



به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف - دانشکده مهندسی برق

آمار و احتمال مهندسی - گروه ۴

دکتر میرمحسنی

نیمسال دوم ۹۷-۹۸

تمرین سری دو MATLAB

مهلت تحویل جمعه ۹۸/۲/۶

به نکات زیر توجه کنید:

- فایل تحویلی باید به فرمت zip یا rar. و شامل یک فایل m. (شامل کدهای تمام سوالات) و توابع نوشته شده (در صورت وجود!) و گزارش به فرمت pdf باشد. گزارش باید شامل نمودارها و نتایج خواسته شده و پاسخ به تمامی سوالات و محاسبات دستی و اثبات‌های لازم باشد. اسم فایل را به فرم HW2_Student_Number قرار دهید و در سامانه CW آپلود کنید.
- دقت کنید که کدهای شما debug نخواهد شد!
- نمودارها باید دارای عناوین مشخص باشند.
- کدهای خود را در گزارش کار نیاورید و از publish کردن و livescript بپرهیزید.
- برای راحتی ابتدای کد از دستورهای clc، clear all و close all استفاده کنید.
- کدهای بخش‌های مختلف را به وسیله %% از هم جدا کنید و کامنت گذاری مناسب انجام دهید.
- از کپی کردن هم جدا بپرهیزید. (:)
- در صورت داشتن هرگونه سوال، به psmatlab98spring@gmail.com ایمیل بزنید.

سوال اول : آشنایی با متغیرهای تصادفی

- (۱) متغیر تصادفی X گاوسی با $\eta=0$ و $\sigma^2=1$ و متغیر تصادفی Y (مستقل از X) نمایی با پارامتر ۲۰ را تولید کنید و از هر یک ۱۰۰۰۰۰ نمونه بگیرید.
- (۲) در تمرین قبل با تابع هیستوگرام متلب آشنا شدیم. در این بخش می‌خواهیم با توجه به مفهوم pdf تجربی که در درس با آن آشنا شدید این تابع را پیاده‌سازی کنیم. تابعی بنویسید که بردار حاوی نمونه‌هایی از یک متغیر تصادفی و تعداد bin ها (بازه ها) را بگیرد. بازه‌ی مقادیری که نمونه ها به خود می‌گیرند را به بازه‌هایی به طول Δ تقسیم کند طوری که تعداد bin ها برابر با مقدار ورودی باشد و تعداد دفعات وقوع نمونه‌ها را در هر بازه بررسی کند و به ترتیبی که در درس دیدید نمودار pdf تجربی متغیر تصادفی را رسم کند. تابع را به ازای ۱۰۰ و ۱۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ bin رسم کنید. بر روی دو متغیر تصادفی تولید شده در بخش قبل بررسی کنید و با هم مقایسه کنید
(در بخش های بعدی برای رسم هیستوگرام از تابع این بخش استفاده کنید.)
- (۳) متغیر تصادفی Z را به صورت X^2 تعریف کنید و هیستوگرام آن را رسم کنید. نتیجه را به صورت تئوری بررسی و تایید کنید.
- (۴) متغیر T را برابر با \sqrt{Y} قرار دهید. آیا T توزیع مشخصی دارد؟ هیستوگرام T را رسم کنید.
- (۵) نمونه‌هایی از یک متغیر تصادفی در اختیار شما قرار گرفته است. ابتدا هیستوگرام این متغیر تصادفی را رسم کنید. به نظر شما این متغیر تصادفی چه توزیعی دارد؟
- (۶) می‌خواهیم پارامترهای این توزیع را به دست بیاوریم. برای این کار از تابع `fitdist` کمک بگیرید. در مورد طرز کار این تابع توضیح دهید.
- (۷) با استفاده از خروجی تابع `fitdist` و استفاده از تابع pdf تابع چگالی احتمال داده‌ها را رسم کنید.
- (۸) نمودار `cdf` این توزیع را رسم کنید. (می‌توانید از تابع `cumtrapz` استفاده کنید.)

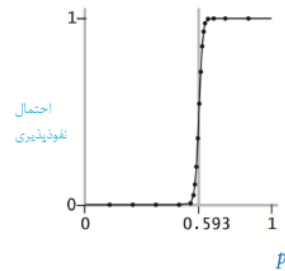
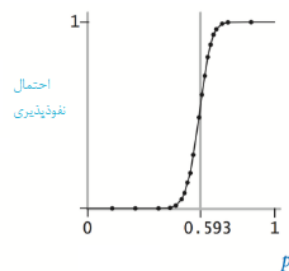
سوال دوم : مساله‌ی نفوذپذیری

با داشتن یک سیستم مرکب از موارد عایق و رسانا، چه درصدی از مواد لازم است رسانا باشند تا سیستم در مجموع رسانای الکتریکی باشد؟

برای حل این مساله ما یک مدل به شکل زیر تولید می‌کنیم. یک شبکه $n \times n$ را در نظر بگیرید. هر خانه یا رساناست (با احتمال p) و یا عایق است (با احتمال $1-p$) و احتمال رسانا یا عایق بودن خانه‌ها از هم مستقل است. می‌گوییم یک خانه کامل است اگر توسط زنجیره‌ای از همسایه‌هایش (۴ خانه چپ، راست، پایین، بالا) به خانه‌ای در سطر اول شبکه متصل باشد. می‌گوییم یک شبکه نفوذپذیر است اگر در پایین‌ترین سطر شبکه یک خانه کامل داشته باشیم.



طبق یک مساله مشهور علمی، پژوهشگران به این مساله علاقمند هستند که اگر خانه‌ها مستقل از هم به احتمال p رسانا باشد، احتمال این که سیستم نفوذپذیر باشد چقدر است. در حالتی که n به اندازه کافی بزرگ باشد نقطه آستانه‌ای مانند p^* وجود دارد که برای $p < p^*$ تقریباً سیستم هیچوقت نفوذپذیر نیست و برای $p > p^*$ شبکه با احتمالی نزدیک به ۱ نفوذپذیر است. در نمودار شکل زیر به ازای p های مختلف احتمال نفوذپذیری را برای شبکه 20×20 (چپ) و 100×100 (راست) نمایش داده شده است:



از شما حل ریاضی این مساله را نمی‌خواهیم.

می‌خواهیم با شبیه‌سازی به روش مونت کارلو این مساله را بررسی کنیم.

آزمایش زیر را در نظر بگیرید:

- یک شبکه $n \times n$ تولید کنید.
- تمام خانه‌ها را از عایق پر کنید.
- عملیات زیر را تکرار کنید تا سیستم نفوذپذیر شود:
 - یک خانه عایق (خانه‌های باقی‌مانده) را به صورت رندوم (یکنواخت) انتخاب کنید.
 - آن را رسانا کنید.
- نسبت تعداد خانه‌های رسانا به کل در فرکانس بالا تخمین خوبی از نقطه آستانه می‌دهد.

با تکرار این آزمایش برای N بار و متوسط‌گیری نتایج، ما نقطه دقیق‌تر آستانه‌ای را پیدا می‌کنیم. فرض کنید x_t تخمین نقطه آستانه‌ای آزمایش t ام باشد:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N} \quad . \quad s^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_N - \bar{X})^2}{N - 1}$$

و می‌دانیم با احتمال ۰,۹۵۶ همه x_t ها در بازه $[\bar{X} - \frac{1.96s}{\sqrt{N}}, \bar{X} + \frac{1.96s}{\sqrt{N}}]$

برای n های ۱۰، ۲۰ و ۳۰ و با حداقل ۲۰۰ بار نمونه گیری نقطه آستانه‌ای و احتمال خطا را حساب کنید. هیستوگرام این نمونه‌ها را برای x_t رسم کنید. همینطور برای هر $n=30$ ، به ازای یک بار شبیه‌سازی آزمایش، تغییرات شبکه در هر مرحله را به صورت real-time رسم کنید.