



به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف - دانشکده مهندسی برق

آمار و احتمال مهندسی - گروه ۴

دکتر میرمحسنی

نیمسال دوم ۹۷-۹۸

تمرین سری یک MATLAB

مهلت تحویل دوشنبه ۹۷/۱۲/۲۷

به نکات زیر توجه کنید:

- فایل تحویلی باید به فرمت zip یا rar و شامل یک فایل m (شامل کدهای تمام سوالات) و توابع نوشته شده (در صورت وجود!) و گزارش به فرمت pdf باشد. گزارش باید شامل نمودارها و نتایج خواسته شده و پاسخ به تمامی سوالات و محاسبات دستی و اثبات‌های لازم باشد. اسم فایل را به فرم HW1_Student_Number قرار دهید و در سامانه CW آپلود کنید.
- دقت کنید که کدهای شما debug نخواهد شد!
- نمودارها باید دارای عناوین مشخص باشند.
- کدهای خود را در گزارش کار نیاورید و از publish کردن و livescript بپرهیزید.
- برای راحتی ابتدای کد از دستورهای clc، clear all و close all استفاده کنید.
- کدهای بخش‌های مختلف را به وسیله %% از هم جدا کنید و کامنت گذاری مناسب انجام دهید.
- از کپی کردن هم جدا بپرهیزید. (:
- در صورت داشتن هرگونه سوال، به psmatlab98spring@gmail.com ایمیل بزنید.

سوال اول : تقریب احتمال آزمایش‌های تکراری

یک منبع فرستنده داریم که دنباله‌ای از n بیت را ارسال می‌کند. احتمال تغییر یک بیت در فرآیند ارسال برابر با p است.

(۱) برای $n = 100$ و $p = 0.4$ احتمال این که k بیت اشتباه به مقصد برسند چقدر است؟ به صورت تئوری محاسبه کنید و با دستور `stem` نمودار احتمال وقوع k خطا را بر حسب k رسم کنید. (برای رسم نمودار می‌توانید از تابع `nchoosek` استفاده کنید.)

(۲) تابعی بنویسید که در ورودی یک ماتریس شامل بیت‌های صفر و یک دریافت کند و هر بیت خروجی را به احتمال p نسبت به ورودی تغییر دهد. (می‌توانید از کدهای کلاس توتوریال کمک بگیرید!)

(۳) یک دنباله‌ی n بیتی دلخواه تولید کنید. ارسال این n بیتی را به کمک تابعی که در بخش قبل نوشته‌اید شبیه‌سازی کنید و تعداد بیت‌های تغییر کرده را تعیین کنید. این روند را به تعداد کافی تکرار کنید (می‌توانید برای این کار n بیتی را به تعداد دفعه مورد نظر در یک ماتریس تکرار کنید). هیستوگرام احتمال تعداد بیت‌های خطا را رسم کنید و با نمودار بخش ۱ مقایسه کنید. (دقت کنید که طول هر `bin` هیستوگرام یک باشد.)

(تابع `histogram` را در `help` جست‌وجو کنید و در مورد پارامتر `normalization` این تابع مطالعه کنید. چه تفاوتی بین نرمالیزاسیون `count` (که مقدار پیش فرض این پارامتر است) و نرمالیزاسیون `probability` وجود دارد؟ به نظر شما کدام یک برای خواسته ما در این سوال مناسب‌تر است؟)

(۴) با توجه به شرایط مساله و مباحث مطرح شده در کلاس، کدام تقریب برای این احتمال مناسب‌تر است؟ تقریب نرمال یا پواسون؟

(۵) در یک نمودار، منحنی تقریب مناسب، نمودار بخش ۱ و هیستوگرام بخش قبل را رسم کنید و با هم مقایسه کنید.

(۶) این بار برای $p=0.01$ تقریب بخش قبل را تکرار کنید. آیا تقریب به اندازه بخش قبل دقیق است؟

(۷) از تقریب دیگری که در کلاس مطرح شده استفاده کنید و با بخش قبل مقایسه کنید.

از بین سه سوال بعد، تحویل دادن دو سوال کافی است!

در سوال‌های بعدی برای تخمین مقدار احتمال در یک مساله از شبیه‌سازی استفاده می‌کنیم. در این روش که به روش Monte Carlo معروف است، آزمایش را به تعداد دفعات زیاد تکرار می‌کنیم و وقوع پیشامد مورد نظر را در هر تکرار بررسی می‌کنیم. به این ترتیب احتمال را با رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(\text{پیشامد } A) = \frac{\text{تعداد دفعات وقوع } A}{\text{تعداد دفعات تکرار آزمایش}}$$

با این توضیحات سه سوال بعدی را شبیه‌سازی کنید.

سوال دوم : تقریب عدد پی

فرض کنید مقدار π را نمی‌دانیم و می‌خواهیم به وسیله مساحت یک دایره به شعاع ۱ و استفاده از مفاهیم آماری مقدار آن را تخمین بزنیم.

(۱) فرض کنید مجموعه‌ای از نقاط داریم که طول و عرض آن‌ها می‌تواند هر یک از اعداد بازه $[-1,1]$ را با احتمال مساوی به خود بگیرد. احتمال این که یک نقطه در داخل دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع یک قرار بگیرد را به صورت تئوری محاسبه کنید.

(۲) حال به وسیله شبیه‌سازی مقدار عددی این احتمال را به دست آورید. به تعداد مناسب نقطه رندوم در مربع انتخاب کنید (از تابع rand استفاده کنید) و بررسی کنید با چه احتمالی نقاط در دایره به مرکز مبدا و شعاع یک قرار گرفته‌اند. با دستور scatter نقاط تصادفی تولید شده را نشان دهید. نقاطی که در داخل دایره قرار دارند را با رنگ متفاوت نمایش دهید.

(۳) با توجه به جواب بخش ۱ و مقدار تقریبی احتمال که در بخش قبل به دست آوردید، مقدار پی را تخمین بزنید.

سوال دوم : تقریب عدد نپر

- (۱) n نامه برای n نفر تایپ شده و آدرس این n نفر بر روی n پاکت نامه نیز تایپ شده است. اگر به طور کاملاً تصادفی نامه ها را داخل پاکت نامه ها بگذاریم احتمال این که لااقل یک نامه در پاکت نامه درست قرار گرفته باشد چیست؟ مساله را به صورت تئوری حل کنید و سپس با میل دادن n به سمت بی نهایت مقدار آن را محاسبه کنید.
- (۲) حال می خواهیم مساله قبل را برای n به اندازه کافی بزرگ به کمک MATLAB شبیه سازی کنیم؛ روند شبیه سازی به صورت زیر است:
- در شبیه سازی یک بار آزمایش تصادفی گفته شده را انجام دهید. (راهنمایی : می توانید از تابع `datasample` یا `randperm` برای ایجاد تناظر بین نامه ها و پاکت ها استفاده کنید. طرز کار با این تابع را در `help` جست و جو کنید).
 - حال با تکرار آزمایش و با توجه به روش Monte Carlo احتمال وقوع پیشامد مطلوب را تخمین بزنید.
- (۳) با توجه به جواب حدی بخش ۱ و مقدار تقریبی احتمال بخش ۲ عدد نپر را تقریب بزنید.

سوال سوم : شبیه سازی یک بازی!

- (۱) فرض کنید بازی زیر را انجام می دهید.
- سه لیوان داریم که زیر یکی از آن ها به صورت کاملاً تصادفی یک توپ قرار دارد. شما می خواهید توپ را پیدا کنید پس یکی از لیوان ها را انتخاب می کنید. در این حالت به احتمال $\frac{1}{3}$ توپ را پیدا می کنید. حال فرض کنید یک نفر به شما اطلاع می دهد که بین دو لیوان دیگر کدام یک پوچ است و به شما یک فرصت برای تغییر لیوان انتخاب شده می دهد. آیا به سود شماست که انتخابتان را عوض کنید؟ احتمال پیدا کردن توپ را به شرط تغییر انتخاب خود حساب کنید و با حالت اول (که تغییری در انتخاب خود نمی دهید) مقایسه کنید.
- (۲) بازی را به روش مناسب شبیه سازی کنید تا صحت جواب بخش قبل را بررسی کنید.
- (۴) ابتدا حالتی را شبیه سازی کنید که تصمیمتان را تغییری نمی دهید. در این حالت به احتمال $\frac{1}{3}$ لیوان درست را انتخاب کرده اید. آزمایش را ۱۰۰۰ بار تکرار کنید و احتمال برد را پیدا کنید.
- (۵) حال فرض کنید که تصمیمتان را تغییر داده اید. با تکرار آزمایش احتمال برد را بررسی کنید و با حالت قبل مقایسه کنید.
- راهنمایی : برای اینکه احتمال وقوع یک اتفاق را شبیه سازی کنید از تابع `rand` که اعدادی کاملاً تصادفی بین صفر و یک تولید می کند و مقایسه ی آن با احتمال مطلوب استفاده کنید ، برای مثال احتمال اینکه خروجی این تابع از ۰,۴ کوچکتر باشد متناظر ۰,۴ است (توجه به کد آزمایش پرتاب سکه که در کلاس تئوریال بررسی شد هم می تواند کمک کند).