , что  $A' \subseteq A$ ,  $B' \subseteq B$ ,

$$A \cup B = A' \cup B'$$

$$u A' \cap B = \emptyset.$$

**Доказательство.** Применим теорему об однозначности так же, как и для получения теоремы 5-XVII (§ 5.7). ■

**Теорема XXVIII** (теорема выбора). Существует такая  $\Pi_1^1$ -функция  $\psi$ , что для всякого  $z$

- (i)  $\psi(z)$  сходится  $\Leftrightarrow (\exists w)[w \in W_z^1 \& W_w^1 \neq \emptyset]$ ;
- (ii)  $\psi(z)$  сходится  $\Rightarrow [\psi(z) \in W_z^1 \& W_{\psi(z)}^1 \neq \emptyset]$ .

**Доказательство.** Аналогично теореме 5-XVIII (§ 5.7). ■

Отсюда вытекает и обобщенный принцип редукции, как в упр. 5-36.

**Теорема 7-XII** показывает, что существует пара непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств, не являющихся

рекурсивно отделыми. Справедлив ли аналог этой теоремы, т. е. существует ли пара непересекающихся „гиперарифметически неотделимых“  $\Pi_1^1$ -множеств?

**Теорема XXIX.** *Существуют такие непересекающиеся  $\Pi_1^1$ -множества  $A$  и  $B$ , что ни для какого  $\Delta_1^1$ -множества  $C$ , не выполняются  $A \subset C$  и  $B \subset \bar{C}$  одновременно.*

**Доказательство.** Положим  $A = \{x \mid \varphi_x^1(x) = 0\}$  и  $B = \{x \mid \varphi_x^1(x) = 1\}$ . Результат получается, как при доказательстве теоремы 7-XII (с). ■

Из теоремы XXIX вытекает, что  $\Sigma_1^1$ -множества не удовлетворяют принципу редукции, подобно тому как не удовлетворяют принципу редукции  $\Pi_1^0$ -множества (согласно теореме 7-XII) (см. упр. 5-3). По этой причине (среди прочих) аналогия между  $\Pi_1^1$ -множествами и  $\Sigma_1^0$ -множествами является более полной, чем аналогия между  $\Sigma_1^1$ -множествами и  $\Sigma_1^0$ -множествами.

Настоящее обсуждение касается, конечно, множеств натуральных чисел. Можно ставить проблемы редукции и отделения и для множеств функций (см. упр. с 16-39 по 16-41). Как показал Аддисон [1959], [1959a], проблемы редукции и отделения могут рассматриваться как вопросы о возможности переставлять кванторы в некоторых предикатных формах (см. упр. 16-41).

В упр. 16-42—16-45 мы приводим дальнейшие примеры результатов, соответствующих ранее полученным результатам теории рекурсивных функций. В упр. 16-42 мы используем теорему об однозначности, чтобы построить гиперарифметически простое множество (и выводим отсюда, что в классе  $\Pi_1^1 - \Sigma_1^1$  существуют множества, не рекурсивно изоморфные множеству  $T$  (и, на самом деле, даже не гиперарифметически изоморфные множеству  $T$ )). Упражнение 16-43 представляет собой аналог теоремы о рекурсии. Она используется в упр. 16-44 для получения аналогов теоремы Майхилла о том, что всякое креативное множество 1-полно. Упражнение 16-45 дает аналог теоремы Райса (теорема 14-XIV).

Если дано определение или теорема теории рекурсивных функций, то формулировка их гиперарифметического аналога в общем случае бывает не единственной. Мы получим *полный аналог*, если все частично рекурсивные функции заменим на  $\Pi_1^1$ -функции. Бывают возможны и различные *частичные аналоги*, в которых некоторые частично рекурсивные функции превращаются в  $\Pi_1^1$ -функции, а другие остаются частично рекурсивными. Например, в понятии „ $\Pi_1^1$ -продуктивного“ множества мы можем потребовать или не требовать, чтобы продуктивная функция была рекурсивной (см. упр. 16-44, 16-46). Аналогично, в результатах об 1-сводимости мы можем разрешить или не разрешить сводящим функциям быть гиперарифметическими. (Ситуация напоминает

вопрос о полной или частичной релятивизации, рассмотренный в § 9.3.)

Интересное расхождение между нашей новой гиперарифметической теорией и прежней рекурсивной теорией возникает в упр. 16-45 при рассмотрении теоремы Райса. Здесь (а также в некоторых других местах) мы выясняем роль конечных множеств (в прежней теории), исполняемую теперь гиперарифметическими множествами, и роль канонических индексов, исполняемую  $\Delta_1^1$ -индексами. (См. упр. 16-47, где мы показываем, что если дан произвольный  $\Delta_1^1$ -индекс, можно гиперарифметически вычислить некоторый единственный „канонический“  $\Delta_1^1$ -индекс того же множества.)

В § 16.6 мы продолжим наше изучение этой теории аналогов, вводя аналоги понятий Т-сводимости и операции скачка. Мы видим, что аналог проблемы Поста имеет иное решение, чем сама проблема Поста и что в аналитической иерархии сильная теорема об иерархии (аналог теоремы 14-VIII) не имеет места.

Отметим, что сходство между нашей теорией аналогов и теорией рекурсивных функций можно проследить вплоть до употребления отношения  $<^T$  и функции  $f^*$  при доказательстве теоремы XXV. На самом деле, все сходящиеся „ $\Pi_1^1$ -вычисления“ можно линейно упорядочить, так что мы сможем гиперарифметически (согласно § 16.4) установить, которое из двух данных заканчивающихся вычислений „идет первым“. Таким образом, это упорядочение по трансфинитам является аналогом упорядочения рекурсивных вычислений, описанного в следствии 5-V (d) и использованного при доказательстве теоремы 5-XVI.

### Обобщенные машины

Понятие машины Тьюринга можно следующим образом обобщить (см. также Клини [1962].) Определяющее *обобщенную машину* множество „инструкций“ остается конечным, но разрешается, чтобы в вычислениях использовались некоторые *специальные шаги*, для обозначения которых вводятся соответствующие символы и соглашения. Понятие *допустимого специального шага* определяется индуктивно. Допустимый специальный шаг заключается в сообщении, закончится ли некоторое вычисление на обычной машине Тьюринга (инструкции которой в настоящий момент записаны на ленте обобщенной машины), или, более общо, допустимый специальный шаг говорит, закончится ли некоторое обобщенное вычисление (инструкции которого в текущий момент записаны на ленте) при условии, что обозначенное на ленте вычисление не содержит шагов, отличных от обычных шагов машины Тьюринга и специальных шагов, допустимость которых уже известна. Если имеются входные д<sup>ч</sup>ные и обобщенная машина, то соответ-

ствующее вычисление называется *расходящимся*, если или (i) оно не заканчивается или (ii) в нем встречаются недопустимые специальные шаги. Мы не будем глубже вникать в формальные детали.

С каждым сходящимся вычислением (на обобщенной машине) мы связываем некоторое *дерево-диаграмму*. На первом уровне эта диаграмма показывает шаги вычисления, на втором уровне — подшаги специальных шагов, встречающихся на первом уровне, на третьем уровне — подшаги специальных шагов, встретившихся на втором уровне, и т. д. *Дерево-диаграмма* изоморфно некоторому дереву с конечными путями, и это дерево с конечными путями имеет гиперарифметическую характеристическую функцию. (В § 16.6 мы увидим, что ординал гиперарифметического дерева с конечными путями конструктивен.) Упорядочение Клини — Брауэра, соответствующее этому дереву с конечными путями, подсказывает некоторую „физическую“ реализацию такого вычисления. Пусть единичный интервал (действительных чисел) мыслится как конечный промежуток времени. Возьмем некоторое сохраняющее порядок отображение упорядочения Клини — Брауэра (для нашего вычисления) в этот интервал. Точки-образы можно представлять себе как моменты времени, в которые выполняются соответствующие шаги обобщенного вычисления. Так, например, обобщенная машина, решающая обычную проблему остановки, могла бы при заданном входе выполнять свои шаги в моменты

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, 1.$$

Какие функции можно вычислять на таких обобщенных машинах? Можно показать, что это в точности  $\Pi_1^1$ -функции. Мы не станем подробно разбирать этот результат.

Таким образом, понятие обобщенной машины существенно проясняет понятие гиперарифметической функции (а также  $\Pi_1^1$ -функции) и показывает, что эти функции образуют класс, с интуитивной точки зрения, даже более естественный, чем мы могли бы предположить ранее. Выражаясь вольно, гиперарифметическая функция есть функция, допускающая детерминированное вычисление дискретными шагами на основании конечного множества инструкций в предположении, что мы имеем возможность выполнить поиски в бесконечной последовательности шагов всякий раз, как мы этого пожелаем, т. е. в течение любого данного временного интервала положительной длины. Спектор и Аддисон называют этот уровень вычислительных возможностей „ $\lambda_0$ -мышлением“, а Крейсел предложил аналог тезиса Чёрча для гиперарифметических функций. Такой интуитивный взгляд на гиперарифметическую вычислимость может иметь большое эвристическое значение в связи с некоторыми общими свойствами гиперарифметических множеств (например, в связи с некоторыми сильными свойствами

замкнутости гиперарифметических множеств, рассматриваемыми в следующем разделе) и для ряда специальных проблем (упр. 16-46, например). Он использовался также для поддержки „конструктивистских“ утверждений о том, что гиперарифметические множества суть, в некотором смысле, единственные существующие множества натуральных чисел.

Эти интуитивные соображения наводят также на мысль о том, что гиперарифметическая вычислимость функций и функционалов может послужить подходящим фундаментом для построения конструктивного варианта анализа в области действительного переменного. Крейсел и Феферман положили начало такому исследованию в виде изучения эффективных объектов внутри классической математики; Хоудз и Риттер, следуя работе Московакиса, посвященной рекурсивному случаю, начали такое исследование как изучение некоторых счетных структур, отличных от несчетных структур классической математики, но аналогичных им (см. обсуждение в § 15.3, а также упр. 15-36 и 15-37).

К несчастью, такой интуитивный взгляд на гиперарифметическую вычислимость сам по себе имеет меньшее значение для получения математических результатов относительно гиперарифметических функций, нежели тезис Чёрча для получения результатов о рекурсивных функциях. Главные результаты, которые мы до сих пор получили, опирались в основном на комбинаторную мощь правил преобразования кванторов из теоремы III. Затруднительно, например, на основании одних только интуитивных рассмотрений решить, верна или нет теорема о выборе (теорема XXVIII), в то время как справедливость ее рекурсивного аналога (теорема 5-XVIII) легко усматривается с помощью только тезиса Чёрча и теоремы о перечислении<sup>1)</sup>.

### Другой аналог теории рекурсивных функций

Существование аналога (теории рекурсивных функций), описанного в начале этого параграфа, наводит на мысль о поисках более абстрактной теории, которая охватывала бы сразу и рекурсивный, и гиперарифметический случаи. Имея это в виду, Крейсел и Сакс предприняли изучение несколько иного аналога теории рекурсивных функций, базирующегося на  $\Pi_1^1$ - и  $\Delta_1^1$ -множествах. Аналог Крейселя — Сакса оказывается более близким к рекурсивному случаю, чем рассмотренный ранее в этом параграфе аналог. В аналоге Крейселя — Сакса множество  $T$  играет роль  $N$ . Пусть  $\psi$  — такая (не обязательно всюду определенная) функция,

<sup>1)</sup> Конечно, как только теорема о выборе доказана, мы можем (и должны) использовать ее для обогащения наших интуитивных представлений о гиперарифметической вычислимости.

что  $\psi \subset T \times T$ . Функция  $\psi$  называется „частичнорекурсивной“, если  $\psi \in \Pi_1^1$ . Функция  $\psi$  „общерекурсивна“ (по определению), если  $\psi$  „частичнорекурсивна“ и определена на всем множестве  $T$ . Функции более, чем одного переменного вводятся с помощью рекурсивной „функции пересчета пар“, отображающей множество  $T \times T$  на  $T$ . (Такая функция существует, поскольку  $T \times T$ , как легко видеть,  $\Pi_1^1$ -полно, а потому  $T \times T \equiv T$ .) Пусть  $A \subset T$ . Множество  $A$  называется „рекурсивно перечислимым“, если  $A \in \Pi_1^1$ . Множество  $A$  называется „рекурсивным“, если и  $A$ , и  $T - A$  являются  $\Pi_1^1$ -множествами. „Гёделева нумерация“ „частичнорекурсивных“ функций (на  $T$ ) получается, если взять произвольное фиксированное взаимно однозначное рекурсивное отображение  $f$  множества  $N$  в  $T$ , объявить  $f(z)$  (при всяком  $z$ ) гёделевым номером функции  $\varphi_z^1 \cap (T \times T)$ , а оставшиеся элементы  $T$  (т. е. множества  $T - f(N)$ ) считать гёделевыми номерами нигде не определенной функции. (При этом некоторые элементы множества  $f(N)$  также будут номерами нигде не определенной функции.) См. упр. 16-48. Описанная процедура с помощью перехода к областям определения функций задает нумерацию (на  $T$ ) всех „рекурсивно перечислимых“ множеств. Существование „рекурсивно перечислимого, но не рекурсивного“ множества доказывается теперь, как точный формальный аналог теоремы 5-VI.

Интересно, что, как и в предыдущей аналогии,  $\Delta_1^1$ -подмножества множества  $T$  имеют много свойств, которыми в рекурсивной теории обладают конечные множества. (Заметим, что „рекурсивные“ множества не обязаны быть  $\Delta_1^1$ -множествами; например,  $T$  „рекурсивно“.) Справедливо, например, следующее утверждение: если  $A$  есть область значений некоторой взаимно однозначной „общерекурсивной“ функции, то  $A \in \Delta_1^1$  (см. упр. 16-50).

Осложнения, связанные с теоремой ХХVI, теперь не возникают, и мы получаем, что  $[A \text{ "рекурсивно перечислимо" и } A \neq \emptyset] \Leftrightarrow A$  есть область значений некоторой „общерекурсивной“ функции. ( $\Leftarrow$  получается непосредственно; чтобы доказать  $\Rightarrow$ , рассмотрим по отдельности случаи, когда  $A$  „конечно“ (т. е. принадлежит  $\Delta_1^0$ ) и  $A$  не „конечно“. Пусть  $A$  не „конечно“, и  $z$  — некоторый  $\Pi_1^1$ -индекс множества  $A$ . Тогда вычисления по алгоритму Тарского — Куравловского с использованием следствия ХХIII (а) показывают, что

$$\{ \langle x, y \rangle \mid x \in T \text{ & } y \in A \text{ & } [x = f^*(z, y) \vee x <^T f^*(z, y)] \wedge \\ \text{& } (\forall u)[f^*(z, u) <^T f^*(z, y) \Rightarrow f^*(z, u) <^T x] \}$$

есть искомая „общерекурсивная“ функция. Случай „конечного“  
 $A$  рассматривается в упр. 16-51.)

Можно получить много других результатов в этом направлении, включая существование "рекурсивно перечислимых" множеств, "максимальных" в смысле, аналогичном определению из

§ 12.4. Мы приведем еще одну иллюстрацию. Назовем „обшерекурсивную“ функцию „строго возрастающей“, если она строго возрастает относительно упорядочения  $<^T$ . Тогда область значений „строго возрастающей“ функции обязана быть „рекурсивной“. Действительно, пусть  $A$  — область значений „строго возрастающей“ функции  $\psi$ . Тогда

$$A = \{y \mid (\exists z)[[z <^T y \vee z = y] \ \& \ y = \psi(z)]\}$$

2

$$T - A = \{y \mid y \in T \ \& \ (\forall z)[[z <^T y \vee z = y] \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists w)[w \neq y \ \& \ w = \psi(z)]]\}.$$

Используя следствие XXIII (а), получаем, что  $A$  и  $T - A$  суть  $\Pi_1^1$ -множества.

## § 16.6. ГИПЕРСТЕПЕНИ И ГИПЕРСКАЧОК $\Sigma_2^1$ -МНОЖЕСТВА И $\Delta_2^1$ -МНОЖЕСТВА

Прослеживая дальше рассмотренную в первой части предыдущего параграфа аналогию, попытаемся найти аналог понятия тьюринговской сводимости. Мы видели в гл. 14, что  $B \leqslant_T A \Leftrightarrow B \in \Pi_1^A \cap \Sigma_1^A$ . Это подсказывает, что мы получим аналог тьюринговской сводимости с помощью релятивизации в аналитической иерархии.

## Релятивизация

Определения и результаты § 16.1 могут быть релятивизованы следующим образом. Пусть дано множество  $A$ .

**Определения.** Функция  $\psi$  называется *A-частично рекурсивной функцией k функциональных и l числовых переменных* ( $k \geq 0$ ,  $l > 0$ ), если для некоторого  $z$

$$\psi = \lambda f_1 \dots f_k x_1 \dots x_l [\varphi_z^{A, \tau(f_1), \dots, \tau(f_k)}(x_1, \dots, x_l)].$$

Функция  $\psi$  называется *A-частично рекурсивной функцией k функциональных и 0 числовых переменных* ( $k \geq 0$ ), если для некоторого  $z$

$$\psi = \lambda f_1 \dots f_k [\varphi_z^A, \tau(f_1), \dots, \tau(f_k)(0)]$$

Функция  $\psi$  называется *A-общерекурсивной функцией k функциональных и l числовых переменных* ( $k \geq 0, l \geq 0$ ), если  $\psi$  есть *A-частичнорекурсивная функция*, определенная на  $\mathcal{F}^k \times N^l$ .

Отношение  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$  называется *A-рекурсивным* отношением, если его характеристическая функция есть *A-общерекурсивная* функция  $k$  функциональных и  $l$  числовых переменных. Отношение  $R \subset \mathcal{F}^k \times N^l$  называется *аналитическим* относи-

тельно множества  $A$ , если  $R$  или  $A$ -рекурсивно, или может быть получено из некоторого  $A$ -рекурсивного отношения, с помощью операций взятия проекции и (или) дополнения.

$A$ -формы определяются так же, как предикатные формы, с тем лишь отличием, что рекурсивное отношение заменяется  $A$ -рекурсивным отношением.

Справедлива релятивизованная версия теоремы I.  $\Sigma_n^{1,A}$ -формы,  $\Pi_n^{1,A}$ -формы и классы  $\Sigma_n^{1,A}$ ,  $\Pi_n^{1,A}$  и  $\Delta_n^{1,A}$  определяются аналогично тому, как это делалось раньше. Верны также релятивизованные варианты теорем II и III.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

$$T_{k,l}^A = \{ \langle z, f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l, w \rangle \mid T_{k+1,l}(z, A, \tau(f_1), \dots, \tau(f_k), x_1, \dots, x_l, w) \}.$$

Если теперь использовать  $T_{k,l}^A$  вместо  $T_{k,l}$ , то теорема IV сохраняется в релятивизованном виде, и с ее помощью определяются понятия  $\Sigma_n^{1,A}$ - и  $\Pi_n^{1,A}$ -индексов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть  $k > 0$ ,  $l \geq 0$ ; положим  $T_{k,l}^{*A} = \{ \langle z, y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid \text{существуют такие } f_1, \dots, f_k \text{ и } w, \text{ что для всех } i, 1 \leq i \leq k,$

$$y_i = \bar{f}_i(w) \text{ и } T_{k,l}^A(z, f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l, w),$$

причем все задаваемые при вычислении  $T_{k,l}^A$  вопросы относительно  $f_1, \dots, f_k$  касаются аргументов, меньших  $w$ .

Теперь мы получаем релятивизацию теоремы V.

ТЕОРЕМА XXX. Пусть  $n > 0$ ,  $R \subset \mathcal{F}^h \times N^l$  — отношение из  $\Sigma_n^{1,A}$ , а  $z$  — некоторый  $\Sigma_n^{1,A}$ -индекс отношения  $R$ . Если  $n$  четно, то

$$R = \{ \langle f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid (\exists g_1)(\forall g_2) \dots (\forall g_n)(\exists w) T_{k+n,l}^{*A}(z, \bar{f}_1(w), \dots, \bar{f}_k(w), \bar{g}_1(w), \dots, \bar{g}_n(w), x_1, \dots, x_l) \}.$$

Аналогично для нечетных  $n$  и класса  $\Pi_n^{1,A}$  (см. формулировку теоремы V).

Доказательство. Непосредственно из определения.

Теперь сразу получаются релятивизации теорем VI и VII. Принимая во внимание, что при релятивизации множество  $E^{n,A}$  соответствует множеству  $E^n$  (например,  $E^{1,A} = \{z \mid (\exists f)(\forall w) \neg T_{1,1}^{*A}(z, \bar{f}(w), z)\}$ ), получаем релятивизацию теорем VIII и IX.

Релятивизация относительно данной функции  $h$  получается, если всюду в приведенных выше определениях и рассмотрениях использовать  $\tau(h)$  вместо множества  $A$ . Отсюда, в частности, следует, что  $T_{k,l}^{*\tau(h)}(z, \dots) \Leftrightarrow T_{k+1,l}(z, h, \dots)$  и что теорема XXX имеет место в следующем виде (мы используем обозначения  $\Sigma_n^{1,h}$ ,  $T_{k,l}^h$ ,  $\dots$  в качестве сокращений для  $\Sigma_n^{1,\tau(h)}$ ,  $T_{k,l}^{\tau(h)}, \dots$ ).

Следствие XXX. Пусть  $n > 0$ ,  $R \subset \mathcal{F}^h \times N^l$  — отношение из  $\Sigma_n^{1,h}$ , а  $z$  — некоторый  $\Sigma_n^{1,h}$ -индекс отношения  $R$ . Если  $n$  четно, то

$$\begin{aligned} R = & \{ \langle f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid (\exists g_1)(\forall g_2) \dots \\ & \dots (\forall g_n)(\exists w) T_{k+n,l}^*(z, \bar{h}(w), \bar{f}_1(w), \dots, \bar{f}_k(w), \bar{g}_1(w), \dots \\ & \dots, \bar{g}_n(w), x_1, \dots, x_l) \}. \end{aligned}$$

Аналогично для нечетных  $n$  и класса  $\Pi_n^{1,h}$ .

Доказательство. Непосредственно из определений (см. упр. 16-52). ■

Одновременная релятивизация относительно нескольких данных множеств (или функций) также легко осуществляется.  $\Sigma_n^{1,A_1, \dots, A_m}$ ,  $\Pi_n^{1,A_1, \dots, A_m}$  и  $\Delta_n^{1,A_1, \dots, A_m}$  определяются очевидным образом, когда мы примем за отношение  $T_{k,l}^{A_1, \dots, A_m}$   $\{ \langle z, f_1, \dots, f_k, x_1, \dots, x_l \rangle \mid T_{k+m,l}(z, A_1, \dots, A_m, \tau(f_1), \dots, \tau(f_k), x_1, \dots, x_l, w) \}$ .

Мы пишем  $\Sigma_n^{1,h_1, \dots, h_m}$ ,  $\dots$  вместо  $\Sigma_n^{1,\tau(h_1), \dots, \tau(h_m)}, \dots$ .

### Гиперстепени и гиперскачок

Определим теперь наш аналог Т-сводимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество  $B$  называется *гиперарифметическим относительно*  $A$  (обозначение:  $B \leq_h A$ ), если  $B \in \Delta_1^{1,A}$  ( $= \Sigma_1^{1,A} \cap \Pi_1^{1,A}$ ). Мы сокращаем запись  $\tau(f) \leq_h \tau(g)$  до  $f \leq_h g$ .

Отметим терминологическую параллель с понятиями „рекурсивный относительно“, „арифметический относительно“ и „аналитический относительно“. Если  $B \leq_h A$ , мы будем иногда говорить, что множество  $B$  *гиперарифметически сводимо к*  $A$ .

Очевидно, что отношение  $\leq_h$  рефлексивно. Будет ли оно транзитивным?

ТЕОРЕМА XXXI. Если  $C \leq_h B$  и  $B \leq_h A$ , то  $C \leq_h A$ .

Доказательство. Если  $C \leq_h B$ , то, в частности,  $C \in \Sigma_1^{1,B}$ . Поэтому  $C = \{x \mid (\exists f)(\forall w) \neg T_{1,1}^{*B}(z, f, x, w)\}$  при неко-

тором  $z$ . Отсюда  $x \in C \Leftrightarrow (\exists f)(\forall w)[\varphi_z^{B, \tau(f)}(x)$  не сходится за  $w$ -шагов]  $\Leftrightarrow (\exists f)(\forall w) \neg (\exists y)(\exists u)(\exists v)[\langle x, y, u, v \rangle$  появляется на  $w$ -м шаге перечисления множества  $W_{\rho(z)}$  (согласно индексу  $\rho(z)$ ) &  $\& D_u \subset B \oplus \tau(f) \& D_v \subset \overline{B \oplus \tau(f)}$ . Условие  $[D_u \subset B \oplus \tau(f)]$  можно представить в виде  $(\forall x)[[2x \in D_u \Rightarrow x \in B] \& [2x + 1 \in D_u \Rightarrow x \in \tau(f)]]$ , а  $D_v \subset \overline{B \oplus \tau(f)}$  представимо в виде  $(\forall x)[[2x \in D_v \Rightarrow x \notin B] \& [2x + 1 \in D_v \Rightarrow x \notin \tau(f)]]$ . По предположению множество  $B$  представимо и в  $\Sigma_1^{1, A}$ , и в  $\Pi_1^{1, A}$ -форме. Подставим его  $\Pi_1^{1, A}$ -форму вместо первого вхождения  $B$  (в последнее из приведенных выше выражений для  $C$ ), а  $\Sigma_1^{1, A}$ -форму вместо второго вхождения  $B$ . Применяя алгоритм Тарского — Куратовского, получим, что  $C \in \Sigma_1^{1, A}$ . Аналогичными рассуждениями, отправляясь от  $\Pi_1^{1, B}$ -формы для  $C$  и подставляя в нее подходящим образом  $\Sigma_1^{1, A}$  и  $\Pi_1^{1, A}$ -формы для  $B$ , получим  $C \in \Pi_1^{1, A}$ . ■

**Следствие XXXI (a).** Если  $B \leqslant_h A$  и  $A \in \Delta_1^1$ , то  $B \in \Delta_1^1$ .

**Доказательство** непосредственно вытекает из доказательства теоремы. ■

**Следствие XXXI (b).** Если множество  $C$  аналитично относительно  $B$ , а множество  $B$  аналитично относительно  $A$ , то  $C$  аналитично относительно  $A$ .

**Доказательство** использует ту же технику, что и доказательство теоремы (см. упр. 16-53). ■

**Определение.**  $A \equiv_h B$  означает, что  $A \leqslant_h B$  и  $B \leqslant_h A$ .

Согласно теореме XXXI,  $\equiv_h$  есть отношение эквивалентности. Классы эквивалентности по отношению  $\equiv_h$  называются *гиперстепенями* (и служат при нашей аналогии эквивалентами тьюринговых степеней).

Согласно следствию XXXI (a), существует наименьшая гиперстепень, состоящая из гиперарифметических множеств. В силу теоремы об иерархии (теорема VIII) должны существовать отличные от нее гиперстепени, содержащие  $\Pi_1^1$ -множества. Рассмотрим аналог проблемы Поста (гл. 10): существует ли более двух гиперстепеней, содержащих  $\Pi_1^1$ -множества? Как мы увидим теперь, ответ оказывается отрицательным<sup>1)</sup>. Пусть  $T$  есть  $\Pi_1^1$ -полное множество, определенное в § 16.3.

**Теорема XXXII.**  $A \in \Pi_1^1 \Rightarrow [A \in \Delta_1^1 \text{ или } A \equiv_h T]$ .

<sup>1)</sup> В аналогии Крейселя — Сакса (см. обсуждение в конце § 16.5) аналог проблемы Поста имеет положительное решение, как и проблема Поста для рекурсивно перечислимых множеств (что и устанавливается сходными рассуждениями).

**Доказательство.** Пусть  $A \in \Pi_1^1$ . Тогда  $A \leqslant_1 T$ , и достаточно показать, что или  $A \in \Delta_1^1$ , или  $T \leqslant_h A$ . Предположим, что  $A \notin \Delta_1^1$ , и пусть функция  $f$  1-сводит  $A$  к множеству  $T$ . Тогда по теореме об ограниченности (теорема XXII) получаем

$$T = \{y \mid (\exists x)[x \in A \& y \in T_{||f(x)||}]\}.$$

Подставляя в это выражение  $\Sigma_1^1$ -или  $\Pi_1^1$ -форму для  $y \in T_{||f(x)||}$  (по теореме XXI) и применяя алгоритм Тарского — Куратовского, получаем соответственно  $\Sigma_1^{1, A}$ -или  $\Pi_1^{1, A}$ -форму для  $T$ . Отсюда  $T \in \Delta_1^{1, A}$  и  $T \leqslant_h A$ . ■

В следующем определении мы вводим аналог понятия „рекурсивно перечислимый относительно“.

**Определение.** Множество  $A$  называется  $\Pi_1^1$ -множеством относительно  $B$ , если  $A \in \Pi_1^{1, B}$ .

Мы определим аналог операции *скачка* (из § 13.1) с помощью выбора специального множества из класса  $\Pi_1^{1, A}$ , полного по отношению к  $\Pi_1^1$ .

**Определение.**  $T^A = \{z \mid \varphi_z^A \text{ есть характеристическая функция некоторого дерева с конечными путями}\}$ .

Немедленно получается релятивизация теоремы XX, и мы имеем  $T^A \in \Pi_1^{1, A}$ , а также  $B \in \Pi_1^{1, A} \Rightarrow B \leqslant_1 T^A$  для всякого  $B$ . Согласно релятивизированной теореме об иерархии,  $T^A \not\leqslant_h A$ . Мы называем  $T^A$  *гиперсачаком* множества  $A$ . (По аналогии с § 13.1 мы могли бы при определении операции гиперсачака сначала принять  $W_z^{1, A} = \{x \mid (\forall f)(\exists w)T_{1, 1}^{1, A}(z, f, x, w)\}$ , а затем объявить  $K^{1, A} = \{x \mid x \in W_z^{1, A}\}$  „гиперсачаком“ множества  $A$ . В упр. 16-54 мы покажем, что  $K^{1, A} \equiv T^A$ .)

**Теорема XXXIII.**  $A \leqslant_h B \Leftrightarrow T^A \leqslant_1 T^B$ .

**Доказательство** проходит параллельно доказательству теоремы 13-I (e).

$\Rightarrow$ . Пусть  $A \leqslant_h B$ . Поскольку  $T^A \in \Pi_1^{1, A}$  и  $A \in \Delta_1^{1, B}$ , в результате подстановки предикатной формы, как в доказательстве теоремы XXXI, получаем, что  $T^A \in \Pi_1^{1, B}$ . А так как  $T^B$  является  $\Pi_1^{1, B}$ -полным множеством, мы имеем  $T^A \leqslant_1 T^B$ .

$\Leftarrow$ . Пусть, наоборот,  $T^A \leqslant_1 T^B$ . Так как  $T^B \in \Pi_1^{1, B}$ , получаем, что  $T^A \in \Pi_1^{1, B}$ . Но  $A \leqslant_1 T^A$  и  $\bar{A} \leqslant_1 T^A$  (поскольку тривиальным образом  $A \in \Pi_1^{1, A}$  и  $\bar{A} \in \Pi_1^{1, A}$ ). Значит,  $A \in \Pi_1^{1, B}$  и  $\bar{A} \in \Pi_1^{1, B}$ . Но отсюда вытекает, что  $A \in \Delta_1^{1, B}$ . ■

Итак, теорема XXXIII вместе с предшествовавшими ей замечаниями образует полный аналог теоремы 13-I.

Из теоремы XXXIII следует, что операция гиперскачки корректно определена на гиперстепенях. Назовем некоторую гиперстепень  $\Pi_1^1$ -гиперстепенью относительно другой, если первая гиперстепень содержит множество, являющееся  $\Pi_1^1$ -множеством относительно некоторого элемента второй гиперстепени. Мы можем рассматривать различные вопросы о строении упорядочения гиперстепеней относительно операции гиперскачки и отношения „быть  $\Pi_1^1$ -множеством относительно“, аналогичные рассмотренным в гл. 13 вопросам об операции скачка и отношении „быть рекурсивно перечислимым относительно“ среди Т-степеней. Такое исследование было начато Спектором. Были получены некоторые результаты, аналогичные результатам гл. 13, включая доказательство существования несравнимых гиперстепеней (см. упр. 16-55). Существуют ли гиперстепени, меньшие гиперстепени множества  $T$  и отличные от наименьшей гиперстепени? (В силу теоремы XXXII такие гиперстепени не могут содержать  $\Pi_1^1$ -множеств.) В § 16.7 мы покажем, что такие гиперстепени существуют.

Справедлив ли аналог теоремы 14-VIII (сильной теоремы об иерархии)? Отрицательный ответ на этот вопрос получается как следствие из приведенной ниже теоремы, специальный случай которой был впервые доказан Аддисоном и Клини [1957]. Эта теорема представляет собой сильное обобщение теоремы X.

**Теорема XXXIV** (Шёнфильд [1962]).  $[A \in \Delta_n^{1,B} \& B \in \Delta_n^{1,C}] \Rightarrow A \in \Delta_n^{1,C}$  при всяком  $n$ .

**Доказательство.** Случай  $n = 0$  был доказан в следствии 14-VII, а случай  $n = 1$  доказан выше в теореме XXXI. Мы приведем общее доказательство для нечетных  $n$ ; доказательство для четных  $n$  происходит аналогично.

Пусть  $A \in \Delta_n^{1,B}$  и  $B \in \Delta_n^{1,C}$ . Тогда

$$A = \{x \mid (\exists f_1)(\forall f_2) \dots (\exists f_n)(\forall w)R(B, f_1, \dots, f_n, x, w)\}$$

и

$$A = \{x \mid (\forall f_1) \dots (\forall f_n)(\exists w)S(B, f_1, \dots, f_n, x, w)\}$$

для некоторых рекурсивных отношений  $R$  и  $S$ .

Поэтому

$$A = \{x \mid (\exists D)[D = B \& (\exists f_1) \dots (\exists f_n)(\forall w)R(D, f_1, \dots, f_n, x, w)]\}.$$

Но условие  $D = B$  может быть представлено в виде  $(\forall u)[u \in D \Rightarrow u \in B] \& (\forall u)[u \in B \Rightarrow u \in D]$ . Подставляя сюда  $\Sigma_n^{1,C}$ -форму для  $B$  вместо его первого вхождения и  $\Pi_n^{1,C}$ -форму — вместо второго, получим  $\Sigma_n^{1,C}$ -форму для  $\{D \mid D = B\}$ . Подстав-

ляя ее в выражение для  $A$ , получим, применяя подходящим образом алгоритм Тарского — Куратовского, что  $A \in \Sigma_n^{1,C}$ .

Аналогично,

$$A = \{x \mid (\forall D)[D = B \Rightarrow (\forall f_1) \dots (\forall f_n)(\exists w)S(D, f_1, \dots, f_n, x, w)]\}.$$

Подставляя в это выражение ту же  $\Sigma_n^{1,C}$ -форму для  $\{D \mid D = B\}$ , получаем, что  $A \in \Pi_n^{1,C}$ . ■

**Следствие XXXIV** (Аддисон, Клини).  $A \in \Delta_2^1 \Rightarrow T^A \in \Delta_2^1$  (и потому, в частности,  $T^T \in \Delta_2^1$  и не может быть  $\Sigma_2^1$ -полным или  $\Pi_2^1$ -полным).

**Доказательство** непосредственно, так как  $T^A \in \Pi_1^{1,A} \subset \Delta_2^{1,A}$ . ■

Могут быть релятивизованы и другие результаты и понятия из § 16.3—16.5. Введем следующие определения. Пусть множество  $A$  дано.

**Определение.** Для  $z \in T^A$  назовем  $\tau_z^A$  дерево с конечными путями, характеристической функцией которого является  $\Phi_z^A$ , и пусть  $\|z\|^A = o(\tau_z^A)$ .

**Определение.** Ординал  $\alpha$  называется  $A$ -конструктивным ординалом, если  $\alpha = \|z\|^A$  для некоторого  $z \in T^A$ . (Класс  $A$ -конструктивных ординалов может быть также получен в результате релятивизации понятий § 11.8 или упр. 11-61.)

**Определение.**  $T_\alpha^A = \{x \mid x \in T^A \& \|x\|^A < \alpha\}$ .

**Определение.** Пусть  $b'$  — такая фиксированная общерекурсивная функция, что для любых  $n, z$  и  $X$  справедливо  $\Phi_{b'(n,z)}^X = \lambda y[\Phi_z^X(n \otimes y)]$ . Отсюда для любых  $A$  и  $n$ , если  $z \in T^A$ , имеем  $b'(n, z) \in T^A$  и  $\tau_{b'(n,z)}^A$  есть  $n$ -й отросток дерева  $\tau_z^A$ . (Таким образом,  $b'$  есть приспособленный к релятивизированному случаю вариант функции  $b$ , определенной в § 16.3.)

Теперь могут быть доказаны релятивизации теорем XXI, XXII и XXIII. Рассмотрение  $A$ -типерарифметической вычислимости может быть выполнено параллельно рассмотрениям § 16.5;  $W_z^{1,A}$  может быть определено как множество с  $\Pi_1^{1,A}$ -индексом  $z$ ; можно доказать теорему об однозначности и ввести понятие  $\Pi_1^1$ -функции относительно  $A$ . Можно показать, что  $\Pi_1^1$ -функции относительно  $A$  суть в точности функции, вычислимые на обобщенных машинах § 16.5, снабженных обычным образом оракулами.

Мы не проводим здесь эти релятивизированные рассмотрения. Вместо этого мы докажем несколько более сильную релятивиза-

цию теоремы ХХIII. Полезность для дальнейших исследований делает ее одним из главных результатов настоящего параграфа.

**Теорема XXXV.** Если  $y \in T^B$ , то  $\{x \mid x \in T^A \text{ & } \|x\|^A < \|y\|^B\} \in \Delta_1^{1, A, B}$  равномерно по  $y$  относительно некоторой всюду определенной функции, т. е. ( $\exists$  общерекурсивная  $g$ )  $(\forall A)(\forall B)(\forall y)[y \in T^B \Rightarrow g(y) \text{ есть некоторый } \Delta_1^{1, A, B}\text{-индекс множества } \{x \mid x \in T^A \text{ & } \|x\|^A < \|y\|^B\} (= \{x \mid x \in T_{\|y\|^B}^A\})]$ .

**Доказательство.** Мы применяем в доказательстве, параллельном доказательству теоремы XXI, лемму о рекурсии. Пусть множество  $S$  (из леммы о рекурсии) есть  $T^B$ , а  $<_S$  пусть будет  $\{\langle x, y \rangle \mid x \in T^B \text{ & } y \in T^B \text{ & } \|x\|^B < \|y\|^B\}$ . Пусть дано, что  $y \in T^B$ . Предположим, что мы имеем такое  $z$ , что, каково бы ни было  $x \in S_y (= T_{\|y\|^B}^B)$ ,  $\varphi_z(x)$  есть некоторый  $\Delta_1^{1, A, B}$ -индекс для множества  $T_{\|x\|^B}^A$ . Достаточно будет найти некоторый  $\Delta_1^{1, A, B}$ -индекс для множества  $T_{\|y\|^B}^A$  равномерно по  $z$  и  $y$ .

Применяя основную лемму о деревьях, получим

$$x \in T_{\|y\|^B}^A \Leftrightarrow [\varphi_y^B(0) = 1 \text{ & } [(\forall u)[\varphi_x^A(u) = 0] \vee [\varphi_x^A(0) = 1 \text{ &} \\ \text{ & } (\exists m)(\forall n)[b'(n, x) \in T_{\|b'(m, y)\|^B}^A]]].$$

Теперь если  $\|y\|^B \neq 0$ , то по предположению для любых  $n$ ,  $m$  и  $x$

$$b'(n, x) \in T_{\|b'(m, y)\|^B}^A \Leftrightarrow (\exists f)(\forall w) \neg T_{1, 1}^{*A, B}(\pi_1 \varphi_z(b'(m, y)), \\ f(w), b'(n, x)) \Leftrightarrow (\forall f)(\exists w)T_{1, 1}^{*A, B}(\pi_2 \varphi_z(b'(m, y)), f(w), b'(n, x)).$$

Так как любое из этих двух последних выражений можно представить в приведенное выше выражение для  $x \in T_{\|y\|^B}^A$ , получаем в результате применения алгоритма Тарского — Куратовского, что  $T_{\|y\|^B}^A \in \Delta_1^{1, A, B}$ .

Если же  $\|y\|^B = 0$ , то, как объясняется в доказательстве теоремы XXI, те же подстановки опять-таки показывают, что  $T_{\|y\|^B}^A \in \Delta_1^{1, A, B}$ .

Отсюда, как в доказательстве теоремы XXI, вытекает требуемый результат. ■

**Следствие XXXV.** Если  $y \in T^B$ , то  $\{x \mid x \in T^A \text{ & } \|x\|^A = \|y\|^B\} \in \Delta_1^{1, A, B}$  равномерно по  $y$  относительно некоторой всюду определенной функции.

**Доказательство.** Заметим, что

$$\{x \mid x \in T^A \text{ & } \|x\|^A = \|y\|^B\} = \\ = \{x \mid x \in T^A \text{ & } \|x\|^A < \|y\|^B + 1 \text{ & } \|y\|^B < \|x\|^A + 1\},$$

и будем рассуждать далее, как при доказательстве теоремы ХХIII(b). ■

Что можно сказать о классе  $A$ -конструктивных ординалов, если позволить  $A$  меняться? В частности, что представляют собой гиперарифметические ординалы, т. е. ординалы, соответствующие деревьям с конечными путями, обладающими гиперарифметическими характеристическими функциями? Докажем в качестве первого приложения теоремы XXXV следующую теорему, из которой следует, что гиперарифметические ординалы суть в точности конструктивные ординалы.

**Определение.** Пусть  $\lambda$  — наименьший неконструктивный ординал. При любом  $A$  обозначим через  $\lambda^A$  наименьший ординал, не являющийся  $A$ -конструктивным.

**Теорема XXXVI** (Спектор [1955]).  $B \leqslant_h A \Rightarrow \lambda^B \leqslant \lambda^A$ .

**Доказательство.** Допустим, что  $B \leqslant_h A$ , но  $\lambda^A < \lambda^B$ . Тогда существует такое  $y \in T^B$ , что  $\|y\|^B = \lambda^A$ . Но тогда  $T^A \in \Delta_1^{1, A, B}$ . Но  $B \leqslant_h A \Rightarrow \Delta_1^{1, A, B} = \Delta_1^{1, A}$ , что доказывается с помощью подстановки предикатной формы аналогично тому, как это делается в доказательстве теоремы XXXI. Поэтому  $T^A \in \Delta_1^{1, A}$ , а это противоречит  $\Pi_1^{1, A}$ -полноте множества  $T^A$ . ■

**Следствие XXXVI** (Спектор). (a)  $[x \in T^B \text{ & } B \in \Delta_1^1] \Rightarrow \|x\|^B$  конструктивен.

$$(b) \lambda < \lambda^A \Leftrightarrow T \leqslant_h A.$$

$$(c) B \leqslant_h A \Rightarrow [\lambda^B < \lambda^A \Leftrightarrow T^B \leqslant_h A].$$

**Доказательство.** (a) Заметим, что если множество  $A$  рекурсивно, то  $\lambda^A = \lambda$ . Применим теперь теорему с рекурсивным  $A$  и  $B \in \Delta_1^1$ .

