

بخش اول: پیاده سازی توابع مورد نیاز

(۱) روش polarity of the largest eigenvector برای انتخاب گره مناسب برای downsampling: در این روش برای انتخاب گره‌های مناسب برای downsampling، از پلاریته مولفه‌های بزرگ‌ترین بردار ویژه استفاده می‌شود. یعنی:

$$V_1 = V_+ := \{i \in V: u_{\max}(i) \geq 0\}$$

چند نکته در مورد این روش قابل ذکر است:

۱- در این روش گره‌های V_1 نگه داشته می‌شوند و گره‌های $V_- := \{i \in V: u_{\max}(i) < 0\}$ دور ریخته می‌شوند؛ اما به سادگی می‌توان بر عکس این کار را انجام داد و یا حتی گره‌های $V_1 := \operatorname{argmax}_{V_1 \in \{V_+, V_-\}} |V_1|$ را انتخاب کرد.

۲- ممکن است λ_{\max} یک مقدار ویژه مکرر باشد و در نتیجه پلاریته بزرگ‌ترین بردار ویژه به طور یکتا قابل تعریف نباشد. در این صورت به طور دلخواه یک بردار ویژه از فضای ویژه مربوط به λ_{\max} انتخاب می‌شود.

۳- به سادگی می‌توان این روش را بر اساس بزرگ‌ترین بردار ویژه ماتریس لاپلاسین نرمالیزه شده گراف انجام داد.

تابع MyVertexSelection را مطابق موارد خواسته شده پیاده‌سازی می‌کنیم.

(۲) عملیات sparsified Kron reduction: این عملیات از دو بخش مجزا تشکیل می‌شود:

در بخش اول عملیات Kron reduction انجام می‌شود. در این بخش بر اساس ماتریس لاپلاسین گراف و گره‌های انتخاب شده برای downsampling، متمم Schur ماتریس L نسبت به $L_{V_1^c, V_1^c}$ محاسبه می‌شود. یعنی:

$$K(L, V_1) := L_{V_1, V_1} - L_{V_1^c, V_1} L_{V_1^c, V_1^c}^{-1} L_{V_1^c, V_1}$$

در بخش دوم عملیات spectral sparsification انجام می‌شود. در این بخش در ابتدا ماتریس resistance distance برای گره‌های V_1 محاسبه می‌شود. و سپس با استفاده از یک روش احتمالاتی (الگوریتم ۱ مقاله)، تقریبی sparse از ماتریس وزن گراف بدست می‌آید.

تابع MySKReduction را مطابق موارد خواسته شده پیاده‌سازی می‌کنیم. در این تابع گراف مربوط به گره‌های انتخاب شده برای downsampling را به عنوان خروجی برگردانده می‌شود.

(۳) تابع MyHfilter را مطابق موارد خواسته شده پیاده‌سازی می‌کنیم.

(۴) تابع MyDS را مطابق موارد خواسته شده پیاده‌سازی می‌کنیم.

(۵) تابع MyInterpolate را مطابق موارد خواسته شده پیاده‌سازی می‌کنیم.

در روش اول (روش ارائه شده در کلاس) از قضیه بازسازی سیگنال در گراف استفاده می‌کنیم. برای پیاده‌سازی این روش دو حالت می‌توان در نظر گرفت:

۱- در حالت اول طیف قرکانسی حاصل از سیگنال downsample شده، بدون تغییر برای بازسازی سیگنال استفاده می‌شود. در این حالت خروجی interpolation، معادل با upsample کردن است.

۲- در حالت دوم طیف قرکانسی حاصل از سیگنال downsample شده، قبل از استفاده شدن برای بازسازی سیگنال، توسط یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل با حداقل فرکانس قطع ممکن فیلتر می‌شود به گونه‌ای که حداقل ۷۵ درصد انرژی سیگنال حفظ شود.

در روش دوم (روش مقاله) ابتدا ماتریس لاپلاسین ریگولاریزه شده گراف را تشکیل می‌دهیم.

$$\bar{L} = L + \epsilon I$$

سپس با استفاده از فرمول زیر، عملیات interpolation را انجام می‌دهیم.

$$\text{interpolated_x} = (\bar{L}^{-1})_{V_1} ((\bar{L}^{-1})_{V_1, V_1})^{-1} \text{downsampled_x}$$

۶) تابع MyAnalysis را مطابق موارد خواسته شده پیاده‌سازی می‌کنیم.

