

سوال ۱۴ - فرض کنید در جامعه اولیه، احتمال حضور هر شخص در خوشه A را با k و احتمال حضور در B را با $1-k$ نشان بدهیم.

طبق تعریف ماتریس مجاورت، Z را بنویسید.

$$\forall i \neq j, A_{ij} = \begin{cases} 1 & pk + q(1-k) \\ 0 & 0.0 \end{cases}$$

پس A متغیر تصادفی برداری با $pk + q(1-k)$ است.

$$W = E[A] = [E[A_{ij}]]_{ij} \Rightarrow W = \begin{bmatrix} pk_{11} + q(1-k_{11}) & \dots & pk_{1n} + q(1-k_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ pk_{n1} + q(1-k_{n1}) & \dots & pk_{nn} + q(1-k_{nn}) \end{bmatrix}$$

سوال ۱۵

اگر با داشتن گراف اولیه، W بتواند دست می آید. هم چنین از تعریف ماتریس مجاورت داریم $Z_k = k$ و ماتریس W هم تقارن است.

خوشه A

خوشه B

$$\Rightarrow W = \begin{bmatrix} p & p & q & q \\ q & p & q & q \\ q & q & p & p \\ q & q & p & p \end{bmatrix}$$

سوال ۱۶

$$\det(W - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(p-q) \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 \neq 0 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(p+q) \Rightarrow v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_3 \neq 0 \end{cases}$$

مقادیر غیرصفر

سوال ۱۷ - فرض کنیم r و $n-r$ به ترتیب رتبه A و B علامه‌دهنده باشند. تعریف کنیم P ماتریس $n \times n$ درایه‌هایش

باشند و Q ماتریس $n \times n$ درایه‌هایش q باشد:

$$W = PWP^T = \begin{bmatrix} P_{r \times r} & Q_{(n-r) \times r} \\ Q_{r \times (n-r)} & P_{(n-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}$$

فرض کنیم λ بردار ویژه W باشد پس:

$$Wx = \lambda x \Rightarrow \left[\sum_{j=1}^r p_{ij} x_j + \sum_{j=r+1}^n q_{ij} x_j \right]_{i=1}^n = \lambda x_i$$

r درایه اول بیان‌اند (شماره ۱۶)
 $n-r$ درایه بعدی هم بیان‌اند

$$\Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} (\lambda - rp) a = (n-r) q b \\ \textcircled{2} b (\lambda - (n-r)p) = r q b \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 - np\lambda + (n-r)(p^2 - q^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \text{ناصفر} \\ \lambda_2 = \text{ناصفر} \end{cases} \rightarrow \text{فقط ۲ مقدار ویژه ناصفر}$$

$$[D_w]_{ij} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \xrightarrow{\text{ماتریس}} D_w = \begin{bmatrix} v_p + v_q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & v_p + v_q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & v_p + v_q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & v_p + v_q \end{bmatrix} = v(p+q) I_{4 \times 4}$$
$$L_W = D_W - W = \begin{bmatrix} p+q & -p & -q & -q \\ -p & p+q & -q & -q \\ -q & -q & p+q & -p \\ -q & -q & -p & p+q \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = -q \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_3 = \frac{q}{2}(p+q) \end{cases}$$

دو مقدار ویژه کمترین (λ_1, λ_2) استفاده می‌شوند.

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Point}(1) = \text{Point}(2) = (1, -1) \\ \text{point}(3) = \text{point}(4) = (1, 1) \end{array} \right.$$

پس دینہ بند دریت انجام شد.