(b)  $\Rightarrow$ . Пусть  $\lambda < \lambda^A$ . Тогда  $\|y\|^A = \lambda$  для некоторого  $y \in T^A$ . Поэтому  $T = \{x \mid x \in T \text{ & } \|x\| < \|y\|^A\}$ . По теореме XXXV  $T \in \Delta_1^{1, A}$ , т. е.  $T \leqslant_h A$  (по определению).

$\Leftarrow$ . Пусть  $T \leqslant_h A$ . Согласно теореме,  $\lambda^T \leqslant \lambda^A$ . Остается показать, что  $\lambda < \lambda^T$ . Определим следующим образом рекурсив-

ную относительно  $T$  функцию  $\psi$ :

$$\begin{aligned}\psi(0) &= 1, \\ \psi(n \otimes \bar{f}(x)) &= \begin{cases} 0, & \text{если } n \notin T; \\ \varphi_n(\bar{f}(x)), & \text{если } n \in T. \end{cases}\end{aligned}$$

Тогда  $\Psi$  — характеристическая функция дерева  $\tau$  с конечными путями и всякое рекурсивное дерево с конечными путями содержится в  $\tau$  в качестве некоторого отростка. Поэтому  $\sigma(\tau) = \lambda$ . Пусть  $\Psi = \varphi_\tau^T$ . Тогда  $\|z\|^T = \lambda$ , а потому  $\lambda < \lambda^T$ .

(c) Это — обобщение утверждения (b) (см. упр. 16-57). ■

В § 16.7 мы покажем, что существуют негиперарифметические множества, гиперстепени которых меньше гиперстепени множества  $T$ . Отсюда следует, что обращение теоремы XXXVI не имеет места (см. упр. 16-58).

Сформулированное в следствии XXXVI(a) утверждение может рассматриваться как некоторое сильное свойство замкнутости гиперарифметических множеств. По данному гиперарифметическому множеству  $A$  мы могли бы пытаться получать множества все более и более высоких степеней, образуя сначала все множества  $T_\alpha^A$  с индексом  $\alpha$ , пробегающим по всем  $A$ -конструктивным ординалам, и повторяя затем этот процесс применительно к множествам, полученным таким образом. Наше следствие показывает, что таким путем мы не сможем „вырваться“ из области гиперарифметических множеств; действительно, уже однократное применение этой операции к произвольному рекурсивному множеству дает все множества  $T_\alpha$  (с точностью до рекурсивного изоморфизма), и все другие множества, получающиеся повторными применениями этой операции, должны быть сводимы к уже полученным. Это свойство замкнутости согласуется с нашим неформальным рассмотрением обобщенной вычислимости в § 16.5.

### $\Sigma_2^1$ -множества и $\Delta_2^1$ -множества

Используя теорему XXXV, мы получим теорию  $\Sigma_2^1$ -множеств и  $\Delta_2^1$ -множеств, аналогичную теории  $\Pi_1^1$ -множеств и  $\Delta_1^1$ -множеств, изложенной в § 16.4. Эти результаты принадлежат Московакису и связаны с результатами Судзуки (см. теоремы XLVI, XLVII и XLVIII).

Определим некоторые понятия, аналогичные  $T$ ,  $\|x\|$  и  $T_\alpha$ . Мы используем верхние индексы, чтобы отличать обозначения этих новых понятий.

Определение. Положим  $T^2 = \bigcup_{A \in N} T^A$ . Для  $x \in T^2$  положим  $\mathcal{A} = \{A \mid x \in T^A\}$  и  $\|x\|^2 = \min_{A \in \mathcal{A}} \|x\|^A$ . Для произвольного

ординала  $\alpha$  полагаем  $T_\alpha^2 = \{x \mid x \in T^2 \& \|x\|^2 < \alpha\}$ .

Сначала мы докажем аналог теоремы XX, а затем получим аналоги теорем XXI и XXII.

Теорема XXXVII.  $T^2$  является  $\Sigma_2^1$ -полным множеством.

Доказательство. По определению  $T^2 = \{z \mid (\exists A)[z \in T^A]\}$ . Мы видели, что  $T^A \in \Pi_1^{1,A}$ . Поэтому  $T^2 \in \Sigma_2^1$  (см. разъяснения относительно переменных и кванторов для множеств в конце § 16.1).

Возьмем произвольное  $B \in \Sigma_2^1$ . Имеем  $B = \{x \mid (\exists f)(\forall g)[(\exists w)T_{2,1}^*(z, \bar{f}(w), \bar{g}(w), x)]\}$  при некотором  $z$ . По произвольным данным  $x$  и  $f$  определим  $f$ -рекурсивную функцию  $\psi$  следующим образом. Положим для всех  $g$  и  $w$

$$\psi(\bar{g}(w)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \neg T^*(z, \bar{f}(w), \bar{g}(w), x); \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Некоторый индекс для  $\psi$  как  $f$ -рекурсивной функции можно найти равномерно по  $x$  (и независимо от  $f$ ). Пусть  $h$  — взаимно однозначная общерекурсивная функция, дающая эти индексы. Тогда  $x \in B \Leftrightarrow (\exists f)[\varphi_{h(x)}^f \text{ есть характеристическая функция некоторого дерева с конечными путями}] \Leftrightarrow (\exists f)[h(x) \in T^{*(f)}] \Leftrightarrow h(x) \in T^2$  (см. упр. 16-60). Поэтому  $B$  сводится к  $T^2$  функцией  $h$ . ■

Определение. Для произвольного множества  $A$  назовем  $w = \langle u, v \rangle$  его  $\Delta_2^1$ -индексом, если  $u$  есть  $\Sigma_2^1$ -индекс множества  $A$ , а  $v$  есть его  $\Pi_2^1$ -индекс.

Теорема XXXVIII. Каково бы ни было  $y \in T^2$ ,  $T_{\|y\|^2}^2 \in \Delta_2^1$  равномерно по  $y$  относительно некоторой всюду определенной функции, т. е.  $(\exists \text{ общерекурсивная } g)(\forall y)[y \in T^2 \Rightarrow g(y) \text{ есть } \Delta_2^1\text{-индекс для } T_{\|y\|^2}^2]$ .

Доказательство. Пусть  $y \in T^2$ . Тогда

$$\begin{aligned}x \in T_{\|y\|^2}^2 &\Leftrightarrow (\forall B)[y \in T^B \Rightarrow (\exists A)[x \in T^A \& \|x\|^A < \|y\|^B]] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists A)[x \in T^A \& \neg(\exists B)[y \in T^B \& \|y\|^B < \|x\|^A + 1]].\end{aligned}$$

Из теоремы XXXV извлекаются  $\Pi_2^1$ -форма для первого выражения и  $\Sigma_2^1$ -форма для второго, причем их индексы находятся равномерно по  $y$  (см. упр. 16-61). ■

Теорема XXXIX (теорема об ограниченности). Пусть  $A \in \Sigma_2^1$  и  $h$  — такая общерекурсивная функция, что  $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(x) \in T^2$ . Тогда  $A \in \Delta_2^1 \Leftrightarrow (\exists y)[y \in T^2 \wedge (\forall x)[x \in A \Rightarrow \Rightarrow \|h(x)\|^2 < \|y\|^2]]$ .

Доказательство.  $\Leftarrow$ . Если такой  $y$  существует, то  $A \leqslant_{\text{I}} T_{\|y\|^2}^2$ . Но тогда  $A \in \Delta_2^1$  по теореме XXXVIII.

$\Rightarrow$ . Если такого  $y$  нет, то  $T^2 = \{z \mid (\exists x)[x \in A \wedge z \in T_{\|h(x)\|^2}^2]\}$ . Если  $A \in \Pi_2^1$ , то по теореме XXXVIII  $T^2 \in \Pi_2^1$ , что противоречит теореме XXXVII. ■

Следствие XXXIX. (а)

$$A \in \Delta_2^1 \Leftrightarrow (\exists y)[y \in T^2 \wedge A \leqslant_{\text{I}} T_{\|y\|^2}^2] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\exists y)[y \in T^2 \wedge A \leqslant_T T_{\|y\|^2}^2].$$

(б) ( $\exists$  общерекурсивная  $g$ ) ( $\forall A$ ) ( $\forall w$ ) [если  $A \in \Delta_2^1$  и  $w$  — некоторый  $\Delta_2^1$ -индекс множества  $A$ , то  $g(w) \in T^2$  и  $A \leqslant_{\text{I}} T_{\|g(w)\|^2}^2$ ].

Доказательство. Доказательства пунктов (а) и (б) проводятся параллельно доказательствам следствий XXII (см. упр. 16-62). ■

Определение. Положим  $\mathfrak{U} = \{\alpha \mid (\exists y)[y \in T^2 \wedge \alpha = \|y\|^2]\}$ .

Определение. Ординал  $\alpha$  называется  $\Delta_2^1$ -ординалом, если существуют такие  $\Delta_2^1$ -множество  $A$  и  $z \in T_A^A$ , что  $\alpha = \|z\|^A$ .

Какие ординалы входят в  $\mathfrak{U}$ ? В  $\mathfrak{U}$  содержатся, очевидно, все конструктивные ординалы. В § 16.7 мы покажем, что всякий ординал из  $\mathfrak{U}$  есть  $\Delta_2^1$ -ординал и что существуют  $\Delta_2^1$ -ординалы, не принадлежащие множеству  $\mathfrak{U}$  (следствия XLV (d) и XLV (e)). В следующей теореме мы устанавливаем, что  $\mathfrak{U}$  не ограничено сверху никаким  $\Delta_2^1$ -ординалом. Отсюда и из только что упомянутых результатов § 16.7 следует, что ординалы из  $\mathfrak{U}$  не образуют начальный отрезок ординалов. В упр. 16-63 мы увидим, что порядковый тип множества  $\mathfrak{U}$  не есть  $\Delta_2^1$ -ординал. Таким образом,  $\mathfrak{U}$  представляет собой собственное конфинальное подмножество  $\Delta_2^1$ -ординалов того же порядкового типа, что и множество всех  $\Delta_2^1$ -ординалов.

Теорема XL.  $(\exists x)(\exists B)[B \in \Delta_2^1 \wedge x \in T^B \wedge \alpha = \|x\|^B] \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists y)[y \in T^2 \wedge \alpha < \|y\|^2]$ .

Доказательство. Допустим противное. Тогда  $B \in \Delta_2^1$ ,  $x \in T^B$  и  $(\forall y)[y \in T^2 \Rightarrow \|y\|^2 < \|x\|^B + 1]$ . Применяя технику, использованную при завершении доказательства следствия XXII(b), найдем такой  $x'$ , что  $\|x'\|^B = \|x\|^B + 1$ . Тогда

$$[y \in T^2 \Leftrightarrow (\exists A)[\|y\|^A < \|x'\|^B]].$$

Но в силу теорем XXXV и XXXIV отсюда вытекает, что  $T^2 \in \Delta_2^1$ , в противоречие с теоремой XXXVII. ■

Определение. Положим  $x <^{T^2} y$ , если  $x \in T^2 \wedge y \in T^2 \wedge \& [\|x\|^2 < \|y\|^2 \vee [\|x\|^2 = \|y\|^2 \wedge x < y]]$ .

Отношение  $<^{T^2}$  есть  $\Sigma_2^1$ -отношение, и всякий ограниченный начальный отрезок упорядочения  $<^{T^2}$  есть  $\Delta_2^1$ -отношение (что доказывается так же, как следствие XXIII). Отсюда, между прочим, вытекает, и притом без использования результатов § 16.7, что всякий ограниченный начальный отрезок множества  $\mathfrak{U}$  изоморфен (как вполне упорядоченное множество) некоторому  $\Delta_2^1$ -ординалу. Теперь может быть развита теория  $\Sigma_2^1$ -вычислимости, параллельная теории  $\Pi_1^1$ -вычислимости, изложенной в § 16.5. В частности, могут быть доказаны теорема об однозначности, принцип редукции и существование пары непересекающихся  $\Sigma_2^1$ -множеств, не отделимых  $\Delta_2^1$ -множеством, а также принцип редукции для  $\Sigma_2^1$  множеств функций (см. упр. 16-64 и 16-65). На первый взгляд, многообещающим представляется распространение описанной теории на  $\Pi_3^1$ -множества. Определим  $T^{A,B}$  очевидным образом. Пусть

$$T^3 = \bigcap_{B \in N} \bigcup_{A \in N} T^{A,B} = \{z \mid (\forall B)(\exists A)[z \in T^{A,B}]\}.$$

Пусть  $\|z\|^3 = \sup_{B \in N} \min_{A \in \mathcal{A}} \|x\|^{A,B}$ , где  $\mathcal{A} = \{A \mid z \in T^{A,B}\}$ . Пусть

$$T_\alpha^3 = \{z \mid z \in T^3 \wedge \|z\|^3 < \alpha\}.$$

$T^3$ , как легко видеть,  $\Pi_3^1$ -полно.  $T_{\|y\|^3}^3 \in \Sigma_3^1$  равномерно по  $y$  (если  $y \in T^3$ , то  $[x \in T_{\|y\|^3}^3 \Leftrightarrow (\exists D)(\forall C)[y \in T^{C,D} \Rightarrow (\forall B)(\exists A)[\|x\|^{A,B} < \|y\|^{C,D}]]$ ). Однако мы не можем доказать, что  $T_{\|y\|^3}^3 \in \Pi_3^1$  равномерно. (Почему высказывание  $(\forall B)(\exists A)[x \in T^{A,B} \wedge (\exists D)(\forall C)[\neg (\|y\|^{C,D} < \|x\|^{A,B} + 1)]]$  оказывается ложным? См. упр. 16-66.) Действительно, если бы мы смогли это доказать, мы получили бы и доказательство принципа редукции для  $\Pi_3^1$ -множеств, а, как известно из трудов Гёделя и Адисона, существование такого доказательства влекло бы за собой противоречивость системы  $ZF$  теории множеств (см. Адисон [1959]).

## § 16.7. РЕЗУЛЬТАТЫ О БАЗИСЕ И НЕЯВНАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ

Определение. Пусть  $\mathcal{H}$  — класс гиперарифметических функций.

Обозначение. Мы сокращаем запись  $(\exists f)[f \in \mathcal{H} \wedge \dots]$  до  $(\exists f)_{\mathcal{H}}[\dots]$ .

**Теорема XLI (Клини).** Пусть  $R$  — рекурсивное отношение, и пусть

$$A = \{x \mid (\exists f)_{\mathcal{C}}(\forall w) R(\bar{f}(w), x)\}.$$

Тогда  $A \in \Pi_1^1$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_z^1$  означает то же, что и в § 16.5. Напомним, что по  $z$  можно эффективно найти некоторый  $\Pi_1^1$ -индекс функции  $\varphi_z^1$ , а если  $\varphi_z^1$  всюду определена, то и некоторый  $\Sigma_1^1$ -индекс функции  $\varphi_z^1$  может быть найден равномерно по  $z$  с помощью соответствующей всюду определенной функции.

Теперь  $(\exists f)_{\mathcal{C}}(\forall w) R(\bar{f}(w), x) \Leftrightarrow (\exists z)[\varphi_z^1 \text{ всюду определена} \& (\forall w)R(\bar{\varphi}_z^1(w), x)] \Leftrightarrow (\exists z)[(\forall u)(\exists v)[\langle u, v \rangle \in \varphi_z^1] \& (\forall w)(\forall y)[[y \text{ есть кодовое число кортежа длины } w \& (\forall u)(\forall n)[[n < w \& u \text{ есть } (n+1)-\text{е значение в кортеже, представимом } y] \Rightarrow \langle n, u \rangle \in \varphi_z^1]] \Rightarrow R(y, x)]]$ .

Подставляя (в последнее выражение)  $\Pi_1^1$ -форму для  $\varphi_z^1$  вместо первого вхождения этой функции и равномерную  $\Sigma_1^1$ -форму вместо второго вхождения, получим, что  $A \in \Pi_1^1$ . ■

**Следствие XLI(a).** Существует такое рекурсивное множество  $S$ , что

$$(\exists f)(\forall w)S(\bar{f}(w)),$$

даже когда  $\neg(\exists f)_{\mathcal{C}}(\forall w)S(\bar{f}(w))$ .

**Доказательство.** Пусть  $B = E^1 = \{z \mid (\exists f)(\forall w) \neg T_{1,1}^*(z, \bar{f}(w), z)\}$ . Положим

$$A = \{z \mid (\exists f)_{\mathcal{C}}(\forall w) \neg T_{1,1}^*(z, \bar{f}(w), z)\}.$$

Имеем  $A \subset B$ . Пусть одним из  $\Pi_1^1$ -индексов множества  $A$  служит  $z_0$ . Тогда, согласно определению  $B$ ,  $z_0 \in B$  &  $z_0 \notin A$ . Поэтому  $(\exists f)(\forall w) \neg T_{1,1}^*(z_0, \bar{f}(w), z_0)$ , но  $\neg(\exists f)_{\mathcal{C}}(\forall w) \neg T_{1,1}^*(z_0, \bar{f}(w), z_0)$ . Полагая  $S = \{y \mid \neg T_{1,1}^*(z_0, y, z_0)\}$ , получим искомый результат.

Это следствие допускает также такую интересную формулировку.

**Следствие XLI(b).** Существует рекурсивное дерево, имеющее бесконечные ветви, но не имеющее бесконечных гиперарифметических ветвей.

**Доказательство.** Непосредственно.

Теорема, обратная к теореме XLI, будет доказана в качестве теоремы XLIV.

**Определение.** Пусть  $R$  — семейство классов функций,  $\mathcal{C}$  — класс функций.  $\mathcal{C}$  называется базисом семейства  $R$ , если

$$(\forall A)[A \in R \Rightarrow [(\exists f)[f \in A] \Leftrightarrow (\exists f)[f \in \mathcal{C} \& f \in A]]].$$

Например, легко показать, что класс рекурсивных функций есть базис семейства рекурсивных классов функций (упр. 16-67).

В задачах, касающихся базисов, мы иногда пользуемся принятными в теории иерархий обозначениями применительно к классам функций или же к семействам классов функций. Например, только что упомянутый результат можно сформулировать так:  $\Sigma_0^0$  есть базис в  $\Sigma_0^0$  (т. е. класс всех функций, каждая из которых представима в  $\Sigma_0^0$  форме, есть базис в семействе классов, каждый из которых представим в  $\Sigma_0^0$ -форме)<sup>1)</sup>.

Рассмотрим такое семейство классов  $\mathcal{A}$ , что для некоторого рекурсивного отношения  $S$  справедливо  $\mathcal{A} = \{f \mid (\forall w)S(\bar{f}(w))\}$ . Следствие XLI показывает, что класс гиперарифметических функций не образует базиса в этом семействе. В силу теоремы V это семейство есть семейство всех  $\Pi_1^0$ -классов. Поэтому можно так сформулировать наш результат:  $\Delta_1^1$  не является базисом для  $\Pi_1^0$ .

Образуют ли  $\Pi_1^1$ -функции базис в  $\Pi_1^0$ ? Очевидно, что нет, поскольку, согласно § 16.5,  $\Pi_1^1$ -функции (всюду определенные) совпадают с гиперарифметическими функциями. (На самом деле, при любом  $n$  понятия всюду определенных  $\Sigma_n^1$ -функций,  $\Pi_n^1$ -функций и  $\Delta_n^1$ -функций совпадают.)

Образует ли класс всех функций, рекурсивных относительно  $\Pi_1^1$ -множеств, базис в  $\Pi_1^0$ ? Да, образует, как мы сейчас покажем.

**Теорема XLII.** Пусть отношение  $S$  рекурсивно.  $(\exists f)(\forall w)S(\bar{f}(w)) \Rightarrow (\exists f)[f \text{ рекурсивна относительно } T \& (\forall w)S(\bar{f}(w))]$ .

**Доказательство.** Пусть  $S$  дано.  $S$  определяет некоторое рекурсивное дерево  $\tau$ . (Произвольная вершина принадлежит  $\tau$ , если  $S$  истинно для нее и для всех вершин над ней.) Пусть  $(\exists f)(\forall w)S(\bar{f}(w))$ . Мы дадим инструкции для рекурсивного относительно  $T$  вычисления значений такой  $f$ .

Чтобы вычислить  $f(0)$ , поочередно проверяем последовательные отростки  $\tau$ , чтобы с помощью  $T$  решить относительно каждого из них, является ли он деревом с конечными путями. Некоторый отросток обязательно окажется не таким. Пусть  $x_0$  есть наименьшее из таких  $u$ , что  $u$ -й отросток  $\tau$  не есть дерево с конечными путями. Положим  $f(0) = x_0$ .

При вычислении  $f(n)$  будем считать, что  $f(0), \dots, f(n-1)$  уже вычислены. Поэтому  $\bar{f}(n)$  известно. Поочередно проверяем последовательные отростки дерева, получающегося из  $\tau$ , если взять вершину  $\bar{f}(n)$  вместе со всеми вершинами, лежащими ниже ее. ■

1) Всюду ниже в задачах о базисах рассматриваются всюду определенные функции.— Прим. перев.

**Следствие XLII(a).** Класс функций, рекурсивных относительно  $T$ , есть базис в  $\Pi_1^0$ .

Доказательство очевидно. ■

**Следствие XLII(b).** Класс функций, рекурсивных относительно  $T$ , образует базис в  $\Sigma_1^1$ .

Доказательство. Пусть  $\mathcal{A}$  есть  $\Sigma_1^1$ -класс. Тогда  $\mathcal{A} = \{f \mid (\exists g)(\forall w)R(\bar{f}(w), \bar{g}(w))\}$  для некоторого рекурсивного отношения  $R$ .

Но

$$\begin{aligned} (\exists f)[f \in \mathcal{A}] &\Rightarrow (\exists f)(\exists g)(\forall w)R(\bar{f}(w), \bar{g}(w)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists h)(\forall w)R(\bar{\pi}_1 h(w), \bar{\pi}_2 h(w)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists h)[h \text{ рекурсивна относительно } T \text{ &} \\ &(\forall w)R(\bar{\pi}_1 h(w), \bar{\pi}_2 h(w))] \text{ (в силу теоремы)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists f)[f \text{ рекурсивна относительно } T \text{ &} (\exists g)[g \text{ рекурсивна относительно } T \text{ &} (\forall w)R(\bar{f}(w), \bar{g}(w))]] \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists f)[f \text{ рекурсивна относительно } T \text{ &} (\exists g)(\forall w)R(\bar{f}(w), \bar{g}(w))] \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists f)[f \text{ рекурсивна относительно } T \text{ &} f \in \mathcal{A}]. \end{aligned}$$

Поэтому все приведенные выше формулы эквивалентны, и  $(\exists f)[f \in \mathcal{A}] \Leftrightarrow (\exists f)[f \text{ рекурсивна относительно } T \text{ &} f \in \mathcal{A}]$ . ■

Обязательно ли использовать функции той же степени, что и  $T$  (или даже той же гиперстепени, что и  $T$ ), чтобы получить базис в  $\Pi_1^0$ ? Ганди получил на этот счет следующий результат.

**Теорема XLIII** (Ганди [1960]). Пусть  $\mathcal{C}$  — класс всех функций, гиперстепени которых меньше, чем гиперстепень  $T$ , т. е.  $\mathcal{C} = \{f \mid f \leq_h T \text{ &} T \not\leq_h f\}$ . Тогда  $\mathcal{C}$  образует базис в  $\Pi_1^0$ .

Доказательство. Пусть дана некоторая всюду определенная функция  $g$ . Как отмечалось в § 16.6, понятие гиперарифметической вычислимости из § 16.5 может быть релятивизовано, так что порождаемыми станут  $\Pi_1^1, g$ -множества  $W_0^{1,g}, W_1^{1,g}, \dots$  и  $\Pi_1^{1,g}$ -функции  $\varphi_0^{1,g}, \varphi_1^{1,g}, \dots$ . Прямая релятивизация доказательства теоремы XLI дает тогда следующий результат:

если  $R$  рекурсивно относительно  $g$ , то  $\{x \mid (\exists f)[f \leq_h g \text{ &} (\forall w)R(\bar{f}(w), x)]\} \in \Pi_1^{1,g}$ .

Доказательство следствия XLI(a) также допускает тогда релятивизацию, приводящую к существованию такого  $z_0$ , что  $(\exists f)(\forall w)\neg T_{1,1}^{*g}(z_0, \bar{f}(w), z_0) \Leftrightarrow (\exists f)(\forall w)\neg T_{2,1}^{*}(z_0, \bar{g}(w), \bar{f}(w), z_0)$ , но при этом  $\neg(\exists f)[f \leq_h g \text{ &} (\forall w)\neg T_{1,1}^{*g}(z_0, \bar{f}(w), z_0)] \Leftrightarrow \neg(\exists f)$

$[f \leq_h g \text{ &} (\forall w)\neg T_{2,1}^{*}(z_0, \bar{g}(w), \bar{f}(w), z_0)]$ . (См. упр. 16-68.) Это  $z_0$  не зависит от выбора  $g$ . Поэтому мы имеем такое рекурсивное отношение  $S$ , что

$$(\forall g)(\exists f)(\forall w)S(\bar{g}(w), \bar{f}(w)),$$

но при этом  $(\forall g)(\forall f)[f \leq_h g \Rightarrow \neg(\forall w)S(\bar{g}(w), \bar{f}(w))]$ .

Пусть  $R$  — произвольное рекурсивное множество. Мы хотим показать, что

$$(\exists g)(\forall w)R(\bar{g}(w)) \Rightarrow (\exists g)[g \leq_h T \text{ &} T \not\leq_h g \text{ &} (\forall w)R(\bar{g}(w))].$$

Введем  $Q = \{(u, v) \mid R(u) \text{ &} S(u, v)\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\exists g)(\forall w)R(\bar{g}(w)) &\Rightarrow (\exists h)(\forall w)Q(\bar{\pi}_1 h(w), \bar{\pi}_2 h(w)) \text{ (по определению } S\text{)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists h)[h \text{ рекурсивна относительно } T \text{ &} \\ &\quad \& (\forall w)Q(\bar{\pi}_1 h(w), \bar{\pi}_2 h(w))] \text{ (по теореме XLII)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists f)(\exists g)[f \text{ и } g \text{ рекурсивны относительно } T \text{ &} \\ &\quad \& (\forall w)R(\bar{g}(w)) \& (\forall w)S(\bar{g}(w), \bar{f}(w))] \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists f)(\exists g)[f \text{ и } g \text{ рекурсивны относительно } T \text{ &} \\ &\quad \& (\forall w)R(\bar{g}(w)) \& f \not\leq_h g] \text{ (по построению } S\text{)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists g)[g \text{ рекурсивна относительно } T \text{ &} \\ &\quad \& T \not\leq_h g \& (\forall w)R(\bar{g}(w))] \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists g)[g \leq_h T \text{ &} T \not\leq_h g \& (\forall w)R(\bar{g}(w))]. \blacksquare \end{aligned}$$

**Следствие XLIII(a).** Класс всех функций, гиперстепени которых меньше гиперстепени множества  $T$ , образует базис в  $\Sigma_1^1$ .

Доказательство. Такое же, как в следствии XLII(b). ■

**Следствие XLIII(b).** Существует гиперстепень, промежуточная между  $\Delta_1^1$  (наименьшей гиперстепенью) и гиперстепенью множества  $T$ .

Доказательство. Непосредственно с помощью следствия XLI(a). ■

В упр. 16-69 мы покажем, что существует бесконечно много таких гиперстепеней.

Ряд результатов о базисах был получен в связи с гиперарифметическими множествами. Будем говорить, что множество  $A$  определимо в  $\Sigma_1^1$ -форме с  $\mathcal{C}$  в качестве базиса, если существует такое рекурсивное отношение  $R$ , что

$$(i) A = \{z \mid (\exists f)(\forall w)R(\bar{f}(w), z)\}$$

и

$$(ii) (\forall z)[(\exists f)(\forall w)R(\bar{f}(w), z) \Rightarrow (\exists f)[f \in \mathcal{C} \& (\forall w)R(\bar{f}(w), z)]].$$

Из теоремы XLII немедленно вытекает, что всякое множество, определимое в  $\Sigma_1^1$ -форме с гиперарифметическими функциями в качестве базиса, является гиперарифметическим. Клини [1959а] показал, что гиперарифметические множества могут быть индуктивно порождены следующим образом: всякое гиперарифметическое множество определимо в  $\Sigma_1^1$ -форме с функциями, рекурсивными относительно ранее полученных Т-степеней, в качестве базиса. См. упр. 16-99. Эти результаты представляют другой аспект рассматривавшихся в § 16.6 свойств замкнутости гиперарифметических множеств.

Теперь мы с помощью основной леммы о деревьях докажем обращение теоремы XLII.

**Теорема XLIV (Спектор).** *Если  $A \in \Pi_1^1$ , то существует такое рекурсивное отношение  $R$ , что  $A = \{x \mid (\exists f)_{\mathcal{F}} (\forall w) R(f(w), x)\}$ .*

**Доказательство.** По ходу доказательства нашей главной целью будет получить арифметическое отношение  $P \subseteq \mathcal{F} \times N$ , обладающее следующими двумя свойствами. (i)  $z \in T \Rightarrow [P(f, z) \Leftrightarrow f \text{ есть характеристическая функция множества } \{\langle u, v \rangle \mid u \in T \& v \in T \& \|u\| < \|v\| \leq \|z\|\}]$ . (ii)  $[z \notin T \& P(f, z)] \Rightarrow f \text{ совпадает на } N \times T \text{ с характеристической функцией множества } \{\langle u, v \rangle \mid u \in T \& v \in T \& \|u\| < \|v\|\}$ . Как только такое  $P$  будет получено, теорема доказывается прямыми рассуждениями.

Условимся говорить о числе  $x$ , что  $x$  есть дерево, если  $\varphi_x$  — характеристическая функция некоторого дерева, т. е. если  $(\forall u)[\varphi_x(u) = 0 \vee \varphi_x(u) = 1] \& (\forall u)(\forall v)[[\varphi_x(u) = 1 \& \text{кортеж (соответствующий кодовому числу) } u \text{ есть продолжение кортежа (соответствующего кодовому числу) } v] \Rightarrow \varphi_x(v) = 1]$ . Отметим, что последнее выражение дает  $\Pi_2^0$ -форму для множества  $\{x \mid x \text{ есть дерево}\}$ .

Положим  $C = \{f \mid (\forall u)[f(u) = 0 \vee f(u) = 1]\}$ , а также

$$\begin{aligned} M = \{&\langle f, x, y \rangle \mid x \text{ есть дерево} \& y \text{ есть дерево} \& \\ &\& \& [\|x\| = 0 \& \|y\| = 1] \vee [\neg(\|y\| = 0) \& (\exists m)(\forall n)[f(\langle b(n, x), \\ &b(m, y) \rangle) = 1] \& (\forall m)[\|b(m, y)\| = 0 \vee (\exists s)[f(s, b(m, y)) = 1]]]\}, \end{aligned}$$

где  $b$  — определенная в § 16.3 общерекурсивная функция, с помощью которой получаются отростки данного дерева.

Вспоминая основную лемму о деревьях, отметим некоторые свойства отношения  $M$ .

1. Пусть  $f$  — характеристическая функция множества  $\{\langle x, y \rangle \mid x \in T \& y \in T \& \|x\| < \|y\|\}$ . Тогда  $f$  удовлетворяет соотношению

$$C(f) \& (\forall x)(\forall y)[f(\langle x, y \rangle) = 1 \Leftrightarrow M(f, x, y)].$$

2. Этому арифметическому соотношению удовлетворяют и другие функции  $f$ . Если бы это было не так, то в силу аргументов, использованных при доказательстве теоремы XI, характеристическая функция из пункта 1 была бы гиперарифметической, что противоречит теореме XXIII(с) (см. упр. 16-71).

3. Пусть  $y_0 \in T$ , а  $f$  совпадает с характеристической функцией множества  $\{\langle u, v \rangle \mid u \in T_{\|y_0\|} \& v \in T_{\|y_0\|+1} \& \|u\| < \|v\|\}$  на множестве  $N \times T_{\|y_0\|}$ . Пусть, далее,  $C(f) \& (\forall x)(\forall y)[f(\langle x, y \rangle) = 1 \Leftrightarrow M(f, x, y)]$ . Тогда

$$C(f) \& (\forall x)[f(\langle x, y_0 \rangle) = 1 \Leftrightarrow x \in T \& \|x\| < \|y_0\|],$$

а потому  $f$  совпадает с характеристической функцией множества  $\{\langle u, v \rangle \mid u \in T_{\|y_0\|+1} \& v \in T_{\|y_0\|+1} \& \|u\| < \|v\|\}$  на  $N \times T_{\|y_0\|+1}$ . Это непосредственно вытекает из основной леммы о деревьях.

4. На самом деле, какова бы ни была функция  $f$ , если  $C(f) \& (\forall x)(\forall y)[f(\langle x, y \rangle) = 1 \Leftrightarrow M(f, x, y)]$ , то  $f$  совпадает с характеристической функцией множества  $\{\langle u, v \rangle \mid u \in T \& v \in T \& \|u\| < \|v\|\}$  на множестве  $N \times T$ . Это утверждение получается из утверждения 3 с помощью индукции по  $\|y_0\|$ .

Положим теперь

$$\begin{aligned} P = \{&\langle f, z \rangle \mid C(f) \& (\forall x)(\forall y)[f(\langle x, y \rangle) = 1 \Leftrightarrow [M(f, x, y) \& \\ &\& (\forall m)(\exists n)[f(\langle b(n, z), b(m, y) \rangle) = 0]]] \& (\forall x)(\forall y) \\ &[f(\langle x, y \rangle) = 1 \Rightarrow (\forall n)[f(\langle b(n, y), z \rangle) = 1]]\}. \end{aligned}$$

Докажем теперь некоторые касающиеся  $P$  факты.

5. Если  $z \in T$  и  $f$  есть характеристическая функция множества  $\{\langle u, v \rangle \mid u \in T \& v \in T \& \|u\| < \|v\| \leq \|z\|\}$ , то справедливо  $P(f, z)$ . Первый и третий конъюнктивные члены из определения  $P$  проверяются непосредственно. Что касается второго члена, то  $\Rightarrow$  проверяется непосредственно (см. свойство 1), а  $\Leftarrow$  вытекает из основной леммы о деревьях (см. свойство 3).

6. Если  $z \in T$  и справедливо  $P(f, z)$ , то  $f$  есть характеристическая функция множества  $\{\langle u, v \rangle \mid u \in T \& v \in T \& \|u\| < \|v\| \leq \|z\|\}$ . Мы докажем это следующим образом. Пусть  $z \in T$  и справедливо  $P(f, z)$ . Покажем сначала, что  $f$  совпадает с характеристической функцией множества  $\{\langle u, v \rangle \mid u \in T \& v \in T \& \|u\| < \|v\| \leq \|w\|\}$  на множестве  $N \times T_{\|w\|+1}$  при всяком  $w$ , для которого имеет место  $w \in T$  и  $0 \leq \|w\| \leq \|z\|$ . Это непосредственно доказывается обычной индукцией по  $\|w\|$  с использованием второго члена из определения  $P$  (см. упр. 16-71 и свойство 4).

Из третьего конъюнктивного члена в определении  $P$  непосредственно вытекает, что  $f = 0$  на множестве  $N \times \bar{T}_{\|z\|+1}$ .

7. Если  $z \in T$ , то  $P(f, z)$  справедливо для одной и только одной  $f$ , и эта  $f$  — гиперарифметическая функция. Единственность  $f$



Часть (e) получается теперь с помощью теоремы 15-XXV. ■

Следствия XLIV(d) и XLIV(e) усиливаются в теореме LII и в упр. 16-98.

Верно ли, что всякое гиперарифметическое множество неявно определимо в элементарной арифметике, т. е. верна ли импликация  $A \in \Delta_1^1 \Rightarrow \{A\} \in \Delta_0^1$ ? Феферман получил отрицательный ответ на этот вопрос, используя методы Коэна, связанные с понятиями вынуждения и генеричности. См. упр. 16-72. Приведем, однако,

Следствие XLIV. (f)  $A \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow \{A\} \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow \{A\} \in \Sigma_1^1$ .

(g)  $A \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow (\exists B)[B \in \Delta_1^1 \& \{\langle A, B \rangle\} \in \Delta_0^1]$ .

(h)  $A \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow (\exists B)[B \in \Delta_1^1 \& \{\langle A, B \rangle\} \in \Pi_2^0]$ .

Часть (g) утверждает, что всякое гиперарифметическое множество „почти неявно определимо“ в элементарной арифметике в том смысле, что оно и некоторое другое гиперарифметическое множество могут быть „одновременно неявно определены“. Первоначально результаты о неявной определимости гиперарифметических множеств были получены именно в такой форме.

**Доказательство.** (f). (i)  $A \in \Delta_1^1 \Rightarrow \{A\} \in \Delta_1^1$ . Пусть  $A \in \Delta_1^1$ . Заметим, что  $\{A\} = \{X \mid (\forall x)[x \in X \Rightarrow x \in A] \& (\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in X]\}$ . Подставляя соответствующие формы для  $A$  в правую часть импликации, получим желаемый результат.

(ii)  $\{A\} \in \Delta_1^1 \Rightarrow \{A\} \in \Sigma_1^1$ . Это тривиально.

(iii)  $\{A\} \in \Sigma_1^1 \Rightarrow \{A\} \in \Delta_1^1$ . Пусть  $\{A\} \in \Sigma_1^1$  и  $R(A)$  — некоторая  $\Sigma_1^1$ -форма, представляющая  $\{A\}$ . Тогда и

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid (\exists X)[R(X) \& x \in X]\} = \\ &= \{x \mid (\forall X)[R(X) \Rightarrow x \in X]\}, \end{aligned}$$

откуда извлекаются требуемые  $\Sigma_1^1$ - и  $\Pi_1^1$ -формы для  $A$ .

(g)  $\Leftarrow$ . Пусть  $(\exists B)[B \in \Delta_1^1 \& \{\langle A, B \rangle\} \in \Delta_0^1]$  и  $R(A, B)$  — некоторая арифметическая форма для  $\{\langle A, B \rangle\}$ . Тогда  $\{A\} = \{X \mid (\exists B)R(X, B)\}$  и мы имеем  $\{A\} \in \Sigma_1^1$ . Отсюда в силу (f)  $A \in \Delta_1^1$ .

$\Rightarrow$ . Пусть теперь  $A \in \Delta_1^1$ . Воспользовавшись (b), возьмем такое  $B$ , что  $\{B\} \in \Delta_0^1$  и  $A \leqslant_1 B$ . Пусть  $S(B)$  — некоторая арифметическая форма для  $\{B\}$ . Пусть функция  $f$  1-сводит  $A$  к  $B$ . Тогда  $\{\langle A, B \rangle\} = \{\langle X, Y \rangle \mid S(Y) \& (\forall x)[x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y]\}$ , и мы получаем искомую арифметическую форму.

(h) См. упр. 16-75. ■

В связи с (f) Бенсон анонсировал результат, гласящий, что для всякого уровня гиперарифметической иерархии существуют гиперарифметические множества, обладающие неявными „гиперарифметическими“ определениями, лежащими выше данного уровня, и не допускающие таких неявных определений, лежащих

ниже его. (Уровни гиперарифметической иерархии определяются в § 16.8.)

Является ли  $\mathcal{H}$ , класс всех гиперарифметических функций, гиперарифметическим классом? В упр. 16-76 мы покажем, что это не так и что  $\mathcal{H} \in (\Pi_1^1 - \Sigma_1^1)$ . Является ли класс всех арифметических функций арифметическим? Аддисон, используя методы Коэна, показал, что это не так (см. упр. 16-73).

Теперь мы обратимся к  $\Delta_2^1$ -множествам. Мы получим теорему о базисе, противоположную по форме результату, полученному в следствии XL1 для  $\Delta_1^1$ , но при этом получим результаты о неявной определимости, аналогичные результатам о  $\Delta_1^1$ , полученным в следствии XLIV. Наши результаты следует из фундаментального факта, установленного в начале Кондо для классической иерархии проективных множеств, а затем доказанного Аддисоном и для аналитической иерархии.

Пусть  $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$  и  $\mathcal{F} \in \Pi_1^1$ . Тогда  $\mathcal{F} = \{A \mid (\forall f)(\exists y)R(A, f, y)\}$  для некоторого рекурсивного отношения  $R \subset \mathcal{N} \times \mathcal{F} \times N$ .

**Определение.**  $z$  называется  $\Pi_1^1$ -индексом класса  $\mathcal{F}$ , если

$$\mathcal{F} = \{A \mid (\forall f)(\exists y)T_{2, 0}(z, A, \tau(f), y)\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (\forall f)(\exists y)T_{2, 0}(z, A, \tau(f), y) &\Leftrightarrow (\forall f)(\exists y)T_{1, 0}^{*A}(z, f, y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall f)(\exists y)T_{1, 0}^{*A}(z, \bar{f}(y)) \end{aligned}$$

в силу определений. (См. определения, предшествующие теореме XXX.) Итак, ( $z$  есть  $\Pi_1^1$ -индекс для  $\mathcal{F}$ )  $\Leftrightarrow \mathcal{F} = \{A \mid (\forall f)(\exists y)T_{1, 0}^{*A}(z, \bar{f}(y))\}$ . Отметим также, что отношение

$$\{\langle A, z, u \rangle \mid T_{1, 0}^{*A}(z, u)\}$$

рекурсивно.

**Теорема XLV** (Кондо, Аддисон). *Если  $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$  и  $\mathcal{F} \in \Pi_1^1$ , то существует такое  $\mathcal{Q}$ , что  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{N}$ ,  $\mathcal{Q} \in \Pi_1^1$  и*

(i)  $\mathcal{F} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{Q} = \emptyset$ ,

(ii)  $\mathcal{F} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists A)[\mathcal{Q} = \{A\} \& A \in \mathcal{F}]$ ,

причем некоторый  $\Pi_1^1$ -индекс класса  $\mathcal{Q}$  находится по  $\Pi_1^1$ -индексу  $\mathcal{F}$  равномерно с помощью *всюду определенной* функции.

**Доказательство.** Введем несколько определений, связанных с выбранным нами кодированием кортежей натуральными числами.

**Определение.** Скажем, что  $y$  продолжает  $x$ , если кортеж, представимый (кодовым числом)  $y$ , есть собственное продолжение кортежа, представимого (кодовым числом)  $x$ .