۷) تابع MyPyramidAnalysis را مطابق موارد خواسته شده پیاده‌سازی می‌کنیم. در این تابع خروجی‌های مربوط به گراف‌های کاهش یافته و سیگنال‌های downsample شده، آرایه‌هایی سلولی با اندازه $N + 1$ هستند.

۸) تابع MySynthesis را مطابق موارد خواسته شده پیاده‌سازی می‌کنیم.

۹) تابع MyPyramidSynthesis را مطابق موارد خواسته شده پیاده‌سازی می‌کنیم. در این تابع تنها سیگنال اولیه به عنوان خروجی برگردانده می‌شود.

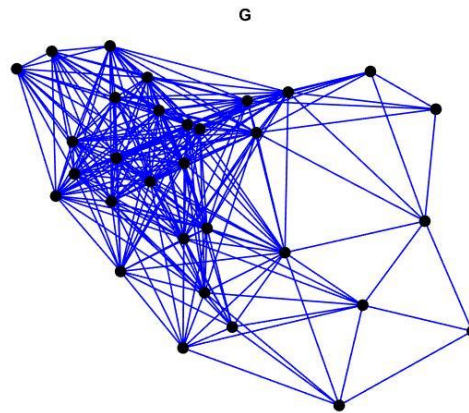
بخش دوم: اعمال توابع آنالیز و سنتز بر روی دیتاست

۱۰) ابتدا با استفاده از تابع زیر ماتریس وزن گراف را تشکیل می‌دهیم.

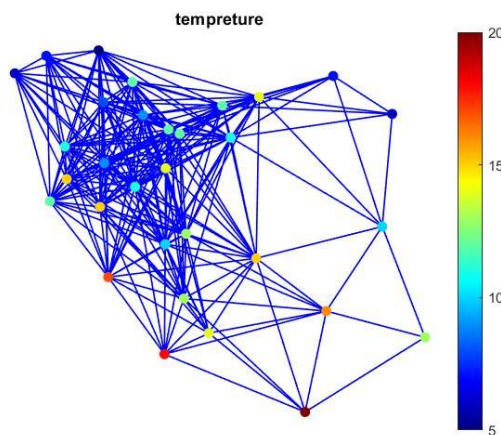
$$w_{ij} = \begin{cases} e^{-\left(\frac{d_{ij}}{500}\right)^2}, & d_{ij} > 0.2 \\ 0, & d_{ij} < 0.2 \text{ or } i = j \end{cases}$$

سپس با استفاده از مختصات جغرافیایی داده شده، تخمینی از مختصات شهرها در صفحه X-Y بدست می‌آوریم.

