۲۳) برای راحتی از تعریف‌های روبرو استفاده خواهیم کرد.
$p = 1-q \quad , \quad e = \binom{n}{2}$

$\xrightarrow[\text{وصل شده برای اینکه همگی درست باشند}]{\text{در کل } e \text{ تا یال داریم که } m \text{ تای آنها}} \quad P_{val} = p^{m} q^{e-m}$

۲۴)
$\xrightarrow[\text{می‌خواهیم } m \text{ یال از } e \text{ تا را انتخاب کنیم که تنها یک انتخاب ولید است}]{e, n, m \text{ را داریم}} \quad P_{val} = \dfrac{1}{\binom{e}{m}}$

۲۵)
$\xrightarrow[\text{نرخ باید } \frac{1}{5} m \text{ ها درست، } \frac{4}{5} m \text{ ها درست و } e-m \text{ ها هم که خواستیم باشد}]{\text{برای اینکه ۲۰٪ } m \text{ ها را درست حدس}} \quad P_{val} = \binom{m}{m/5} p^{m/5} q^{4/5\, m} (1)^{e-m}$

$= \binom{m}{m/5} p^{m/5} q^{4/5\, m}$

۲۶)
$\text{مریال} \sim bernoli(p) \xrightarrow{\text{همه یال‌ها}} X \sim binomial\,(p=p_0 , n=e)$

$\longrightarrow E[X] = ep = ۱۴۹۸,۳$

$\xrightarrow{E[X] \text{ برابر با } m \text{ با خطای } \alpha} \quad (1-\alpha)m \leq E[X] \leq (1+\alpha)m$

$\longrightarrow \quad (1-\alpha)m \leq ep \leq (1+\alpha)m$

۲۷)
$S_v \leftarrow$ تعداد افراد هم‌کلیتیه با فرد v

$\sum_v S_v = \sum_v D_v = ۲m \rightarrow E[S_v] \times n = ۲E[m]$

$\xrightarrow{\text{بخش قبل}} E[S_v] = \frac{۲}{n} \times ep = (n-1)p = ۰,۱۵۹۸۴$

۲۸) از آنجایی که ۱) $E[A_v]$

برای اینکه فرد انتخاب شده
ولید باشد کافی است
با حداقل یک نفر هم سلیقه باشد

$$P_{val} = 1 - \underbrace{q^{n-1}}_{\text{با هیچ کس هم سلیقه نباشد}} = 0.14773$$

I برای ولید بودن $\longrightarrow$ هر فرد $\sim bernoli(0.14773)$

(A) همه افراد $\sim binomial(p = 0.14773 \,,\, n = n_0)$

$\longrightarrow E[A] = np = 147.73$

۲۹)

I برای تراگذری بودن $\longrightarrow$ هر گروه ۳ تایی $\sim bernoli(p^3)$

(A) همه گروه‌های سه تایی $\sim binomial\left(n = \binom{n_0}{3} \,,\, p = p_0^3\right)$

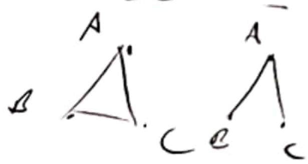
$\longrightarrow E[A] = \binom{n}{3} p^3$

I برای زنجیره‌ای بودن $\longrightarrow$ هر گروه ۳ تایی $\sim bernoli\left(\binom{3}{2} p^2 q\right)$

(B) همه گروه‌های سه تایی $\sim binomial\left(n = \binom{n_0}{3} \,,\, p = 3p_0^2 q_{n_0}\right)$

$\longrightarrow E[B] = 3\binom{n}{3} p^2 q$

۳۰) اگر در هر گروه سه تایی، هر نفر حداقل با یک نفر دیگر هم سلیقه باشد در این صورت این گروه ۲ حالت valid دارد:



پس احتمال تراگذری بودن برابر است با $\longrightarrow$

$$P = \frac{E[A]}{E[A] + E[B]}$$

$$= \frac{\binom{n}{3} p^3}{\binom{n}{3} p^3 + 3\binom{n}{3} p^2 q} = \frac{p^3}{p^3 + 3p^2 q} = \frac{p}{p + 3q}$$

(۳۱

تعداد روابط عمیق ... (هم کلیه‌ها) یک راس را می‌خواهیم. برای تعیین هر هم‌سطحی یک مثلث «رابطه ترافدی» می‌سازد

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 3 \times \text{تعداد مثلث‌ها} \quad \xleftarrow{\text{تعداد روابط}}$$

مورد نظر برای راس i را با x_i نشان می‌دهیم

$$n E[x_i] = 3 \times E[\text{تعداد مثلث‌ها}]$$

$$\longrightarrow \boxed{E[x_i] = \frac{3}{n} \times \binom{n}{3} p^3}$$

(۳۲

$$\xrightarrow[\text{با احتمال } p^2 \text{ به زوج وصل است}]{\text{هر یک از } n-2 \text{ راس دیگر}} \quad \underbrace{(1-p^2)}_{\text{یک راس به زوج وصل نباشد}} \longrightarrow P[I_{ij}=1] = (1-p^2)^{n-2}$$

(۳۳

$$X_n = \sum_{i \neq j} I_{ij} \longrightarrow E[X_n] = \binom{n}{2} E[I_{ij}]$$

$$= \binom{n}{2}(1-p^2)^{n-2}$$

(۳۴

$$\xrightarrow{\text{markov}} \lim_{n\to\infty} P(X_n \geq 1) \leq \frac{E[X_n]}{1} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{2}(1-p^2)^{n-2}$$

$$\xrightarrow{\theta = (1-p^2)^{-1}} \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{n \times (n-1)}{2} \theta^{2-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \times (n-1)}{2} \theta^{-n+2}$$

$$= \frac{\theta^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{\theta^n}$$

$$\overset{Hop}{=} \frac{\theta^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)}{\theta^n \ln(\theta)} \overset{Hop}{=} \frac{\theta^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\theta^n \ln^2(\theta)}$$

$$\xrightarrow[\text{پس } \theta > 1]{1-p^2 < 1} \quad = \frac{\theta^2}{2} \times 0 = 0$$

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(X_n \geq 1) \leq 0$$

۳۵)

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq 1) \leq 1$$

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = 1$$

$\longrightarrow$ x_n صفر است پس هر دو راس یک همسایه مشترک دارند

← قطر کران بالای ۲ خواهد داشت

۳۶) اگر بین دو راس i و j یالی وجود داشته باشد :

$$p_{ij} = \frac{1}{d_i}$$

وگرنه :

$$p_{ij} = 0$$

۳۷)

$$A_{i,j} = d_i \, p_{i,j} \longrightarrow A = DP$$

$$\longrightarrow \boxed{P = D^{-1}A}$$

۳۸) اقدام‌ها از هم مستقل‌اند پس این ماتریس نشان دهنده احتمال از i به j رفتن با ۲ قدم است.

$$p^{2}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} \times p_{k,j} = \frac{1}{d_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j}$$

$\boxed{\frac{1}{d_i} = 1 \text{ اگر } a_{ij}=0 \text{ «فرض»}}$

۳۹) عبارت روبه‌رو احتمال رفتن از i به j را با t قدم نشان می‌دهد!

$$p^{t}_{ij} = (D^{-1}A)^{t}_{ij}$$

$$= \boxed{\frac{1}{d_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j}\right)^{t-1}}$$

۴۰)

حال طبق این قسمت $\longrightarrow$ $p^{(t)}_{ij} = \frac{1}{d_i}\left(\sum_{k=1}^{n} 1/d_k\right)^{t-1}$ و $p^{(t)}_{ji} = \frac{1}{d_j}\left(\sum_{k=1}^{n} 1/d_k\right)^{t-1}$

$$\longrightarrow \frac{p^{(t)}_{ij}}{p^{t}_{ji}} = \frac{d_j}{d_i}$$