Отметим следующее свойство выбранного кодирования кортежей натуральными числами:  $(\forall x)(\forall y)[y \text{ продолжает } x \Rightarrow \Rightarrow y > x]$  (см. упр. 16-77).

**Определение.** Пусть  $x$  есть кодовое число кортежа  $x_1, \dots, x_k$ , а  $y$  — кодовое число кортежа  $y_1, \dots, y_m$ ; обозначим через  $x * y$  кодовое число кортежа  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m$ . Очевидно, что функция  $\lambda xy[x * y]$  общерекурсивна. Отметим, что  $0 * y = y$  для всякого  $y$ .

**Определение.** Пусть  $t$  — такая общерекурсивная функция, что для всякого  $X$

$$\varphi_{t(x, z)}^X = \lambda y[\varphi_z^X(x * y)].$$

Таким образом, если  $\varphi_z^X$  — характеристическая функция дерева  $\tau$ , то  $\varphi_{t(x, z)}^X$  — характеристическая функция дерева, получающегося из  $\tau$ , если взять все вершины  $\tau$ , начиная с вершины (с кодовым числом)  $x$  и ниже. (Функция  $t$  является, понятно, обобщением функции отростков  $b$ , определенной в § 16.3.)

Условимся, что на протяжении последующего доказательства произвольное данное дерево с конечными путями не только сопоставляет каждой своей вершине некоторый ненулевой ординал, как в § 16.3, но также сопоставляет ординал 0 всем другим вершинам (всего функционального дерева).

Пусть дано  $\mathcal{P}$  и  $z$  — некоторый  $\Pi_1^1$ -индекс множества  $\mathcal{P}$ . Тогда

$$\mathcal{P} = \{A \mid (\forall f)(\exists y)T_{1, 0}^{*A}(z, f(y))\}.$$

Возьмем такое  $w$ , что для всех  $A$

$$\varphi_w^A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \neg T_{1, 0}^{*A}(z, x); \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$w$ , очевидно, находится по  $z$  равномерно с помощью всюду определенной функции. По определению  $\varphi_w^A$  является характеристической функцией некоторого дерева с конечными путями тогда и только тогда, когда  $A \in \mathcal{P}$ , т. е.  $w \in T^A \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}$ . (Напомним, что  $T^A$ ,  $\|z\|^A$  и  $\tau_z^A$  определены в § 16.6.)

Теперь мы определим  $\mathcal{Q}$ . В выражении для  $\mathcal{Q}$  мы сокращаем  $[u \in T^B \& \|u\|^B < \|v\|^A]$  до  $\|u\|^B < \|v\|^A$ , а  $[u \in T^B \& \|u\|^B = \|v\|^A]$  до  $\|u\|^B = \|v\|^A$  (для произвольных термов  $u$  и  $v$ );  $\mathcal{Q} = \{A \mid w \in T^A$

$$\& (\forall B) \neg [\|w\|^B < \|w\|^A] \&$$

$$\& (\forall B)[\|w\|^B = \|w\|^A \Rightarrow (\forall y)[(\forall x)[x < y \Rightarrow \|t(x, w)\|^B = \|t(x, w)\|^A] \Rightarrow \neg [\|t(y, w)\|^B < \|t(y, w)\|^A]]] \&$$

$$\& (\forall B)[(\forall x)[\|t(x, w)\|^B = \|t(x, w)\|^A] \Rightarrow (\forall y)[(\forall x)[x < y \Rightarrow c_B(x) = c_A(x)] \Rightarrow c_A(y) \leq c_B(y)]].$$

Отметим, что определение состоит из четырех пунктов.

Остается доказать, что  $\mathcal{Q}$  обладает желаемыми свойствами.

$\mathcal{Q} \in \Pi_1^1$ . Для доказательства воспользуемся  $\Pi_1^{1, A}$ -формой для  $T^A$  и подходящими  $\Pi_1^{1, A, B}$ - и  $\Sigma_1^{1, A, B}$ -формами, полученными в теореме XXXV и следствии XXXV для соответствующих выражений. Затем применим алгоритм Тарского — Куратовского (см. упр. 16-8). (Если  $w \in T^A$ , то  $t(x, w) \in T^A$  для всех  $x$ , и формы, доставляемые теоремой XXXV и следствием XXXV, имеют желаемое значение. Если  $w \notin T^A$ , то значение этих форм несущественно.) Отсюда следует, что  $\Pi_1^1$ -индекс  $\mathcal{Q}$  равномерно зависит от  $z$ .

(i)  $\mathcal{P} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{Q} = \emptyset$ . Получается непосредственно, поскольку, как мы заметили,  $w \in T^A \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}$ .

(ii)  $\mathcal{P} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists A)[\mathcal{Q} = \{A\} \& A \in \mathcal{P}]$ . Сначала покажем, что  $\mathcal{Q}$  содержит не более одного  $A$ . Рассмотрим по порядку пункты определения.

Первый из них говорит, что  $A \in \mathcal{P}$ .

Второй утверждает, что для всякого  $B$  если  $B \in \mathcal{P}$ , то  $\|w\|^A \leq \leq \|w\|^B$ . Поэтому для любых  $A_1$  и  $A_2$  из  $\mathcal{Q}$  имеем  $\|w\|^{A_1} = \|w\|^{A_2}$ .

Третий пункт говорит, что для всякого  $B$  если  $B \in \mathcal{P}$  и  $\|w\|^A = \|w\|^B$ , то  $\tau_w^B$  должно быть расположено по крайней мере так же высоко, как и  $\tau_w^A$ , в некотором „лексикографическом“ линейном упорядочении деревьев с конечными путями. Поэтому для любых  $A_1$  и  $A_2$  из  $\mathcal{Q}$  имеем  $\tau_w^{A_1} = \tau_w^{A_2}$ .

Четвертый пункт гласит, что для любого  $B$  если  $\tau_w^A = \tau_w^B$ , то  $B$  должно располагаться по крайней мере так же высоко, как  $A$ , в некотором „лексикографическом“ линейном упорядочении класса  $\mathcal{N}^1$ ). Поэтому для любых  $A_1$  и  $A_2$  из  $\mathcal{Q}$  получаем  $A_1 = A_2$ .

Остается показать, что  $\mathcal{P} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{Q} \neq \emptyset$ . (Это не очевидно, так как использованное нами „лексикографическое“ линейное упорядочение деревьев с конечными путями не является (как линейное упорядочение всех деревьев с конечными путями) вполне-упорядочением; также и использованное „лексикографическое“ линейное упорядочение класса  $\mathcal{N}$  не есть вполне-упорядочение.)

Пусть  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ .

1.  $\{A \mid A \text{ удовлетворяет первому пункту определения}\} \neq \emptyset$ . Это очевидно, так как  $A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow w \in T^A$ .

2.  $\{A \mid A \text{ удовлетворяет первому и второму пунктам определения}\} \neq \emptyset$ . Это очевидно, потому что упорядочение ординалов есть вполне-упорядочение.

<sup>1)</sup> Это — обычное линейное упорядочение канторова множества.

3.  $\{A \mid A \text{ удовлетворяет первому, второму и третьему пунктам}\} \neq \emptyset$ . Мы докажем это следующим образом. Сначала определим классы  $\mathcal{G}_i$ ,  $i \geq 0$ .

$\mathcal{G}_0 = \{A \mid A \in \mathcal{P} \& \text{ ординал, сопоставленный вершине } 0 \text{ посредством } A \text{ (т. е. посредством } \tau_w^A\text{), является наименьшим среди всех ординалов, сопоставляемых вершине } 0 \text{ элементами класса } \mathcal{P}\}$ . (Поэтому  $\mathcal{G}_0$  совпадает с классом, названным в утверждении 2 непосредственно выше.)

$\mathcal{G}_{n+1} = \{A \mid A \in \mathcal{G}_n \& \text{ ординал, сопоставленный вершине } n+1 \text{ посредством } A \text{ (т. е. посредством } \tau_w^A\text{), является наименьшим среди всех ординалов, сопоставляемых вершине } n+1 \text{ элементами класса } \mathcal{G}_n\}$ .

Непосредственно проверяется, что  $\mathcal{G}_{n+1} \neq \emptyset$  благодаря тому, что ординалы вполне упорядочены. Чтобы доказать утверждение 3, мы должны показать, что  $\bigcap_n \mathcal{G}_n \neq \emptyset$ .

Для каждого  $n$  мы определяем  $\text{o}(n)$  как (однозначно определенный) ординал, сопоставляемый элементами класса  $\mathcal{G}_n$  вершине  $n$ .

Лемма. Если  $n$  есть продолжение кортежа  $m$  и  $\text{o}(m) \neq 0$ , то  $\text{o}(n) < \text{o}(m)$ .

Доказательство. Пусть  $n$  есть продолжение кортежа  $m$  и  $\text{o}(m) \neq 0$ . В силу упр. 16-77  $m < n$ . Пусть  $\text{o}(n)$  есть ординал, сопоставленный вершине  $n$  некоторым  $A \in \mathcal{G}_n$ . Но  $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_m$ . Поэтому  $A$  должно также сопоставить  $\text{o}(m)$  вершине  $m$ . Значит,  $\text{o}(m)$  приписывается кортежу  $m$ , а  $\text{o}(n)$  — кортежу  $n$  одним и тем же деревом с конечными путями ( $\tau_w^A$ ), и, так как  $\text{o}(m) \neq 0$ , имеем  $\text{o}(n) < \text{o}(m)$ . Этим завершается доказательство леммы.

Рассмотрим  $\{n \mid \text{o}(n) = 0\}$ . В силу леммы и вполне-упорядоченности множества ординалов, каждая ветвь функционального дерева должна содержать хотя один элемент этого множества; следовательно, это множество бесконечно. Пусть  $q_0, q_1, \dots$  — элементы этого множества, выписанные в порядке возрастания. Определим классы  $\mathcal{G}_i^*$ ,  $i \geq 0$ , следующим образом:

$$\mathcal{G}_0^* = \{A \mid T_{1,0}^{*A}(z, q_0)\}$$

(т. е.  $\mathcal{G}_0^* = \{A \mid t(q_0, w) \in T^A \& \|t(q_0, w)\|^A = 0\}$ ),

$$\mathcal{G}_{n+1}^* = \{A \mid A \in \mathcal{G}_n^* \& T_{1,0}^{*A}(z, q_{n+1})\}.$$

Очевидно, что  $\mathcal{G}_{n+1}^* \subset \mathcal{G}_n^*$  при всяком  $n$ .  $\mathcal{G}_{q_0} \subset \mathcal{G}_0^*$ , поскольку все множества из  $\mathcal{G}_{q_0}$  сопоставляют вершине  $q_0$  ординал 0. Предположим, что  $\mathcal{G}_{q_n} \subset \mathcal{G}_n^*$ . Тогда  $\mathcal{G}_{q_{n+1}} \subset \mathcal{G}_{n+1}^*$ , так как  $\mathcal{G}_{q_{n+1}} \subset \mathcal{G}_{q_n} \cap \{A \mid T_{1,0}^{*A}(z, q_{n+1})\} \subset \mathcal{G}_n^* \cap \{A \mid T_{1,0}^{*A}(z, q_{n+1})\} = \mathcal{G}_{n+1}^*$ . Поэтому  $\mathcal{G}_{q_n} \subset \mathcal{G}_n^*$  при всяком  $n$ , а потому  $\bigcap_n \mathcal{G}_{q_n} \subset$

$\subset \bigcap_n \mathcal{G}_n^*$ . Заметим, что  $\mathcal{G}_n^* \neq \emptyset$  при всех  $n$ , так как  $\mathcal{G}_n \neq \emptyset$  при всех  $n$ .

Для каждого  $n$  класс  $\mathcal{G}_n^*$  рекурсивен, а потому открыт и замкнут в топологии канторова множества на  $\mathcal{N}$  (теорема 15-VII). Теперь мы заключаем, на основании компактности множества  $\mathcal{N}$  в этой топологии (упр. 13-24e), что  $\bigcap_n \mathcal{G}_n^* \neq \emptyset$ .

Остается доказать, что  $\bigcap_n \mathcal{G}_n^* \subset \bigcap_n \mathcal{G}_n$ , так как отсюда следует, что  $\bigcap_n \mathcal{G}_n \neq \emptyset$ , и утверждение 3 будет доказано.

Возьмем  $A \in \bigcap_n \mathcal{G}_n^*$ . Заметим, что  $\Phi_w^A$  — характеристическая функция некоторого дерева (в силу определения  $w$ ). Назовем это дерево  $\tau_A$ . Оно является деревом с конечными путями. Действительно, допустим, что  $k_0, k_1, \dots$  — последовательные вершины некоторой бесконечной ветви, принадлежащей  $\tau_A$ . Тогда  $\text{o}(k_n) \neq 0$  при каждом  $n$ . (Если  $\text{o}(k_n) = 0$ , то  $k_n = q_m$  для некоторого  $m$ ; но так как  $A \in \mathcal{G}_m^*$ ,  $q_m$  не есть вершина дерева  $\tau_A$  в силу определения  $\mathcal{G}_m^*$ .) Но тогда, согласно доказанной выше лемме,  $\text{o}(k_1) > > \text{o}(k_2) > \dots$ , а это противоречит вполне-упорядоченности ординалов.

Для произвольного  $n$  обозначим через  $\text{o}_A(n)$  ординал, сопоставленный вершине  $n$  деревом  $\tau_A$  с конечными путями. (Если  $n \notin \tau_A$ , то  $\text{o}_A(n) = 0$ .) Допустим, что  $A \notin \bigcap_n \mathcal{G}_n$ . Выведем отсюда противоречие. Пусть  $n_0$  — наименьшее из таких  $n$ , что  $A \notin \mathcal{G}_n$ . Тогда по определению класса  $\mathcal{G}_{n_0}$   $\text{o}_A(n_0) > \text{o}(n_0)$ . Рассмотрим два случая.

Случай (а):  $\text{o}(n_0) = 0$ . Тогда  $n_0 = q_j$  при некотором  $j$ . Поэтому  $\text{o}_A(q_j) \neq 0$ . Но  $A \in \mathcal{G}_j^*$  и  $\text{o}_A(q_j) = 0$  в силу определения  $\mathcal{G}_j^*$ . Это — противоречие.

Случай (б):  $\text{o}(n_0) > 0$ . Тогда, согласно определению  $\text{o}_A$  (см. § 16.3), существует собственное продолжение  $n_1$  кортежа  $n_0$ , для которого  $\text{o}_A(n_1) = \text{o}(n_0)$ . Но в силу доказанной леммы  $\text{o}(n_0) > > \text{o}(n_1)$ . Поэтому  $\text{o}_A(n_1) > \text{o}(n_1)$ . Беря таким же образом последовательные продолжения  $n_2, n_3, \dots$ , мы, в конце концов, найдем (благодаря вполне-упорядоченности ординалов) такое продолжение  $n_k$ , что  $\text{o}_A(n_k) > \text{o}(n_k)$  и  $\text{o}(n_k) = 0$ . Но это ситуация случая (а), приводящая, как мы знаем, к противоречию.

Таким образом, мы показали, что  $A \in \bigcap_n \mathcal{G}_n^* \Rightarrow A \in \bigcap_n \mathcal{G}_n$ . Поэтому  $\bigcap_n \mathcal{G}_n^* \subset \bigcap_n \mathcal{G}_n$ , и, в действительности,  $\bigcap_n \mathcal{G}_n = \bigcap_n \mathcal{G}_n^*$ . Поэтому  $\bigcap_n \mathcal{G}_n \neq \emptyset$  и доказательство утверждения 3 закончено.

4.  $\{A \mid A \text{ удовлетворяет первому, второму, третьему и четвертому пунктам определения } \mathcal{A}\} \neq \emptyset$ . Докажем это следующим образом. Произвольный непустой подкласс класса  $\mathcal{N}$  обладает наибольшей нижней гранью относительно „лексикографического“

линейного упорядочения на  $\mathcal{N}$ , что легко доказывается. Пусть  $A^*$  — наибольшая нижняя грань класса  $\bigcap_n \mathcal{G}_n$ . Достаточно показать, что  $A^* \in \bigcap_n \mathcal{G}_n$ . А это — непосредственное следствие таких фактов: (a)  $\mathcal{G}_n^*$  при всех  $n$  замкнуты (как отмечалось выше); (b)  $\bigcap_n \mathcal{G}_n^*$  замкнуто (так как пересечение замкнутых множеств замкнуто); (c)  $\bigcap_n \mathcal{G}_n^* = \bigcap_n \mathcal{G}_n$  (это равенство было получено при доказательстве утверждения 3); (d) либо  $A^* \in \bigcap_n \mathcal{G}_n$ , либо  $A^*$  — предельная точка для  $\bigcap_n \mathcal{G}_n$  в топологии множества  $\mathcal{N}$  (это следует из определения линейного упорядочения на множестве  $\mathcal{N}$ ); (e) замкнутое множество содержит все свои предельные точки.

Этим заканчивается доказательство утверждения 4, а с ним и доказательство теоремы. ■

**Определение.** Пусть  $P$  и  $Q$  — отношения в  $\mathcal{N}^k \times N^l$ . Будем говорить, что  $Q$  *униформизует*  $P$ , если для любых  $B_1, \dots, B_{k-1}, x_1, \dots, x_l$

- (i)  $(\forall A)[Q(A, B_1, \dots, x_l) \Rightarrow P(A, B_1, \dots, x_l)]$ ,
- (ii)  $(\exists A)P(A, B_1, \dots, x_l) \Rightarrow (\exists A)Q(A, B_1, \dots, x_l)$ ,

(iii)  $(\forall A_1)(\forall A_2)[Q(A_1, B_1, \dots, x_l) \wedge Q(A_2, B_1, \dots, x_l) \Rightarrow A_1 = A_2]$ . Приведем теперь нашу теорему в следующей более общей форме.

**Следствие XLV (a).** *Всякое  $\Pi_1^1$ -отношение (в  $\mathcal{N}^k \times N^l$ ) может быть униформизовано некоторым  $\Pi_1^1$ -отношением.*

**Доказательство.** Для данного  $P$  и фиксированных  $x_1, \dots, x_l$  релятивизуем теорему по отношению к  $B_1, \dots, B_{k-1}$  (вводя  $T^{A, B_1, \dots, B_{k-1}}$  вместо  $T^A$  и  $\|z\|^{A, B_1, \dots, B_{k-1}}$  вместо  $\|z\|^A$ ;  $T^A$  и  $\|z\|^A$  определяются, как в § 16.6). Теорема XXXV и следствие XXXV применяются непосредственно.  $\Pi_1^1$ -индекс получающегося  $Q$  равномерно зависит от  $x_1, \dots, x_l$ . ■

По этой причине теорему XLV иногда называют *теоремой Кондо — Аддисона об униформизации* (см. сноску на стр. 100).

Отметим теперь, что теорема XLV имеет место как для классов множеств, так и для классов функций.

**Следствие XLV (b).** *Если  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$  и  $\mathcal{F} \in \Pi_1^1$ , то существует такой класс  $\mathcal{Q}$ , что  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{Q} \in \Pi_1^1$  и*

- (i)  $\mathcal{F} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{Q} = \emptyset$ ,

- (ii)  $\mathcal{F} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists g)[\mathcal{Q} = \{g\} \wedge g \in \mathcal{F}]$ ,

причем некоторый  $\Pi_1^1$ -индекс класса  $\mathcal{Q}$  находится по  $\Pi_1^1$ -индексу класса  $\mathcal{F}$  равномерно, посредством некоторой всюду определенной функции.

Доказательство получается непосредственно с помощью упр. 16-74. ■

(Следствие XLV (a) также сохраняется при замене множества на функции.)

Приведем теперь наш результат о базисах для  $\Delta_2^1$ .

**Следствие XLV (c).**  *$\Delta_2^1$ -функции образуют базис для  $\Pi_1^1$ , а потому и для  $\Sigma_2^1$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{F} \in \Pi_1^1$  и  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . Возьмем  $\mathcal{Q}$ , как в следствии XLV (b). Тогда  $\mathcal{Q} \in \Pi_1^1$  и  $\mathcal{Q} = \{g\}$  для некоторой  $g$ . Теперь

$$\begin{aligned} g(x) = y &\Leftrightarrow (\forall f)[f \in \mathcal{Q} \Rightarrow f(x) = y] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists f)[f \in \mathcal{Q} \wedge f(x) = y], \end{aligned}$$

а эти выражения показывают при подстановке  $\Pi_1^1$ -формы для  $\mathcal{Q}$ , что  $g \in \Delta_2^1$ . Случай  $\Sigma_2^1$  получается тривиально, если воспользоваться рассуждениями из доказательства следствия XLII (b). ■

Этот результат контрастирует со следствием XLI (a), где было показано, что  $\Delta_1^1$ -функции не образуют базиса для  $\Pi_1^0$ .

Рассмотрим множество ординалов, сопоставленное множеству  $T^2$  в последней части § 16.6 (см. теорему XL).

**Следствие XLV(d).**  *$(\forall z)[z \in T^2 \Rightarrow \|z\|^2 \text{ есть } \Delta_2^1\text{-ординал}]$ .*

**Доказательство.**  $z \in T^2 \Leftrightarrow (\exists B)[z \in T^B]$ . Но по следствию XLV(c) (в форме для множеств)  $(\exists B)[z \in T^B] \Leftrightarrow (\exists B)[B \in \Delta_2^1 \wedge z \in T^B]$ . ■

**Следствие XLV(e) (Ганди).**  *$(\exists \alpha)[\alpha \text{ есть } \Delta_2^1\text{-ординал} \wedge (\exists z)[z \in T^2 \Rightarrow \|z\|^2 = \alpha]]$ .*

**Доказательство.** Как в § 16.6, положим  $\mathcal{Y} := \{\alpha | (\exists y)[y \in T^2 \wedge \alpha = \|y\|^2]\}$ . Мы хотим показать, что существует  $\Delta_2^1$ -ординал, не принадлежащий  $\mathcal{Y}$ . (Вместе с теоремой XL это показывает, что  $\mathcal{Y}$  не является начальным отрезком ординаторов.)

Будем говорить, что  $f$  — функция с конечными путями, если  $f$  есть характеристическая функция некоторого дерева с конечными путями. Если  $f$  — функция с конечными путями, положим  $\|f\| = o(\tau)$ , где  $\tau$  — дерево с конечными путями, характеристической функцией которого служит  $f$ . Пусть  $x_0$  — такой гёделев номер, функцией которого служит  $f$ . Тогда  $\|f\| = \|x_0\|^{\tau(f)}$  для того чтобы для всех  $f$  справедливо  $\varphi_{x_0}^{\tau(f)} = f$ . Тогда  $\|f\| = \|x_0\|^{\tau(f)}$  для всех  $f$  с конечными путями.

Рассмотрим условие:

$$\begin{aligned} f \text{ — функция с конечными путями} \wedge (\forall z)[(\exists B)[\|z\|^B < \|f\| + 1] \Rightarrow (\exists B)[\|z\|^B < \|f\|]]. \end{aligned}$$

Ясно, что  $\|f\| \notin \mathcal{U}$  для всех  $f$ , удовлетворяющих этому условию. Это условие можно эквивалентно переписать и так:

$$\begin{aligned} f - \text{функция с конечными путями} &\& (\forall z)[(\exists B)[\|z\|^B \\ &< \|x_0\|^{\tau(f)} + 1] \Rightarrow (\exists B)[\|z\|^B < \|x_0\|^{\tau(f)}]]. \end{aligned}$$

По теореме XXXV наше условие имеет вид

$$R(f) \& (\forall z)[(\exists B)S_1(z, f, B) \Rightarrow (\exists B)S_2(z, f, B)],$$

где  $R \in \Pi_1^1$ ,  $S_1 \in \Sigma_1^1$  и  $S_2 \in \Sigma_1^1$ . Поэтому его можно представить в виде  $P(f)$ , где  $P \in \Sigma_2^1$ . Согласно следствию XLV(d), это условие удовлетворяется всякой функцией  $f$  с конечными путями, для которой  $\|f\|$  больше всех элементов множества  $\mathcal{U}$ . Поэтому  $(\exists f)P(f)$ . Применяя следствие XLV(c), получим функцию  $f_0 \in \Delta_2^1$ , для которой  $P(f_0)$ . Тогда  $\|f_0\|$  и есть  $\Delta_2^1$ -ординал, не принадлежащий множеству  $\mathcal{U}$ . ■

Теперь мы используем последнюю теорему, чтобы получить результат о неявной определимости, параллельный следствию XLIV(b).

**Теорема XLVI** (Судзуки).  $A \in \Delta_2^1 \Leftrightarrow (\exists B)[A \leqslant_1 B \& \{B\} \in \Pi_1^1]$ .

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Если  $\{B\} \in \Pi_1^1$ , то  $B \in \Delta_2^1$  в силу следствия XLV(c) (в форме для множеств). Доказываемая импликация очевидна.

$\Rightarrow$ . Пусть  $A$  — некоторое фиксированное  $\Delta_2^1$ -множество. Мы можем считать, что  $A \neq \emptyset$ . (Если  $A = \emptyset$ , то  $\{A\} \in \Pi_1^1$  по построению:  $\{A\} = \{X \mid (\forall x)[x \notin X]\}$ .) Тогда  $\{A\} = \{X \mid (\forall x)[x \in X \Rightarrow x \in A] \& (\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in X]\}$ .

Подставим  $\Sigma_2^1$ -форму для  $A$  вместо первого вхождения  $A$  в правую часть и  $\Pi_2^1$ -форму — вместо второго вхождения. Получим  $\{A\} \in \Sigma_2^1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \{A\} &= \{X \mid (\exists f)(\forall g)(\exists w)R(X, f, g, w)\} \text{ (для некоторого рекурсивного } R) = \\ &= \{X \mid (\exists f)(\forall g)(\exists w)R'(X, \tau(f), g, w)\} \text{ (для некоторого рекурсивного } R') = \\ &= \{X \mid (\exists Y)[(\forall x)(\exists y)(\forall u)[\langle x, u \rangle \in Y \Leftrightarrow u = y] \& \\ &\& (\forall g)(\exists w)R'(X, Y, g, w)]\}. \end{aligned}$$

Преобразования кванторов из теоремы III применимы, как легко проверяется, и при наличии свободных переменных для множеств. Поэтому имеем

$$\{A\} = \{X \mid (\exists Y)(\forall g)(\exists w)R''(X, Y, g, w)\} \text{ (для некоторого рекурсивного } R'').$$

Мы можем предположить, что

$$\{A\} = \{X \mid (\exists Y)[Y \neq \emptyset \& (\forall g)(\exists w)R''(X, Y, g, w)]\}.$$

В противном случае  $\{A\} = \{X \mid (\forall g)(\exists w)R''(X, \emptyset, g, w)\}$  и  $\{A\} \in \Pi_1^1$ .

Пусть  $\mathcal{P} = \{Z \mid (\forall g)(\exists w)R''(\pi_1(Z), \pi_2(Z), g, w)\}$ . Имеем  $\mathcal{P} \in \Pi_1^1$ . Замечая, что  $[X \neq \emptyset \& Y \neq \emptyset] \Leftrightarrow X \times Y \neq \emptyset$  и что

$$X \times Y \neq \emptyset \Rightarrow [\pi_1(X \times Y) = X \& \pi_2(X \times Y) = Y],$$

и вспоминая наше предположение о том, что  $A \neq \emptyset$ , получаем, что  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ . Применяя теорему XLV, получим такое  $\mathcal{Q} \in \Pi_1^1$ , что  $\mathcal{Q} = \{B\}$  и  $B \in \mathcal{P}$ . Тогда по построению  $A = \pi_1(B)$  и  $\pi_2(B) \neq \emptyset$ . Пусть  $n$  — некоторый элемент множества  $\pi_2(B)$ . Тогда  $A \leqslant_1 B$  посредством функции  $\lambda x[\tau(x, n)]$ , и доказательство окончено. ■

Заметим теперь, что следствие XLIV (f) обобщается на  $\Delta_2^1$  и, более того, на  $\Delta_n^1$  для всех  $n$ .

**Следствие XLVI (a).**  $A \in \Delta_n^1 \Leftrightarrow \{A\} \in \Delta_n^1 \Leftrightarrow \{A\} \in \Sigma_n^1$ .

Доказательство следствия XLIV (f) прямо переносится и на этот случай.

**Следствие XLVI (b).**  $A \in \Delta_2^1 \Leftrightarrow (\exists B)[B \in \Delta_2^1 \& \{\langle A, B \rangle\} \in \Pi_1^1]$ .

**Доказательство.** Как в следствии XLIV (g). ■

Верно ли, что  $A \in \Delta_2^1 \Rightarrow \{A\} \in \Pi_1^1$ ? Следующие принадлежащие Судзуки теоремы показывают, что это не так; мы получим также дальнейшую информацию о множествах, неявно определимых в  $\Pi_1^1$ , т. е. о классе  $\{A \mid \{A\} \in \Pi_1^1\}$ .

**Теорема XLVII** (Судзуки).  $(\exists B)[B \in \Delta_2^1 \& \{B\} \notin \Pi_1^1]$ .

**Доказательство.** Если  $\{A\} \in \Pi_1^1$  имеет  $\Pi_1^1$ -индекс  $z$ , то

$$\{A\} = \{X \mid (\forall f)(\exists y)T_{1,0}^{*X}(z, \bar{f}(y))\}.$$

Возьмем такое  $w$ , что для всех  $X$

$$\varphi_w^X(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \neg T_{1,0}^{*X}(z, x); \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

( $w$  равномерно по  $z$ ). Тогда  $(\forall X)[w \in T^X \Leftrightarrow X = A]$ . Назовем  $w$  деревом для  $A$ .

**Лемма.** Если  $\{A_1\}, \{A_2\} \in \Pi_1^1$  и  $w_1 \sqsubset w_2$  — деревья для  $A_1$  и  $A_2$  соответственно, то

$$\|w_1\|^{A_1} \leqslant \|w_2\|^{A_2} \Rightarrow A_1 \leqslant_h A_2.$$

**Доказательство леммы.** Пусть  $\|w_1\|^{A_1} \leq \|w_2\|^{A_2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \mid (\exists X)[w_1 \in T^X \& \|w_1\|^X \leq \|w_2\|^{A_2} \& x \in X]\} = \\ &= \{x \mid (\forall X)[w_1 \in T^X \& \|w_1\|^X \leq \|w_2\|^{A_2} \Rightarrow x \in X]\}. \end{aligned}$$

Из первого выражения для  $A_1$  в результате применения теоремы XXXV, следствия XXXV и алгоритма Тарского — Куратовского вытекает, что  $A_1 \in \Sigma_1^{1, A_2}$ , а из второго выражения получается, что  $A_1 \in \Pi_1^{1, A_2}$ . Поэтому  $A_1 \leq_h A_2$ , и лемма доказана.

Из только что доказанной леммы следует, что гиперстепени множеств, неявно определимых в  $\Pi_1^1$ , линейно упорядочены.

**Лемма.** Если  $\{A_1\}, \{A_2\} \in \Pi_1^1$ , то

$$A_1 \leq_h A_2 \Rightarrow [A_2 \leq_h A_1 \vee T^{A_1} \leq_h A_2].$$

**Доказательство леммы.** Пусть  $A_1 \leq_h A_2$ . Пусть  $w_2$  — дерево для  $A_2$ . Рассмотрим множество  $C = \{x \mid x \in T^{A_1} \& \|x\|^{A_1} < \|w_2\|^{A_2}\}$ . По теореме XXXV  $C \leq_h A_2$ . Теперь либо  $C = T^{A_1}$ , либо существует такое  $x_0$ , что  $[x_0 \in T^{A_1} \& \|x_0\|^{A_1} = \|w_2\|^{A_2}]$ . В первом случае  $T^{A_1} \leq_h A_2$ . Во втором случае мы можем представить  $A_2$  следующим образом:

$$\begin{aligned} A_2 &= \{x \mid (\exists X)[w_2 \in T^X \& \|x_0\|^{A_1} = \|w_2\|^X \& x \in X]\} = \\ &= \{x \mid (\forall X)[[w_2 \in T^X \& \|x_0\|^{A_1} = \|w_2\|^X] \Rightarrow x \in X]\}. \end{aligned}$$

Поэтому как результат применения следствия XXXV и алгоритма Тарского — Куратовского получаем, что  $A_2 \in \Sigma_1^{1, A_1}$  и  $A_2 \in \Pi_1^{1, A_1}$ , а потому  $A_2 \leq_h A_1$ . Лемма доказана.

Вторая из доказанных сейчас лемм показывает, что неявно определимые в  $\Pi_1^1$  множества расположены, в некотором смысле, редко, поскольку если  $A$  неявно определимо, то никакое множество, гиперстепень которого заключена строго между гиперстепенями множеств  $A$  и гиперсакачка  $A$ , не может быть неявно определимым.

Наша теорема теперь непосредственно вытекает из следствия XLIII (b); действительно, пусть гиперстепень множества  $B$  строго заключена между гиперстепенями множеств  $\emptyset$  и  $T$  ( $\equiv T^\emptyset$ ). Так как  $\{\emptyset\} \in \Pi_1^1$ , получаем  $\{B\} \notin \Pi_1^1$ , в силу второй леммы. ■

В лемме к теореме 15-XII мы, по сути дела, доказали, что если  $A$  неявно определимо в арифметике, то и  $A'$  (скакок множества  $A$ ) неявно определим в арифметике. Следующая теорема представляет собой аналогичный результат для неявно определимых в  $\Pi_1^1$  множеств и гиперсакачка. Она, таким образом, показывает, что неявно определимые в  $\Pi_1^1$  множества не так уж редки.

**Теорема XLVIII** (Судзуки).  $\{A\} \in \Pi_1^1 \Rightarrow \{T^A\} \in \Pi_1^1$ .

**Доказательство.** Сначала докажем одну лемму.

**Лемма.**  $[\{T^A\} \in \Pi_1^{1, A} \& \{A\} \in \Pi_1^1] \Rightarrow \{T^A\} \in \Pi_1^1$ .

**Доказательство леммы.** Пусть  $f$  — такая взаимно однозначная общерекурсивная функция, что для всех  $X$  и  $x$

$$\Phi_{f(x)}^X = \begin{cases} \lambda y[0], & \text{если } x \in X; \\ \lambda y[1], & \text{если } x \notin X. \end{cases}$$

Тогда, тривиально,  $A \leq_i T^A$  посредством  $f$  при всяком  $A$ . Пусть

$$\begin{aligned} \{T^A\} &= \{X \mid (\forall g)(\exists y)R_1(X, A, g, y)\}, \\ \{A\} &= \{X \mid (\forall g)(\exists y)R_2(X, g, y)\}, \end{aligned}$$

где  $R_1$  и  $R_2$  рекурсивны.

Рассмотрим  $\{X \mid (\forall g)(\exists y)R_2(f^{-1}(X), g, y) \& (\forall g)(\exists y)R_1(X, f^{-1}(X), g, y)\}$ . Это, очевидно,  $\{T^A\}$ , а потому  $\{T^A\} \in \Pi_1^1$ . Лемма доказана.

Чтобы доказать нашу теорему, достаточно показать теперь, что  $\{T^A\} \in \Pi_1^{1, A}$  для всякого  $A$ . Начнем с доказательства следующей леммы.

**Лемма.**  $\{T\} \in \Pi_1^1$ .

**Доказательство леммы.** Пусть  $B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in T \& y \in T \& \|x\| < \|y\|\}$ . В силу упр. 16-34  $B \equiv T$ . Благодаря упр. 16-74, достаточно доказать, что  $\{c_B\} \in \Pi_1^1$ .

Определим  $M$  и  $C$ , как в доказательстве теоремы XLIV. Из установленных при ее доказательстве фактов 1—4 непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} \{c_B\} &= \{g \mid C(g) \& (\forall x)(\forall y)[M(g, x, y) \Leftrightarrow g(\langle x, y \rangle) = 1] \& \\ &\quad \& (\forall u)(\forall v)[g(\langle u, v \rangle) = 1] \Rightarrow (\forall h)[[C(h) \& \\ &\quad \& (\forall x)(\forall y)[M(h, x, y) \Leftrightarrow h(\langle x, y \rangle) = 1]] \Rightarrow h(\langle u, v \rangle) = 1]\}, \end{aligned}$$

откуда в результате применения алгоритма Тарского — Куратовского получается утверждение леммы.

Доказательство последней леммы прямо релятивизуется по отношению к  $A$ , если в определении  $M$  использовать  $\Phi_x^A$  и  $\Phi_y^A$  вместо  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$  и  $b'$  вместо  $b$  ( $b'$  определено в § 16.6 после следствия XXXIV). Отсюда следует, что  $\{T^A\} \in \Pi_1^{1, A}$  для всякого  $A$ , и доказательство теоремы заканчивается. ■

## § 16.8. ГИПЕРАРИФМЕТИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ

Гиперарифметические множества и гиперарифметическая вычислимость были рассмотрены в § 16.4 и 16.5. Некоторые результаты о гиперарифметических множествах и неявной определимости содержатся в § 16.7. Теперь мы внимательнее изучим строение класса гиперарифметических множеств.

Мы можем подойти к этому классу с трех разных сторон: (1) Можно искать некоторую классификацию, продолжающую  $\Sigma_n^0$ .  $\Pi_n^0$ -классификацию арифметической иерархии. Такая классификация основывалась бы на подходящим образом обобщенном понятии предикатной формы и порождала бы также некоторую классификацию классов множеств и классов функций. Мы могли бы надеяться получить результаты, аналогичные основным результатам гл. 14 и 15 об арифметической иерархии. (2) Мы можем изучать тьюринговские степени гиперарифметических множеств. В этом случае мы могли бы надеяться получить результаты, аналогичные основным результатам, полученным в гл. 13 для арифметической иерархии. В частности, можно попытаться найти некоторую „естественную“ цепь степеней гиперарифметических множеств, аналогичную цепи  $0, 0', \dots$  для арифметических множеств. (3) Можно рассматривать способы порождения гиперарифметических множеств „снизу“ с помощью индуктивных процедур, определяющих (в некотором смысле) новые множества через уже полученные. Здесь можно было бы изучить „уровни“ гиперарифметических множеств, получающиеся на последовательных шагах такой индуктивной процедуры.

Все эти три подхода тесно связаны между собой, и приводимое ниже формальное изложение важно для каждого из них. Мы разъясняем его суть в терминах, соответствующих первому подходу. Это разъяснение приводится в разделе „Общие соображения“, где мы рассматриваем классификацию числовых множеств и излагаем некоторый метод продолжения арифметической иерархии на неарифметические гиперарифметические множества. Затем мы даем *формальное изложение*, в котором этот метод делается точным и получаются ответы на некоторые вопросы об инвариантности. Далее мы обращаемся к классификации *классов множеств и классов функций*. Здесь получен другой метод продолжения иерархии, доставляющий способ для единообразного рассмотрения числовых множеств, классов множеств и классов функций. Оба метода приводят к одной и той же классификации числовых множеств. Заканчивается параграф *комментариями*, соотносящими наши результаты с описанными выше подходами 2 и 3.

### Общие соображения

Мы будем пока рассматривать только множества целых чисел (случай, изучавшийся в гл. 14). Придерживаясь этого ограничения, мы пользуемся и обозначениями гл. 14; в частности,  $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots$  — классы числовых множеств в арифметической иерархии.

В арифметической иерархии классы  $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots$  сопоставляются конечным ординалам. Мы хотим продолжить эту классификацию, подходящим образом сопоставляя бесконечным ординалам  $\beta$  некоторые классы множеств (которые мы могли бы обозначать  $\Sigma_\beta$ ). Предположим, что получена такая классификация вплоть до данного предельного ординала  $\alpha$ . Если мы сможем сопоставить ординалу  $\alpha$  некоторое новое (т. е. еще не попавшее в нашу классификацию) числовое множество  $A$  (будем называть  $A$  *базисным множеством* для  $\alpha$ ), то мы можем принять релятивизированные классы  $\Sigma_0^A, \Sigma_1^A, \dots$  за классы  $\Sigma_\alpha, \Sigma_{\alpha+1}, \dots$  и таким образом продолжить нашу классификацию вплоть до следующего предельного ординала. Более того, при  $n > 0$  мы можем принять  $\Sigma_n^A$ -формы за наши новые  $\Sigma_{\alpha+n}$ -формы, а  $\Sigma_n^A$ -индексы — за наши новые  $\Sigma_{\alpha+n}$ -индексы<sup>1)</sup>. Например, располагая классами  $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots$ , мы можем принять  $A = \emptyset^{(\omega)}$  за базисное множество для  $\omega$  (см. § 13.1) и рассматривать классы  $\Sigma_0^A, \Sigma_1^A, \dots$  в качестве  $\Sigma_\omega, \Sigma_{\omega+1}, \dots$ .

Получающаяся таким способом расширенная классификация, очевидно, зависит от метода, используемого при выборе базисных множеств. Более точно, пусть заданы  $\Sigma_\beta, \beta < \alpha$  ( $\alpha$  — некоторый предельный ординал), и  $A$  — базисное множество для  $\alpha$ . Классы  $\Sigma_{\alpha+n}, n = 0, 1, \dots$ , зависят от Т-степени множества  $A$ , а  $\Sigma_{\alpha+n}$ -индексы зависят от выбора самого множества  $A$ . Очевидно одно ограничение, которое нужно наложить на Т-степень множества  $A$ : чтобы классификация была монотонной (т. е. чтобы  $\beta < \gamma \Rightarrow \Sigma_\beta \subset \Sigma_\gamma$ ) и чтобы имела место теорема об иерархии (т. е.  $\beta < \gamma \Rightarrow \Sigma_\gamma - \Sigma_\beta \neq \emptyset$ ), мы должны потребовать, чтобы Т-степень множества  $A$  была больше, чем Т-степень любого множества в  $\bigcup_{\beta < \alpha} \Sigma_\beta$ . Для того чтобы получающаяся классификация была самой тонкой из возможных, было бы желательно взять в качестве Т-степени  $A$  наименьшую из всех таких степеней. К несчастью, как мы видели в § 13.4, такой наименьшей степени может и не существовать. Как выбирать множество  $A$  в этом случае? Можно ли это сделать каким-либо „естественному“ способом, т. е. инвариантным в некотором подходящем смысле?

<sup>1)</sup> Обозначения „ $\Sigma_\alpha$ “ используются нами лишь в настоящем разделе. Впоследствии мы и при  $\alpha \geq \omega$  будем следовать принятой в литературе практике и использовать обозначение „ $\Sigma_\alpha^0$ “ для классов, обозначаемых здесь  $\Sigma_{\alpha+1}$ .

Построение трансфинитных уровней в классической иерархии Бореля наводит на мысль взять в качестве  $A$  в каком-то смысле „бесконечное сочленение“ уже классифицированных множеств. Мы сделаем это следующим образом. Пусть, каков бы ни был предельный ординал  $\beta$ , меньший данного предельного ординала  $\alpha$ ,  $A_\beta$  — уже выбранное базисное множество для  $\beta$ . Для всякого непредельного ординала  $\beta$ , меньшего  $\alpha$ , пусть  $A_\beta$  — некоторое  $\Sigma_\beta$ -полное множество. При  $\beta = 0$  примем за  $A_0$  некоторое рекурсивное множество. (Мы полагаем  $A_0 = \emptyset$ ; наши результаты не будут зависеть от этого выбора.) Пусть  $v$  — некоторая числовая нумерация (т. е. взаимно однозначное отображение из множества натуральных чисел на ординалы), сопоставляющая множеству ординалов  $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$  множество индексов  $D_\alpha$ . Положим

$$A = A_\alpha = \{(x, y) \mid y \in D_\alpha \text{ & } x \in A_{v(y)}\}.$$

Немедленно возникают некоторые вопросы об инвариантности такого определения. (i) Как зависит получающаяся классификация от выбора используемой нумерации ординалов и какие ограничения должны быть наложены на выбор такой нумерации? (ii) Как зависит получающаяся классификация от выбора  $\Sigma_\beta$ -полных множеств и каким требованиям, если только они вообще нужны, должен быть подчинен этот выбор? (См. также упр. 16-81.) Рассмотрим эти вопросы по очереди.

(i) Можно показать, что Т-степень базисного множества может меняться в зависимости от используемой нумерации ординалов (упр. 16-78). Поэтому выбор нумерации нужно подчинить некоторым требованиям. Обсуждение, содержащееся в начале § 11.7, подсказывает требование, чтобы эта нумерация была *унивалентной системой обозначений*. Мы примем это ограничение (которое, в конце концов, ограничит наши рассмотрения конструктивными ординалами). Может ли степень базисного множества и при наличии этого ограничения зависеть от выбора нумерации? Мы вернемся к этому вопросу позже.

(ii) Тривиально проверяется, что Т-степень множества  $A_\alpha$  существенно зависит от выбора  $\Sigma_\beta$ -полных множеств  $A_{\beta+1}$ ,  $\beta < \alpha$  (см. упр. 16-79). Имеющаяся теория подсказывает, что эти множества должны выбираться некоторым единообразным и эффективным способом. Напомним, что по теореме 14-VIII (сильная теорема об иерархии)  $\Sigma_{\beta+1}$  должно быть совокупностью всех множеств, рекурсивно перечислимых относительно  $A_\beta$ . Мы потребуем, чтобы существовало такое фиксированное  $z_0$ , что  $A_{\beta+1} = W_{z_0}^A$  при всех  $\beta$ , и чтобы существовала такая фиксированная общерекурсивная функция  $f_0$  двух переменных, что  $W_u^A \leqslant_1 A_{\beta+1}$  посредством  $\lambda x[f_0(u, x)]$  при любых  $u$  и  $\beta$ . Если выполнено это требование

и взята некоторая унивалентная система обозначений на некотором отрезке ординалов, то легко показать (используя лемму о рекурсии), что получающаяся для этого отрезка ординалов классификация не зависит от выбора  $z_0$  (см. упр. 16-82). Мы выберем  $z_0$  следующим специальным образом. Положим  $A_{\beta+1} = (A_\beta)'$ . Требуемые  $z_0$  и  $f_0$  существуют по следствию 13-I (c).

Теперь остается следующая проблема. В предположении, что указанные выше два требования выполнены, определяют ли две унивалентные системы обозначений одну и ту же классификацию на ординалах, нумеруемых обеими системами? Утвердительный ответ на этот вопрос об „эквивалентности относительно обозначений“ дается ниже теоремой XLIX. Этот результат означает, что мы имеем корректно определенную классификацию на всех конструктивных ординалах.

Какая часть аналитической иерархии подпадает под эту классификацию? В теоремах L и LI мы покажем, что это в точности гиперарифметические множества, т. е. что  $\bigcup_{\beta} \Sigma_\beta = [\text{класс } \Delta_1^1 \text{ конструктивно}]$ . Мы называем эту классификацию (разбивающую  $\Delta_1^1$  на классы  $\Sigma_\beta$ ) *гиперарифметической иерархией*.

Как можно ослабить ограничение, описанное в (i) выше? Можем ли мы, например, допустить все рекурсивные вполне-упорядочения и сохранить еще при этом инвариантность относительно обозначений? Это представляется сомнительным, хотя Эндертон и Лакхам [1964] доказали, что для некоторого  $z_0$  (см. (ii), выше) имеет место инвариантность относительно обозначений при условии, что  $z_0$  не меняется, когда меняется рекурсивное вполне-упорядочение. Будет ли гиперарифметическая иерархия *наименьшей* среди всех иерархий, получающихся при ослаблении ограничений на систему обозначений (мы считаем, что иерархия  $\{\Sigma_\beta\}$  меньше или равна иерархии  $\{\Sigma'_\beta\}$ , если  $\Sigma_\beta \subset \Sigma'_\beta$  при всех  $\beta$ , на которых определены обе иерархии)? Эндертон показал, что гиперарифметическая иерархия будет *наименьшей*, даже если условие (iii) в определении системы обозначений будет нарушено (упр. 16-84).

Ниже, в формальном изложении, мы будем пользоваться системой обозначений  $O$ , определенной в § 11.7. Каждая ветвь системы  $O$  есть унивалентная система обозначений. Теорема XLIX показывает, что любые две ветви  $O$  приводят к одной и той же  $\Sigma_\beta$ -классификации на ординалах, общих для этих ветвей. Это приводит к результату об инвариантности относительно всех унивалентных систем обозначений, поскольку, согласно следствию 11-XVIII (b), любая унивалентная система обозначений может быть рекурсивно отображена в некоторую ветвь системы  $O$  с сохранением порядка (упр. 16-80).

### Формальное изложение

Определим  $O$  и  $<_o$ , как в § 11.7. При всяком  $x \in O$  пусть  $|x|$  обозначает ординал, сопоставляемый числу  $x$  (обозначаемый  $|x|_o$  в § 11.7). Скажем, что

$$x \leqslant_o y, \text{ если } x \in O \& y \in O \& [x <_o y \vee x = y].$$

**Определение.** Сопоставим обозначениям системы  $O$  следующие множества:

$$H(1) = \emptyset,$$

$$H(2^x) = (H(x))' \text{ при } x \in O,$$

$$H(3 \cdot 5^y) = \{ \langle u, v \rangle \mid v <_o 3 \cdot 5^y \& u \in H(v) \} \text{ при } 3 \cdot 5^y \in O.$$

Эти индуктивные правила сопоставляют, очевидно, каждому  $x \in O$  единственное множество, которое мы называем  $H(x)$ . Вдоль каждой ветви системы  $O$  множества сопоставляются обозначениям в соответствии с описанной в разделе „Общие соображения“ общей конструкцией продолжения арифметической иерархии. Теперь наши цели, как отмечалось выше, таковы: во-первых, показать, что  $[x \in O \& y \in O \& |x| = |y| = \alpha] \Rightarrow H(x) = H(y)$  для любого предельного ординала  $\alpha$ ; во-вторых, доказать, что  $B \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow (\exists x)[x \in O \& B \leqslant_1 H(x)]$  для любого  $B$ . Мы достигнем этого в теоремах XLIX, L и LI. Сначала докажем две леммы.

**Первая лемма.**  $[x \in O \& y \in O \& x \leqslant_o y] \Rightarrow H(x) \leqslant_1 H(y)$  равномерно по  $x$  и  $y$  (т. е. если  $x \leqslant_o y$ , то  $H(x) \leqslant_1 H(y)$  посредством  $h$ , причем индекс функции  $h$  находится равномерно по  $x$  и  $y$ ).

**Доказательство.** Согласно следствию 13-I (c), существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что, каково бы ни было  $A$ ,  $A \leqslant_1 A'$  посредством  $f$ .

Пусть даны такие  $x$  и  $y$ , что  $x \leqslant_o y$ . Покажем, как вычисляется функция  $h$ , сводящая  $H(x)$  к  $H(y)$ . Рассмотрим два случая.

Пусть  $|x| + n = |y|$  для некоторого  $n$ . Возьмем  $h = \lambda u[f^n(u)]$  (где  $f^0(u) = u$  и  $f^{n+1}(u) = f(f^n(u))$ ).

Пусть  $|x| + \omega \leqslant |y|$ . Возьмем такое  $z$ , что  $z \in O$ ,  $|z|$  — предельный ординал и  $|y| = |z| + n$ . Тогда  $u \in H(x) \Leftrightarrow \langle u, x \rangle \in H(z) \Leftrightarrow f^n(\langle u, x \rangle) \in H(y)$ . Полагаем  $h = \lambda u[f^n(\langle u, x \rangle)]$ .

Эти два случая эффективно различимы, и в обоих случаях  $h$  эффективно вычисляется по  $x$  и  $y$ . Таким образом, желаемая равномерность достигнута.

**Вторая лемма (Спектор).** Если  $y \in O$ , то  $\{u \mid u \in O \& |u| < |y|\}$  рекурсивно относительно  $H(2^y)$  равномерно по  $y$  (т. е., индекс характеристической функции множества  $\{u \mid u \in O \&$

$|u| < |y|\}$ , как множества, рекурсивного относительно  $H(2^y)$ , находится равномерно по  $y$ ).

**Доказательство.** Мы воспользуемся леммой о рекурсии применительно к частичному упорядочению с условием минимальности  $<_o$ . Возьмем за  $R$  (для применения леммы о рекурсии) отношение

$\{\langle y, w \rangle \mid y \in O \& \varphi_w^{H(2^y)} — характеристическая функция множества \{u \mid u \in O \& |u| < |y|\}\}.$

Мы должны показать, как по данному  $z$ , такому, что  $(\forall x)[x <_o y \Rightarrow R(x, \varphi_z(x))]$ , вычисляется, причем равномерно по  $z$  и  $y$ , такое  $w$ , что  $R(y, w)$ . (В формулировке леммы о рекурсии это  $w$  называлось  $\eta(z, y)$ .) Для любого ординала  $\alpha$  положим

$$O_\alpha = \{u \mid u \in O \& |u| < \alpha\}.$$

Рассмотрим четыре возможных случая.

$y = 1$ . В этом случае  $O_{|y|} = \emptyset$ . Выбираем  $w$  так, что  $(\forall u)[\varphi_w^{H(2^1)}(u) = 0]$ .

$y = 2^s$  и  $s = 2^t$ . Тогда  $O_{|y|} = O_{|s|} \cup \{2^v \mid v \in O_{|s|}\}$ . Но по предположению  $O_{|s|}$  рекурсивно относительно  $H(y)$  с индексом (характеристической функции)  $\varphi_z(s)$ . Поэтому  $O_{|y|}$  рекурсивно относительно  $H(y)$  с индексом, равномерно вычисляющимся по  $\varphi_z(s)$ . Значит,  $O_{|y|}$  рекурсивно относительно  $H(2^y)$  ( $= (H(y))'$ ) с индексом  $w$ , также равномерно получающимся по  $\varphi_z(s)$ .

$y = 2^s$  и  $s = 3 \cdot 5^t$ . Тогда

$$\begin{aligned} O_{|y|} = O_{|s|} \cup \{3 \cdot 5^r \mid \varphi_r \text{ всюду определена} \& (\forall u)(\forall v)[\varphi_r(u) \subset \\ \subset W_{f\varphi_r(v)}] \& (\forall u)[\varphi_r(u) \in O_{|s|}]\}, \end{aligned}$$

где  $f$  — общерекурсивная функция из упр. 11-55.

Множество  $\{r \mid \varphi_r \text{ всюду определена}\}$  рекурсивно относительно  $H(4) (= \emptyset'')$  (согласно § 13.2);  $\{r \mid (\forall u)(\forall v)[\varphi_r(u) \subset W_{f\varphi_r(v)}]\}$  рекурсивно относительно  $H(4)$ , что устанавливается непосредственно;  $H(4)$  рекурсивно относительно  $H(2^y)$ , согласно первой лемме. Поскольку  $O_{|s|}$  рекурсивно относительно  $H(y)$  с индексом  $\varphi_z(s)$ , множество  $\{r \mid (\forall u)[\varphi_r(u) \in O_{|s|}]\}$  рекурсивно относительно  $H(2^y)$  с индексом, получающимся равномерно по  $\varphi_z(s)$ . Поэтому  $O_{|y|}$  рекурсивно относительно  $H(2^y)$  с индексом, равномерно получающимся по  $\varphi_z(s)$ .

$y = 3 \cdot 5^t$ . В этом случае  $O_{|y|} = \{u \mid (\exists v)[u \in O_{|\varphi_t(v)|}]\}$ .

Но при всяком  $v$  множество  $O_{|\varphi_t(v)|}$  рекурсивно относительно  $H(2^{\varphi_t(v)})$  с индексом  $\varphi_z(\varphi_t(v))$  в силу индуктивного предположения, а  $H(2^{\varphi_t(v)})$  рекурсивно относительно  $H(y)$ , и притом равномерно в силу первой леммы. Поэтому  $O_{|y|}$  рекурсивно перечислимо

относительно  $H(y)$ , а потому рекурсивно относительно  $H(2^y)$  с индексом  $w$ , равномерно получающимся по  $z$  и  $t$ .

Эти четыре случая эффективно различимы, и  $w$  равномерно относительно  $y$  в каждом из них. Поэтому лемма доказана. ■

Следствие второй леммы (Спектор). При  $y \in O$

$$\{u \mid u \in O \& |u| = |y|\}$$

рекурсивно относительно  $H(2^y)$  равномерно по  $y$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \{u \mid u \in O \& |u| = |y|\} &= \{u \mid u \in O \& |u| < \\ &\quad < |2^y| \& \neg \{u \in O \& |u| < |y|\}\} = \\ &= \{u \mid u \in O \& |u| < |2^y|\} \cap \{u \mid \neg \{u \in O \& |u| < |y|\}\}. \end{aligned}$$

Согласно лемме, множество  $\{u \mid u \in O \& |u| < |y|\}$  рекурсивно относительно  $H(2^y)$  равномерно по  $y$ . Также в силу леммы множество  $\{u \mid u \in O \& |u| < |2^y|\}$  рекурсивно относительно  $H(2^y)$  равномерно по  $y$ . Отсюда следует, что и рассматриваемое пересечение рекурсивно относительно  $H(2^y)$  равномерно по  $y$ . ■

Теорема XLIX (Спектор).

$$[x \in O \& y \in O \& |x| = |y|] \Rightarrow H(x) \leq_{\text{T}} H(y),$$

причем сводимость равномерна по  $x$  и  $y$  (т. е. если  $|x| = |y|$ , то индекс функции  $c_{H(x)}$  как  $H(y)$ -рекурсивной функции может быть найден равномерно по  $x$  и  $y$ ).

Доказательство. Пусть  $S = \{\langle x, y \rangle \mid x \in O \& y \in O \& |x| = |y|\}$ . Определим на  $S$  частичное упорядочение  $\leq_s$  следующим образом:  $\langle u, v \rangle <_s \langle x, y \rangle$ , если  $|u| < |x|$ . Воспользуемся теперь леммой о рекурсии для частичного упорядочения  $\leq_s$ , удовлетворяющего условию минимальности, где  $R$  (для применения леммы о рекурсии) есть

$$\{\langle \langle x, y \rangle, w \rangle \mid x \in O \& y \in O \& |x| = |y| \& c_{H(x)} = \varphi_w^{H(y)}\}.$$

Мы должны показать, как по данному  $z$ , такому, что

$$(\forall u)(\forall v)[\langle u, v \rangle <_s \langle x, y \rangle \Rightarrow R(\langle u, v \rangle, \varphi_z(\langle u, v \rangle))],$$

равномерно по  $x$ ,  $y$  и  $z$  вычисляется такое  $w$ , что  $R(\langle x, y \rangle, w)$ . Рассмотрим следующие три случая.

Случай (а).  $\langle x, y \rangle = \langle 1, 1 \rangle$ . Берем такое  $w$ , что  $\varphi_w^{\emptyset} = c_{\emptyset}$ .

Случай (б).  $\langle x, y \rangle \in S \& \langle x, y \rangle = \langle 2^u, 2^v \rangle$ . По предположению относительно  $z$  мы можем найти такое  $r$ , что  $c_{H(u)} = \varphi_r^{H(v)}$ .

Но  $H(x) = (H(u))'$  и  $H(y) = (H(v))'$ . Применяя следствие 13-I (с), получим искомое  $w$ .

Случай (в).  $\langle x, y \rangle \in S \& \langle x, y \rangle = \langle 3 \cdot 5^u, 3 \cdot 5^v \rangle$ . Мы ищем способ свести  $H(x)$  к  $H(y)$ . Пусть дано произвольное  $\langle s, t \rangle$ . Мы должны показать, как ответить на вопрос, верно ли  $\langle s, t \rangle \in H(x)$ , с помощью оракула для  $H(y)$ . Руководствуясь определением  $H(x)$  ( $= H(3 \cdot 5^u)$ ), мы хотим проверить, выполняется ли условие  $[t <_o x \& s \in H(t)]$ . Действуем следующим образом. Сначала смотрим, верно ли, что  $t <_o x$ . Как явствует из упр. 11-55, это частный случай проблемы остановки, и ответить на этот вопрос можно, используя  $H(2) (= K)$ . Но так как, согласно первой лемме,  $H(2) \leq_1 \leq_1 H(y)$ , на него можно ответить, используя в качестве оракула  $H(y)$ .

Если  $t <_o x$ , то следующим образом проверяем, справедливо ли  $s \in H(t)$ . Перечисляем множество  $\{p \mid p <_o y\}$  (см. упр. 11-55). При появлении каждого члена  $p$  этого множества смотрим, имеет ли место  $|t| = |p|$ . Мы можем это сделать, так как множество

$$\{q \mid q \in O \& |q| = |p|\},$$

согласно второй лемме, рекурсивно относительно  $H(2^{2^p})$ , а  $H(2^{2^p})$  равномерно сводится к  $H(y)$  по первой лемме. В конце концов, мы должны найти такое  $p$ , что  $|t| = |p|$  и  $p <_o y$ . Согласно предположению относительно  $z$ ,  $\varphi_z(\langle t, p \rangle)$  дает нам способ сведения  $H(t)$  к  $H(p)$ . Первая лемма позволяет свести  $H(p)$  к  $H(y)$ . Итак, мы можем свести  $H(t)$  к  $H(y)$  и воспользоваться этим для ответа на вопрос, верно ли, что  $s \in H(t)$ . Таким образом, мы имеем процедуру для проверки, выполняется ли  $\langle s, t \rangle \in H(x)$ .

Инструкции описанной процедуры, очевидно, равномерны по  $x$ ,  $y$  и  $z$ , и доказательство закончено. ■

Следствие XLIX (а)  $[x \in O \& y \in O \& |x| = |y|] \Rightarrow H(x) \equiv_{\text{T}} H(y)$  равномерно по  $x$  и  $y$ .

(б)  $[x \in O \& y \in O \& |x| = |y| = \beta \& \beta \text{ — непредельный ordinal}] \Rightarrow H(x) \equiv H(y)$  равномерно по  $x$  и  $y$ .

(в)  $[x \in O \& y \in O \& |x| \leq |y|] \Rightarrow H(x) \leq_{\text{T}} H(y)$  равномерно по  $x$  и  $y$ .

Доказательство. (а) Непосредственно следует из теоремы.

(б) Немедленно получается с помощью следствия 13-I (а). (Московakis показал, что (б) не имеет места, если  $\beta$  — предельный ordinal. См. упр. 16-97.)

(в) Тот факт, что  $H(x) \leq_{\text{T}} H(y)$ , сразу следует из (а) и первой леммы. Это доказательство, однако, не дает равномерности, так как не видно способа выяснить, имеет место  $|x| = |y|$  или  $|x| < |y|$ . В упр. 16-96 мы модифицируем доказательство теоремы XLIX и получим желаемую равномерность. ■

**Теорема L (Клини).**  $y \in O \Rightarrow H(y) \in \Delta_1^1$  равномерно по  $y$ .

**Доказательство.** Воспользуемся леммой о рекурсии применительно к  $<_o$ , причем в роли  $R$  выступает  $\{\langle y, w \rangle \mid y \in O \& w \text{ есть } \Delta_1^1\text{-индекс множества } H(y)\}$ . Нам нужно показать, как по данному  $z$ , для которого  $(\forall x)[x <_o y \Rightarrow R(x, \varphi_z(x))]$ , равномерно по  $y$  и  $z$  вычислять такое  $w$ , что  $R(y, w)$ . Рассмотрим три случая.

$y = 1$ . Берем в качестве  $w$  некоторый  $\Delta_1^1$ -индекс множества  $\emptyset$ .

$y = 2^s$ . Тогда  $\varphi_s(s)$  есть  $\Delta_1^1$ -индекс множества  $H(s)$ . Так как  $H(y) = (H(s))'$ , мы можем применить конструкцию из теоремы X и получить  $\Delta_1^1$ -индекс  $w$  множества  $H(y)$ .

$y = 3 \cdot 5^t$ . Тогда

$$\begin{aligned} H(y) &= \{\langle u, v \rangle \mid v <_o y \& u \in H(v)\} = \\ &= \{\langle u, v \rangle \mid v <_o y \& (\exists f)(\forall x) \sqcap T'_{1,1}(\pi_1 \varphi_z(v), f, u, x)\} = \\ &= \{\langle u, v \rangle \mid v <_o y \& (\forall f)(\exists x) T'_{1,1}(\pi_2 \varphi_z(v), f, u, x)\}. \end{aligned}$$

Так как множество  $\{v \mid v <_o y\}$  рекурсивно перечислимо равномерно по  $y$  (упр. 41-55) и потому содержится в  $\Sigma_1^0$ , применение алгоритма Тарского — Куратовского показывает, что  $H(y) \in \Delta_1^1$ , причем  $\Delta_1^1$ -индекс  $w$  находится равномерно по  $y$ . ■

**Теорема LI (Клини).**  $B \in \Delta_1^1 \Rightarrow (\exists y)[y \in O \& B \leqslant_1 H(y)]$ .

**Доказательство.** Достаточно показать, что  $B \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow (\exists y)[y \in O \& B \leqslant_t H(y)]$  (поскольку  $A \leqslant_t H(y) \Rightarrow A \leqslant_1 H(2^y)$ ). В силу следствия XXII (b) достаточно доказать, что  $T_{|y|} \leqslant_t H(2^y)$  при всяком  $y \in O$ . Введем для  $2^y$  сокращение  $e(y)$ . Воспользуемся леммой о рекурсии для упорядочения  $<_o$ , причем за  $R$  примем

$$\{\langle y, w \rangle \mid y \in O \& c_{T_{|y|}} = \varphi_w^{H(e(y))}\}.$$

Нам нужно показать, как по данному  $z$ , такому, что  $(\forall x)[x <_o y \Rightarrow R(x, \varphi_z(x))]$ , равномерно по  $y$  и  $z$  находить такое  $w$ , что  $R(y, w)$ . Рассмотрим три возможных случая.

$y = 1$ . Берем такое  $w$ , что  $\varphi_w^{H(4)} = \lambda x[0]$ .

$y = 2^s$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} T_{|y|} &= \{x \mid [x \in T \& \|x\| = 0] \vee [\varphi_z(0) = 1 \& \\ &\quad \& (\forall n)[b(n, x) \in T_{|s|}]\}\}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\{x \mid x \in T \& \|x\| = 0\} = \{x \mid (\forall u)[\varphi_x(u) = 0]\} \in \Pi_2^0.$$

Поэтому  $\{x \mid x \in T \& \|x\| = 0\} \leqslant_t H(2^2) \leqslant_t H(e(y))$  в силу теоремы 14-VIII и доказанной выше первой леммы.

Подобным же образом  $\{x \mid \varphi_x(0) = 1\} \in \Sigma_1^0$ , и потому

$$\{x \mid \varphi_x(0) = 1\} \leqslant_t H(2) \leqslant_t H(e(y)).$$

Наконец,  $\{x \mid (\forall n)[b(n, x) \in T_{|s|}]\} \in \Pi_1^0, T_{|s|}$ . Поэтому

$$\{x \mid (\forall n)[b(n, x) \in T_{|s|}]\} \leqslant_t (T_{|s|})'$$

(по теореме 14-VIII). Но  $T_{|s|} \leqslant_t H(e(s))$ , согласно предположению о  $z$ , а потому  $(T_{|s|})' \leqslant_t (H(e(s)))' = H(e(y))$ .

Поэтому  $T_{|y|} \leqslant_t H(e(y))$ .

$y = 3 \cdot 5^t$ . Замечаем, что

$$\begin{aligned} T_{|y|} &= \{x \mid [x \in T \& \|x\| = 0] \vee [\varphi_x(0) = 1 \& \\ &\quad \& (\exists m)(\forall n)[b(n, x) \in T_{|\varphi_t(m)|}]\}\} \end{aligned}$$

(по основной лемме о деревьях). Согласно предположению о  $z$ , мы можем равномерно сводить  $T_{|\varphi_t(m)|}$  к  $H(e(\varphi_t(m)))$ . В силу первой леммы мы можем равномерно сводить  $H(e(\varphi_t(m)))$  к  $H(y)$ . Поэтому, применяя алгоритм Тарского — Куратовского, мы получаем  $T_{|y|} \in \Delta_3^{0, H(y)}$  равномерно по  $y$ . Но по теореме 14-VIII это дает  $T_{|y|} \leqslant_t (H(y))'' = H(e(y))$ . Мы получили искомое  $w$ , и доказательство закончено. ■

**Следствие LI.** Существует такая общерекурсивная функция  $g$ , что если только  $w$  есть  $\Delta_1^1$ -индекс множества  $B$ , то  $g(w) \in O$  и  $B \leqslant_1 H(g(w))$ .

**Доказательство** получается с помощью следствия XXII (b) и доказательства теоремы. ■

Приведенные леммы и теоремы были сначала получены при несколько ином способе сопоставления множеств обозначениям системы  $O$ . Описанный здесь способ принадлежит Эндертону и более удобен для наших целей. В упр. 16-83 мы покажем, что использовавшийся ранее способ, принадлежащий Клини, эквивалентен (относительно Т-сводимости) примененному нами.

Введем теперь обозначения для степеней неразрешимости, определяемых множествами  $H(x)$ .

**Определение.** Пусть  $x \in O$  и  $|x| = a$ . Обозначим через  $h_\alpha$  (однозначно определенную) Т-степень множества  $H(x)$ .

Заметим, что  $h_{\alpha+1} = h'_\alpha$ , что  $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow h_\alpha \leqslant h_\beta$  и что  $a$  есть степень некоторого гиперарифметического множества тогда и только тогда, когда  $a \leqslant h_\alpha$  при некотором (конструктивном)  $\alpha$ .

Введем далее обозначения для классов гиперарифметической иерархии (как классов, состоящих из числовых множеств).

**Определение.** Пусть  $\beta = \alpha + n$ , где  $\alpha$  — некоторый предельный ординал, и пусть  $y \in O$ , и  $|y| = \alpha$ . Положим

$$\Sigma_\beta^0 = \Sigma_{n+1}^{H(y)},$$

$$\Pi_\beta^0 = \Pi_{n+1}^{H(y)},$$

$$\Delta_\beta^0 = \Sigma_\beta^0 \cap \Pi_\beta^0.$$

Пусть  $\beta = n < \omega$ . Положим

$$\Sigma_\beta^0 = \Sigma_n,$$

$$\Pi_\beta^0 = \Pi_n,$$

$$\Delta_\beta^0 = \Sigma_\beta^0 \cap \Pi_\beta^0.$$

Согласно теореме XLIX, классы  $\Sigma_\beta^0$  и  $\Pi_\beta^0$  зависят только от  $\beta$  и не зависят от выбора такого  $y \in O$ , что  $|y| + n = \beta$ . Из теоремы 14-VIII вытекает, что для любого  $x$ , такого, что  $x \in O$  и  $|x| = \beta + 1$ ,  $H(x)$  есть  $\Sigma_\beta^0$ -полное множество; что если  $\beta \geq \omega$ , то  $A \in \Sigma_\beta^0 \Leftrightarrow A$  рекурсивно перечислимо относительно  $h_\beta$ ; что если  $\beta \geq \omega$ , то  $A \in \Delta_\beta^0 \Leftrightarrow a \leq h_\beta$ , где  $a$  — степень множества  $A$ . (Читатель должен обратить внимание на отличие от  $\Sigma_\beta^0$ -обозначений, временно использовавшихся нами в разделе „Общие соображения“. То, что для  $\beta \geq \omega$  там называлось  $\Sigma_{\beta+1}$ , теперь называется  $\Sigma_\beta^0$ .)

Следующие результаты сразу вытекают из результатов гл. 14. Для всех  $\beta > 0$

$$A \in \Sigma_\beta^0 \Leftrightarrow \bar{A} \in \Pi_\beta^0,$$

$$\Sigma_\beta^0 \cup \Pi_\beta^0 \subset \Sigma_{\beta+1}^0 \cap \Pi_{\beta+1}^0,$$

$$(\Sigma_\beta^0 - \Pi_\beta^0) \neq \emptyset.$$

Отметим, что в нашей  $\Sigma_\beta^0$ -схеме обозначений для классов гиперарифметической иерархии при каждом предельном ординале  $\alpha$  отсутствуют два весьма естественных класса. Это (i)  $\bigcup_{\beta < \alpha} \Sigma_\beta^0$  и (ii)  $\Sigma_\alpha^0 \cap \Pi_\alpha^0$ . Все классы с меньшими индексами строго содержатся в (i); (i) строго включается в (ii); (ii) строго содержитя в  $\Sigma_\alpha^0$ . Временная система обозначений классов, введенная в разделе „Общие соображения“, приписывала имя классу (ii) (он назывался  $\Sigma_\alpha$ ). Теперь мы даем классу (ii) наименование  $\Delta_\alpha^0$ . Мы увидим, что определения, которые вводятся ниже для множеств множеств и множеств функций, дают наименование и классу (i) и порождают понятия предикатной формы и индекса для (i).

<sup>1)</sup> Классы  $\Sigma_\beta^0$  и  $\Pi_\beta^0$  известны также в литературе как  $P_\beta$  и  $Q_\beta$  соответственно.

### Множества множеств и множества функций

Могут ли  $\Sigma_\beta^0$ -формы, как они были определены в начале раздела „Общие соображения“, быть релятивизованы так, чтобы породить иерархию множеств множеств? Прямая релятивизация этих форм приводит, к сожалению, к классификации, не являющейся ни монотонной, ни достаточно представительной (упр. 16-86). Чтобы получить удовлетворительную классификацию, мы должны провести „более глубокую“ релятивизацию следующим образом.

**Определение.** Положим для любого множества  $X$

$$H^X(1) = X,$$

$$H^X(2^x) = (H^X(x))'$$
 для  $x \in O$ ,

$$H^X(3 \cdot 5^v) = \{\langle u, v \rangle \mid v <_O 3 \cdot 5^u \& u \in H^X(v)\} \text{ для } 3 \cdot 5^v \in O.$$

Этим определением каждому  $x \in O$  сопоставляется единственное множество  $H^X(x)$ .

**Определение.** Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ ,  $y \in O$ ,  $|y| > 0$  и пусть  $z$  — такое целое число, что  $\mathcal{A} = \{X \mid z \in H^X(y)\}$ . Назовем утверждение „ $z \in H^X(y)$ “  $y$ -формой класса  $\mathcal{A}$ , а  $z$  назовем  $y$ -индексом класса  $\mathcal{A}$ . Само  $y$  играет роль, аналогичную роли префикса в арифметических и аналитических формах.

Пусть  $u \in O$ ,  $v \in O$ ,  $|u| \leq |v|$ , и пусть  $\mathcal{A}$  — некоторый класс множеств, представимый некоторой  $u$ -формой. Обязательно ли  $\mathcal{A}$  представим также и некоторой  $v$ -формой? В упр. 16-88 мы воспользуемся теоремой XLIX, чтобы показать, что это так. Теперь продолжим воплощение нашего плана, вводя следующее определение.

**Определение.** Если  $\alpha$  — непредельный ординал,  $y \in O$ ,  $|y| = \alpha$  и  $\mathcal{A}$  представим некоторой  $y$ -формой, будем говорить, что

$$\mathcal{A} \in \Sigma_\alpha^0, \text{ если } \alpha < \omega,$$

$$\mathcal{A} \in \Sigma_{\alpha-1}^0, \text{ если } \alpha > \omega,$$

$$\mathcal{A} \in \Pi_\alpha^0, \text{ если } \bar{\mathcal{A}} \in \Sigma_\alpha^0.$$

Этим определяется некоторая иерархия классов множеств.<sup>1)</sup> Простое индуктивное рассуждение показывает, что эта классификация совпадает с арифметической иерархией из § 15.1 при  $0 < \alpha < \omega$  (см. упр. 16-89). В упр. 16-85 мы показываем, что она включает все гиперарифметические классы множеств и ничего более. Поэтому мы называем ее *гиперарифметической иерархией* классов множеств.

Отметим, что мы, в частности, располагаем понятием  $y$ -формы и в том случае, когда  $|y|$  — предельный ординал. В этом слу-

чае, как легко показать,  $\mathcal{A}$  представим некоторой  $y$ -формой тогда и только тогда, когда  $\mathcal{A} \in \bigcup_{\beta < \alpha} \Sigma_\beta^0$ .

Можно ли так обобщить понятие  $y$ -формы, чтобы оно включало  $y$ -формы как для множеств, так и для классов множеств? Примененный в теореме 15-XI метод подсказывает, как это сделать. Будем говорить, что некоторая  $y$ -форма выражает множество  $A$  с  $y$ -индексом  $z$ , если  $A = \{x \mid z \in H^{(x)}(y)\}$ . Получающаяся на этом пути гиперарифметическая иерархия числовых множеств совпадает с иерархией, определенной выше в формальном изложении (см. упр. 16-90).

Теперь можно ввести более общие  $y$ -формы

$$\mathfrak{H}_y(z, A_1, \dots, x_1, \dots) = z \in H^{A_1 \oplus \dots \oplus (x_1) \oplus \dots}(y).$$

Имеет ли место в гиперарифметической иерархии классов множеств теорема об иерархии? Да, такая теорема легко доказывается аналогично теореме 15-XI.

Классы функций также могут быть расклассифицированы, если считать по определению, что некоторая  $y$ -форма выражает класс функций  $\mathcal{A}$ , если  $\mathcal{A} = \{f \mid z \in H^{(f)}(y)\}$ . Можно показать, что получающаяся при этом иерархия совпадает на положительных конечных уровнях с иерархией из § 15.2, и теорема об иерархии доказывается так же, как теорема 15-XXIV.

Только что предложенные определения и понятия ведут к обобщению понятий и результатов, связанных с теоремами 15-XXVII и 15-XXVIII. Для их формулировки система обозначений  $O$  заменяется системой  $O[\mathcal{C}]$ , в которой обозначениями служат функции, а не числа, и в которой для определения предельных обозначений служат фундаментальные последовательности (обозначений), рекурсивные относительно  $\mathcal{C}$  (а не просто рекурсивные фундаментальные последовательности). Вдобавок, операция скачка определяется на основе отношения  $T_k^*$  из теоремы 15-XXVII (отличного от отношения  $T_{k,l}^*$ , определенного в § 16.1). Если  $\mathcal{C} = \emptyset$ , получающаяся иерархическая классификация подмножеств класса  $\mathcal{F}$  продолжается на конструктивные ordinalы и совпадает с гиперарифметической иерархией на  $\mathcal{F}$ . Если  $\mathcal{C} = \mathcal{N}$ , получающаяся иерархическая классификация продолжается по всем счетным ordinalам и совпадает с классической иерархией борелевских множеств на  $\mathcal{F}$ .

### Комментарии

Вновь обратимся теперь к трем подходам, упомянутым в начале этого параграфа.

Подход 1-й. В нашей теории гиперарифметической иерархии опущены некоторые аспекты теорий арифметической и анали-

тической иерархий. Мы не привели здесь ни теоремы о представлении, ни аналога алгоритма Тарского — Куратовского. Теорема о представлении доказывается в упр. 16-91. В упр. 16-92 описываются правила, определяющие некоторый вариант алгоритма Тарского — Куратовского. Они, однако, не дают завершенного изложения этих вопросов. Трудными оказываются проблемы равномерности и инвариантности относительно системы обозначений.

Подход 2-й. Цепь степеней  $h_0, h_1, \dots, h_\omega, \dots$  представляется удовлетворительным гиперарифметическим аналогом цепи степеней  $0, 0', \dots$  арифметических множеств. Однако ввиду § 13.4 возникает вопрос: будет ли эта цепь *минимальной* среди всех цепей некоторой инвариантно определенной совокупности „естественных“ цепей (где считается, что  $(цепь \{h_\alpha\}) \leqslant (цепь \{g_\alpha\})$ , если  $(\forall \alpha)[h_\alpha \leqslant g_\alpha]$ )? Результат, сформулированный в упр. 16-84, дает в некотором роде утвердительный ответ на этот вопрос. Исследование минимальности важно при изучении других возможных способов порождения цепей, состоящих из гиперарифметических степеней, поскольку при этих способах могут теряться интервалы цепи  $\{h_\alpha\}$  (обычно это случается на предельных ordinalах). Так, например, обстоит дело в упр. 16-93, где мы рассматриваем „свободный от обозначений“ метод (принадлежащий Шён菲尔ду) порождения степеней из цепи  $\{h_\alpha\}$ . Так же обстоит дело с множествами  $T_\alpha$ .

Можем ли мы вычислять степени неразрешимости множеств гиперарифметической иерархии? Для этого могут быть развиты методы, которые обобщают методы § 14.8 и в которых основную роль играет лемма о рекурсии. Спектор [1958a] анонсировал результаты о вычислении степеней множеств  $O_\alpha$  и  $W_\alpha$ , где  $O_\alpha = \{x \mid x \in O \& |x| < \alpha\}$ , а  $W_\alpha = \{x \mid \varphi_x \text{ есть характеристическая функция некоторого вполне-упорядочения, порядковый тип которого меньше } \alpha\}$ .

Отметим мимоходом, что слово „иерархия“ стало применяться не только к классификациям, базирующимся на предикатных формах, но и к более общим упорядочениям степеней, полученным с помощью конструкций, аналогичных построению множеств  $H(x)$ . При этом используются другие (и, возможно, менее эффективные) числовые нумерации ordinalов, и множества сопоставляются „обозначениям“ другими (и, возможно, менее эффективными) индуктивными способами. Начаты некоторые исследования таких „иерархий“, и проделана работа по изучению инвариантности относительно обозначений в таких иерархиях. См. Крайдер и Роджерс [1961], Рихтер [1965], Эндертон [1964] и Гензель и Паттнам [1965].

П о д х о д З-й. Гиперарифметические числовые множества могут быть получены с помощью итерирования операций скачка и „бесконечного сочленения“, если взять все множества, Т-сводимые к так получающимся. Это — следствие теорем L и LI и определения множеств  $H(x)$  (см. также упр. 16-94). Эта индуктивная характеристика гиперарифметических множеств „снизу“ может быть использована для доказательства усиленных вариантов следствий XLIV (c) и XLIV (e) о неявной определимости.

**TEOPEMA LII.**  $A \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow (\exists B)[A \leqslant_1 B \ \& \ \{B\} \in \Pi_2^0]$ .

Доказательство. ⇨. Непосредственно вытекает из следствия XLIV.

⇒. По теореме LI достаточно доказать, что  $x \in O \Rightarrow \{H(x)\} \in \mathbb{P}_2^o$ . Доказательство этого факта обобщает конструкцию из теоремы 15-XII. Воспользуемся леммой о рекурсии для упорядочения  $\prec_o$ , и рассмотрим следующие три случая.

$x = 1$ . В этом случае, тривиально,  $\{H(1)\} \in \Pi_2^0$ .

$x = 2^s$ . Если  $\{H(s)\} \in \Pi_2^0$ , то  $\{H(2^s)\} \in \Pi_2^0$  в силу рассуждений из теоремы 15-XII.

$x = 3^{-t}$ . Предположим, что мы располагаем таким  $z$ , что  $u <_o 3^{-t} \Rightarrow \varphi_z(u)$  есть  $\Pi^0_1$ -индекс класса  $\{H(u)\}$ . Тогда

$$\{H(3 \cdot 5^t)\} = \{X \mid (\forall u)(\forall v)[\langle u, v \rangle \in X \Rightarrow v <_o 3 \cdot 5^t] \text{ } \& \\ \& (\forall v)[v <_o 3 \cdot 5^t \Rightarrow (\exists y_1)(\exists y_2)T_{1,1}(\varphi_z(v), \\ \& \{x \mid \langle x, v \rangle \in X\}, y_1, y_2)]\}.$$

Применяя алгоритм Тарского — Куратовского, получим  $\{H(3 \cdot 5^t)\} \in \Pi_2^o$ , причем  $\Pi_2^o$ -индекс этого класса равномерно зависит от  $z$  и  $t$ .

Теперь применяется лемма о рекурсии, и доказательство заканчивается.

В упр. 16-98 мы увидим, что для каждого  $x \in O$  существует такая функция  $f$ , что  $H(x) = \{u \mid f(u) \neq 0\}$  и  $\{f\} \in \Pi_0^0$ .

### § 16.9. УПРАЖНЕНИЯ

8 16.1

**16-1.** С помощью теоремы VIII (теоремы об иерархии) покажите, что обращения правил (iii) и (iv) из теоремы III не верны.

**16-2.** Завершите доказательство теоремы III, показав, что новые отношения, построенные в пунктах (ii), (iii) и (iv), рекурсивны, а новые предикатные формы эквивалентны исходным. (Отметим, что в пункте (iv) при доказательстве эквивалентности используется аксиома выбора.)

**16-3.** Докажите следствие III в общем случае.

16-4. Закончите доказательство теоремы VII, показав, что новые отношения, построенные в пункте (ii), рекурсивны, а новые предикатные формы эквивалентны исходным.

16-5. Детально рассмотрите примеры 1 и 2, следующие за теоремой VII.

**Д**ано: доказательство рассуждения приложр. 1 и 2, следующее за теоремой  $\Delta 16-6$ .  
**(а)** Множество  $O$  было определено (в временно обозначалось  $D_O$ ) в § 11.7. Сформулируйте явное определение множества  $O$ , из которого следовало бы, что  $O \in P_1^1$  (без использования того факта, что  $O \equiv W$ ). (*Указание.* Нужно сформулировать определение без ссылки на ординалы. Сначала определяем  $<_O$  как пересечение всех бинарных отношений  $R$ , удовлетворяющих следующим условиям замкнутости:

$$\begin{aligned} & \langle 1, 2 \rangle \in R, \\ & \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, 2y \rangle \in R, \\ & [\langle x, y \rangle \in R \ \& \ \langle y, z \rangle \in R] \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R, \\ & (\forall m)(\forall n)[m < n \Rightarrow (\varphi_z(m), \varphi_z(n)) \in R] \Rightarrow (\forall n)[(\varphi_z(n), 3 \cdot 5^z) \in R] \end{aligned}$$

Затем выражаем это отношение-пересечение с помощью квантора общности по функциям. После этого множество  $O$  определяется как  $\{x \mid (\exists y)[x <_O y]\}.$

(б) Пусть  $S_1$  — система ординальных обозначений, определенная в § 11.7. Покажите, что  $D_{S_1} \in \Pi_1^1$ . (Указание. Получите аналитическое определение для отношения  $\leq_{S_1} = \{(x, y) \mid x \in D_{S_1} \text{ & } y \in D_{S_1} \text{ & } |x|_{S_1} \leq |y|_{S_1}\}$ .)

16-7. Воспользуйтесь теоремой VIII для завершения доказательства следствия XI.

**16-8.** (а) Покажите, что если допускаются кванторы по множествам (которые используются тем же способом, что и кванторы по функциям, для классификации префиксов) и в качестве исходных отношений берутся рекурсивные отношения в  $\mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^l$ , то получаются те же классы отношений на целых числах, что и с помощью квантов по функциям.

(b) Покажите, что если допускаются кванторы по множествам (используемые так же, как кванторы по функциям, для классификации префиксов) и за исходные берутся рекурсивные отношения в  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times \mathcal{N}^m$  ( $k, l, m \geq 0$ ), то получаются те же классы отношений в  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l \times \mathcal{N}^m$  ( $k, l, m \geq 0$ ), которые были бы получены из этих рекурсивных отношений с помощью кванторов только по функциям или только по множествам.

**Д16-9.** Пусть  $R \subset \mathcal{M} \times N^2$  рекурсивно. Пусть  $A = \{x \mid (\forall X)(\exists y) R(X, x, y)\}$ . Покажите, что множество  $A$  рекурсивно перечислимо и поэтому принадлежит классу  $\Sigma_0^1 (= \Pi_0^1)$ . (Указание. Воспользуйтесь теоремой о компактности для деревьев из упр. 9-40.)

**16-10.** Докажите, что при  $n > 0$  всякое числовое множество из  $\Sigma_n^1$  может быть выражено предикатной формой с кванторами по множествам, префикс которой состоит из  $n + 2$  чередующихся кванторов, первые  $n$  из которых — кванторы по множествам, а последние два — кванторы по числам, причем начинается префикс квантором существования.

16.2

**16-11.** Покажите, что процедуры перевода, описанные при доказательстве теоремы XIII, приводят в действительности к эквивалентным с исходными формулам.

**16-12.** Покажите, что в части (3) доказательства теоремы XIII (импликация  $S_4 \rightarrow S_3$ ) в качестве формулы системы  $S_3$  можно взять  $S(\zeta, a, b)$ . (*Указание.* Используйте теорему 14-VI и определения из упр. 15-13. Сначала покажите, что в качестве формулы системы  $S_3$  можно взять  $S^*(\zeta, c, b)$ , где  $S^*(\zeta, c, b)$  означает, что  $c$  есть кодовое число кортежа длины  $b$ , кодирующее первые  $b$  значений в разложении  $\zeta = [\zeta]$  непрерывную дробь.)

### **16-13. Завершите доказательство следствия XIII (b)**

**16-14.** Покажите, что если  $A$  неявно определимо в арифметике второго порядка, то  $A$  и явно определимо в арифметике второго порядка. (*Указание.*

См. доказательство теоремы XI.) Выведите отсюда, что если  $A$  неявно определимо в элементарном анализе, то  $A$  и явно определимо в элементарном анализе.

16-15. Докажите теорему XIV.

16-16. Проведите доказательство следствия XIV более подробно.

16-17. Докажите теорему XV и следствие XV. (Указание. См. доказательство теоремы 14-XI.)

16-18. Наметьте в общих чертах доказательство теоремы XVII.

$\triangle 16-19$ . Выберем формулу  $P$ , как это предлагалось в обсуждении в конце § 16.2, и пусть  $F$  — некоторое высказывание арифметики второго порядка. Покажите, что формула  $[P \Rightarrow F]$  универсально истинна (при семантических соглашениях логики второго порядка)  $\Leftrightarrow F$  — истинное высказывание арифметики второго порядка.

$\triangle 16-20$  (Сколем). Докажите существование счетных  $\omega$ -моделей для истинных высказываний элементарной арифметики. (Указание. Возьмем в качестве  $\mathcal{D}$  множество целых чисел, и пусть „+“ и „ $\times$ “ интерпретируются стандартным образом. Рассмотрим счетную совокупность всех истинных высказываний арифметики второго порядка, представленных в предваренной форме. Назовем квантор существования в такой формуле начальным, если перед ним нет кванторов общности. Каждому начальному квантору существования каждого истинного высказывания (в предваренной форме) сопоставим (используя аксиому выбора) соответствующее число или функцию. Обозначим счетную совокупность всех выбранных таким образом функций через  $\mathcal{E}$ . Каждому неначальному квантору существования каждого истинного предваренного высказывания сопоставим (с помощью аксиомы выбора) соответствующий (не обязательно рекурсивный) функционал (отображение из  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l$  в  $N$ ) или функциональный оператор (отображение из  $\mathcal{F}^k \times \mathcal{N}^l$  в  $\mathcal{F}$ ). (См. второй шаг в иллюстрации интерпретации опровержением контрапримера в § 15.3.) Назовем счетную совокупность всех таких функциональных операторов  $\mathcal{E}^*$ . Возьмем в качестве  $\mathcal{D}'$  замыкание (в очевидном смысле) множества  $\mathcal{E}$  относительно всех функциональных операторов из  $\mathcal{E}^*$ ).

### § 16.3

16-21. Покажите, что поддерево  $\tau$  дерева  $\mathcal{J}^*$  есть дерево с конечными путями  $\Leftrightarrow (\forall f)(\exists x)[\text{вершина } f(x) \text{ не принадлежит } \tau]$ .

16-22. Определите понятия дерева, поддерева, ветви, подветви, дерева с конечными путями и упорядочения дерева непосредственно с помощью кодовых чисел кортежей-вершин. (Например,  $A$  есть дерево, если  $(\forall f)(\forall x)[f(x) \in A \Rightarrow (\forall y)[y < x \Rightarrow f(y) \in A]]$ .)

16-23. Пусть  $\tau$  — дерево с конечными путями. Покажите, что всякий ненулевой ординал, меньший  $\alpha(\tau)$ , появляется как значение функции  $o_\tau$ .

16-24. Пусть  $\tau$  и  $\alpha$  таковы, как в обсуждении, непосредственно предшествующем формулировке теоремы XVIII. Завершите доказательство теоремы XVIII, показав, что  $\tau$  — дерево с конечными путями и что  $o(\tau) = \alpha$ .

$\triangle 16-25$ . Сформулируйте более точные определения для  $\tau_1 + \tau_2$  и  $\tau_1 \cdot \tau_2$  и покажите, что  $o(\tau_1 + \tau_2) = o(\tau_1) + o(\tau_2)$ , а  $o(\tau_1 \cdot \tau_2) = o(\tau_1) \cdot o(\tau_2)$ .

16-26. Докажите основную лемму о деревьях.

16-27. (а) Покажите, что упорядочение Клини — Брауэра дерева  $\tau$  является вполне-упорядочением тогда и только тогда, когда  $\tau$  — дерево с конечными путями.

(б) Покажите, что для всякого дерева  $\tau$  с конечными путями упорядочение Клини — Брауэра имеет не меньший порядковый тип, чем  $o(\tau)$ .

(с) Покажите, что упорядочение Клини — Брауэра рекурсивного дерева с конечными путями есть рекурсивное вполне-упорядочение.

(д) Покажите, что  $T \leqslant W$ ;  $W$  определено в упр. 11-61.

16-28. Завершите доказательство теоремы XIX, показав, что построенное по обозначению ординала  $\alpha$  дерево с конечными путями рекурсивно.

$\triangle 16-29$ . (а) Приведите пример рекурсивно перечислимого, но не рекурсивного дерева с конечными путями и пример рекурсивного дерева с конечными путями, не являющегося строго рекурсивным.

(б) Покажите, что всякий ординал, сопоставленный рекурсивно перечислимому дереву с конечными путями, конструктивен и что всякий конструктивный ординал задается некоторым строго рекурсивным деревом с конечными путями.

### § 16.4

16-30. Пусть фигурирующие в лемме о рекурсии  $S$ ,  $<_S$  и  $R$  меняются (не обязательно эффективно) в зависимости от параметра  $q$ , пробегающего некоторое множество  $A$ . Предположим, что для всякого  $q \in A$  и всякого  $y \in S^{(q)}$  если  $\varphi_z$  удовлетворительна на  $S_y^{(q)}$ , то определено  $\eta(z, y, q)$  и выполняется  $R^{(q)}(y, \eta(z, y, q))$ , причем функция  $\eta$  частично рекурсивна. Докажите, что существует такая частично рекурсивная функция  $\psi$  двух переменных, что для любого  $q \in A$  функция  $\lambda x[\psi(x, q)]$  удовлетворительна на  $S^{(q)}$  относительно  $R^{(q)}$ .

16-31. Покажите, что лемма о рекурсии остается верной, если пятое предложение в ее формулировке заменить следующим: „Предположим, что существует такая общепрекурсивная функция  $f$  двух переменных, что для любого  $z$  и для любого  $y \in S$  если  $\varphi_z$  удовлетворительна на  $S_y$ , то  $\varphi_{f(z, y)}$  удовлетворительна на  $S_y \cup \{y\}$ “.

$\triangle 16-32$ . Напомним, что, если  $x \in O$ ,  $|x|_O$  означает конструктивный ординал, имеющий  $x$  своим обозначением. Для  $x \in W$  обозначим через  $|x|_W$  конструктивный ординал, соответствующий рекурсивному вполне-упорядочению, задаваемому посредством  $x$ . Докажите, что

(и) если  $A \leqslant_1 O$  посредством функции  $h$ , то  $A \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow (\exists \text{ конструктивный ординал } \alpha) (\forall x)[x \in A \Rightarrow |h(x)|_O < \alpha]$ ;

(ii) если  $A \leqslant_1 W$  посредством функции  $h$ , то  $A \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow (\exists \text{ конструктивный ординал } \alpha) (\forall x)[x \in A \Rightarrow |h(x)|_W < \alpha]$ . (Указание. Рассмотрите отображения из  $T$  в  $W$  и из  $O$  в  $T$ , доставляемые теоремой XIX, и отображение из  $W$  в  $O$ , доставляемое теоремой 11-XX. Покажите, что при этих отображениях ограниченные множества переходят в ограниченные, а неограниченные — в неограниченные.)

16-33. Докажите, что  $T_\alpha \leqslant_1 T_{\alpha+1}^*$ .

16-34. (а) Докажите, что множество  $\{(x, y) \mid x \in T \& y \in T \& \|x\| < \|y\|\}$  является  $\Pi_1^1$ -полным. (Указание. Воспользуйтесь функцией  $h$ , определенной в конце доказательства следствия XXII (b), и проверьте, что  $x \in T \Leftrightarrow \langle x, h(x) \rangle$  принадлежит этому множеству.)

(б) Докажите пункт (d) в теореме XXIII.

16-35. Докажите, что линейное упорядочение  $<^T$  имеет порядковый тип наименьшего неконструктивного ординала. (Указание. Пусть  $\lambda$  — наименьший неконструктивный ординал. Тогда  $<^T$  имеет порядковый тип  $\omega \cdot \lambda = \lambda$  по непрерывности функции  $\lambda \beta[\omega \cdot \beta]$ .)

16-36. Закончите доказательство теоремы XXIV. Покажите, что  $\Pi_1^1$ -упорядочение в этой теореме можно выбрать так, что всякий собственный начальный отрезок множества  $A$  относительно этого упорядочения есть  $\Delta_1^1$ -множество.

16-37. Покажите, что не всякое  $\Pi_1^1$ -полне-упорядочение множества  $A$  может быть принято за искомое в теореме XXIV.

## § 16.5

16-38. Докажите, что произвольное множество является  $\Delta_1^1$ -множеством тогда и только тогда, когда его характеристическая функция — гиперарифметическая.

$\triangle 16-39$  (Аддисон). (а) Докажите принцип редукции для класса всех  $\Sigma_1^0$ -подмножеств  $\mathcal{F}$ , т. е. в обозначениях § 15.2 докажите принцип редукции для класса  $\Sigma_1^{(fn)}$ . (Указание. Пусть

$$\mathcal{A} = \{f \mid (\exists x) T'_{1,0}(z_1, f, x)\}, \quad \mathcal{B} = \{f \mid (\exists x) T'_{1,0}(z_2, f, x)\}.$$

Положим

$$\mathcal{A}_1 = \{f \mid (\exists x)[T'_{1,0}(z_1, f, x) \& (\forall y < x) \neg T'_{1,0}(z_2, f, y)]\},$$

$$\mathcal{B}_1 = \{f \mid (\exists y)[T'_{1,0}(z_2, f, y) \& (\forall x \leq y) \neg T'_{1,0}(z_1, f, x)]\}.$$

(б) Докажите, что существуют такие непересекающиеся  $\Sigma_1^0$ -подмножества  $\mathcal{F}$  — назовем их  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , — что ни для какого  $\Delta_0^0$ -подмножества  $\mathcal{C}$  из  $\mathcal{F}$  невозможно, чтобы  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$  и  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$  одновременно. Выведите отсюда, что  $\Pi_1^0$ -подмножества  $\mathcal{F}$  не удовлетворяют принципу редукции. (Указание. Пусть  $A$  и  $B$  — рекурсивно неотделимые рекурсивно перечислимые множества. Возьмем  $\mathcal{A} = \{f \mid f(0) \in A\}$  и  $\mathcal{B} = \{f \mid f(0) \in B\}$  и воспользуемся техникой, использованной при доказательстве теоремы 15-XXIV.) (Можно также воспользоваться „гёделевой нумерацией“ посредством функций, примененной в теореме 15-XXVII, чтобы получить доказательство, более близкое к доказательству теоремы 7-XII (с).)

$\triangle 16-40$  (Аддисон). (а) Докажите принцип редукции для класса всех  $\Sigma_n^0$ -подмножеств  $\mathcal{F}$  при любом  $n \geq 1$ . (Указание. См. упр. 16-39 (а), а также вспомните правила преобразования ограниченных кванторов из § 14.3.)

(б) Для любого  $n \geq 1$  найдите пару непересекающихся  $\Sigma_n^0$ -подмножеств из  $\mathcal{F}$ , не отделимы никаким  $\Delta_n^0$ -подмножеством множества  $\mathcal{F}$ . Выведите отсюда, что  $\Pi_n^0$ -подмножества множества  $\mathcal{F}$  не удовлетворяют принципу редукции.

$\triangle 16-41$  (Аддисон). (а) Докажите принцип редукции для класса всех  $\Pi_1^1$ -подмножеств множества  $\mathcal{F}$ . (Указание. Так же, как в упр. 16-39 (а), с тем изменением, что для ограничения кванторов используется упорядочение  $<_T$ , а переменные пробегают множество значений функции  $f^*$  (из следствия XX (а)).)

(б) Найдите пару непересекающихся  $\Pi_1^1$ -подмножеств множества  $\mathcal{F}$  которые не были бы отделимы никаким его  $\Delta_1^1$ -подмножеством. Выведите отсюда, что класс  $\Sigma_1^1$ -подмножеств  $\mathcal{F}$  не удовлетворяет принципу редукции.

16-42. (а) Назовем множество  $A$  гиперарифметически простым, если (i)  $A$  есть  $\Pi_1^1$ -множество, (ii)  $\bar{A}$  бесконечно и (iii)  $(\forall B)[B \text{ — бесконечное } \Pi_1^1\text{-множество} \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset]$ . Покажите, что гиперарифметически простые множества существуют. (Указание. См. доказательство теоремы 8-II.)

(б) Назовем множество  $A$   $h$ -изоморфным множеству  $B$ , если существует такая перестановка  $f$ , что  $f$  — гиперарифметическая функция и  $A = f(B)$ . Покажите, что существуют множества, принадлежащие классу  $(\Pi_1^1 - \Sigma_1^1)$ , не  $h$ -изоморфные  $\Pi_1^1$ -полному множеству.

16-43. Пусть  $f$  — некоторая гиперарифметическая функция. Покажите, что существует такое  $n$ , что  $\varphi_n^1 = \varphi_{f(n)}^1$ , и что это  $n$  можно найти равномерно рекурсивно по  $\Pi_1^1$ -индексу функции  $f$ .

$\triangle 16-44$  (Лакхам). (а) Назовем  $A$  рекурсивно  $\Pi_1^1$ -продуктивным, если существует такая частично рекурсивная функция  $\psi$ , что для любого  $z$  имеем  $W_z^1 \subset A \Rightarrow [\psi(z) \text{ определено} \& \psi(z) \in A - W_z^1]$ .

Назовем  $A$  рекурсивно  $\Pi_1^1$ -креативным, если  $A$  есть  $\Pi_1^1$ -множество и  $\bar{A}$  рекурсивно  $\Pi_1^1$ -продуктивно.

Докажите:  $A$  рекурсивно  $\Pi_1^1$ -креативно  $\Leftrightarrow A$  является  $\Pi_1^1$ -полным. (Указание. Доказательство проводится параллельно доказательству теоремы 11-V.)

(б) Множество  $A$  называется  $\Pi_1^1$ -продуктивным, если существует такая  $\Pi_1^1$ -функция  $\psi$ , что для всякого  $z$  имеем  $W_z^1 \subset A \Rightarrow [\psi(z) \text{ определено} \& \psi(z) \in A - W_z^1]$ .

Назовем множество  $A$   $\Pi_1^1$ -креативным, если  $A$  есть  $\Pi_1^1$ -множество с  $\Pi_1^1$ -продуктивным дополнением.

Скажем, что  $B$   $h$ -сводимо к  $A$ , если существует такая взаимно однозначная гиперарифметическая функция  $f$ , что  $(\forall x)[x \in B \Leftrightarrow f(x) \in A]$ .

Докажите: множество  $A$  является  $\Pi_1^1$ -креативным  $\Leftrightarrow [A \in \Pi_1^1 \& (\forall B)[B \in \Pi_1^1 \Leftrightarrow B \text{ — } h\text{-сводимо к } A]]$ .

(с) Докажите, что любые два  $\Pi_1^1$ -креативных множества  $h$ -изоморфны. (Указание. Докажите „гиперарифметический вариант“ теоремы 7-VI.) Обратите внимание на упр. 16-46 ниже.

$\triangle 16-45$  (Лакхам). Пусть  $\mathcal{C}$  — некоторый класс  $\Pi_1^1$ -множеств. Положим  $P_{\mathcal{C}}^1 = \{x \mid W_x^1 \in \mathcal{C}\}$ . Если  $z$  есть  $\Delta_1^1$ -индекс некоторого множества, то пусть  $E_z$  — это множество. Докажите следующие теоремы:

(а)  $P_{\mathcal{C}}^1 \in \Sigma_0^1 \Leftrightarrow [\mathcal{C} \text{ пусто или } \mathcal{C} \text{ — класс всех } \Pi_1^1\text{-множеств}]$ .

(б)  $P_{\mathcal{C}}^1 \in \Pi_1^1 \Leftrightarrow (\exists B)[B \in \Pi_1^1 \& (\forall z)[z \in B \Rightarrow z \text{ есть } \Delta_1^1\text{-индекс некоторого множества} \& \mathcal{C} = \{A \mid A \in \Pi_1^1 \& (\exists z)[z \in B \& E_z \subset A]\}]$ .

(Указание. Доказательство проходит параллельно доказательству теоремы 14-XIV.)

$\triangle 16-46$ . (а) Покажите, что существует  $\Pi_1^1$ -множество  $A$ ,  $h$ -изоморфное множеству  $T$ , но не рекурсивно изоморфное ему. (Указание. Проделайте следующее гиперарифметическое вычисление. Пусть  $B$  и  $C$  — бесконечные рекурсивные подмножества множеств  $T$  и  $\bar{T}$  соответственно. Будем перечислять рекурсивные перестановки:  $p_0, p_1, \dots$ . Определим гиперарифметическую перестановку  $f$  так, что  $(\forall x)(\exists y \in B)(\exists z \in C)[f(y) \neq p_x(z)]$ .)

(б) С помощью упр. 16-44 выведите отсюда, что  $\Pi_1^1$ -продуктивное множество не обязательно рекурсивно  $\Pi_1^1$ -продуктивно.

$\triangle 16-47$ . Покажите, что существуют такое множество  $\Delta_1^1$ -индексов  $C$ , что всякое  $\Delta_1^1$ -множество имеет один и только один индекс, принадлежащий  $C$ , и такая  $\Pi_1^1$ -функция  $\psi$ , что для любого  $\Delta_1^1$ -множества  $A$ , если  $z$  есть  $\Delta_1^1$ -индекс множества  $A$ , то  $\psi(z)$  определено,  $\psi(z) \in C$  и  $\psi(z)$  есть  $\Delta_1^1$ -индекс множества  $A$ . (Указание. Положим  $B = \{z \mid \varphi_z^1 \text{ нигде не определена или } [\varphi_z^1 \text{ всегда определена и либо } \varphi_z^1 \text{ строго возрастает, либо сначала строго возрастает и затем становится постоянной]}\}$ . В приналежит классу  $\Pi_1^1$ . Воспользуемся упорядочением  $<_T$ , чтобы построить  $\Pi_1^1$ -множество  $C$ , состоящее из  $\Delta_1^1$ -индексов, выбранных точно по одному для области значений каждой  $\Pi_1^1$ -функции, имеющей индекс, принадлежащий множеству  $B$ . Построим такую общерекурсивную функцию  $h$ , что  $(\forall A)(\forall z)[z \text{ есть } \Delta_1^1\text{-индекс множества } A \Rightarrow [h(z) \in B \& \text{Val } \varphi_{h(z)}^1 \text{ есть } A]]$ . Полагаем  $\psi = \{\langle x, y \rangle \mid x \in B \& y \in C \& y \text{ есть } \Delta_1^1\text{-индекс области значений } \varphi_x^1\}$ . Тогда  $\psi = \varphi_h$ .)

$\triangle 16-48$ . Для произвольной „частично рекурсивной“ функции  $\psi$  примем за „инструкции“ для вычисления  $\psi$  произвольный  $\Pi_1^1$ -индекс множества  $t(\psi)$ . Покажите, что такая „гёделева нумерация“ „частично рекурсивных“ в аналогии Крейсела — Сакса функций в понятном смысле „допустима“ (см. упр. 2-10). Более точно, покажите, что для нее справедливы теоремы о нумерации (см. теорему I-IV) и  $s\text{-}m\text{-}n$ -теорема (см. теорему I-V).

16-49. Докажите существование в аналогии Крейсела — Сакса „рекурсивно перечислимых“, но не „рекурсивных“ множеств.

$\triangle 16\text{-}50.$  Докажите для аналогии Крейселя — Сакса, что если  $A$  — область значений взаимно однозначной „рекурсивной“ функции, то  $A$  не принадлежит  $\Delta_1^1$ . (Указание. Рассмотрите обратное отображение и примените теорему XXVI.)

$\triangle 16\text{-}51.$  Покажите, (i) что конструкция, приведенная при обсуждении аналогии Крейселя — Сакса для доказательства предложения [ $A$  “рекурсивно перечислимо” и не “конечно”  $\Rightarrow A$  — область значений некоторой „рекурсивной“ функции], удовлетворяет поставленным требованиям и (ii) что если  $A$  “конечно” и не пусто, то  $A$  также есть область значений некоторой „рекурсивной“ функции. (Указание. В пункте (ii) пусть „рекурсивная“ функция отображает  $A$  на себя, а  $T — A$  — в некоторый фиксированный элемент множества  $A$ .)

### § 16.6

$16\text{-}52.$  Докажите следствие XXX.

$16\text{-}53.$  Докажите следствие XXXI (b).

$16\text{-}54.$  Для всякого  $A$  определим  $K^{1,A}$ , как это сделано в замечаниях перед теоремой XXXIII. Докажите, что  $K^{1,A}$  является  $\Pi_1^{1,A}$ -полным.

$\triangle 16\text{-}55$  (Спектор [1958]). Покажите, что существуют несравнимые гиперстепени. (Указание. Для этого Спектором предложен метод, опирающийся на теорию меры и обобщающий некоторые результаты из § 13.3. Достаточно доказать, что  $\mu(\{B \mid A \leq_h B\}) \neq 1$  для некоторого  $A$ . Для этого достаточно убедиться в том, что  $\mathcal{R} = \{(A, B) \mid A \leq_h B\}$  — измеримое отношение. Но  $(\forall B)[\{A \mid A \leq_h B\} \text{ счетно}]$ , а потому  $(\forall B)[\mu(\{A \mid A \leq_h B\}) = 0]$ . Поэтому  $(\forall B)[\mu(\{A \mid A \leq_h B\}) = 0]$  для почти всех  $B$ . Поэтому опять-таки по теореме Фубини  $\mu(\{B \mid A \leq_h B\}) = 0$  для почти всех  $A$ . Чтобы доказать, что  $\mathcal{R}$  измеримо, достаточно показать, что всякое  $\Sigma_1^1$ -отношение измеримо (так как  $\mathcal{R}$  есть пересечение  $\Sigma_1^1$ -отношения с дополнением относительно  $\Sigma_1^1$ -отношению). Чтобы доказать это, достаточно показать, что прик другому  $\Sigma_1^1$ -отношению). Чтобы доказать это, достаточно показать, что применение операции  $A$  к совокупности открытого-замкнутых множеств дает измеримое множество. См. сноску об аналитических множествах, стр. 491, а также Куратовский [1950].)

$\triangle 16\text{-}56.$  Пусть  $\{(x, y) \mid (x, y) \in A\}$  — отношение порядка, соответствующее некоторому вполне-упорядочению  $(<)$  порядкового типа  $\alpha$ .

(a) (Спектор). Покажите, что  $A \in \Delta_1^1 \Rightarrow \alpha$  конструктивен. (Указание.

Найдите такое  $z \in T^A$ , что  $\alpha \leq \|z\|^\Delta$ , и примените следствие XXXVI. Чтобы найти такое  $z$ , сопоставьте элементы множества  $A_1 = \{x \mid (\exists y)\{(x, y) \in A\}\}$  вершинам функционального дерева следующим образом. Вершинам, лежащим непосредственно ниже наивысшей вершины, сопоставьте элементы множества  $A_1$  в порядке возрастания. Более общо, если некоторой вершине сопоставлен элемент  $x$  множества  $A_1$ , то вершинам, лежащим непосредственно под этой вершиной, сопоставляются (в порядке возрастания) элементы множества  $A_1$ , лежащие ниже  $x$  во вполне-упорядочении  $A$ . Этим деревом с конечными путями, характеристическая функция которого рекурсивна относительно  $A$ . Пусть  $\varphi_z^A$  — эта характеристическая функция.)

(b) (Танака, Крейсел). Докажите, что на самом деле  $A \in \Sigma_1^1 \Rightarrow \alpha$  конструктивен. (Указание. Для  $y$  из данного вполне-упорядочения обозначим  $|y|^A$  порядковый тип множества  $\{x \mid (x, y) \in A\}$ . Достаточно показать, что для любого такого  $y$  справедливо  $\{x \mid x \in T \& \|x\| < |y|^A\} \in \Sigma_1^1$ . Для доказательства этого факта тем же способом, как в теореме XXXV, применяется лемма о рекурсии. Примените эту лемму к вполне-упорядочению, задаваемому отношением  $A$ , и примите за основное выражение  $x \in T_{|y|^A} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(\exists u)[(u, y) \in A] \& [(\forall u) [\varphi_x(u) = 0] \vee [\varphi_x(0) = 1 \& (\exists z)(\forall n)[(z, y) \in A \& b(n, x) \in T_{|z|^A}]]]$ )

$16\text{-}57.$  Докажите следствие XXXVI(c).

$16\text{-}58.$  (a) Допустим, что  $B \notin \Delta_1^1$ ,  $B \leq_h T$  и  $T \not\leq_h B$ . Что можно сказать о величине  $\lambda^B$ ?

(b) Пусть  $B \in \Pi_1^1$  и  $\lambda^B = \lambda$ . Что можно сказать относительно гиперстепени множества  $B$ ?

$\triangle 16\text{-}59.$  Докажите, что для всякой  $f$  существует такое  $z$ , что  $\{g \mid \tau(f) = W_z^1, g\}$  плотно в  $\mathcal{F}$ . (Указание. Пусть  $z$  определяет  $f$  через поведение функции  $g$  „на бесконечности“, т. е. пусть  $f(x) = \limsup g(y_i)$  для подходящей последовательности  $y_i$ , зависящей от  $x$ .) Обратите внимание, что этот результат контрастирует с рекурсивным случаем, где, если  $f$  не рекурсивна,  $\{g \mid \tau(f) = W_z^g\}$  не может быть плотным в  $\mathcal{F}$ .

$16\text{-}60.$  Отправляясь от основных определений, проверьте, что  $T^2 = \{z \mid (\exists f)[z \in T^{\tau(f)}]\}$ .

$16\text{-}61.$  Покажите более аккуратно, что выражения из доказательства теоремы XXXVIII приводят к желаемым  $\Sigma_2^1$ -форме и  $\Pi_2^1$ -форме. (Указание. См. упр. 16-8.)

$\triangle 16\text{-}62.$  Завершите доказательство следствия XXXIX. (Указание. См. доказательства следствий XXII.)

$\triangle 16\text{-}63.$  Покажите, что порядковый тип множества  $\mathbb{Y}$  не есть  $\Delta_2^1$ -ординал. (Указание. Мы получим этот результат, показав, что всякий  $\Delta_2^1$ -ординал можно взаимно однозначно и с сохранением порядка отобразить в  $\mathbb{Y}$ . Пусть  $\alpha$  — некоторый  $\Delta_2^1$ -ординал. Исходя из определения  $\Delta_2^1$ -ординала, легко показать, что существует линейное  $\Delta_2^1$ -упорядочение множества натуральных чисел, имеющее тип  $\alpha$ . Возьмем такое упорядочение и назовем его  $S$ . Мы построим частично-рекурсивную функцию  $\varphi$ , задающую такое отображение из  $S$  в  $T^2$ , что  $[x \text{ предшествует } y \text{ относительно } S \Leftrightarrow \|\varphi(x)\|^2 < \|\varphi(y)\|^2]$ . Мы сделаем это, показав, что существует такая частично-рекурсивная функция  $\eta$ , что для любого  $y$  из  $S$  если  $\varphi_y$ , рассматриваемая только на элементах, предшествующих (относительно  $S$ ) элементу  $y$ , задает сохраняющее порядок отображение этого множества в  $T^2$ , то упорядоченная пара  $(y, \eta(z, y))$  продолжает это отображение на  $y$  (как сохраняющее порядок отображение). Существование функции  $\varphi$  доказывается теперь с помощью рассуждений, основанных на теореме о рекурсии, очень близких доказательству леммы о рекурсии в § 16.4. Существование нужной нам функции  $\eta$  выводится из двух наблюдений: во-первых,  $[A \subset T^2 \& A \in \Delta_2^1] \Leftrightarrow \{x \mid (\exists y)[y \in A \& x \in T_{|y|^2}]\} \in \Pi_2^1$  равномерно по  $\Delta_2^1$ -индексу множества  $A$ , согласно теореме XXXVIII, и, во-вторых, всякое  $\Sigma_2^1$ -полное множество „продуктивно“ относительно своих  $\Pi_2^1$ -подмножеств (например,  $E^2$  „продуктивно“ с  $\lambda x[x]$  в качестве „продуктивной функции“).)

$16\text{-}64.$  Сформулируйте и докажите аналог теорем XXV — XXIX с  $\Sigma_2^1$  вместо  $\Pi_1^1$  и  $\Delta_2^1$  вместо  $\Delta_1^1$ .

$16\text{-}65.$  (a) Докажите принцип редукции для  $\Sigma_2^1$ -подмножеств  $\mathcal{F}$ .

(b) Найдите пару непересекающихся  $\Sigma_2^1$ -подмножеств  $\mathcal{F}$ , которые не отделяются никаким  $\Delta_2^1$ -подмножеством  $\mathcal{F}$ . Выполните отсюда, что  $\Pi_2^1$ -подмножества  $\mathcal{F}$  не удовлетворяют принципу редукции.

$16\text{-}66.$  Объясните, почему выражение

$$(\forall B)(\exists A)[x \in T^{A,B} \& (\exists D)(\forall C) \neg [||y||^C, D < ||x||^{A,B} + 1]]$$

не дает удовлетворительного определения  $T_{||y||^3}^3$  для  $y \in T^3$ .

## § 16.7

16-67. Покажите, что  $\Delta_0^0$  образует базис в  $\Delta_0^0$ . (Указание. См. обсуждение свойств рекурсивных классов (т. е.  $\Sigma_0^{fn}$ -классов) в § 15.2.)

16-68. Проверьте, что нужные для доказательства теоремы XLIII релятивизованные доказательства теоремы XLI и следствия XLI (а) проходят и что получающееся  $z_0$  не зависит от  $g$ .

$\triangle 16-69$  (Ганди). Обобщите доказательство теоремы XLIII так, чтобы доказать существование бесконечно многих гиперстепеней, лежащих между наименьшей гиперстепенью и гиперстепенью множества  $T$ .

16-70. Пусть  $A$  — негиперарифметическое множество, гиперстепень которого меньше гиперстепени множества  $T$ . Что представляют собой  $A$ -конструктивные ординалы?

16-71. (а) Более подробно проведите доказательства фактов 2, 3 и 4 из доказательства теоремы XLIV.

(б) Более детально проведите доказательства фактов 6, 7 и 8 из доказательства теоремы XLIV.

(с) Покажите, что если  $z \notin T$  и  $P(f, z)$ , то  $f = 1$  на  $T \times \{z\}$ .

(д) Выполните теорему XXI из фактов 6 и 7, приведенных в доказательстве теоремы XLIV.

$\triangle 16-72$  (Коэн, Феферман). Следующим образом докажите, что существует такое множество  $A \in \Delta_1^1$ , что  $\{A\} \notin \Delta_0^1$ .

Пусть элементарная арифметика обогащена добавлением атомарных выражений вида  $t \in \hat{A}$ , где  $\hat{A}$  — единственная фиксированная свободная переменная для множеств, а  $t$  — числовая переменная или цифра. Рассмотрим высказывания, не содержащие, кроме  $\exists$ , никаких других символов кванторов и никаких пропозициональных связок, кроме  $\vee$  и  $\neg$ . Пусть эти высказывания обозначаются через  $F, G, \dots$ . Назовем *рангом* высказывания  $F$  общее число вхождений знаков  $\exists$ ,  $\vee$  и  $\neg$  в  $F$ . Пусть  $f, g, \dots$  — характеристические функции, а  $\tilde{f}, \tilde{g}, \dots$  — конечные начальные сегменты этих функций. Для всякой такой функции  $f$  обозначим через  $S_f$  множество, для которого  $\tilde{f}$  — характеристическая функция.  $\tilde{f}$  называется *продолжением*  $\tilde{g}$ , если  $\tilde{g} \subset \tilde{f}$ .

Следующим образом индуктивно (по рангу формулы  $F$ ) определим понятие „ $\tilde{f}$  вынуждает формулу  $F$ “:  $\tilde{f}$  вынуждает  $n \in \hat{A}$ , если  $n$  входит в область определения функции  $\tilde{f}$  и  $\tilde{f}(n) = 1$ ;  $\tilde{f}$  вынуждает иные атомарные формулы (например  $m + n = p$ ), если эти формулы истинны (относительно обычной интерпретации);  $\tilde{f}$  вынуждает  $(\exists a)[\dots a \dots]$ , если  $f$  вынуждает  $\dots n \dots$  при некотором  $n$ ;  $\tilde{f}$  вынуждает  $F \vee G$ , если либо  $f$  вынуждает  $F$ , либо  $\tilde{f}$  вынуждает  $G$ ; наконец,  $\tilde{f}$  вынуждает  $\neg F$ , если никакое продолжение сегмента  $\tilde{f}$  не вынуждает  $F$ . Скажем, что  $f$  вынуждает  $F$ , если некоторый конечный начальный сегмент функции  $f$  вынуждает  $F$ .

(а) Покажите, что если  $F$  не содержит переменной  $\hat{A}$ , то ( $f$  вынуждает  $F$ )  $\Leftrightarrow$  ( $F$  истинно).

(б) Покажите, что  $\tilde{f}$  вынуждает  $\neg n \in \hat{A} \Leftrightarrow n$  входит в область определения  $\tilde{f}$  и  $\tilde{f}(n) = 0$ .

(с) Покажите, что  $\tilde{f}$  вынуждает  $F \Leftrightarrow$  всякое продолжение  $\tilde{f}$  вынуждает  $F$ . (Указание. Примените индукцию по рангу  $F$ .)

Скажем, что  $F$  истинна на  $f$ , если  $F$  становится истинной, когда  $\hat{A}$  принимает значение  $S_f$ .

(д) Покажите, что никакая функция  $f$  не вынуждает формулу  $\neg(\exists a)\neg a \in \hat{A}$ . Выполните отсюда, что  $F$  может быть истинной на  $f$ , хотя ни  $F$ , ни  $\neg F$  не вынуждаются  $f$ , и что (добавляя еще одно отрицание)  $F$  может быть ложной на  $f$ , хотя и вынуждаемой некоторым конечным сегментом функции  $f$ .

Назовем  $f$  *генерической*, если для всякого  $F$  имеем:  $F$  истинна на  $f \Rightarrow F$  вынуждается функцией  $f$  (а потому  $F$  истинна на  $f \Leftrightarrow F$  вынуждается  $f$ ). Если  $f$  — генерическая функция, то и множество  $S_f$  называется *генерическим*.

(е) Покажите, что  $f$  — генерическая функция  $\Leftrightarrow$  для всякого  $F$  либо  $F$ , либо  $\neg F$  вынуждаются  $f$ . (Указание.  $\Rightarrow$  проверяется непосредственно, а  $\Leftarrow$  доказывается индукцией по рангу.)

(ж) Покажите, что генерические множества существуют. (Указание. Воспользуйтесь (е). Постройте генерическую функцию  $\tilde{f}$ , выбирая последовательные продолжения так, чтобы гарантировать, что при всяком  $F$  либо  $F$ , либо  $\neg F$  вынуждается  $f$ .)

(з) Покажите, что существует  $\sim$ генерическая функция  $f$  в классе  $\Delta_1^1$ . (Указание. Покажите, что отношение „ $f$  вынуждает  $F$ “ есть (относительно подходящей гёделевой нумерации)  $\Delta_1^1$ -отношение (в действительности рекурсивное относительно  $O^{(w)}$ ) и что построение из (ж) приводит поэтому к  $\Delta_1^1$ -функции.)

(и) Пусть даны функция  $f$  и натуральное число  $n$ . Определим (характеристическую функцию)  $g$  условиями:  $g(x) = f(x)$  при  $x \neq n$  и  $g(n) = 1 \Leftrightarrow f(n) = 0$ . Обозначим  $g$  через  $n(f)$ . Покажите, что для любых  $f$  и  $n$  имеем ( $f$  — генерическая функция  $\Leftrightarrow n(f)$  — генерическая функция). (Указание. Для произвольного высказывания  $F$  назовем  $n(F)$  высказывание, получающееся из  $F$  заменой каждой атомарной подформулы  $t \in \hat{A}$  на выражение  $(\neg(t=n \vee \neg t \in \hat{A}) \vee \neg(\neg(t=n \vee t \in \hat{A}))$ . Заметим, что  $n(\neg F) = \neg n(F)$ . Покажите, что для любых  $f$  и  $F$  (и)  $f$  вынуждает  $n(n(F)) \Leftrightarrow f$  вынуждает  $F$ , (ii)  $\tilde{f}$  вынуждает  $F \Leftrightarrow n(f)$  вынуждает  $n(F)$ . Заметьте, что  $n(n(f)) = f$ , и воспользуйтесь (е).)

(к) Покажите, что  $f$  — генерическая функция  $\Rightarrow \{f\} \in \Delta_0^1$ . (Указание. Допустим, что  $f$  — генерическая функция и  $\{f\} \in \Delta_0^1$ . Пусть  $F$  — неявное определение множества  $S_f$ . Так как  $F$  истинно на  $f$ ,  $F$  вынуждается  $\tilde{f}$  при некотором  $\tilde{f} \subset f$ . Возьмем  $n$ , не принадлежащее области определения функции  $\tilde{f}$ . Тогда  $n(f)$  вынуждает  $F$  (так как  $\tilde{f} \subset n(f)$ ). Но  $n(f)$  — генерическая функция (согласно (ж)). Поэтому  $F$  истинна на  $n(f)$  в противоречие с нашим предположением, что  $F$  определяет единственную функцию  $f$ .)

$\triangle 16-73$ . (а) Определим генерическое множество, как в упр. 16-72. Покажите, что совокупность всех негенерических множеств есть множество первой категории в канторовом пространстве. (Указание. При всяком  $F$  множество  $\{f \mid (\exists \tilde{f})[\tilde{f} \subset f \text{ и } \tilde{f} \text{ вынуждает либо } F, \text{ либо } \neg F]\}$  открыто и всюду плотно. Оно открыто, потому что является объединением окрестностей, задаваемых сегментами, вынуждающими  $F$  или  $\neg F$ . Оно всюду плотно, потому что всякая окрестность, не пересекающаяся с этим множеством, задавалась бы некоторым сегментом, вынуждающим  $\neg F$ . Таким образом, совокупность генерических множеств есть счетное пересечение открытых всюду плотных множеств. Поэтому дополнение к их совокупности есть множество первой категории.)

(б) (Адиссон). Покажите, что всякий арифметический класс первой категории содержит в своем дополнении некоторое арифметическое множество; выведите отсюда, что класс всех арифметических множеств не является арифметическим. (Указание. Функция  $f$  называется  $n$ -генерической, если для всякой формулы  $F$  ранга  $n$  или меньше ( $F$  истинна на  $f \Rightarrow F$  вынуждается  $f$ ). Покажите, что для каждого  $n$  существует арифметическая  $n$ -генерическая функция  $f$ . Пусть теперь  $\mathcal{C}$  — арифметический класс первой категории, определяемый формулой  $F$  ранга  $n$  (см. теорему 15-IV). Пусть  $f$  — арифметическая  $n$ -генерическая функция. Если  $S_f \notin \mathcal{C}$ , то все доказано. Если же  $S_f \in \mathcal{C}$ , то  $F$  истинна на  $f$  и некоторый сегмент  $\tilde{f} \subset f$  вынуждает  $F$ ; в силу таких же рассуждений, как в пункте (а),  $n$ -генерические продолжения сегмента  $\tilde{f}$  порождают содержащуюся в  $\mathcal{C}$  совокупность второй категории, а это — противоречие.)

16-74. Распространите теоремы 15-XV и 15-XXVI на аналитическую иерархию. Более точно, докажите следующие утверждения.