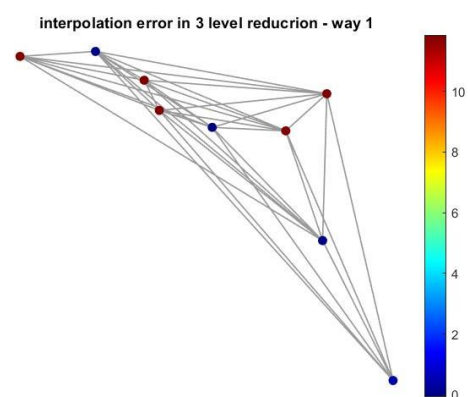
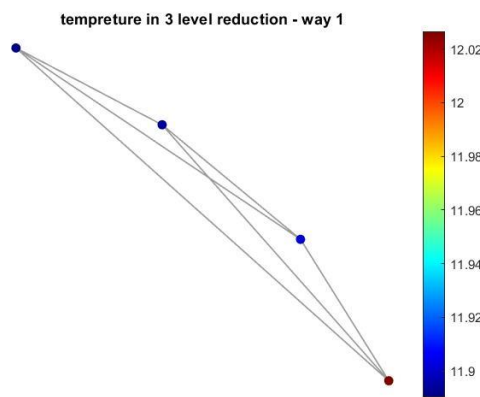
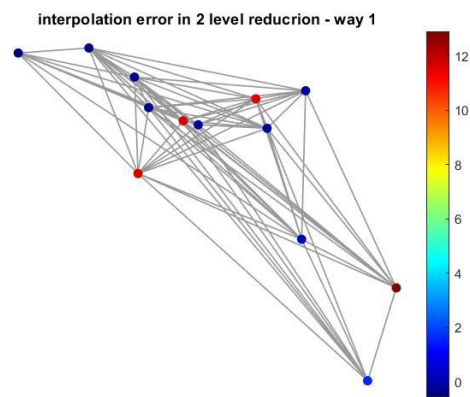
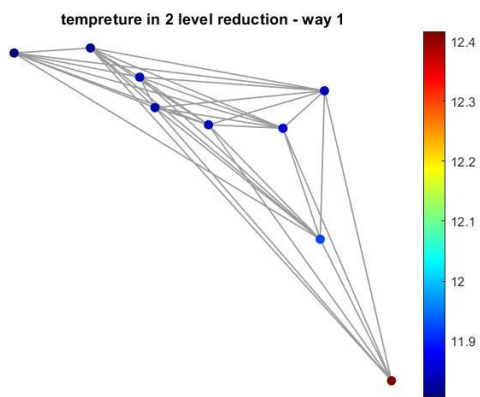
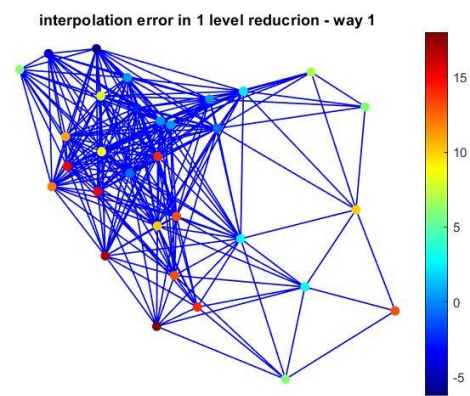
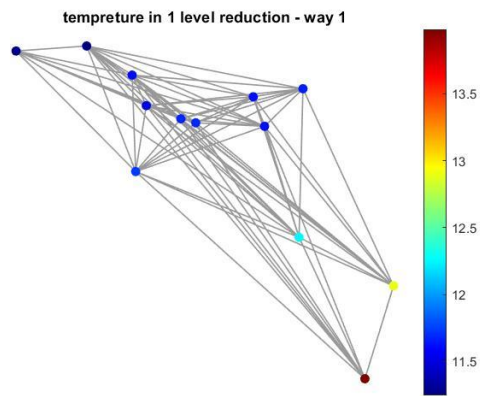
گراف حاصل به صورت زیر خواهد بود:



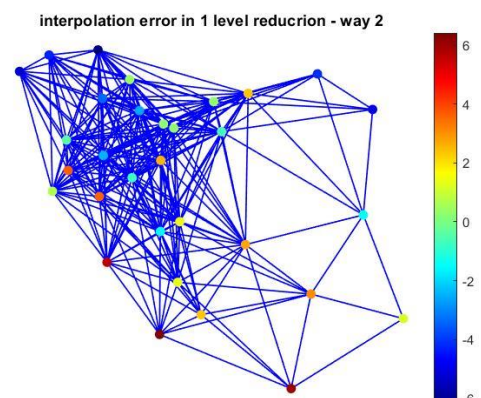
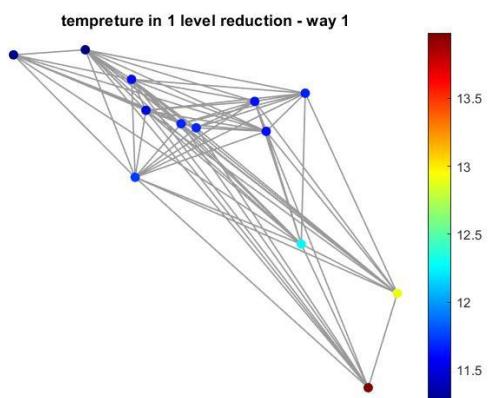
۱۱) خروجی به صورت زیر بدست می‌آید:

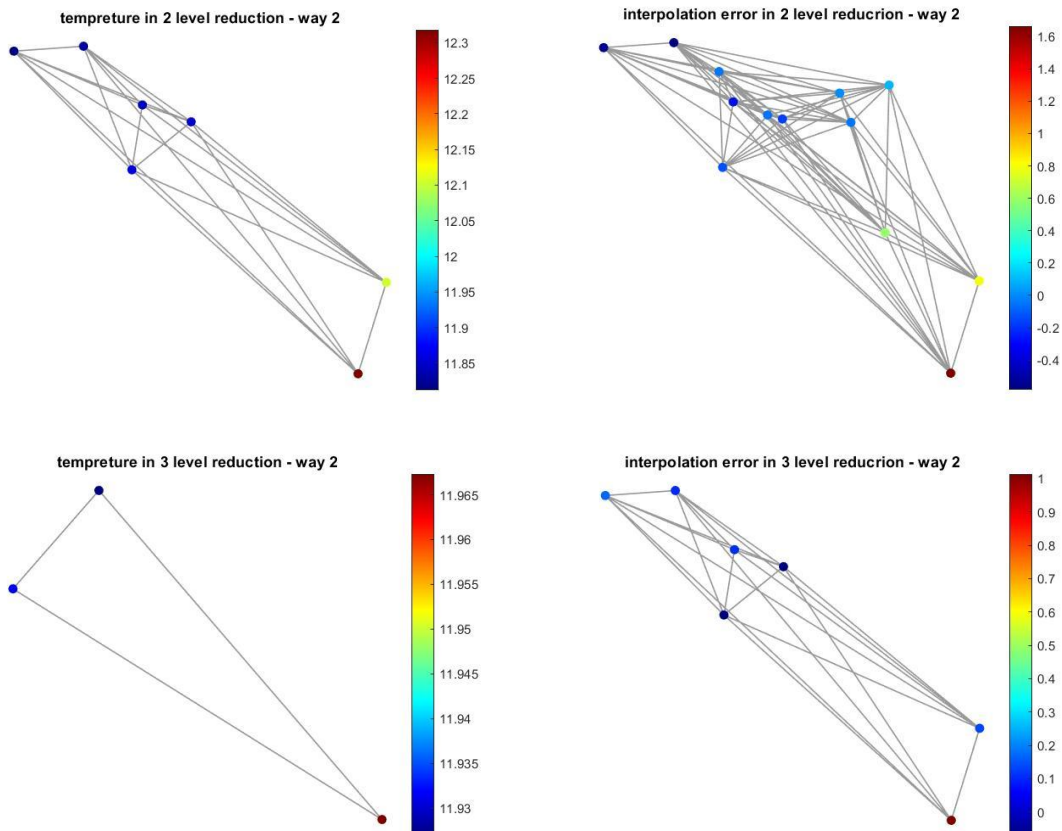


روش اول (روش ارائه شده در کلاس) - حالت اول:



روش دوم (روش مقاله):





total interpolation error 1 = [53.0756, 32.3463, 20.5205]

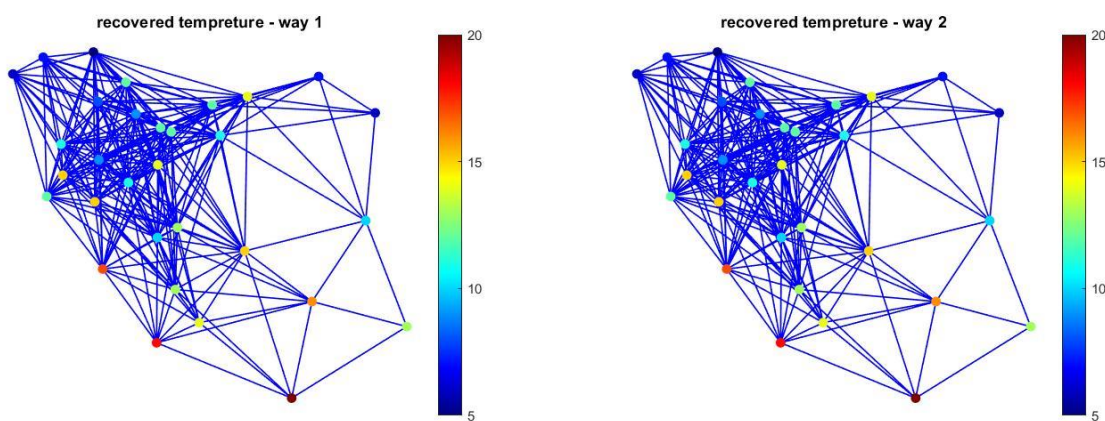
total interpolation error 2 = [18.1969, 1.9672, 1.8791]

average interpolation error 1 = 2.1188

average interpolation error 2 = 0.4082

به وضوح روش مقاله عملکرد بهتری دارد.

(۱۲) خروجی به صورت زیر بدست می‌آید:



(۱۳) خروجی به صورت زیر بدست می‌آید:

$MSE\ 1 = 1.9071, MSE\ 2 = 8.0246$

به وضوح روش ارائه شده در کلاس (حالت اول) نسبت به اعمال نویز به سیگنال downsample شده مقاوم‌تر است.

(۱۴) با توجه به توضیحات کلاس درس، خروجی به صورت زیر بدست می‌آید:

