## Merge sort

1.

$$C(n) = 2C(n/2) + O(n), \quad n>1 \quad e \quad C(1) = O(1)$$

$$n = 2^M \quad \text{logo} \quad M = \log_2 n$$

$$C(2^M) = 2C(2^{M-1}) + O(2^M)$$

$$\Leftrightarrow \frac{C(2^M)}{2^M} = \frac{C(2^{M-1})}{2^{M-1}} + O(1) \qquad (1)$$

Cálculo de $C(2^{M-1})$: substituir $n \leftarrow 2^{M-1}$ na eq. geral

$$C(2^{M-1}) = 2C(2^{M-2}) + O(2^{M-1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{C(2^{M-1})}{2^{M-1}} = \frac{C(2^{M-2})}{2^{M-2}} + O(1) \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) temos que:

$$\frac{C(2^M)}{2^M} = \frac{C(2^{M-2})}{2^{M-2}} + O(1) + O(1)$$

Slide 39

...

$$= \frac{C(2^0)}{2^0} + O(M) = O(1) + O(M) = O(M)$$

$$\Leftrightarrow \frac{C(2^M)}{2^M} = O(M) \Leftrightarrow \frac{C(n)}{n} = O(\log_2 n)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C(n) = O(n \times \log_2 n)}$$

# Teorema Mestre

Exemplo: Merge sort

$\boxed{\text{Slide 40}}$

$$C(n) = 2\,C\left(\frac{n}{2}\right) + n \leftarrow \text{"merge"}$$

$a$ $\quad$ $b$

$a = 2$

$b = 2$

$f(n) = n$

Caso 1:

$$f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$$

$$\overset{?}{=} O\left(n^{\log_2 2 - \varepsilon}\right)$$

$$\overset{?}{=} O\left(n^{1-\varepsilon}\right)$$

× não se aplica

$n \quad n^{1-\varepsilon}$

$h = O(k)$ se e só se $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0, \exists c \in \mathbb{R}^+, \forall n > n_0$ $\boxed{\begin{array}{l} n \leq c \times n^{1-\varepsilon} \\ h(n) \leq c \times k(n) \end{array}}$ ?

não é verdade

Ex: $\varepsilon = 0.2$

$n \leq c \times n^{1-0.2}$ $\quad$ Propriedade Falsa

Caso 3.:

$$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$$
$$= \Omega(n^{1+\varepsilon})$$

× não se aplica

$h = \Omega(k)$ se e só se $\boxed{c \times \overset{n^{1+\varepsilon}}{\overbrace{k(n)}} \le \overset{n}{\overbrace{h(n)}}}$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0, \exists\, c \in \mathbb{R}^+, \forall\, n > n_0$

↓ não é verdade

Ex: $\varepsilon = 1$:

$c \times n^{1+\varepsilon} \le n \iff$

$c \times n^2 \le n \rightarrow$ P. Falsa

---

Caso 2:

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$
$$= \Theta(n^1) = \Theta(n)$$

$\overset{n}{\widehat{h}} = \Theta(\overset{n}{\widehat{k}})$ se e só se $\overset{n}{\widehat{h}} = O(\overset{n}{\widehat{k}})$ e $\overset{n}{\widehat{h}} = \Omega(\overset{n}{\widehat{k}})$

↓ é verdade

Então: $C(n) = \Theta(n^{\overset{1}{\log_b a}} \times \log_2 n)$

$$= \Theta(n \times \log_2 n)$$ → Complexidade do Merge sort

T.P.C. $C(n) = 2C(n/2) + \underbrace{1}_{f}$ → Resolver pelo Teorema Mestre