(a) Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ , и пусть  $\tau(\mathcal{A}) = \{X \mid (\exists f)[f \in \mathcal{A} \& X = \{(x, y) \mid f(x) = y\}]\}$ . Покажите, что для всех  $n$  имеет место  $\mathcal{A} \in \Sigma_n^1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \tau(\mathcal{A}) \in \Sigma_n^1$  и что  $\mathcal{A} \in \Pi_n^1 \Leftrightarrow \tau(\mathcal{A}) \in \Pi_n^1$ . (Указание. См. доказательство теоремы 15-XXV. В следствии 15-XXV рассмотрен случай  $n = 0$ .)

(b) Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ , и пусть  $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \{f \mid (\exists X)[X \in \mathcal{A} \& f = c_x]\}$ . Покажите, что при всех  $n$  справедливо  $\mathcal{A} \in \Sigma_n^1 \Leftrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}) \in \Sigma_n^1$  и что  $\mathcal{A} \in \Pi_n^1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}) \in \Pi_n^1$ . (Указание. См. доказательство теоремы 15-XXVI. В следствии 15-XXVI рассматривается случай  $n = 0$ .)

(c) Понятия  $\Sigma_n^1$ - и  $\Pi_n^1$ -индексов класса  $\mathcal{A}$  для  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  и  $n > 0$  определены в § 16.1. Для  $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$  и  $n > 0$  назовем  $\Sigma_n^1$ -индексом класса  $\mathcal{A}$  всякое число  $z$ , для которого  $\mathcal{A} = \{X \mid (\exists f_1) \dots T_{n+1,0}(z, X, \tau(f_1), \dots)\}$ . Аналогично введем  $\Pi_n^1$ -индексы.

Покажите, что для  $n > 0$  приведенные выше утверждения (a) и (b) выполняются равномерно относительно соответствующих индексов.

16-75. Докажите следствие XLIV(h). (Указание. Примените следствие XLIV(e).)

16-76. Покажите, что  $\mathcal{H} \in (\Pi^1 - \Sigma^1)$ . (Указание.  $f \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\exists z)(\forall x)[f(x) = \varphi_z^1(x)]$ . Отсюда следует, что  $\mathcal{H} \in \Pi^1$ . Предположив, что  $\mathcal{H} \in \Sigma^1$ , примените теорему XLIV, чтобы доказать, что  $T \in \Sigma^1$  — противоречие.)

16-77. Покажите, что если  $y$  — продолжение  $x$  (как это определено в теореме XLV), то  $y > x$ . (Указание. Рассмотрите определение кодовых чисел кортежей через функцию  $\tau^*$ , определение  $\tau^*$  через  $\tau$  и определение  $\tau$ .)

## § 16.8

△16-78. Пусть  $f$  — произвольная взаимно однозначная функция. Положим

$$K(f(0)) = \emptyset,$$

$$K(f(n+1)) = (K(f(n)))'.$$

Пусть  $A = \{(x, y) \mid y$  — одно из значений функции  $f$  &  $x \in K(y)\}$ . Покажите, что  $\Gamma$ -степень множества  $A$  может быть сделана сколь угодно высокой за счет подходящего выбора функции  $f$ .

16-79. Пусть  $A_0, A_1, \dots$  — такая последовательность множеств, что  $A_0 = \emptyset$ , а при всех  $n > 0$  множества  $A_n$   $\Sigma_n^1$ -полны. Пусть  $A = \{(x, y) \mid x \in A_y\}$ . Покажите, что  $\Gamma$ -степень множества  $A$  может быть сделана произвольно высокой за счет выбора множеств  $A_0, A_1, \dots$

16-80. Пусть  $v$  — произвольная унивалентная система обозначений. Положим

$$K(v^{-1}(0)) = \emptyset,$$

$$K(v^{-1}(\beta + 1)) = (K(v^{-1}(\beta)))',$$

$$K(v^{-1}(\alpha)) = \{(u, v) \mid v(v) < \alpha \& u \in K(v)\},$$

если  $\alpha$  — предельный ординал.

Покажите, что для всякого  $x$  из области определения  $v$  существует такое  $y \in O$ , что  $v(x) = |y|$  и  $K(x) \equiv_T H(y)$ . (Указание. Воспользуйтесь следствием 11-XVIII (b) и леммой о рекурсии.)

16-81. Пусть  $\sigma$  — произвольное взаимно однозначное рекурсивное отображение множества  $N \times N$  в  $N$  с рекурсивной областью значений. Определим множества  $K(x)$  подобно множествам  $H(x)$  с тем отличием, что вместо  $\tau$  в качестве функции пересчета пар используется  $\sigma$ . Покажите, что для всякого  $x \in O$  имеем  $H(x) \equiv_T K(x)$ . (Указание. Воспользуйтесь леммой о рекурсии.)

16-82. Возьмем произвольное  $z_0$ , такое, что (i)  $(\forall A)[W_{z_0}^A = A']$  и (ii) существует такая общерекурсивная функция  $f_0$ , что для всех  $A$  и  $u$  функция  $\lambda x[f_0(u, x)]$  1-сводит  $W_u^A$  к  $W_{z_0}^A$ . Положим  $A^* = W_{z_0}^A$ . Определим множества  $K(x)$  так же, как  $H(x)$ , с той разницей, что вместо скачка используется операция  $*$ . Докажите, что  $x \in O \Rightarrow H(x) \equiv_T K(x)$ . (Указание. Воспользуйтесь леммой о рекурсии.)

△16-83 (Эндerton). Следующим образом сопоставим множества обозначениям системы  $O$ :

$$H_1 = N,$$

$$H_2^x = (H_x)',$$

$$H_{3,5}^y = \{(u, v) \mid u \in H_{\Phi_y}(v)\}.$$

Теоремы XLIX, L и L1 сначала были сформулированы для этого сопоставления, принадлежащего Клини (см., однако, примечания на стр. 267 и 268). Докажите, что  $H_x \equiv_T H(x)$  для всякого  $x \in O$ . (Указание. Воспользуйтесь леммой о рекурсии, чтобы доказать, что  $x \leqslant_O y \Rightarrow H_x \leqslant_1 H_y$  равномерно по  $x$  и  $y$ . Затем примените лемму о рекурсии, чтобы доказать, что  $H(x) \leqslant_T H_x$  и что  $H_x \leqslant_T H(x)$ .)

▲16-84 (Эндертон). Пусть  $v_S$  — такое взаимно однозначное отображение некоторого множества  $D_S$  натуральных чисел на некоторый сегмент ординалов, что для него выполняются условия (i) и (ii) из определения системы обозначений, приведенного в начале § 11.7. Для  $x \in D_S$  определим  $K(x)$  следующим образом:

$$K(v^{-1}(0)) = \emptyset,$$

$$K(v^{-1}(\beta + 1)) = (K(v^{-1}(\beta)))',$$

$$K(v^{-1}(\alpha)) = \{(u, v) \mid v \in D_S \& v(v) < \alpha \& u \in K(v)\}$$

для предельных ординалов  $\alpha$ .

Докажите, что если  $x \in D_S$ ,  $y \in O$  и  $v(x) = |y|$ , то  $H(y) \leqslant_T K(x)$ . (Указание. Сначала воспользуйтесь леммой о рекурсии, чтобы показать, что если даны такие  $v \in D_S$ ,  $y \in O$ , что  $v(v) \leqslant |y|$ , то можно рекурсивно относительно  $K(2^{2^v})$  и равномерно по  $y$  и  $v$  вычислить такое число  $u$ , что  $u \leqslant Oy$  и  $v(v) = |u|$ . Желаемый результат получается после этого в результате еще одного применения леммы о рекурсии.)

▲16-85. (Клини, Суслин). Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ . Докажите, что  $\mathcal{A} \in \Delta_1^1 \Leftrightarrow (\exists \text{ конструктивный ординал } \beta)[\mathcal{A} \in \Sigma_\beta^0]$ . (Указание. Для доказательства  $\Rightarrow$  поступаем следующим образом. Воспользуемся  $\Pi_1^1$ -формой для  $\mathcal{A}$ , чтобы получить такое  $z_0$ , что  $\mathcal{A} = \{A \mid z_0 \in T^A\}$ . Докажите, что для любого фиксированного  $z_0$ , если  $\{A \mid z_0 \in T^A\} \in \Sigma_1^1$ , то  $(\exists x_0)[x_0 \in T \& (\forall A)[z_0 \in T^A \Rightarrow \Rightarrow \parallel z_0 \parallel^A < \parallel x_0 \parallel]$  (в противном случае  $T = \{x \mid (\exists B)[z_0 \in T^B \& \parallel x \parallel < \parallel z_0 \parallel]\}$  и  $T \in \Sigma_1^1$  по теореме XXXV). Заключаем отсюда, что  $\mathcal{A} = \{A \mid z_0 \in T_{\parallel z_0 \parallel}^A\}$  для некоторого  $z_0 \in T$ . Чтобы показать, что  $T_{\parallel z_0 \parallel}^A \leqslant_1 \leqslant_1 H^A(2^{e(y)})$ <sup>1</sup>, подвергните релятивизацию доказательство теоремы LI. (Это доказательство можно провести так, чтобы оно давало обозначение ординала  $\beta$  в  $O$  равномерно относительно  $\Delta_1^1$ -индекса  $\mathcal{A}$ )  $\Leftarrow$  доказывается аналогично теореме L с использованием леммы о рекурсии.)

<sup>1</sup>) Напомним, что  $e(y)$  используется как сокращение для  $2^{2^y}$  (см. доказательство теоремы LI, стр. 564). — Прим. перев.

16-86. Покажите, что существует множество функций из  $\Sigma_2^{(fn)}$ , не принадлежащее  $\Sigma_1^{(fn)}B$ , где  $B = H(y)$ ,  $y \in O$  и  $|y| = \omega$ . (Указание. См. заключительные замечания в § 15.1 и 15.2.)

△16-87. Для всех  $X$  и всех  $y \in O$  определим  $H^X(y)$  так же, как в § 16.8. Покажите, что, вообще говоря, утверждение  $A \in \Delta_1^1, B \Leftrightarrow (\exists y)[y \in O \& A \leqslant_{\text{TH}} B(y)]$  неверно. (Указание. Приняв  $B = T$ , покажите, что в  $\Delta_1^1, T$  существует множество более высокой Т-степени, чем произвольное  $H^T(y)$ , где  $y \in O$ .)

△16-88. Покажите, что если  $u \in O$ ,  $v \in O$ ,  $|u| \leqslant |v|$ ,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  и  $\mathcal{A}$  представимо некоторой  $u$ -формой, то  $\mathcal{A}$  представимо и некоторой  $v$ -формой. (Указание. Сделайте это в два шага. Сначала докажите это в случае  $u <_O v$ , затем при  $|u| = |v|$ . В последнем случае сначала докажите, что теорема XLIX верна для множества  $H^X(y)$ , „равномерно относительно“  $X$ , т. е. равномерность (в формулировке теоремы) не зависит от  $X$ . Затем воспользуйтесь леммой о рекурсии. ( $u = 2^s$  — ключевой случай.)

16-89. Определим  $\Sigma_n^{(s)}$  так же, как в § 15.2, а  $\Sigma_n^0$ , как в § 16.8. Докажите, что  $\mathcal{A} \in \Sigma_n^{(s)} \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \Sigma_n^0$ .

16-90. Пусть  $y = 2^s \in O$ . Докажите, что  $A \leqslant_1 H(y) \Leftrightarrow (\exists z)[A = \{x \mid z \in H^{(x)}(y)\}]$ . (Указание. Примените лемму о рекурсии к  $O$ .)

△16-91. При соединении к элементарной арифметике атомарные формулы вида  $D(n, a, b)$ , где  $n$  — номер,  $a$  и  $b$  — переменные. Пусть выбрана некоторая фиксированная гёделева нумерация формул такой обогащенной системы. Формула, содержащая подформулы вида  $D(n, a, b)$ , называется допустимой, если каждое  $n$  есть индекс рекурсивной функции, все значения которой есть гёделевы номера формул с одной свободной переменной, которые уже объявлены допустимыми. Подформула  $D(n, a, b)$  всякой допустимой формулы интерпретируется как „ $b$  удовлетворяет формуле с гёделевым номером  $\varphi_n(a)$ “. Сделайте понятие допустимой формулы точным, и докажите, что множество является гиперарифметическим тогда и только тогда, когда оно определяется некоторой допустимой формулой. (Какова степень неразрешимости множества всех истинных допустимых высказываний?)

16-92. Пусть „ $\Sigma_\alpha^0$ “ обозначает некоторую  $x$ -форму, а „ $\Pi_\beta^0$ “ — отрицание некоторой  $y$ -формы, где  $|x| = \alpha > |y| = \beta$ . Покажите, что имеют место следующие „правила“ преобразования кванторов“:

- (i)  $\exists \Sigma_\alpha^0 \rightarrow \Sigma_\alpha^0$ ,
- (ii)  $\forall \Sigma_\alpha^0 \rightarrow \Pi_{\alpha+1}^0$ ,
- (iii)  $[\Sigma_\alpha^0 \& \Pi_\beta^0] \rightarrow \Sigma_\alpha^0$ ,
- (iv)  $[\Sigma_\alpha^0 \rightarrow \Pi_\beta^0] \rightarrow \Pi_\alpha^0$ .

△16-93. В следующем определении строится такая цепь гиперарифметических множеств, что всякое  $\Delta_1^1$ -множество сводится к некоторому элементу этой цепи. Это определение обходится без обозначений ординалов. Принадлежит оно Шёнфильду. Положим

$$D_0 = N,$$

$$D_{\beta+1} = D_\beta \cap (D_\beta)',$$

$$D_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} D_\beta \text{ для предельных ординалов } \alpha.$$

Покажите, что  $D_n \in h_n$  при  $n < \omega$ , но  $D_\omega \in h_{\omega+1}$ . (Указание. Докажите  $\Pi_\omega^0$ -полноту множества  $D_\omega$ .)

16-94. Пусть  $f$  — такая общерекурсивная функция, что при всяком  $x$  значение  $f(x)$  есть  $\Delta_1^1$ -индекс некоторого  $\Delta_1^1$ -множества. Для всякого  $x$  пусть  $A_x$  — множество с  $\Delta_1^1$ -индексом  $f(x)$ . Покажите, что „бесконечное сочленение“

$\{(u, v) \mid u \in A_v\}$  есть  $\Delta_1^1$ -множество. (Указание. Непосредственно проверяется с помощью использования подходящих форм.)

16-95 (Гейзер). Пусть даны такие  $h$  и  $A$ , что  $h \in \Delta_1^1, A \in \Sigma_1^1$  и  $A \subset \bigcup_{y \in T} W_h^1(y)$ .

Покажите, что  $A \subset \bigcup_{y \in T} W_h^1(y)$  при некотором конструктивном  $\alpha$ . (Указание.

Возьмите отношение  $P$ , определенное в теореме XLIV, и воспользуйтесь упр. 16-72, чтобы показать, что если желаемый результат не имеет места, то

$$z \in T \Leftrightarrow (\exists f)[P(f, z) \& (\exists x)[x \in A \& (\forall u)(\forall y)[f(\langle u, z \rangle) = 1 \& \& u \in T \& ||y|| < ||u||] \Rightarrow x \in W_h^1(y)]].$$

Отсюда вытекает, что  $T \in \Sigma_1^1$ .)

16-96. (Эндертон). Докажите содержащуюся в формулировке следствия XLIX(c) равномерность. (Указание. Обобщите формулировку и доказательство теоремы XLIX, так чтобы из нее прямо вытекало следствие XLIX(c). Возьмите  $S = \{(x, y) \mid x \in O \& y \in O \& |x| < |y|\}$  и подходящим образом определите отношение  $<_S$ . Метод доказательства такой же, как в теореме XLIX. Ключевым является случай  $x = 2^u, y = 3 \cdot 5^v$ .)

△16-97 (Московакис). Определение: пусть  $x$  и  $y$  — такие элементы множества  $O$ , что  $|x| = |y|$ . Будем говорить, что  $x$  мажорируется элементом  $y$ , если существует такая частично рекурсивная функция  $\psi$ , что  $u <_O x \Rightarrow [\psi(u)]$  определено  $\& \psi(u) \leqslant_0 y \& |u| \leqslant |\psi(u)|$ .

(a) Покажите, что существуют такие  $x_0$  и  $y_0$ , что  $|x_0| = |y_0| = \omega^2$ , но  $x_0$  не мажорируется  $y_0$ . (Указание. Возьмите любое такое  $y_0$ , что  $|y_0| = \omega^2$ . Постройте  $x_0 = 3 \cdot 5^v$ , так, чтобы

$$|\varphi_v(n+1)| = \begin{cases} |\varphi_v(n)| + |\varphi_v(n+1)| + \omega, & \text{если } \varphi_v(n+1) <_0 y_0, \\ |\varphi_v(n)| + \omega & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предположим, что  $x_0$  мажорируется  $y_0$  с помощью функции  $\psi$ . Возьмите такое  $n$ , что  $\varphi_n = \psi\varphi_v$ , и выведите противоречие из сделанного предположения.)

(b) Покажите, что существует равномерная процедура, позволяющая по данной общерекурсивной функции  $f$  (точнее, по ее гёделеву номеру) находить такое  $n$ , что для всех  $A$  справедливо  $n \in A' \Leftrightarrow f(n) \notin A$ . (Указание. Воспользуйтесь теоремой о рекурсии, чтобы получить такое  $n$ , что  $W_n^A = N$ , если  $f(n) \notin A$ , и  $W_n^A = \emptyset$ , если  $f(n) \in A$ .)

(c) Покажите, что  $[x \in O \& y \in O \& |x| = |y| = \text{[некоторый предельный ординал]}] \Rightarrow [x \text{ мажорируется } y \Leftrightarrow H(x) \leqslant_1 H(y)]$ . Отсюда следует, что если даны такие  $x_0$  и  $y_0$ , как в (a), то  $|x_0| = |y_0|$ , но  $H(x_0) \not\leqslant H(y_0)$ . (Указание.  $\Rightarrow$  получается в результате применения следствия XLIX(c). Чтобы доказать  $\Leftarrow$ , предположим, что  $H(x) \leqslant_1 H(y)$ . Возьмем  $t <_O x$ . Покажем, как вычислить  $\psi(t) <_O y$ , так чтобы  $|t| \leqslant |\psi(t)|$ . Пусть  $e(t) = 2^{2^t}$ , и пусть дано произвольное  $s$ . Имеем  $s \in H(e(t)) \Leftrightarrow (s, e(t)) \in H(x) \Leftrightarrow \langle p(s), q(s) \rangle \in H(y)$  (где  $p(s)$  и  $q(s)$  получены благодаря 1-сводимости  $H(x)$  к  $H(y)$ )  $\Leftrightarrow q(s) <_0 <_0 y \& p(s) \in H_q(s)$ . Допустим на мгновенье, что  $|q(s)| < |t|$  для всех  $s$ , таких, что  $q(s) <_0 y$ . При этом допущении мы можем использовать  $H(t)$  для проверки, выполняется ли  $s \in H(e(t))$ , следующим образом: смотрим, верно ли, что  $q(s) <_0 y$  (здесь используется равномерная сводимость  $K$  к  $H(t)$ , затем применяется доказанная в следствии XLIX(c) сводимость  $H(q(s))$  к  $H(t)$ ). Это Т-сведение  $H(e(t))$  к  $H(t)$  приводит к 1-сводимости  $H(e(t))$  к  $H(2^t)$  посредством общерекурсивной функции  $f$  (с индексом, равномерно зависящим от  $t$ ), определяемой так, что  $f(s) \in H(2^t) \Leftrightarrow$  процедура Т-сведения помещает  $s$  в  $H(e(t))$ . На самом деле, конечно,  $H(e(t))$  не 1-сводимо к  $H(2^t)$ , так как  $H(e(t)) = (H(2^t))'$ . Поэтому для некоторого  $s$  имеем  $|q(s)| \geqslant |t|$ . Найдем такое  $q(s)$  следующим образом. Возьмем определенную выше  $f$  (ее определение

не зависит от нашего ложного допущения; от этого допущения зависело только утверждение, что  $H(e(t)) \leqslant H(2^t)$  посредством  $f$ ). Применим (b) к  $f$ , чтобы получить такое  $n$ , что  $n \in H(e(t)) \Leftrightarrow f(t) \notin H(2^t)$ . Из определения  $f$  и строения описанной процедуры Т-сведения  $H(e(t))$  к  $H(t)$  следует, что  $q(n) <_O 0$   $\wedge |q(n)| \geqslant |t|$ . Поэтому мы полагаем  $\psi(t) = q(n)$ .

**△16-98.** (a) Пусть  $H_x$  при  $x \in O$  — множество, определенное в упр. 16-83. Докажите, что для каждого  $x \in O$  существует такая функция  $f_x$ , что (i)  $H_x = \{u \mid f_x(u) \neq 0\}$ , (ii)  $\{f_x\} \in \Pi_1^0$  равномерно по  $x$  и (iii)  $f_x =_T H_x$  равномерно по  $x$ . (Существование  $f_x$  со свойствами (ii) и (iii) было замечено Крейселом в [1962].) (Это упражнение дает доказательство следствия XLIV(d), не зависящее от теоремы XLIV.) (Указание. Пусть  $g_0$  — общерекурсивная функция с рекурсивной областью значений, 1-сводящая  $A$  к  $A'$  при всяком  $A$ . Определим  $f_x$  для  $x \in O$  следующим образом:

$$x = 1: f_x = \lambda u [1].$$

$x = 2y \wedge u$  входит в область значений  $g_0: f_x(u) = f_y g_0^{-1}(u)$ . (Поэтому  $f_y = f_x g_0$ .)

$x = 2y \wedge u$  не входит в область значений  $g_0: f_x(u) = w \Leftrightarrow [w = \langle p, q, r, s \rangle \wedge \langle u, p, q, r \rangle \in W_{p(u)}]$  точно за  $s$  шагов  $\wedge D_q \subset \{z \mid f_x g_0(z) \neq 0\} \wedge D_r \subset \{z \mid f_x g_0(z) = 0\}$ . (Заметим, что в этом случае возможность  $f_x(u) = 0$  автоматически покрывается утверждением о том, что  $f_x$  — всюду определенная функция.)

$$x = 3 \cdot 5t: f_x(\langle u, v \rangle) = f_{\varphi_t(v)}(u).$$

(b) Докажите утверждение пункта (a) с  $H(x)$  вместо  $H_x$ . (Указание. В определении  $f_{3 \cdot 5t}$  из (a) замените  $\varphi_t(v)$  на  $\varphi(t, v)$ , где  $\varphi$  — такая частично рекурсивная функция, что при  $x = 3 \cdot 5t \in O$  область значений функции  $\lambda v[\varphi(t, v)]$  есть  $\{z \mid z <_O x\}$ .)

**16-99.** (Клини). При произвольном  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$  будем говорить, что  $f$  (или  $A$ )  $\in \Sigma_n^1, \mathcal{C}$ , если  $f$  (или  $A$ ) выражима в  $\Sigma_n^1$ -форме, в которой все кванторы по функциям ограничены множеством  $\mathcal{C}$ .

(a) Покажите, что  $f \in \Sigma_1^1, \mathcal{H} \Rightarrow f \in \mathcal{H}$ .

**△(b)** Покажите, что для каждого  $x \in O$  множество  $H_x$  выражимо в  $\Sigma_1^1$ -форме с  $\mathcal{C}_x$  в качестве базиса, где  $\mathcal{C}_x = \{f \mid (\exists u)[u <_O x \wedge f \leqslant_T H_u]\}$ . (Указание. Примените  $\Pi_1^0$ -форму, построенную в упр. 16-98. Пусть  $S(x, f)$  — такая  $\Pi_1^0$ -форма, что для  $x \in O$  имеем  $g = f_x \Leftrightarrow S(x, g)$ . В случае  $x = 2y$  положим  $H_x = \{u \mid (\exists f)[S(y, f) \wedge [u \text{ входит в область значений } g_0 \wedge f g_0^{-1}(u) \neq 0] \vee (u \text{ не входит в область значений } g_0 \wedge (\exists w)[w \neq 0 \wedge w = \langle p, q, r, s \rangle \wedge \dots \wedge D_r \subset \{z \mid f(z) = 0\}]])\}$ . Случай  $x = 3 \cdot 5t$  рассматривается аналогично.)

**16-100.** (a) Покажите, что  $\Sigma_n^1, \mathcal{H} \subseteq \Delta_2^1$  при всех  $n$ . (Указание. Заметим, что  $(\exists f) \mathcal{H} [\dots]$  может быть записано в виде  $(\exists f)[f \in \mathcal{H} \wedge \dots]$ , а также в виде  $(\exists z)[\varphi_z^1 \text{ всюду определена} \wedge (\forall f)[f = \varphi_z^1 \Rightarrow \dots]]$ .)

(b) Покажите, что  $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n^1, \mathcal{H} \subseteq \Delta_2^1$ .

▲(c) Определим  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{C}_{\beta+1} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n^1, \mathcal{C}_{\beta},$$

$$\mathcal{C}_{\lambda} = \bigcup_{\beta < \lambda} \mathcal{C}_{\beta} \text{ для предельных ординалов } \lambda.$$

Пусть  $\beta_0$  — наименьший из тех ординалов  $\beta$ , для которых  $\mathcal{C}_{\beta+1} = \mathcal{C}_{\beta}$ . Покажите, что  $\beta_0$  — счетный ординал и что  $\mathcal{C}_{\beta_0} \subseteq \Delta_2^1$ . (Классы  $\Sigma_n^1, \mathcal{C}_{\beta}, \beta \leqslant \beta_0$ ,

образуют, как ее называют в литературе, разветвленную аналитическую иерархию. Результат (c) получен с использованием теории множеств; автор не знает его доказательства, опирающегося только на теорию рекурсивных функций.)

**△16-101** (a) (Крейсел). Пусть  $R \in \Pi_1^1$ . Докажите, что

$$(\forall x)(\exists f) \mathcal{H} R(f, x) \Leftrightarrow (\exists g) \mathcal{H} (\forall x) R(\lambda y[g(\langle x, y \rangle)], x).$$

(Указание. Рассмотрим отношение  $\{(f, x) \mid f \in \mathcal{H} \wedge R(f, x)\} = P$ . Имеем  $P \in \Pi_1^1$ . Применяя теорему XLV (Кондо — Аддисона) к  $P$ , получим такое  $P^*$ , что  $P^* \subset P$ ,  $P^* \in \Pi_1^1$  и  $(\forall x)(\exists \text{ единственная } f) P^*(f, x)$ . Для каждого  $x$  пусть  $g_x$  — та единственная функция  $f$ , для которой  $P^*(f, x)$ . Определим  $g(\langle x, y \rangle) = g_x(y)$ . Очевидно,  $(\forall x)R(\lambda y[g(\langle x, y \rangle)], x)$ . Остается показать, что  $g \in \mathcal{H}$ . Но  $g(\langle x, y \rangle) = z \Leftrightarrow (\exists f) \mathcal{H} [P^*(f, x) \wedge f(y) = z] \Leftrightarrow (\forall f) \mathcal{H} [P^*(f, x) \Rightarrow f(y) = z]$ . Применяя метод, использованный в теореме XLII (и упр. 16-100(a)), получим  $g \in \Delta_1^1$ .) (Этот результат может быть получен без применения теоремы XLV следующим образом.

$$(\forall x)(\exists f) \mathcal{H} R(f, x) \Rightarrow (\forall x)(\exists z)[\varphi_z^1 \text{ всюду определена} \wedge$$

$$\& (\forall f)[(\forall y)(\forall w)[\varphi_z^1(y) = w \Rightarrow f(y) = w] \Rightarrow R(f, x)]].$$

Запишем последнее выражение более коротко в виде  $(\forall x)(\exists z)S(z, x)$ . Тогда  $S \in \Pi_1^1$ . Применяя теорему XXV (об однозначности в  $\Pi_1^1$ ), получим  $(\exists h) \mathcal{H} (\forall x)S(h(x), x)$ . Пусть  $g(\langle x, y \rangle) = \varphi_h^1(x, y)$ . Очевидно,  $g \in \mathcal{H}$  и  $(\forall x)R(\lambda y[g(\langle x, y \rangle)], x)$ .

(b) Определим  $\Delta_1^1, \mathcal{H}$  (для множеств), как в упр. 16-99. Не пользуясь теоремой XLIV, покажите, что  $\Delta_1^1, \mathcal{H} = \Delta_1^1$ . (Указание. Согласно теореме XI,  $\Delta_1^1, \mathcal{H} \subseteq \Delta_1^1$ . Для проверки того, что  $\Delta_1^1 \subset \Delta_1^1, \mathcal{H}$ , воспользуйтесь в доказательстве теоремы XXI сформированным выше, в пункте (a), правилом преобразования кванторов, чтобы доказать, что  $T_{\alpha} \in \Delta_1^1, \mathcal{H}$  при любом конструктивном  $\alpha$ .)

(c) (Московакис). Не пользуясь теоремой XLIV (примененной в упр. 16-76), покажите, что  $\mathcal{H} \in (\Pi_1^1 - \Sigma_1^1)$ . (Указание. Определим  $P(f, z)$  как  $\{f \in \mathcal{H} \wedge z \in T \wedge f \leqslant_T T_{||z||}\} \vee [f \notin \mathcal{H} \wedge (\forall y)[\varphi_z^1(y) = 0]]$ . Предположим, что  $\mathcal{H} \in \Delta_1^1$ . Тогда  $P \in \Pi_1^1$ . Применяя модификацию теоремы XXV (теорема об однозначности в классе  $\Pi_1^1$  для функций одной функциональной переменной), получим такое  $P^*$ , что  $P^* \subset P$ ,  $P^* \in \Pi_1^1$ ,  $(\forall f)(\forall z)[P^*(f, z) \Rightarrow z \in T]$  и  $(\forall f)(\exists \text{ единственное } z) P^*(f, z)$ . Из определения отношения  $P$ , очевидно, получаем, что  $x \in T \Leftrightarrow (\exists f)(\exists z)[P^*(f, z) \wedge ||x|| < ||z||]$ . Но отсюда вытекает, что  $x \in T \Leftrightarrow (\exists f)(\exists z)[y \neq z \Rightarrow \neg P^*(f, y)] \wedge ||x|| < ||z||$ . Согласно теореме XXI, это дает  $T \in \Sigma_1^1$ , и мы пришли к противоречию.)

(d) (Московакис). Из пунктов (b) и (c) выше выведите, что  $\Pi_1^1 \subset \Sigma_1^1, \mathcal{H}$  (теорема XLIV). (Указание. Так как  $\mathcal{H} \in \Pi_1^1$ , возьмем такое  $z_0$ , что  $f \in \mathcal{H} \Leftrightarrow z_0 \in T^f$ . Согласно (c),  $\{||z_0|| \mid f \in \mathcal{H}\}$  не ограничено в конструктивных ординалах. Поэтому имеем  $x \in T \Leftrightarrow (\exists f) \mathcal{H} [||x|| < ||z_0||]$ . Возьмем модифицированное, как в пункте (b) выше, доказательство теоремы XXI и подвергнем его релятивизации по отношению к  $f$ , чтобы получить такие  $\Delta_1^1, \mathcal{H}$ -формы

относительно  $f$  и  $x$ , которые при  $f \in \mathcal{H}$  выражают множество  $\{x \mid \|x\| < \zeta \mid z_0 \mid\}^f$ . Используя  $\Sigma_1^1$ ,  $\mathcal{H}$ -форму, получим  $T \in \Sigma_1^1, \mathcal{H}$ . Поэтому  $\Pi_1^1 \subset \Sigma_1^1, \mathcal{H}$ ). (Будучи, возможно, более простым, чем доказательство теоремы XLIV, изложенное в § 16.7, это доказательство не приводит к следствиям теоремы XLIV, касающимся неявной определимости, которые были получены в § 16.7.)

$\triangle 16-102$  (Крейсел). Покажите, что  $\mathcal{H}$  — наименьший из классов  $\mathcal{C}$ , для которых (i)  $(\forall f)(\forall g)[[g \in \mathcal{C} \& f \leq_T g] \Rightarrow f \in \mathcal{C}]$  и (ii)  $(\forall x)(\exists g)_{\mathcal{C}} R(g, x) \Leftrightarrow (\exists h)_{\mathcal{C}} (\forall x)R(\lambda y[h(x, y)], x)$  при любом  $R \in \Pi_1^0$ . (Что  $\mathcal{H}$  обладает свойствами (i) и (ii), вытекает из следствия X(a) и из пункта (a) в упр. 16-101.) (Указание. Для  $z \in O$  определим  $\mathcal{C}_z = \{g \mid (\exists y)[y <_O z \& g \leq_T H(y)]\}$ . Достаточно показать, что для всякого  $z \in O$ ,  $|z| \neq 0$ , существует такое  $R \in \Pi_1^0$ , что  $(\forall v)(\exists g)_{\mathcal{C}_z} R(g, v)$ , но  $\neg(\exists h)_{\mathcal{C}_z} (\forall v)R(\lambda y[h(v, y)], v)$ . Для  $z \in O$  пусть  $f_z$  определяется, как в упр. 16-98, и пусть  $S$  — такое  $\Pi_1^0$ -отношение (построенное в упр. 16-98), что  $g = f_z \Leftrightarrow S(z, g)$ . Для  $z = 3 \cdot 5^t$  положим  $R(g, v) \Leftrightarrow S(\varphi_t(v), g)$ . Для  $z = 2^y$  полагаем  $R(g, v) \Leftrightarrow [S(y, \lambda n[g(n+1)]) \& [g(0) = w \Leftrightarrow [v \text{ входит в область значений } g_0 \& w = g(g_0^{-1}(v) + 1)] \vee [v \text{ не входит в область значений } g_0 \& w = \langle p, q, r, s \rangle \& \langle v, p, q, r \rangle \in W_{g_0^{-1}(v)}]]$ , точно за  $s$  шагов  $\& D_g \subset \{z \mid g(z+1) \neq 0\} \& D_r \subset \{z \mid g(z+1) = 0\}\}]$ , где  $g_0$  выбирается так же, как в упр. 16-98).

## ЛИТЕРАТУРА<sup>1)</sup>

### Аддисон (Addison J. W.)

- [1955] Analogies in the Borel, Lusin, and Kleene hierarchies, I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 61, 75 (abstract).
- [1959] Some consequences of the axiom of constructibility, *Fund. math.*, 46, 337—357.
- [1959a] Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory, *Fund. math.*, 46, 123—135.
- [1962] Some problems of hierarchy theory, Proc. of symposia in pure math., v. V, Recursive function theory, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 123—130.
- [1962a] The theory of hierarchies, Logic, methodology, and philosophy of science (Proceedings of the 1960 international congress), Stanford University Press, Stanford, Calif., 26—37. (Русский перевод: Аддисон Дж., Теория иерархий, в сб. «Математическая логика и ее приложения», 1965, М., «Мир», 23—36.)

### Аддисон, Клини (Addison J. W., Kleene S. C.)

- [1957] A note on function quantification *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8, 1002—1006.

### Акст (Axt P.)

- [1959] On a subrecursive hierarchy and primitive recursive degrees, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92, 85—105.

### Аппель, Мак-Лохлин (Appel K. I., McLaughlin T. G.)

- [1965] On properties of regressive sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 115, 83—93.

### Арсланов М. М.

- [1968]\* Две теоремы о рекурсивно перечислимых множествах, *Алгебра и логика*, 7, вып. 3, 4—8.
- [1969]\* О некоторых вопросах структуры рекурсивно перечисленных множеств, Тезисы докл. X всесоюзн. алг. коллокв., 1969, Новосибирск, 1, 100.

### Ассер (Asser G.)

- [1960] Rekursive Wortfunktionen, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 6, 258—278.

### Бернайс, Френкель (Bernays P., Fraenkel A. A.)

- [1958] Axiomatic set theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

<sup>1)</sup> Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — Прим. ред.

## Биркгоф (Birkhoff G.)

- [1940] Lattice theory, American Mathematical Society colloquium publications, 25, New York. (Русский перевод: Биркгоф Г., Теория структур, 1952, М., ИЛ.)

## Бун (Boone W. W.)

- [1957] Certain simple, unsolvable problems of group theory, V, VI, *Indag. math.*, 19, 22–27, 227–232. (*Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenschappen, Proc., ser. A*, 60.)

## Ганди (Gandy R. O.)

- [1960] On a problem of Kleene's, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66, 501–502.  
[1960a] Proof of Mostowski's conjecture, *Bull. Acad. Polon. Sci., ser. sci. math., astronom. et phys.*, 8, 571–575.

## Ганф (Hahn W.)

- [1962] Degrees of finitely axiomatizable theories, *Notices Amer. Math. Soc.*, 9, 127–128 (abstract).

## Гензель, Путнам (Hensel G., Putnam H.)

- [1965] On the notational independence of various hierarchies of degrees of unsolvability, *J. symb. logic.*, 30, 69–86.

## Гёдель (Gödel K.)

- [1931] Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I, *Monatsh. Math. und Phys.*, 38, 173–198.

## Жегорчик (Grzegorczyk A.)

- [1953] Some classes of recursive functions, *Rozpr. mat.*, 4, Inst. Mat. Polsk. Akad. Nauk, Warsaw. (Русский перевод: Жегорчик А., Некоторые классы рекурсивных функций, в сб. «Проблемы математической логики», 1970, М., «Мир», 9–49.)

## Гильберт Д.

- [1904]\* Об основаниях логики и арифметики, В кн. Гильберт Д., Основания геометрии, 1948, М.-Д., ГИТТА, 322–337.

## Гильберт, Бернард (Hilbert D., Bernays P.)

- [1939] Grundlagen der Mathematik, Springer-Verlag OHG, Berlin.

## Деккер (Dekker J.C.E.)

- [1953] Two notes on recursively enumerable sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, 495–501.  
[1954] A theorem on hypersimple sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5, 791–796.  
[1955] Productive sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78, 129–149.  
[1962] Infinite series of isols, Proc. of the symposia in pure math., v. V, Recursive function theory, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 77–96.

## Деккер, Майхилл (Dekker J.C.E., Myhill J.)

- [1958] Some theorems on classes of recursively enumerable sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 89, 25–59.  
[1958a] Retraceable sets, *Canad. j. math.*, 10, 357–373.

- [1960] Recursive equivalence types, *Univ. of Calif. publ. in math.*, n.s., 3; 67–213.

## Джокуш (Jockusch C. G., Jr.)

- [1966] Reducibilities in recursive function theory, Ph.D. Diss., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

## Дребен (Dreben B. S.)

- [1962] Solvable Suranyi Subclasses: an introduction to the Herbrand theory, *Ann. Comput. Labor. Harvard Univ.*, 31, 32–47.

## Дэвис (Davis M.)

- [1956] A note on universal Turing machines, *Automata studies*, Annals of mathematics studies, v. 34, Princeton, N. J., 167–175. (Русский перевод: Дэвис М., Замечание об универсальных машинах Тьюринга, в сб. «Автоматы», 1956, М., ИЛ., 226–234.)  
[1957] The definition of universal Turing Machine, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8, 1125–1126.  
[1958] Computability and unsolvability, McGraw-Hill Book Company, New York.

## Дэвис, Патнам, Робинсон, (Davis M., Putnam H., Robinson J.)

- [1961] The decision problem for exponential diophantine equations, *Ann. of math.*, 74, 425–436. (Русский перевод: Дэвис М., Патнэм Х. и Робинсон Дж., Проблема разрешимости для показательно-диофантовых уравнений, сб. *Математика*, 1964, 8:5, 69–79.)

## Ейтс (Yates C. E. M.)

- [1962] Recursively enumerable sets and retracing functions, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 8, 331–345.  
[1965] Three theorems on the degree of recursively enumerable sets, *Duke math. j.*, 32, 461–468.

## Кальмар (Kalmár L.)

- [1955] Über ein Problem, betreffend die Definition des Begriffes der allgemein-rekursiven Funktion, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 1, 93–96.

## Карри (Curry H. B.)

- [1963] Foundations of mathematical logic, McGraw-Hill Book Company, New York. (Русский перевод: Карри Х., Основания математической логики, 1969, М., «Мир».)

## Кент (Kent C. F.)

- [1962] Constructive analogues of the group of permutations of the natural numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104, 347–362.

## Кларк (Clarke D. A.)

- [1964] Hierarchies of predicates of finite types, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 51, Providence, R.I.

## К л а у а (K la u a D.)

[1961] Konstruktive Analysis, Mathematische Forschungsberichte, XI, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

## К л и в (C le a ve J. P.)

[1961] Creative functions, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 7, 205—212.

## К л и н и и (K le e n e S. C.)

[1936] General recursive functions of natural numbers, *Math. Ann.*, 112, 727—742.

[1936a]  $\lambda$ -definability and recursiveness, *Duke math. J.*, 2, 340—353.

[1938] On notation for ordinal numbers, *J. symb. logic*, 3, 150—155.

[1943] Recursive predicates and quantifiers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 53, 41—73.

[1950] A symmetric form of Gödel's theorem, *Indag. math.*, 12, 244—246. (*Konink. Nederl. Akad. van Wetenschappen, Proc., ser. A*, 53.)

[1952] Introduction to metamathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. (Русский перевод: К л и н и и С. К., Введение в метаматематику, 1957, М., ИЛ.)

[1955] Arithmetical predicates and function quantifiers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 79, 312—340.

[1955a] Hierarchies of number theoretic predicates, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 61, 193—213.

[1955b] On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals, II, *Amer. j. math.*, 77, 405—428.

[1959] Recursive functionals and quantifiers of finite types, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 91, 1—52.

[1959a] Quantification of number theoretic functions, *Compos. math.*, 14, 23—40.

[1962] Turing machine computable functionals of finite types, I, Logic, methodology, and philosophy of science (Proceedings of the 1960 international congress), Stanford University Press, Stanford, Calif., 38—45. (Русский перевод: К л и н и и С., Функционалы конечных типов, вычислимые на машинах Тьюринга, 1965, М., «Мир», 37—46.)

[1963] Recursive functionals and quantifiers of finite types, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108, 106—142.

## К л и н и и, П о с т (K le e n e S. C., P o s t E. L.)

[1954] The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability, *Ann. of math.*, ser. 2, 59, 379—407.

## К он до (K on d o M.)

[1938] Sur l'uniformization des complémentaires analytiques et les ensembles projectifs de la seconde classe, *Japan. j. math.*, 15, 197—230.

## К р айдер, Р од жер с (K re i d e r D. L., R o g e r s H., Jr.)

[1961] Constructive versions of ordinal number classes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 100, 325—369.

## К р ей с е л (K re i s e l G.)

[1951] Some remarks on the foundations of mathematics: an expository article, *The math. gazette*, 35, 23—28.

[1962] The axiom of choice and the class of hyperarithmetic functions, *Indag. math.*, 24, 307—319. (*Konink. Nederl. Akad. van Wetenschappen, Proc., ser. A*, 65, 307—319.)

## К р ей с е л, Л а к о м б, Ш ё н ф и л д (K re i s e l G., L a c o m b e D., Shoenfield J. R.)

[1957] Partial recursive functionals and effective operations, in A. Heyting (ed.), *Constructivity in mathematics: proceedings of the colloquium held at Amsterdam, 1957*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 195—207.

[1957a] Fonctionnelles récursivement définissables et fonctionnelles récursives, *Compt. rend. Acad. Sci. (Paris)*, 245, 399—402.

## К р ей с е л, С а к с (K re i s e l G., S ack s G. E.)

[1965] Metarecursive sets, *J. symb. logic*, 20, 318—338.

## К р ей с е л, Ш ё н ф и л д, В а н Х а о (K re i s e l G., Shoenfield J. R., Wang Hao)

[1960] Number theoretic concepts and recursive well-orderings, *Arch. math. Logik und Grundlagenforsch.*, 5, 42—64.

## К р о с с л и (Crossley J. N.)

[1965] Constructive order Types I, Formal systems and recursive functions, J. N., Crossley and M.A.E. Dummett (eds.), Amsterdam, 1965, 189—264.)

## К р ай г (Craig W.)

[1953] On axiomatizability within a system, *J. symb. logic*, 18, 30—32.

## К у а й н (Quine W. V.)

[1959] Methods of logic, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.  
[1963] Set theory and its logic, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

## К у зн е ц о в А. В.

[1950] О примитивно-рекурсивных функциях большого размаха, *ДАН СССР*, 71, № 2, 233—236.

## К у зн е ц о в А. В. и Т р а х т е н б р о т Б. А.

[1955] Исследование частично-рекурсивных операторов средствами теории бэрровского пространства, *ДАН СССР*, 105, 897—900.

## К у р а т о в с к и й (Kuratowski K.)

[1950] Topologie, 1, 2d ed. (1948); 2 (1950), Warsaw. (Русский перевод: К у р а т о в с к и й К., Топология, т. 1, 1966, М., «Мир»; т. 2, 1969, М., «Мир».)

## Л а к о м б (L a c o m b e D.)

[1954] Sur le semi-réseau constitué par les degrés d'indécidabilité récursive, *Compt. rend. Acad. Sci. (Paris)*, 239, 1108—1109.

[1959] Quelques procédés de définition en topologie récursive, in A. Heyting (ed.), *Constructivity in mathematics: proceedings of the colloquium held in Amsterdam, 1957*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 129—158.

[1960] La théorie des fonctions récursives et ses applications (Exposé d'information générale), *Bull. Soc. Math. France*, 88, 393—468.

Лахлан (Lachlan A. H.)

- [1965] Some notions of reducibility and productiveness, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 11, 97—108.
- [1966] A note on universal sets, *J. symb. logic*, 31, 573—574.
- [1968]\* Distributive initial segments of the degrees of unsolvability, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 14, 457—472.

Лерман (Lerman M.)

- [1969]\* Some distributive lattices as initial segments of the degrees of unsolvability, *J. symb. logic*, 34, 85—98.

Лоэв (Loeve M.)

- [1955] Probability theory, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. (Русский перевод: Лоэв М., Теория вероятностей, 1962, М., ИЛ.)

Майхилл (Myciull J.)

- [1953] Three contributions to recursive function theory, *Actes du XIème congrès international de philosophie*, Bruxelles, 20—26 Août 1953, XIV, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- [1955] Creative sets, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 1, 97—108.
- [1956] The lattice of recursively enumerable sets, *J. symb. logic*, 21, 220 (abstract).
- [1959] Finitely representable functions, in A. Heyting (ed.), *Constructivity in mathematics: proceedings of the colloquium held at Amsterdam, 1957*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 195—207.
- [1959a] Recursive digraphs, splinters and cylinders, *Math. Ann.*, 138, 211—218.
- [1961] Note on degrees of partial functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12, 519—524.
- [1961a] Category methods in recursion theory, *Pacific J. math.*, 11, 1479—1486.

Майхилл, Шепердсон (Myciull J., Shepherdson J. C.)

- [1955] Effective operations on partial recursive functions, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 1, 310—317.

Мак-Лохлин (McLaughlin T. G.)

- [1962] On an extension of a theorem of Freidberg, *Notre Dame J. formal logic*, 3, 270—273.

Мальцев А. И.

- [1965]\* Алгоритмы и рекурсивные функции, 1965, М., «Наука».

Марквальд (Markwald W.)

- [1954] Zur Theorie der konstruktiven Wohlordnungen, *Math. Ann.*, 127, 135—149.

Марков А. А.

- [1947] О представлении рекурсивных функций, *ДАН СССР*, 58, 1891—1892.
- [1951] Теория алгорифмов, Труды мат. инст. АН СССР, 38, 176—189.
- [1954] Теория алгорифмов, Труды мат. инст. АН СССР, 42.

- [1958] Проблема гомеоморфии, *Proceedings of the international congress of mathematicians*, 1958, Cambridge University Press, London, 300—306, 1960.

Мартин (Martin D. A.)

- [1963] A theorem on hyperhypersimple sets, *J. symb. logic*, 28, 273—278.

Матиасевич Ю. В.

- [1970]\* Диофантовость перечислимых множеств, *ДАН СССР*, 191, 279—282.
- [1971]\* Диофантово представление перечислимых множеств, *Изв. АН СССР*, серия математическая, 35, № 1, 3—30.
- [1971a]\* Диофантово представление множеств простых чисел, *ДАН СССР*, 196, № 4, 770—773.

Медведев Ю. Т.

- [1955] О неизоморфных рекурсивно перечислимых множествах, *ДАН СССР*, 102, 211—214.
- [1955a] Степени трудности массовых проблем, *ДАН СССР*, 104, 501—504.

Минский (Minsky M. L.)

- [1961] Recursive unsolvability of Post's problem of «tag» and other topics in the theory of Turing machines, *Ann. of math.*, 74, 437—455.

Московакис (Moschovakis Y. N.)

- [1963] Recursive analysis, Ph. D. Diss., Univ. of Wisconsin, Madison, Wis.

Мостовский (Mostowski A.)

- [1947] On definable sets of positive integers, *Fund. math.*, 34, 81—112.
- [1948] On a set of integers not definable by means of one-quantifier predicates, *Ann. Soc. Polon. Math.*, 21, 114—119.

Мучник А. А.

- [1956] Неразрешимость проблемы сводимости теории алгоритмов, *ДАН СССР*, 108, 194—197.
- [1956a] Об отделимости рекурсивно перечислимых множеств, *ДАН СССР*, 109, 29—32.
- [1958] Изоморфизм систем рекурсивно перечислимых множеств с эффективными свойствами, *Труды Моск. мат. общ.*, 7, 407—412.

Нероуд (Nerode A.)

- [1957] General topology and partial recursive functionals, *Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic, Cornell Univ.*, 1957, 247—251.

Новиков П. С.

- [1955] Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, *Труды мат. инст. АН СССР*, 44.

Патнам (Putnam H.)

- [1964] On hierarchies and systems of notations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15, 44—50.

## Паульсен (Poulsen B. T.)

- [1970]\* The Medvedev lattice of degrees of difficulty, *Var. Publ. Ser. Mat.*, inst. Aarhus univ., N 12.

## Петер (Péter R.)

- [1954] Rekursive funktionen, Académiai Kiadó, Budapest. (Русский перевод: Петер Р., Рекурсивные функции, 1954, М., ИЛ.)

## Платек (Platek R. A.)

- [1970]\* A note on the cardinality of the Medvedev lattice, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25, 917.

## Пост (Post E. L.)

- [1936] Finite combinatory processes — formulation, I, *J. symb. logic*, 1, 103—105.  
 [1943] Formal reductions of the general combinatorial decision problem, *Amer. J. math.*, 65, 197—215.  
 [1944] Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50, 284—316.  
 [1946] Note on a conjecture of Skolem, *J. symb. logic*, 11, 73—74.  
 [1947] Recursive unsolvability of a problem of Thue, *J. symb. logic*, 12, 1—14.

## Пур-Эль (Poúg - El M. B.)

- [1960] A comparison of five «computable» operators, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 6, 325—340.

## Рабин (Rabin M. O.)

- [1960] Computable algebra, general theory and theory of computable fields, *Trans. Amer. Soc.*, 95, 341—360.

## Рабин, Скотт (Rabin M. O., Scott D.)

- [1959] Finite automata and their decision problems, *IBM J. research and development*, 3, 114—125. (Русский перевод: Рабин М., Скотт Д., Конечные автоматы и задачи их разрешения, «Кибернетический сборник», 4, 1962, М., ИЛ, 58—91.)

## Райс (Rice H. G.)

- [1953] Classes of recursively enumerable sets and their decision problems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74, 358—366.  
 [1954] Recursive real numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5, 784—791.  
 [1956] On completely recursively enumerable classes and their key arrays, *J. Symb. logic*, 21, 304—308.

## Риттер (Ritter W.)

- [1962] Some results in hyperarithmetical analysis, Ph. D. Diss., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

## Рихтер (Richter W.)

- [1965] Extensions of the constructive ordinals, *J. symb. logic*, 30, 193—211.

## Ричи (Ritchie R. W.)

- [1963] Classes of predictably computable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106, 139—173. (Русский перевод: Ричи Р., Классы предсказуемо вычислимых функций, в сб. «Проблемы математической логики», 1970, М., «Мир», 50—93.)

## Робинсон Дж. (Robinson J.)

- [1949] Definability and decision problems in arithmetic, *J. symb. logic*, 14, 98—114.

## Робинсон Р. М. (Robinson R. M.)

- [1956] Arithmetical representation of recursively enumerable sets, *J. symb. logic*, 21, 162—186. (Русский перевод: Робинсон Р. М., Арифметическое представление рекурсивно перечислимых множеств, сб. «Математика», 1964, 8:5, 23—47.)

## Роджерс (Rogers H., Jr.)

- [1959] Computing degrees of unsolvability, *Math. Ann.*, 138, 125—140.  
 [1959a] Recursive functions over partial well orderings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10, 847—853.

## Розенблум (Rosenblum P. C.)

- [1950] The elements of mathematical logic, Dover Publications, New York.

## Россер (Rosser J. B.)

- [1936] Extensions of some theorems of Gödel and Church, *J. symb. logic*, 1, 87—91.

## Роуз, Юлиан (Rose G. F., Ullian J. S.)

- [1963] Approximations of functions on the integers, *Pacific J. math.*, 13, 693—701.

## Сакс (Sacks G. E.)

- [1961] A minimal degree less than 0', *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67, 416—419.  
 [1961a] On suborderings of degrees of recursive unsolvability, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 7, 46—56.  
 [1963] On the degrees less than 0', *Ann. of math.*, 77, 211—231.  
 [1963a] Recursive enumerability and the jump operator, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108, 223—239.  
 [1963b] Degrees of unsolvability, Annals of mathematics studies, v. 55, Princeton, N. J.  
 [1964] A simple set which is not effectively simple, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15, 51—55.  
 [1964a] The recursively enumerable degrees are dense, *Ann. of math.*, 80, 300—312.  
 [1964b] A maximal set which is not complete, *Michigan math. j.*, 11, 193—205.

## Саппес (Suppes P.)

- [1957] Introduction to logic, D. Van Nostrand Company, Princeton, N. J.

## Синглтерри (Singleterry A. M.)

- [1965] Degrees of unsolvability in the hyperarithmetical hierarchy, Ph. D. Diss., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

## Скolem (Skolem T.)

- [1944] Some remarks on recursive arithmetic, *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger*, 17, 103—106.

## Спектор (Spector C.)

- [1955] Recursive well-orderings, *J. symb. logic*, 20, 151—163.  
 [1956] On degrees of recursive unsolvability, *Ann. of math.*, 64, 581—592.  
 [1958] Measure theoretic construction of incomparable hyperdegrees, *J. symb. logic*, 23, 280—288.  
 [1958a] Strongly invariant hierarchies, *Notices Amer. Math. Soc.*, 5, 851 (abstract).  
 [1959] Hyperarithmetical quantifiers, *Fund. math.*, 48, 313—320.

## Судзуки (Suzuki Y.)

- [1964] A complete classification of the  $\Delta_1^1$ -functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70, 246—253.

## Тарский (Tarski A.)

- [1932] Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen, *Akad. Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Anzeiger*, 69, 24—25.  
 [1936] Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia philos.*, 1, 261—405.  
 [1948] A decision method for elementary algebra and geometry, RAND Corporation, Santa Monica, Calif.  
 [1956] Logic, semantics, metamathematics, Oxford University Press, New York.

## Тарский, Мостовский Робинсон Р. М. (Tarski) A., Mostowski A., Robinson R. M.

- [1953] Undecidable theories, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

## Томасон (Thomason S. K.)

- [1970]\* Sublattices and initial segments of the degrees of unsolvability, *Canad. J. math.*, 22, 69—581.

## Трахтенброт Б. А.

- [1950] Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах, *ДАН СССР*, 70, 569—572.  
 [1955] Табличное представление рекурсивных операторов, *ДАН СССР*, 101, 417—420.

## Тьюринг (Turing A. M.)

- [1936] On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, 42, 230—265; 43, 544—546.  
 [1937] Computability and  $\lambda$ -definability, *J. symb. logic*, 2, 153—163.

## Уайтхед, Рассел (Whitehead A. N., Russell B.)

- [1910] *Principia mathematica*, 1 (1910); 2 (1912); 3 (1913), Cambridge University Press, London.

## Успенский В. А.

- [1955] О вычислимых операциях, *ДАН СССР*, 103, 773—776.  
 [1955a] Системы перечислимых множеств и их нумерации, *ДАН СССР*, 105, 1155—1158.  
 [1957] Несколько замечаний о перечислимых множествах, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 3, 157—170.  
 [1960] Лекции о вычислимых функциях, Физматгиз, Москва.

## Фейнер (Feiner L.)

- [1970]\* The strong homogeneity conjecture, *J. symb. logic*, 35, 375—377.

## Феферман (Feferman S.)

- [1957] Degrees of unsolvability associated with classes of formalized theories, *J. symb. logic*, 22, 161—175.  
 [1960] Arithmetization of metamathematics in a general setting, *Fund. math.*, 49, 35—92.  
 [1961] Classifications of recursive functions by means of hierarchies, *Office of Ordnance Research technical report*, 4 (DA-04-200-ORD), 1—43.

## Феферман, Спектор (Feferman S., Spector C.)

- [1962] Incompleteness along paths in progressions of theories, *J. symb. logic*, 27, 383—390. (Русский перевод: Феферман С. и Спектор К., Неполнота вдоль путей в прогрессиях теорий, сб. *Математика*, 1971, 15:6, 159—166.)

## Фишер (Fischer P. C.)

- [1962] Theory of provable recursive functions, Ph. D. Diss., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.  
 [1963] A note on bounded-truth-table reducibility, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14, 875—877.

## Френкель (Frenkel A. A.)

- [1928] *Einleitung in die Mengenlehre*, 3rd ed., Springer-Verlag OHG, Berlin.

## Фридберг (Friedberg R. M.)

- [1957] Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability (solution of Post's problem 1944), *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 43, 236—238.  
 [1957a] A criterion for completeness of degrees of unsolvability, *J. symb. logic*, 22, 159—160.  
 [1958] Four quantifier completeness: a Banach-Mazur functional not uniformly partial recursive, *Bull. Acad. Polon. Sci., Serie sci. math.; astronom. et phys.*, 6, 1—5.  
 [1958a] Un contre-exemple relatif aux fonctionnelles récursives, *Compt. rend. Acad. Sci. (Paris)*, 247, 852—854.  
 [1958b] Three theorems on recursive enumeration: I, Decomposition, II, Maximal set, III, Enumeration without duplication, *J. symb. logic*, 23, 309—316.

- Халмос (Halmos P.)**
- [1950] Measure theory, D. Van Nostrand Company, Princeton, N. J. (Русский перевод: Халмос П., Теория мер, 1953, М., ИЛ.)
- Хенкин (Henkin L.)**
- [1949] The completeness of the first-order functional calculus, *J. symb. logic*, 14, 159—166.
- Хигман (Higman G.)**
- [1961] Subgroups of finitely presented groups, *Proc. Royal Soc. London, ser. A*, 262, 455—475.
- Ходз (Hodges L.)**
- [1962] Hyperarithmetical real numbers and hyperarithmetical analysis, Ph. D. Diss., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
- Хупер (Hooper P. K.)**
- [1966] The undecidability of the Turing machine immortality problem, *J. symb. logic*, 31, 219—234.
- Чёрч (Church A.)**
- [1936] An unsolvable problem of elementary number theory, *Amer. J. math.*, 58, 345—363.
  - [1936a] A note on the Entscheidungsproblem, *J. symb. logic*, 1, 40—41, 101—102.
  - [1938] The constructive second number class, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44, 224—232.
  - [1956] Introduction to mathematical logic, Princeton University Press, Princeton, N. J. (Русский перевод: Чёрч А., Введение в математическую логику, т. 1, 1960, М., ИЛ.)
- Чёрч, Клини (Church A., Kleene S. C.)**
- [1937] Formal definitions in the theory of ordinal numbers, *Fund. math.*, 28, 11—21.
- Шапиро (Shapiro N.)**
- [1956] Degrees of computability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82, 281—299.
- Шепердсон, Стругис (Shepherdson J. C., Sturgis H. E.)**
- [1963] Computability of recursive functions, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 10, 217—255.
- Шеффилд (Shoenfield J. R.)**
- [1957] Quasicreative sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8, 964—967.
  - [1958] The class of recursive functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9, 690—692.
  - [1958a] Degrees of formal systems, *J. symb. logic*, 23, 389—392.
  - [1959] On degrees of unsolvability, *Ann. of math.*, ser. 2, 69, 644—653.
  - [1960] An uncountable set of incomparable degrees, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11, 61—62.
  - [1962] The form of the negation of a predicate, Proc. of symposia in pure math., V, Recursive function theory, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 131—134.

- Шмультян (Smulian R. M.)**
- [1961] Theory of formal systems, *Annals of mathematics studies*, 47, Princeton, N. J.
- Эндертон (Enderton H. B.)**
- [1964] Hierarchies in recursive function theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 111, 457—471.
- Эндертон, Лакхам (Enderton H. B., Luckham D.)**
- [1964] Hierarchies over recursive well-orderings, *J. symb. logic*, 29, 183—190.
- Эрбранд (Herbrand J.)**
- [1931] Sur le problème fondamental de la logique mathématique, *Compt. rend. Soc. Sci. Lettr. Vars.*, classe III, 24, 12—56.
  - [1931a] Sur la non-contradiction de l'arithmétique, *J. reine und angew. Math.*, 166, 1—8.
- Юлиан (Ullian J. S.)**
- [1960] Splinters of recursive functions, *J. symb. logic*, 25, 33—38.
  - [1961] A theorem on maximal sets, *Notre Dame J. formal logic*, 2, 222—223.
- Янг (Young P. R.)**
- [1963] On the structure of recursively enumerable sets, Ph. D. Diss., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
  - [1966] Linear ordering under one-one reducibility, *J. symb. logic*, 31, 70—85.

$N$	11	$\mathcal{C}_i$	159
$X$	12	$\leq_q$	162
$\langle \rangle$	12	$\rho, W_{\rho(z)}$	172
$A^n$	12	$\varphi_z^x, \varphi_z^{(k)x}$	173
$\lambda x [-x-]$	13	$\varphi_z^{x_1}, \dots, x_n$	175
$\neg$	13	$W_z^X$	176
$\vee$	13	$K^A$	177
$x_0$	13	$\leq_T$	179
$\mu x [\dots x \dots]$	14	$\equiv_T$	180
$\mathcal{N}$	14	$\leq_e$	191
$P_x$	40	$\equiv_e$	193
$\Phi_x, \Phi_x^{(k)}$	40	$\Phi_z$	192
$\equiv$	75	$\mathcal{P}$	193
$W_z$	85	$\tau \mathcal{P}$	194
$K$	88	$\mathcal{F}$	194
$\langle x, y \rangle$	90	$\leq_w$	206
$\tau, \tau^n$	90	$d_T(A)$	209
$\pi_1, \pi_2, \pi_j^n$	90	$\leq_T$	218
$\times$	90	$v_s, D_s, k_s, p_s, q_s$	264
$D_x$	97	$R_s$	265
$\tau^*$	98	$S_1$	266
$K_0$	103, 113	$O, <_o$	268
$\leq_i$	110	$+_o$	269
$\leq_m$	110	$\varepsilon_0$	284
$\equiv_i$	111	$W$	285
$\equiv_m$	111	$\cup, \cap, \bar{a}$ (решетка)	286 — 288
$\text{Dom } A$	136	$\mathcal{E}, \mathcal{R}$	287
$\text{center}_{\psi} A$	136	$\mathcal{L}/\mathcal{I}$	288
$I$	145	$\mathcal{L}/^*\mathcal{D}$	289
$\leq_{tt}$	146	$\mathcal{F}$ (конечные множества)	290
$\equiv_{tt}$	147	$\mathcal{F}$	290
$A^{tt}$	149	$\mathcal{S}$	290
$\leq_{btt}$	150	$\mathcal{K}$	291
$\equiv_{btt}$	151	$\mathcal{F}_1$	300
$\mathcal{B}_m(B)$	155	$ A , \overline{\lim}(A)$	304
$\mathcal{B}_t$	158	$A'$	326

$0, a, \cup, a b$	328	$T_{k,l}^*$	483
$\emptyset, A^{(n)}, a^{(n)}$	329	$E^n$	485
$A^{(\omega)}$	330	$E^\omega$	487
$a^{(\omega)}$	330	$\Delta_n^1$	488, 490
$\varphi_z^f, \varphi_z^{[f]}$	332	$\Sigma_n^0, \Pi_n^0, \Delta_n^0$	490
$W_z^{[f]}$	333	$\Sigma_n^1, ZF, \Pi_n^1, ZF$	500
$\mathcal{C}$	346	$o(\tau)$	503
$\Psi_z$	365	$b(n, z)$	506
$\otimes$	366	$\ z\ $	506
$A \vee B, A \wedge B$	366	$T$	506
$S_A, E_B$	368	$T_\alpha$	508
$\Sigma_n, \Pi_n, \Sigma_n^A, \Pi_n^A$	390	$W_z^1$	512, 515
$T_n$	392	$T_\alpha^*$	513
$T_n^A$	392	$\leq^T$	514
$V$	408	$\varphi_z^1$	516
$V_n$	409	$\Sigma_n^{1,A}, \Pi_n^{1,A}, \Delta_n^{1,A}$	524
$ZF$	412	$T_{k,l}^A$	524
$T_n(z, \dots)$	413	$T_{k,l}^{*A}$	524
$\Sigma_n^{ZF}, \Pi_n^{ZF}$	413	$\Sigma_n^{1,h}, \dots, T_{k,l}^{h,i} \dots$	525
$P_{\mathcal{C}}$	416	$T^A$	527
$(Ux)$	421	$\leq_h$	525
$U^{(n)}$	422	$\equiv_h$	526
$\Sigma_n^{(s)}, \Pi_n^{(s)}$	431	$\ z\ ^A$	529
$T_{k,l}$	432	$T_\alpha^A$	529
$\Sigma_n^*, \Pi_n^*$	438	$b'(n, z)$	529
$\Sigma_n^{(s)A}$	443	$\lambda, \lambda^A$	531
$\mathcal{F}$ (пространство Бэра)	444	$T^2, \ z\ ^2, T_\alpha^2$	533
$\Sigma_n^{(fn)}, \Pi_n^{(fn)}$	446	$\mathfrak{A}$	534
$T_{k,l}^*$	446	$\leq^{T_2}$	535
$\Sigma_n^{**}, \Pi_n^{**}$	453	$\mathcal{H}$ (гиперарифметические функции)	535
$\Sigma_n^{(fn)A}$	456	$(\exists f)\mathcal{H}$	535
$\Sigma_n^{(fn)}[\mathcal{C}], \Pi_n^{(fn)}[\mathcal{C}]$	457	$ x $	560
$T_n^*$	457	$H(x)$	560
$\mathcal{P}\mathcal{R}, \mathcal{R}$	459	$h_a$	565
$[f]$	467	$\Sigma_\beta^0, \Pi_\beta^0, \Delta_\beta^0$	566
$\Sigma_n^1, \Pi_n^1$	480, 490	$O_\alpha, W_\alpha$	569
$\tilde{f}(x)$	482	$H_x$	581

*Продолжение*

Глава	Теорема	Стр.	Глава	Теорема	Стр.
1	I	40	5	XIV	95
	II	40		XV	97
	III	40		XVI	99
	IV	41		XVII	100
	V	42		XVIII	101
	VI	43		I	110
	VII	43		II	112
	VIII	45		III	113
	IX	49		IV	113
	X	49		V	115
	XI	51		VI	116
				VII	118
2	I	54	7	VIII	121
	II	58		IX	122
	III	59		X	122
4	I	74	8	XI	124
	II	76		XII	127
	III	78		I	141
5	I	82	8	II	141
	II	82		III	143
	III	83		IV	143
	IV	84		V	144
	V	84		VI	146
	VI	88		VII	147
	VII	88		VIII	148
	VIII	91		IX	149
	IX	91		X	151
	X	92		XI	151
	XI	92		XII	151
	XII	94		XIII	154

Глава	Теорема	Стр.	Глава	Теорема	Стр.
8	XIV	156	11	V	236
	XV	157		VI	237
9	I	167		VII	240
	II	172		VIII	242
	III	173		IX	244
	IV	174		X	246
	V	174		XI	249
	VI	175		XII	251
	VII	175		XIII	253
	VIII	177		XIV	254, 258
	IX	177		XV	265
	X	177		XVI	267
	XI	177		XVII	269
	XII	179		XVIII	270
	XIII	180		XIX	271
	XIV	181		XX	272
	XV	182		XXI	273
	XVI	182	12	I	288
	XVII	184		II	292
	XVIII	185		III	294
	XIX	187		IV	294
	XX	192		V	296
	XXI	193		VI	296
	XXII	195		VII	298
	XXIII	195		VIII	298
	XXIV	198		IX	299
	XXV	201		X	300
	XXVI	201		XI	301
10	I	240		XII	304
	II	240		XIII	304
	III	242		XIV	305
	IV	247		XV	307
	V	220		XVI	309
	VI	223		XVII	310
11	I	233		XVIII	311
	II	234		XIX	313
	III	235	13	XX	315
	IV	235		I	327
				II	330

*Продолжение*

Глава	Теорема	Стр.	Глава	Теорема	Стр.
13	III	330	14	XVI	419
	IV	333		XVII	421
	V	334		XVIII	422
	VI	337		I	431
	VII	338		II	431
	VIII	339		III	432
	IX	341		IV	432
	X	343		V	433
	XI	345		VI	434
	XII	347		VII	435
	XIII	347		VIII	436
	XIV	349		IX	437
	XV	351		X	438
	XVI	353		XI	439
	XVII	355		XII	440
	XVIII	360		XIII	442
	XIX	362		XIV	446
	XX	363		XV	446
	XXI	367		XVI	447
	XXII	368		XVII	447
	XXIII	369		XVIII	447
	XXIV	371		XIX	448
	XXV	373		XX	450
	XXVI	378		XXI	451
14	I	388	XXII	452	
	II	390	XXIII	453	
	III	394	XXIV	453	
	IV	396	XXV	454	
	V	401	XXVI	455	
	VI	402	XXVII	457	
	VII	402	XXVIII	458	
	VIII	403	XXIX	460	
	IX	407	XXX	462	
	X	408	XXXI	464	
	XI	410	XXXII	464	
	XII	413	XXXIII	468	
	XIII	415	XXXIV	468	
	XIV	416	XXXV	469	
	XV	419	XXXVI	469	

*Продолжение*

Глава	Теорема	Стр.	Глава	Теорема	Стр.
16	I	478	16	XXVII	517
	II	480		XXVIII	517
	III	480		XXIX	518
	IV	482		XXX	524
	V	483		XXXI	525
	VI	484		XXXII	526
	VII	484		XXXIII	527
	VIII	486		XXXIV	528
	IX	486		XXXV	530
	X	487		XXXVI	531
	XI	488		XXXVII	533
	XII	493		XXXVIII	533
	XIII	494		XXXIX	534
	XIV	498		XL	534
	XV	499		XLI	536
	XVI	500		XLII	537
	XVII	500		XLIII	538
	XVIII	504		XLIV	540
	XIX	506		XLV	545
	XX	507		XLVI	552
	XXI	509		XLVII	553
	XXII	511		XLVIII	555
	XXIII	513		XLIX	562
	XXIV	514		L	564
	XXV	515		LI	564
	XXVI	517		LII	570

Абсолютно неопределенный функционал (strongly undefined functional) 459  
 Абсолютные понятия (absolute concepts) 38  
 Аддисон (Addison J.) 456, 484, 491, 518, 520, 528, 529, 535, 545, 574, 579  
 Аккермана функция (Ackermann generalized exponential) 25  
 Аксиоматизация (axiomatization) 410  
 — семантически непротиворечивая (sound) 410, 413  
 Аксиоматируемая теория (axiomatizable theory) 129, 188, 223, 277  
 Акт (Axt P.) 72  
 Алгоритм, неформальное понятие (algorithm, informal notion) 17—22, 36—39, 47  
 — нечисловой (non-numerical) 46—49  
 — относительный (relative) 168—169  
 Алгоритмическая всюду определенная функция (algorithmic function) 18, 25—26, 36—39  
 — функция (algorithmic partial function) 29  
 Аналитическая иерархия (analytical hierarchy) 478—586  
 — — нормальная форма и теорема о перечислимости (normal form and enumeration theorem) 481—483  
 — — теорема о нормальной форме (alternative normal-form theorem) 483  
 — — теорема о полноте (completeness theorem) 486  
 Аналитическое в (относительно) (analytical in) 523—524, 526  
 — множество (analytical set) 491  
 Аналитические множества и отношения (analytical sets and relations) 474, 478—494; см. также Аналитическая иерархия  
 Аналоги классических теорий (analogue structures) 68, 70, 470, 475—477, 524  
 Аналогии между иерархиями (analogies between hierarchies) 491, 515—523, 568  
 Аппель (Appel K.) 206  
 Арифметика 2-го порядка (second-order arithmetic) 492, 493, 496, 498 прим., 501, 502  
 — изолей (isolic arithmetic) 163  
 Арифметическая иерархия (arithmetical hierarchy) 387—428  
 — — классов множеств (of sets of sets) 429—444, 454, 455, 471, 472  
 — — — функций (of sets of functions) 444—458, 472—474  
 — — нижние грани (lower bounds) 416  
 — — нормальные формы (normal forms) 394—394  
 — — теорема о полноте (completeness theorem) 405  
 — — теоремы о нормальной форме и перечислимости (normal form and enumeration theorems) 394, 432, 443, 446, 447, 457  
 Арифметическая всюду определенная функция (arithmetical function) 455  
 — представимость (arithmetical representation) 400—403  
 — функция (arithmetical partial function) 474  
 — эквивалентность (arithmetical equivalence) 331  
 Арифметически выражимые предложения теории множеств (arithmetically expressible sentences of set theory) 412—415  
 — продуктивное множество (arithmetically productive set) 281  
 Арифметические интуитивно простые определения (intuitively simple definitions) 424; см. также Арифметическая иерархия

Арифметические множества и отношения (arithmetical sets and relations) 331, 387—391, 406, 430, 433, 434, 446—448, 513  
 Арифметический анализ (arithmetical analysis) 477  
 Арифметическое в (относительно) (arithmetical in) 331, 381, 406  
 — действительное число (arithmetical real) 477  
 Арсланов М. М. 307, 313  
 Ассер (Asser) 48  
 Аффинная геометрия (affine geometry) 73  
 Базис, определение (basis, definition) 536  
 — результаты (results) 536—539, 551, 578  
 Базисные окрестности (basic neighborhoods) 435, 449, 473  
 Банаха — Мазура функционал (Banach — Mazur functional) 467—469  
 Бенсон (Benson) 544  
 Бернайс (Bernays P.) 276, 372, 440, 472  
 Бинарное дерево (binary tree) 204—206  
 Биркгоф (Birkhoff G.) 286  
 Блюм (Blum M.) 78, 80, 172, 202, 246  
 Больцано — Вейерштрасса теорема (Bolzano — Weierstrass Theorem) 205, 477  
 Борелевские множества (Borel sets) 387 прим., 398, 491, 568  
 — — иерархия на множестве Кантора (hierarchy on the Cantor set) 438  
 — — классическая иерархия (classical hierarchy of) 438, 453, 456—458  
 Булев полином (boolean polynomial) 145  
 Булева алгебра (boolean algebra) 288, 316, 317  
 — функция (boolean function) 145  
 Буль (Boole) 60  
 Бун (Boone) 57  
 Бурали — Форти парадокс (Burali — Forti paradox) 124, 281  
 Бэра теорема (Bair's theorem) 347, 382—384  
 Бэрковская метрика (Baire metric) 435, 449, 473  
 Бэрковское пространство (Baire space) 355, 449, 491  
 — — топология (topology) 463  
 Бюхи (Buchi R.) 138  
 Ван Хао (Wang H.) 422, 472 прим.  
 Веблен (Veblen O.) 284  
 Вероятность (probability) 349  
 Вершина дерева (vertex of a tree) 502  
 Ветвь дерева (branch of a tree) 205, 449, 502  
 Взятие дополнения (complementation) 388, 425  
 Вольпин (Wolpin G. C.) 275  
 Вполне продуктивное множество (completely productive set) 125, 137, 236—238  
 — рекурсивно перечислимый класс (completely recursively enumerable class) 105  
 — упорядоченное множество (well-ordered set) 281  
 Всюду определенный функционал (total functional) 467  
 Вынуждение (forcing) 578  
 Высказывание (sentence) 128, 222  
 — первого порядка (first-order sentence) 222  
 $\Sigma_n^1$ ,  $\Pi_n^1$ -высказывание 409  
 $\Sigma_n^1$ ,  $\Pi_n^1$ -высказывание 497  
 Вычислимые операции 192 прим.  
 — уровни иерархии и степени неразрешимости (computing hierarchy levels and degrees of unsolvability) 415—424, 442, 456  
 Вычислитель, вычислительная машина (computer) 18—22

Ганди (Gandy R.) 538, 551, 578  
 Ганф (Hanf W.) 225  
 Гёделева нумерация (Gödel numbering) 39—41, 47—48, 63—64, 100, 129; см. также Допустимая нумерация.  
 — функция подстановки (Gödel substitution function) 257, 260—263, 415  
 Гёделевы номера (р. п. индексы) (r. e. indices) 85, 96—98  
 Гёдель (Gödel K.) 56, 60, 129, 133, 262, 263, 281, 401, 402, 535  
 Гёдель теоремы о неполноте (Gödel incompleteness theorems) 60, 129—133, 243, 281, 410, 412, 499  
 — — — вторая (second) см. также Гёделя — Россера теорема 415, 428  
 — — — первая (first) 48, 139, 263  
 Гёделя — Россера теорема (Gödel — Rosser Theorem) 139, 412, 428  
 Генерическое множество (generic set) 579  
 Гейзер (Geiser J.) 583  
 Гейне — Бореля теорема (Heine — Borel theorem) 476, 477  
 Гензель (Hensel G.) 569  
 Гжегорчик (Grzegorczyk A.) 72  
 Гильберт (Hilbert D.) 56, 192, 372, 440, 472  
 — десятая проблема (tenth problem) 56, 402, 410  
 Гиперарифметическая вычислимость (hyperarithmetical computability) 519—521, 574—576  
 — — аналог теории рекурсивных функций (analogue to recursive function theory) 518, 519, 574—576  
 — иерархия (hyperarithmetical hierarchy) 556—570, 580—586  
 — классов множеств и классов функций (sets of sets and sets of functions) 567, 568  
 — — общие соображения (heuristic dicussion) 557—559  
 — — формальное изложение (formal development) 560—566  
 — — функция (hyperarithmetical function) 516, 520, 574, 575  
 Гиперарифметические множества (hyperarithmetical sets) 488—492, 508—523, 556, 564, 565, 574—576  
 — — свойство замкнутости (closure property) 532, 540  
 — — ординалы (hyperarithmetical ordinals) 531  
 Гиперарифметический анализ (hyperarithmetical analysis) 521  
 Гиперарифметическое относительно (hyperarithmetical in) 525  
 Гипергипериммунное множество (hyperhyperimmune set) 189, 300, 312—314, 318, 322  
 Гипергиперпростое множество (hyperhypersimple set) 189, 207, 291, 292  
 прим., 306, 315, 322, 325, 379, 386, 425  
 Гипериммунное множество (hyperimmune set) 181—182, 203—204, 206, 296, 300, 312, 318, 320, 322, 384  
 Гиперпростое множество (hypersimple set) 181—184, 189, 203—204, 291, 293, 304, 306, 309, 322, 425, 428  
 Гиперскакачок (hyperjump) 523—532, 554, 576, 577  
 Гиперстепень (hyperdegree) 523—532, 538, 539, 554, 576, 577  
 Главный идеал (principal ideal) 299 прим., 385  
 Гольдбаха гипотеза (Goldbach's conjecture) 26  
 Гомологическая алгебра (homological algebra) 163  
 Группа преобразований (group of transformations) 73  
 Густота относительно (density in) 204

Деккер (Dekker J.) 72, 115, 116, 122, 133, 136, 137, 142, 156, 158, 160, 161, 163, 182, 204, 206, 207, 217, 286, 296, 318  
 Дерево (tree) 204—205  
 Деревья с конечными путями (finite-path trees) 450, 473, 502—508, 572, 573  
 — — — ординалы (ordinals of) 503—506  
 — — — сложение и умножение (addition and multiplication) 504, 505

Джокуш (Jockusch C.) 155, 158, 162, 163, 184, 231, 471  
 Диагонализация (diagonalization) 27—29, 51, 232  
 Дизъюнктные элементы (disjoint elements) 225  
 Допустимая нумерация (acceptable indexing or numbering) 100, 233, 275, 327, 380, 393, 425, 575  
 Дребен (Dreben B.) 72  
 Дуальный идеал решетки (dual ideal in lattice) 143, 161, 204, 288, 289, 316, 317, 320, 322  
 — — максимальный (maximal) 316  
 — — простой (prime) 316, 317  
 — — собственный (proper) 316  
 Дэвис (Davis M.) 8, 30, 37, 39, 41, 42, 56, 57, 58, 71, 72, 78, 114, 169, 261, 401, 402

Евклида алгоритм (Euclidean algorithm) 18, 20  
 Ейтс (Yates C.) 189, 206, 207, 220, 230, 300, 301, 307, 318, 321—323, 373, 378, 379, 424  
 Ершов Ю. Л. 5

Игры система (gambling system) 320  
 Идеал решетки (ideal in a lattice) 288, 318; см. также Дуальный идеал решетки.  
 Иерархии (hierarchies) 69; см. также Аналитическая иерархия, Арифметическая иерархия, Гиперарифметическая иерархия.  
 Изолированное множество (isolated set) 142—144  
 Изолитическая сводимость (isolic reducibility) 163  
 Изоль (isol) 163  
 Изоморфизм относительно групп преобразований (G-изоморфизм) (isomorphism with respect to a group) 74  
 Иммунное множество (immune set) 142—144, 156, 158—161, 203, 204, 206, 292, 308  
 Инвариантность относительно обозначений (notational invariance) 558, 559  
 Инвариантов полное множество (invariants, complete set of) 74  
 Индекс (index) 40  
 $\Delta_1^1$ -индекс 509  
 $\Delta_2^1$ -индекс 533  
 $\Sigma_n^1$ ,  $\Pi_n^1$ -индекс 393  
 $\Sigma_n^A$ ,  $\Pi_n^A$ -индекс 394  
 $\Sigma_n^1$ ,  $\Pi_n^1$ -индекс 482, 580  
 $\Sigma_n^{1A}$ ,  $\Pi_n^{1A}$ -индекс 524  
 У-индекс 568  
 Индексное множество (index set) 416  
 Интерполяционная теорема Лагранжа (Lagrange interpolation theorem) 145  
 Интерпретация опровержением контрпримера (no-conterexample interpretation) 470, 471, 477  
 Интуитивный смысл степеней (intuitive significance of degrees) 336—340  
 Интуиционистское исчисление высказываний (intuitionistic propositional calculus) 372, 385  
 Иррациональные числа (irrationals) 449, 473  
 Истинностная таблица (truth table) 145  
 Истинность в элементарной арифметике (truth in elementary arithmetic) 130—131

Канонически перечислимый класс (canonically enumerable class) 104  
 Канонический индекс (номер) (canonical index) 97—98  
 Кантора множество (канторово множество) (Cantor set) 279, 347  
 — теорема (Cantor's theorem) 28, 88, 240

Кантора — Шредера — Бернштейна теорема (Cantor — Schröder — Bernstein theorem) 116  
 Канторово пространство (Cantor space) 347, 349, 382, 383  
 — — топология (topology) 346, 347, 435—437  
 Карри (Curry) 48  
 Категория (в алгебре) (category) 163  
 — вторая 347  
 — первая (first) 347  
 Категорные методы (category methods) 346, 361—363, 382—384, 437, 438, 449, 473  
 Квазикреативное множество (quasicreative set); см. Квазитворческое множество  
 Квазимаксимальное множество (quasimaximal set) 303, 320, 323, 325  
 Квазисжатое множество (quasicohesive set) 300, 318, 321, 324  
 Квазитворческое множество (quasicreative set) 162  
 Квантор (quantifier) 14  
 — бесконечности (infinite) 421  
 — общности (universal) 14  
 — ограниченный (bounded) 398, 425  
 — — рекурсивно (recursively) 425  
 — существования (existential) 14  
 — тип (type) 479  
 Кванторы по множествам (set quantifiers) 489, 490, 571  
 Кент (Kent C.) 75, 299  
 Китайская теорема об остатках (Chinese remainder theorem) 401  
 Кларк (Clarke D.) 479  
 Классы функций и множеств (classes of functions and sets) 435, 449  
 — замкнутые (closed) 436, 450, 451  
 — открытые (open) 436, 450, 451  
 Клауа (Klaauw D.) 477  
 Клейн (Klein F.) 73  
 Клив (Cleene J.) 127  
 Клини (Kleene S.) 7, 8, 15, 29, 30, 34, 36, 37, 39, 42, 45, 50, 210, 212, 233, 235, 236, 251, 263, 264, 266, 267, 269, 270, 275, 330, 333, 334, 337, 338, 351—354, 381, 383, 387 прим., 392 прим., 394, 403, 405, 425, 432, 447, 478, 479 прим., 480—486, 519, 528, 529, 536, 540, 564, 565, 581, 584  
 Клини — Брауэра упорядочение (Kleene — Brouwer ordering) 506, 520, 572  
 Ключевой острок (key array) 105  
 Кнастера — Тарского теорема (Knaster — Tarski theorem) 249, 284  
 Кодирование (coding) 46—49  
 Кодовое число кортежа (sequence number) 482  
 Коиммунное множество (co-immune set) 143  
 Коинфинечное множество (co-finite set) 143  
 Компактность (compactness) 435, 449  
 — для деревьев (for trees) 205, 435  
 Композиция (отношений) (relative product) 103  
 Композиция (отношений) (relative product) 103  
 Кондо — Аддисона теорема об униформизации (Kondo-Addison uniformization theorem) 545—550  
 Конечные множества (finite sets) 96—99, 292  
 Конечный автомат (finite-state machine) 20, 64—65  
 Конструктивно бесконечное множество (constructively infinite set) 226  
 — нерекурсивная функция (constructively nonrecursive function) 319  
 — нерекурсивное множество (constructively nonrecursive set) 209—210  
 Конструктивный ordinal (constructive ordinal) 265, 268, 271—274, 332, 485, 506, 507, 509, 511, 531, 534  
 Конфигурация (instantaneous description) 33  
 — конечная (finite) 63

Ко-свойство (complementary property) 142—143  
 Коши последовательность (Cauchy sequence) 382  
 Коэн (Cohen P.) 331, 545, 578  
 Крайдер (Kreider P.) 276, 569  
 Креативное множество (creative set) 317, 425, 428; см. Творческое множество  
 Крейсел (Kreisel G.) 280, 422, 464, 468, 470, 475, 520, 521, 575, 576, 584—586  
 Крейселя — Сакса аналог (Kreisel — Sacks analogue) 521—523, 526 прим., 575, 576  
 Кроссли (Crossley J.) 72  
 Крейга теорема (Craig's theorem) 138  
 Куайн (Quine W. V.) 222, 276  
 Кузнецов А. В. 67, 182, 440  
 Куратовский (Kuratowski K.) 398, 491 прим., 576  
 Лакомб (Lacombe D.) 384, 464, 475  
 Лакхам (Luckham D.) 104, 517, 559, 574  
 Лахлан (Lachlan A.) 155, 207, 220, 292 прим., 313—315, 325, 331, 378, 380, 386  
 Лейбниц (Leibnitz G.) 60  
 Лемма о рекурсии (recursion lemma) 278, 510, 573  
 Лерман (Lerman M.) 380  
 Ли (Lee C. Y.) 245  
 Логика (logic) 60, 68, 69, 70, 127—133, 260—263, 408—415, 426—428, 498  
 — предикатов (quantificational logic) 394, 400, 426, 433, 447, 483  
 — выводимость (доказуемость) (deducibility in) 38, 222  
 Логические обозначения (logical notation) (Введение) 11, 14—15  
 Лоэв (Loeve M.) 320  
 Мазур (Mazur S.) 467—469  
 Майхилл (Myhill J.) 72, 105, 116, 135, 136, 137, 158, 163, 206, 236, 253, 254, 280, 286, 294, 296, 317, 346, 362, 384, 460, 518  
 Мак-Лохлин (McLaughlin T.) 206, 311, 317, 318, 321—323  
 Мак-Нотн (McNaughton R.) 105  
 Максимальное множество (maximal set) 165, 183, 203, 204, 207, 300—307, 311, 314, 320, 323, 325, 379, 425  
 — его подмножества (subsets of) 303—307  
 Мальцев 5, 401  
 Манастер (Manaster A.) 163  
 Марквальд (Markwald W.) 272, 421  
 Маркеры (markers) 213, 226—230, 373  
 Марков А. А. 36, 57, 67  
 Мартин (Martin D.) 294, 304—307, 314, 321, 322, 324, 331, 378, 383, 384, 386, 426  
 Массовая проблема (mass problem) 364, 385.  
 — — 1-сведения (of one-one reduction) 370  
 — — отделения (of separability) 370  
 — — перечисления (of enumerability) 368  
 — — разрешения (of solvability) 368 (см. также Степени трудности)  
 Матиясевич Ю. В. 56, 401, 410  
 Медведев Ю. Т. 181, 182, 360, 363, 364, 366—369, 371, 372  
 Медведева решетка (Medvedev lattice) 363—372, 385, 440  
 — — релятивизация (relativization) 371 (см. также Степени трудности)  
 Мезоичное множество (mesoic set) 158  
 Методы приоритета (priority methods) 216, 226—230, 326, 373  
 Минимальные степени (minimal degrees) 355—359, 363, 379, 383, 384

Минский (Minsky M.) 63, 72  
 Много-однозначная сводимость, полное множество и степень (many-one reducibility, complete set and degree) см. т-сводимость  
 Московакис (Moschovakis Y.) 72, 285, 476, 521, 532, 563, 583, 585  
 Мостовский (Mostowski A.) 72, 263, 387 прим., 419 прим., 428  
 Мучник А. А. 62, 164, 188, 212–218  
 Мучника — Фридберга теорема (Friedberg — Muchnik Theorem) 212–218, 329, 330

Натуральное число (integer) 11  
 Нейман, фон (von Neumann J.) 243  
 Неотделимые множества (inseparable sets) 220–221  
 Непересекающиеся рекурсивно перечислимые множества (disjoint recursively enumerable sets) 126–127  
 Неподвижная точка (fixed-point value) 233  
 Непротиворечивость (consistency) 133, 139, 241–243, 262  
 Неразрешимая п.п.ф. (undecidable wff) 132  
 Неразрешимости структуры (unsolvability structures) 68–69  
 Неразрешимые проблемы (unsolvable problems) 68  
 Нероуд (Nerode A.) 163, 187, 201  
 Несравнимые множества и степени (incomparable sets and degrees) 111–112, 209–216, 328, 334, 335, 338, 381  
 — и гиперстепени (and hyperdegrees) 528, 576  
 Новиков П. С. 57

Область значений (Val) 13  
 — определения (Arg) 12  
 — полного определения функционала (strong domain of a functional) 459  
 — слабого определения функционала (weak domain of a functional) 459  
 Обобщенная вычислимость (generalized computability) 515–523, 532, 574–576  
 — машина (generalized machine) 519, 520  
 — дерево-диаграмма (tree diagram) 520  
 Обобщенно сжатые множества (generalised cohesive sets) 308, 318, 321, 324  
 Общерекурсивность (general recursiveness) 46  
 Общерекурсивные функции (recursive functions) 17–43, 51, 60–61  
 — определение (definition) 36  
 — основные результаты (basic results on) 36–37  
 — относительно (relativized) 173  
 — расширенная клиниева формализация (Kleene characterization extended) 170; см. также Рекурсивно относительно, Релятивизация  
 — теорема о нормальной форме (normal-form theorem) 50  
 — теория (theory) 51–52  
 — формализация (formal characterization) 28–38  
 — — по Клини (Kleene) 34–35  
 — — по Тьюрингу (Turing) 30  
 Общерекурсивный оператор (general recursive operator) 195, 201–202, 208  
 — функционал (general recursive functional) 460, 462  
 Объемность (extensionality) см. экстенсиональность  
 Ограничение числа шагов (bound on the length of a computation) 21–22, 51  
 Ограниченнотабличная сводимость, полные множества и степени (bounded truth-table reducibility, complete sets and degrees) см. бтт-сводимость  
 Однозначное множество (single-valued set) 99  
 Однозначность (single-valuedness) 12, 99–101  
 — теорема (theorem) 99–101, 515, 535

Одно-односводимость (1-сводимость), полное множество и степень (one-one reducibility (1-reducibility) complete set, and degree) 110–122, 202, 216, 217  
 — полные множества (complete sets for) 118–120, 236–238  
 — степени (degrees for) 111, 142, 150, 155–158, 160, 203, 216, 223, 328  
 — эквивалентность (equivalence for) 116–118  
 Операторы перечисления (enumeration operators) 192–193, 208, 249, 279–280  
 Операция A (operation A) 491  
 Операция скачка (jump operation) 326–346, 380, 381, 403, 408, 519  
 — — итерация (iteration of) 329  
 Определимость, автоморфизмы (definability, and automorphisms) 291  
 — — в элементарной арифметике (in elementary arithmetic) 400  
 — — в элементарном анализе (in elementary analysis) 494  
 — — в логике предикатов (within quantificational logic) 395, 396, 433, 434, 447, 448, 484  
 — неявная (implicit) 440, 441, 455, 456, 498, 543–545, 552–555, 570, 571, 579  
 — явная (explicit) 440, 455, 498  
 Оракулы и машины с оракулами (oracles and oracle machine) 169–171, 173–174, 429, 444  
 Ординальные числа, ординалы (ordinal numbers) 281–285; см. также Конструктивный ординал, Рекурсивный ординал  
 — —  $\Delta_2^1$  534–535, 551, 577  
 — — второго числового класса (in second number class) 273, 282  
 — — обозначения (notations) 124, 263–271; см. также Система обозначений для ординалов  
 — — теорема о нормальной форме (normal-form theorem for) 284  
 Основная лемма о деревьях (basic tree lemma) 505  
 — теорема об операторах (fundamental operator theorem) 195  
 Открыто-замкнутые множества и классы (open-and-closed sets and classes) 435, 449, 451, 474  
 Отросток дерева (branch tree) 505, 529  
 Охами (Ohashi K.) 317

Парикх (Parikh R.) 273, 278, 285  
 Патнам (Putnam H.) 56, 57, 63, 569  
 Паульсен (Poulsen B. T.) 371  
 Пеано аксиомы (Peano's axioms) 131, 243, 263, 410, 412, 471, 497 прим.  
 — арифметика (Peano arithmetic) 131, 132, 139, 281, 410, 413, 414, 428  
 Перемены кванторов (alternations of quantifier) 389, 414, 491  
 Пересечение (meet) 286, 316  
 Петер (Peter R.) 25  
 Пирс (Peirce C.) 60  
 Платек (Platek R. A.) 371  
 Плотная структура (dense structure) 219, 229  
 Плотно упорядоченное множество (densely ordered) 293  
 Подветвь дерева (subbranch of a tree) 450, 502  
 Поддерево (subtree) 205, 449, 502  
 Позитивное исчисление высказываний (positive propositional calculus) 372  
 Полиномиальное отношение (polynomial relation) 400  
 Полное метрическое пространство (complete metric space) 347, 382, 435, 449  
 — множество (complete set) 108, 109, 113–114, 118–120  
 — —  $\Sigma_n$ ,  $\Pi_n$  405, 423  
 — —  $\Sigma_n^1$ ,  $\Pi_n^1$  486, 508  
 Полнота (логическая) (logical completeness) 222, 224

Полные степени (complete degrees) 341—348, 350; см. также Т-сводимость  
Полукреативное множество (semicreative set) 164, 165  
Полупродуктивное множество (semiproductive set) 126, 165  
Пополнение множества (completion of a set) 327, 328  
Пост (Post E.) 7, 8, 36, 48, 61, 62, 67, 115, 125, 132, 140, 141, 185, 188—189,  
203, 207, 210, 212, 323, 330, 333, 334, 337, 338, 351—354, 381, 383  
Поста проблема (problem) 188—189, 209—216, 217, 220, 424, 519, 526  
— теорема (Post's theorem) 404  
Почти-конечность (almost-finiteness) 294, 296, 308  
Правила преобразования кванторов (quantifier rule) 392, 480, 484, 489, 512,  
518, 521, 582  
Правильно построенные формулы (well-formed formulas) 127  
Предваренная форма (prenex form) 396  
Пределочный функционал (limit functional) 467—469  
Предикатная форма (predicate form) 389  
Представимость, представление (representation) 402, 434, 448, 490, 492—  
498, 569, 571—572  
Представление цепными дробями (continued fraction representation) 449,  
473, 495  
Представляющая функция (representing function) 13  
Префикс (prefix) 389  
—  $\Sigma_n$ ,  $\Pi_n$  390, 431  
—  $\Sigma_n^1$ ,  $\Pi_n^1$  479, 480  
— приведенный (reduced) 479  
Примитивнорекурсивная функция (primitive recursive function) 22—25  
— схема (derivation for) 23  
Принцип отделимости (separation principle) 105  
— редукции (reduction principle) 100  
Приоритета методы (priority methods) 216, 226—230, 326, 373  
Проблема остановки (halting problem) 43—46, 61—63, 66, 336  
— тождества слов в теории групп (word problem for groups) 57  
Проблемы однородности (homogeneity problems) 335  
Продуктивная функция (productive partial function) 115  
— всюду определенная 124  
Продуктивное множество (productive set) 115, 122—126, 131, 132, 158, 160,  
236—238, 273, 276  
— насыщенное (full) 137, 241, 277  
Проективное множество (projective set) 387 прим., 398, 491  
Проекция, проектирование, взятие проекции (projection) 92, 387, 388, 425,  
430, 446  
— теорема (theorem) 92—94, 387, 426  
Производная истинностная таблица (derived truth table) 186, 206  
Промежуточное кардинальное число (mediate cardinal) 144  
Прослеживаемое множество см. Ретрассируемое множество  
Простое множество (simple set) 140—144, 148, 151, 156, 158—162, 164—166,  
183, 217, 288, 290, 292, 424, 428, 518  
— в дополнении (in a complement) 159, 164  
Процедуры разрешения (decision procedures) 56  
Псевдопростое множество (pseudosimple set) 159  
Псевдотворческое множество (pseudocreative set) 159  
Пур-Эль (Pour-El M.) 469

Рабин (Rabin M.) 72, 160, 362  
Равномерность (uniformity) 95—96  
Разветвленная аналитическая иерархия (ramified analytical hierarchy) 585  
Разрешимая теория (decidable theory) 129

Райс (Rice H. G.) 56, 65, 67, 105, 208, 416, 476, 519  
Рассел (Russell B.) 60, 144  
— парадокс (paradox) 240  
Регрессивное множество (regressive set) 206  
Рекурсивная инвариантность (recursive invariance) 69, 75, 76, 91—92, 293,  
312  
— — относительная (relative) 176  
— — неразрешимость (recursive unsolvability) 45, 53—58  
— — перестановка (recursive permutation) 74—75, 299  
— — группа (group) 75  
— — свободная от циклов (cyclefree) 139  
— — перечислимость (recursive enumerability) 408  
— — дополнения (of a complement) 312  
— — класса (of a class) 102  
— — множества (of a set) (см. Рекурсивно перечислимые множества)  
— — отношения (of a relation) 89—94  
— — проблемы (of a problem) 62  
— — степени (of a degree) 111—112, 203, 326, 337, 345, 346, 373, 378,  
379  
— — степень (degree) 111  
— — структура (structure) 68  
— — эквивалентность (equivalence) 226  
Рекурсивно аппроксимируемая функция (recursively approximable function)  
319  
— — неразложимое множество (indecomposable set) 296 прим., 308, 311, 314,  
321—323  
— — отделимые множества (separable sets) 126  
— — перечислимое множество (enumerable set(s)) 82—94, 108, 213—231  
— — — аналогия с теорией множеств (as analogy to set theory) 239—241  
— — — в порядке возрастания (in increasing order) 83  
— — — в порядке неубывания (in nondecreasing order) 83  
— — — индекс (номер) (index of) 85  
— — — регулярное (regular) 172  
— — — решетка (lattice of) 290—294, 299, 300, 303, 306, 307, 317  
— — — в (относительно) (in) 174, 193, 202, 203, 328, 381  
— — разложимое множество (decomposable set) см. Рекурсивно неразложимое  
множество  
Рекурсивное дерево (recursive tree) 505  
— — строго (strongly) 507  
— определение (definition) 22  
— относительно (в) (in) 174, 193, 198, 202, 208, 457  
— более чем в одном множестве (in more than one set) см. также Реляти-  
визация 175  
Рекурсивные действительные числа (recursive reals) 470, 475—477  
— комплексные числа (complex numbers) 476  
— множества и отношения (sets and relations) 81—84, 89—95  
— операторы (operators) 193—202, 208, 279—280, 470  
— ordinalы (ordinals) 272, 273  
— — система обозначений W (notations W) 285, 508, 512, 572, 573  
Рекурсивный анализ (recursive analysis) 470, 476—477  
— изоморфизм (recursive isomorphism) 75, 76, 116—118  
— функционал (recursive functional) 459, 462—465, 468, 469, 474  
Рекурсия, определения по рекурсии (recursion, definitions by) 255  
Релятивизация (relativization) 168—179, 330, 335, 337, 338, 443, 444, 456,  
469, 523—525, 529, 530, 567  
— алгоритма (algorithm) 175  
— кванторов (of quantifiers) 425, 426

- Релятивизация основной теоремы о рекурсивно перечислимых множествах  
 (of basic theorem on recursively enumerable sets) 177  
 — *s-m-n*-теоремы (of *s-m-n* theorem) 177  
 — теоремы о проекции (of projection theorem) 177  
 — теории (of theory) 176—179  
 — полная (full) 176—179  
 — частичная (partial) 176—179  
 Ретрассирируемое (прослеживаемое) множество (retraceable set) 189, 206, 230, 312, 321—325  
 Решетка (lattice) 286, 316  
 — автоморфизм (automorphism of) 291 прим.  
 — дистрибутивная (distributive) 287, 316, 317, 385  
 — дуальный идеал (см. Дуальный идеал решетки) (dual ideal)  
 — единичный элемент (unit element of) 287  
 — множества как (sets as a) 286—291, 371, 385  
 — нулевой элемент (zero element of) 287  
 — подрешетка (sublattice) 287  
 — с дополнениями (complemented) 288  
 — факторрешетка (quotient) 288—291, 371, 385  
 — цепь (chain in) 307 прим.  
 Решето (sieve) 491 прим.  
 Римана гипотеза (Riemann hypothesis) 414  
 Риттер (Ritter W.) 104, 477, 521  
 Рихтер (Richter W.) 569  
 Ричи (Ritchie R.) 72  
 Робинсон Дж. (Robinson J.) 56—57, 72  
 Робинсон Р. В. (Robinson R. W.) 313, 323, 324  
 Робинсон Р. М. (Robinson R. M.) 263, 402  
 Роджерс (Rogers H., Jr.) 5, 424, 428, 509, 569  
 Россер (Rosser J.) 133, 139  
 Роуз (Rose G.) 296 прим., 319  
 Рыль-Нардзевски (Ryll-Nardzewski C.) 428

- Сакс (Sacks G.) 166, 217, 218, 220, 227, 229, 295, 301, 307, 323, 330, 331, 346, 373, 378—380, 383, 385, 521, 575, 576  
 Самовпроизводящиеся машины (self-reproducing machines) 243—245  
 Саппес (Suppes P.) 15, 222  
 Сводимость (reducibility) 53—56, 61—62, 68, 106—109, 180, 286, 387, 417  
 — сильная (strong) 112, 180  
 — слабая (weak) 180, 293  
 — по перечислимости (см. также е-сводимость и е-степени) (enumeration reducibility) 189—193, 200—201, 208  
 — посредством функции (reducibility via function) 110  
 Сегмент (segment) 332  
 — начальный (initial) 332  
 Семантика (semantics) 69  
 Семантическая непротиворечивость (soundness) 223  
 Сжатие (склеивание) кванторов (см. также правило преобразования кванторов) (contraction of quantifiers) 392, 432, 446  
 Сжатые множества (cohesive sets) 294, 296—300, 308—311, 318, 320, 322—324  
 — наполненные (completed) 299, 300, 303, 308, 311, 320, 322, 323  
 Сильная теорема об иерархии (strong hierarchy theorem) 403—406  
 Сильно неотделимые множества (strongly inseparable sets) 165, 320  
 Синглтерри (Singleterry A.) 513  
 Сингularity (singularity) 66  
 Синтаксис (syntax) 69

- Система обозначений для ординалов (system of notation for ordinals) 263—264  
 — максимальная (maximal) 265—266, 270, 271, 285  
 — рекурсивная по упорядочению (recursively related) 265—266, 284  
 — рекурсивная (recursive) 284  
 — система *O* (system *O*) 268—271, 273, 284, 285, 508, 512, 571  
 — система *S<sub>1</sub>* (system *S<sub>1</sub>*) 266—267, 571  
 — универсальная (universal) 266—267, 270; см. также Рекурсивные ординалы  
 Скolem (Skolem T.) 67, 572  
 Скордев Д. 362  
 Скотт (Scott D.) 72  
 Слабая табличная сводимость (weak truth-table reducibility) 168, 206—207  
 Слабо определенный функционал (weakly defined functional) 459  
 Случайная функция (random functional) 320  
 Соединение (join) 112, 217  
 — степеней (of T-degrees) 218  
 Спектор (Spector C.) 272, 285, 342, 343, 346, 355, 379, 381, 508, 520, 528, 531, 540, 560, 562, 569, 576  
 Спектр высказывания (spectrum of a sentence) 223—224  
 — рекурсивно перечислимых множеств (spectrum of recursively enumerable) 159, 160, 203, 315, 321  
 Сплиттер (splinter) 136, 321  
 Степени неразрешимости (degrees of unsolvability) 107, 155—158, 180, 286, 307, 326, 406—408, 440; см. также Полные степени  
 — трудности (degrees of difficulty) 364, 365, 370, 385  
 — относительные (relative) 371  
 — проблемы 1-сведения (of one-one reduction) 370  
 — — — отделения (of separability) 370  
 — — — перечисления (of enumerability) 368  
 — — — разрешения (of solvability) 368, 385  
 — — — сведения (of reducibility) 372  
 Стоуна теорема о представлении (Stone representation theorem) 288, 316  
 Строгая гипергипериммунность (strong hyperhyperimmunity) 312, 321, 322  
 — гипериммунность (strong hyperimmunity) 312, 322  
 Строго гиперпростое множество (strongly hypersimpl set) 322, 324  
 — определенный функционал (strongly defined functional) 459  
 Стургис (Sturgis H.) 36  
 Субрекурсивность (subrecursiveness) 68, 69, 75  
 Судзуки (Suzuki Y.) 532, 552, 553, 555  
 Суслин М. 581  
 Сходство (resemblance) 77, 80  
 Счетная модель (denumerable model) 501, 502
- Табличная сводимость, полные множества и степени (truth-table reducibility, complete sets, and degrees) см. tt-сводимость  
 Табличное условие (truth-table condition) см. tt-условие  
 Танака (Tanaka T.) 576  
 Тарский (Tarski A.) 56, 72, 130, 249, 263, 281, 284, 398  
 Тарского — Куратовского алгоритм (Tarski — Kuratowski algorithm) 394—400, 415, 417, 419 прим., 425, 433, 447, 483, 484  
 Творческие множества (creative sets) (см. креативные множества) 114—116, 132, 140—143, 158—161, 293, 317, 425, 428  
 Тennenbaum (Tennenbaum S.) 164, 204, 206, 207, 227, 323  
 Теорема выбора (selection theorem) 101, 517, 521  
 — об ограниченности (boundedness theorem) 511, 534

- Теорема о веере (fan theorem) 205  
 — — неподвижной точке (fixed-point theorem) 232  
 — — нумерации (enumeration theorem) 41, 94  
 — — парной рекурсии (double recursion theorem) 246  
 — — простых числах (prime-number theorem) 414  
 — — рекурсии (recursion theorem) 232—236, 509, 518  
 — — — аспекты самовыразимости или обращения к самому себе (self-referential aspects of) 256—263  
 — — — вторая (second) 252  
 — — — другие формы (other forms of) 249—256  
 — — — первая (first) 252  
 — — — применение (applications) 236—248  
 — — — сильная (strong) 253  
 — — — слабая (weak) 253  
 Теоремы об иерархии (hierarchy theorems) 391, 405, 425, 435, 439, 453, 456, 472, 485  
 — — — обобщенные (generalized) 456—458  
 — — — о неполноте (incompleteness theorems) 29, 48, 60—61, 124 (см. также Гёделя теоремы о неполноте) 29, 48, 60—61, 124  
 Теоретико-множественная арифметика (set-theory arithmetic) 131—133, 139, 412  
 Теоретико-множественный анализ (set-theory analysis) 500  
 Теоретико-порядковое свойство (order-theoretic property) 335  
 Теоретико-решеточное свойство (lattice-theoretic property) 291—293, 308, 315, 317, 319  
 — — — элементарно (elementary) 292  
 Теории множеств высказывания, выразимые аналитически (analytically expressible sentences of set theory) 500  
 Теория (theory) 128—129  
 — — конечно аксиоматизируемая (finitely axiomatizable) 225  
 — — меры, методы (measure theory, methods of) 348—350, 382, 383  
 — — вероятностная интерпретация (probabilistic interpretation) 349  
 — — множеств (set theory) 412—415  
 — — Гёделя — Бернайса (Gödel — Bernays) 515 прим.  
 — — Цермело — Френкеля (Zermelo — Fraenkel) 239—240, 276—277, 412—415  
 — — первого порядка (first-order) 222, 292 прим.  
 — — — произвольной рекурсивно перечислимой степени (of any recursively enumerable degree) 222—226  
 — — — существенно неразрешимая (essentially undecidable) 226  
 Титгемайер (Titgemeyer) 379  
 Томасон (Thomason) 380  
 Топология (topology) 279, 382, 434, 448, 449  
 — и иерархии (and hierarchies) 417 прим.  
 — — операторы (and operators) 202  
 Трансфинитная индукция (transfinite induction) 278, 283  
 Трахтенброт Б. А. 440  
 Тьюринг (Turing A.) 7, 29, 36—37, 45, 48, 56  
 Тьюринг машина (Turing machine) 30—34, 48; 63, 64, 65, 66, 243—245, 401  
 — — лента (tape) 30  
 — — — с вспомогательными лентами (with auxiliary tapes) 170  
 — — — оракулом (with oracle) 169—170  
 — — — условие совместности (consistency restriction) 31  
 Тьюрингова сводимость, полные множества и степени (Turing reducibility, complete set, and degree) см. Т-сводимость  
 Уайтхед (Whitehead A.) 60, 144  
 Уиман (Wyman C. D.) 166

- Универсальная машина (universal machine) 42  
 — — функция (universal function) 41, 63, 77—79, 246—247  
 Униформизация (uniformization) 100, 550  
 Условная вероятность (conditional probability) 349  
 Успенский В. А. 67, 158, 192
- Факторрешетка (quotient lattice) 161, 288—291, 371, 385  
 Фейнер (Feiner L.) 335  
 Ферма большая теорема (Fermat's last theorem) 414  
 Феферман (Feferman S.) 72, 223, 262, 428, 521, 544, 578  
 Фибоначчи ряд (Fibonacci sequence) 22, 215  
 Фильтр (filter) 288  
 Фишер (Fischer P.) 72, 104, 154, 157, 160, 162  
 Формы (forms) 390,  $\Sigma_n^-$ ,  $\Pi_n^-$ ,  $\Sigma_n^A^-$ ,  $\Pi_n^A$ -формы 390  
 $\Sigma_n^{(fn)}$ ,  $\Pi_n^{(fn)}$ -формы 446  
 $\Sigma_n^{(S)}$ ,  $\Pi_n^{(S)}$ -формы 431  
 $\Sigma_n^-$ ,  $\Pi_n^-$ -формы 480  
 $y$ -формы 567, 568  
 Фреге (Frege G.) 60  
 Френкель (Fraenkel A.) 276  
 Фридберг (Friedberg R.) 62, 188, 189, 207, 212, 232, 293, 294, 300, 333, 341, 373, 464, 469  
 Функционал (functional) 429 прим., 444, 459—471, 479 прим.  
 — — приложения (applications of) 470  
 Функциональное дерево (function tree) 205, 449, 502  
 Функциональный оператор (functional operator) 193—202  
 Функция (partial function) 12  
 — — всюду определенная (total function) 13  
 —  $k$  множественных и  $l$  числовых переменных (of  $k$  set variables and  $l$  number variables) 429  
 —  $k$  функциональных и  $l$  числовых переменных (of  $k$  function variables and  $l$  number variables) 444  
 — — композиция (composition) 14  
 — — не определена (undefined) 13  
 — — определена (defined) 13  
 — — пересчета пар (pairing function) 89  
 — — расходится (divergent) 13  
 — — рекурсивная по Эрбрану (Herbrand-recursive function) 60, 280  
 — — сходится (convergent) 13
- Халмос (Halmos P.) 349  
 Характеристическая функция (characteristic function) 13  
 Характеристический индекс (characteristic index) 97—98, 394  
 Хенкин (Henkin L.) 426  
 Хоудз (Hodes L.) 477, 517  
 Хупер (Hooper P.) 205
- Центр множества (center of a set) 159, 165  
 Цермело (Zermelo E.) 276  
 Цилиндр и цилиндрификация (cylinder and cylindrification) 121—122, 141, 142, 158, 159, 163, 165, 166  
 Цорна лемма (Zorn's lemma) 317

- Частичное упорядочение (partial ordering) 286  
 — с условием минимальности (well-founded) 509
- Частично рекурсивна в (partial recursive in) 193
- Частично рекурсивные функции (partial recursive functions) 36—37, 46, 58—60  
 —  $k$  функциональных и  $l$  числовых переменных (partial recursive functions of  $k$  function variables and  $l$  number variables) 444, 462  
 —  $k$  множественных и  $l$  числовых переменных ( $k$  set variables and  $l$  number variables) 429  
 — и  $\mu$ -оператор (and the mu operator) (см.  $\mu$ -оператор)  
 — продолжение (extension of) 58  
 — релятивизованные (relativized) 173  
 — функционалы (partial recursive functionals) 459, 463, 474
- Частично рекурсивный оператор (partial recursive operator) 194—202, 208, 279—280, 460
- Частичные степени (partial degrees) 193, 359—363, 369  
 — тотальные (total) 360, 361; см. также е-сводимость и е-степени
- Человеческое мышление, его границы (human mind, limitations of) 414, 491
- Чёрч (Church A.) 7, 13, 29, 36, 56, 61, 263, 426  
 — теорема (theorem) 129
- Чёрча тезис (Church's thesis) 38—39, 40, 42, 43, 71, 101, 520, 521  
 — относительный (relativized) 171
- Число (number) 41
- Шапиро (Shapiro N.) 105, 208, 416, 423
- Шёнфильд (Shoenfield J.) 126, 165, 166, 219, 220, 225, 276, 330, 334, 342, 344, 345, 378, 379, 422, 428, 442, 443, 464, 475, 528, 569, 582  
 — гипотеза (conjecture) 219—220, 229, 307
- Шепердсон (Shepherdson J.) 36, 253, 254, 280, 362, 460
- Шифр (encoder) 247
- Шмульян (Smullyan R.) 48, 127, 246, 277
- Экстенсиональность (extensionality) 25—27
- Элементарная арифметика (elementary arithmetic) 129, 222, 261—263, 400, 408, 434, 448, 498  
 — теория действительных чисел (elementary real number theory) 497  
 — теория чисел (elementary number theory) 130
- Элементарный анализ (elementary analysis) 490, 493—498
- Элиминирование описаний (eliminating descriptions) 496 прим.
- Эндертон (Enderton H.) 509, 559, 565, 569, 581, 583
- Эратосфена решето (Eratosthenes' sieve) 18
- Эрбран (Herbrand J.) 60, 280
- Эталонное множество (reference set) 417, 418
- Эффективная операция (effective operation) 253, 460, 463—465
- Эффективно неотделимые множества (effectively inseparable sets) 114, 126—127  
 — простые множества (effectively simple sets) 166
- Юлlian (Ullian J.) 136, 296 прим., 319
- Янг (Young P.) 136, 155, 157, 159, 166, 217, 230, 307, 309, 321, 322, 324  
 Ячейка машинной ленты (cell on machine tape) 30
- $\Delta_2^1$ -множество ( $\Delta_2^1$ -set) 490, 532—535, 577
- $\lambda$ -обозначение (lambda notation) 13
- $\mu$ -оператор (mu operator) 48, 51

- $\Pi_1^1$ -множество ( $\Pi_1^1$ -set) 490, 508—514
- $\Pi_1^1$ -функции (partial  $\Pi_1^1$ -functions) 516, 520
- $\Sigma_2^1$ -множество ( $\Sigma_2^1$ -set) 532—535, 577
- $\omega$ -модель ( $\omega$ -model) 502, 572
- $\omega$ -непротиворечивость ( $\omega$ -consistency) 133, 139
- $\omega$ -скакок ( $\omega$ -jump) 330
- btt-сводимость (btt-reducibility) 150—155, 157, 161—162, 407, 408  
 — полные множества (complete sets for) 151, 154, 161  
 — степени (degrees for) 151, 154—155, 157, 223, 230
- calculus ratiocinator 60
- characteristica universalis 60
- с-сводимость (c-reducibility) 162
- с-эквивалентность (c-equivalence) 297—300, 308—310, 318, 320, 321, 323
- е-сводимость и е-степени (e-reducibility and e-degrees) 189—193, 198, 200—201, 208, 359—363
- L*-*P*-уточнение (*L*-*P*-specifications) 19
- т-сводимость (m-reducibility) 110—121, 142, 147, 149, 216, 293, 307, 406  
 — полные множества (complete sets for) 118—122, 140—142, 148—149, 155, 236—237  
 — степени (degrees for) 111—112, 142, 147, 149, 155—157, 203, 209, 223, 231
- р-сводимость (p-reducibility) 162
- P*-символизм (*P*-symbolism) 19
- q-креативное множество (q-creative set) 162, 276
- q-сводимость (q-reducibility) 162  
 — полные множества (complete sets for) 162
- q-творческое множество (q-creative set) см. q-креативное множество
- r-максимальное множество (r-maximal set) 313, 323—325
- r-система (r-system) 284
- s*-*m*-*n*-теорема (*s*-*m*-*n*-theorem) 42—43, 64
- tt-сводимость (tt-reducibility) 145—155, 180—181, 184—188, 201, 202, 207, 216, 406, 471  
 — полные множества (complete sets for) 147—151, 154, 185, 187, 204  
 — степени (degrees for) 147, 149—150, 155, 157—158, 161, 181, 185, 203, 209, 223, 426  
 — рекурсивно перечислимые (recursively enumerable) 147, 181  
 — цилиндры (cylinders for) 149—150, 161
- tt-условие (tt-condition) 146  
 — ассоциированное множество (associated set of) 146  
 — дизъюнктивное (disjunctive) 162  
 — порядок (order of) 146
- T-сводимость (T-reducibility) 168, 179—181, 184—189, 201—204, 207, 208, 216—220, 406, 408, 471, 519  
 — полные множества (complete sets for) 180, 181, 187—189, 207, 323, 425  
 — степени (degrees for) 180—185, 203, 209, 216—220, 295, 307, 326—386, 359, 369, 403, 426, 487, 556—558
- $x_0$ -мышление ( $x_0$ -mind) 520

От редактора перевода . . . . .	5
Из предисловия автора . . . . .	7
Введение . . . . .	11
<b>Глава 1. РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ</b> . . . . .	17
§ 1.1. Неформальное понятие алгоритма . . . . .	17
§ 1.2. Пример: примитивнорекурсивные функции . . . . .	22
§ 1.3. Экстенсиональность . . . . .	25
§ 1.4. Диагонализация . . . . .	27
§ 1.5. Формализация . . . . .	28
§ 1.6. Основной результат . . . . .	36
§ 1.7. Тезис Чёрча . . . . .	38
§ 1.8. Гёдделевы номера, универсальность, $s\text{-}t\text{-}n$ -теорема . . . . .	39
§ 1.9. Проблема остановки . . . . .	43
§ 1.10. Рекурсивность . . . . .	46
<b>Глава 2. НЕРАЗРЕШИМЫЕ ПРОБЛЕМЫ</b> . . . . .	53
§ 2.1. Новые примеры неразрешимых проблем . . . . .	53
§ 2.2. Неразрешимые проблемы в других областях математики . . . . .	56
§ 2.3. Существование некоторых частично рекурсивных функций . . . . .	58
§ 2.4. Исторические замечания . . . . .	60
§ 2.5. Обсуждение . . . . .	61
§ 2.6. Упражнения . . . . .	62
<b>Глава 3. ЦЕЛИ КНИГИ И ЕЕ СОДЕРЖАНИЕ</b> . . . . .	68
§ 3.1. Задачи теории . . . . .	68
§ 3.2. Направленность этой книги . . . . .	70
§ 3.3. Обзор содержания . . . . .	71
<b>Глава 4. РЕКУРСИВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ</b> . . . . .	73
§ 4.1. Инвариантность относительно группы . . . . .	73
§ 4.2. Рекурсивные перестановки . . . . .	74
§ 4.3. Рекурсивная инвариантность . . . . .	75
§ 4.4. Сходство . . . . .	77
§ 4.5. Универсальные функции . . . . .	77
§ 4.6. Упражнения . . . . .	79
<b>Глава 5. РЕКУРСИВНЫЕ И РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА</b> . . . . .	81
§ 5.1. Определения . . . . .	81
§ 5.2. Основная теорема . . . . .	84
§ 5.3. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые отношения; кодирование $n$ -ок . . . . .	89
§ 5.4. Теоремы о проекции . . . . .	92
§ 5.5. Равномерность . . . . .	95
§ 5.6. Конечные множества . . . . .	96
§ 5.7. Теорема об однозначности . . . . .	99
§ 5.8. Упражнения . . . . .	101
<b>Глава 6. СВОДИМОСТИ</b> . . . . .	106
§ 6.1. Общее введение . . . . .	106
§ 6.2. Упражнения . . . . .	109

<sup>1)</sup> Введение и главы 1—4, 14, 15 переведены М. И. Кановичем, предисловие и главы 5—11 — Е. Ю. Ногиной, главы 12, 13, 16 В. А. Душким.

<b>Глава 7. ОДНО-ОДНОСВОДИМОСТЬ; МНОГО-ОДНОСВОДИМОСТЬ; ТВОРЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА</b> . . . . .	110
§ 7.1. Одно-односводимость и много-односводимость . . . . .	110
§ 7.2. Полные множества . . . . .	113
§ 7.3. Творческие (креативные) множества . . . . .	114
§ 7.4. Одно-одноэквивалентность и рекурсивный изоморфизм . . . . .	116
§ 7.5. Одно-однополнота и много-однополнота . . . . .	118
§ 7.6. Цилиндры . . . . .	121
§ 7.7. Продуктивность . . . . .	122
§ 7.8. Логика . . . . .	127
§ 7.9. Упражнения . . . . .	133
<b>Глава 8. ТАБЛИЧНЫЕ СВОДИМОСТИ; ПРОСТЫЕ МНОЖЕСТВА</b> . . . . .	140
§ 8.1. Простые множества . . . . .	140
§ 8.2. Иммунные множества . . . . .	142
§ 8.3. Табличная сводимость . . . . .	145
§ 8.4. Табличная сводимость и много-односводимость . . . . .	148
§ 8.5. Ограниченнотабличная сводимость . . . . .	150
§ 8.6. Структура степеней . . . . .	155
§ 8.7. Другие рекурсивно перечислимые множества . . . . .	158
§ 8.8. Упражнения . . . . .	160
<b>Глава 9. СВОДИМОСТЬ ПО ТЬЮРИНГУ; ГИПЕРИПРОСТЫЕ МНОЖЕСТВА</b> . . . . .	167
§ 9.1. Пример . . . . .	167
§ 9.2. Относительная рекурсивность . . . . .	168
§ 9.3. Релятивизованная теория . . . . .	176
§ 9.4. Сводимость по Тьюрингу . . . . .	179
§ 9.5. Гиперпростые множества; теорема Деккера . . . . .	181
§ 9.6. Сводимость по Тьюрингу и табличная сводимость; проблема Поста . . . . .	184
§ 9.7. Сводимость по перечислимости . . . . .	189
§ 9.8. Рекурсивные операторы . . . . .	193
§ 9.9. Упражнения . . . . .	202
<b>Глава 10. ПРОБЛЕМА ПОСТА; НЕПОЛНЫЕ МНОЖЕСТВА</b> . . . . .	209
§ 10.1. Конструктивные подходы . . . . .	209
§ 10.2. Фридбергово решение . . . . .	212
§ 10.3. Дальнейшие результаты и проблемы . . . . .	217
§ 10.4. Неотделимые множества произвольной рекурсивно перечислимой степени . . . . .	220
§ 10.5. Теории произвольной рекурсивно перечислимой степени . . . . .	222
§ 10.6. Упражнения . . . . .	226
<b>Глава 11. ТЕОРЕМА О РЕКУРСИИ</b> . . . . .	232
§ 11.1. Введение . . . . .	232
§ 11.2. Теорема о рекурсии . . . . .	233
§ 11.3. Полнота творческих множеств; вполне продуктивные множества . . . . .	236
§ 11.4. Другие применения и конструкции . . . . .	239
§ 11.5. Другие формы теоремы о рекурсии . . . . .	249
§ 11.6. Обсуждение . . . . .	256
§ 11.7. Системы обозначений для ординалов . . . . .	263
§ 11.8. Конструктивные ординалы . . . . .	271
§ 11.9. Упражнения . . . . .	274

Глава 12. РЕШЕТКА РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ . . . . .	286
§ 12.1. Решетки множеств . . . . .	286
§ 12.2. Разложение . . . . .	294
§ 12.3. Сжатые множества . . . . .	296
§ 12.4. Максимальные множества . . . . .	300
§ 12.5. Подмножества максимальных множеств . . . . .	303
§ 12.6. Свойства почти-конечности . . . . .	308
§ 12.7. Упражнения . . . . .	316
Глава 13. СТЕПЕНИ НЕРАЗРЕШИМОСТИ . . . . .	326
§ 13.1. Операция скачка . . . . .	326
§ 13.2. Некоторые важные множества и степени . . . . .	336
§ 13.3. Полные степени; категории и мера . . . . .	341
§ 13.4. Упорядочение степеней . . . . .	351
§ 13.5. Минимальные степени . . . . .	355
§ 13.6. Частичные степени . . . . .	359
§ 13.7. Решетка Медведева . . . . .	363
§ 13.8. Дальнейшие результаты . . . . .	372
§ 13.9. Упражнения . . . . .	380
Глава 14. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ (ЧАСТЬ 1) . . . . .	387
§ 14.1. Иерархия множеств . . . . .	387
§ 14.2. Нормальные формы . . . . .	391
§ 14.3. Алгоритм Тарского — Курашевского . . . . .	394
§ 14.4. Арифметическая представимость . . . . .	400
§ 14.5. Сильная теорема об иерархии . . . . .	403
§ 14.6. Степени . . . . .	406
§ 14.7. Приложения в логике . . . . .	408
§ 14.8. Вычислимые степени неразрешимости . . . . .	415
§ 14.9. Упражнения . . . . .	425
Глава 15. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ (ЧАСТЬ 2) . . . . .	429
§ 15.1. Иерархия классов множеств . . . . .	429
§ 15.2. Иерархия классов функций . . . . .	444
§ 15.3. Функционалы . . . . .	459
§ 15.4. Упражнения . . . . .	471
Глава 16. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ . . . . .	478
§ 16.1. Аналитическая иерархия . . . . .	478
§ 16.2. Аналитическое представление; приложения к логике . . . . .	492
§ 16.3. Деревья с конечными путями . . . . .	502
§ 16.4. $\Pi^1_1$ -множества и $\Delta^1_1$ -множества . . . . .	508
§ 16.5. Обобщенная вычислимость . . . . .	515
§ 16.6. Гиперстепени и гиперскакочок; $\Sigma^1_2$ -множества и $\Delta^1_2$ -множества . . . . .	523
§ 16.7. Результаты о базисе и неявная определимость . . . . .	535
§ 16.8. Гиперарифметическая иерархия . . . . .	556
§ 16.9. Упражнения . . . . .	570
Литература . . . . .	587
Указатель обозначений . . . . .	600
Указатель теорем . . . . .	602
Алфавитный указатель . . . . .	606