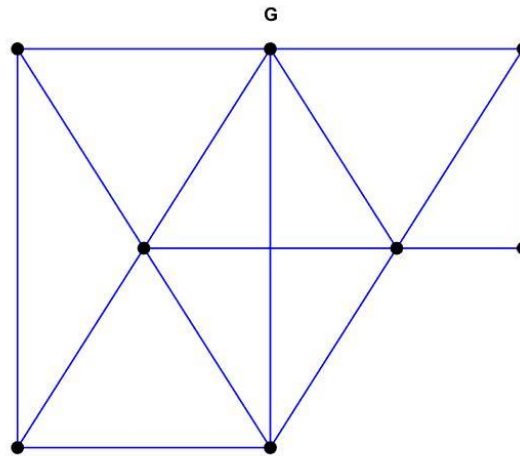


بخش اول: کاهش نویز در سیگنال گرافی

(۱) گراف G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

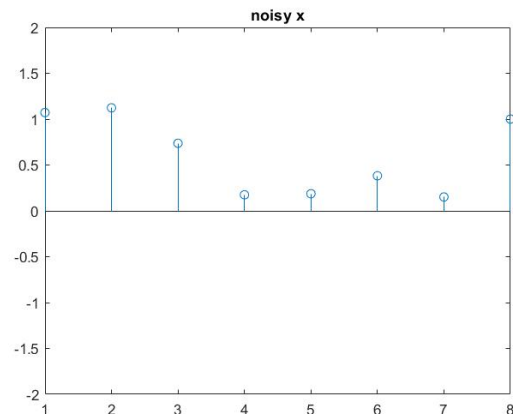
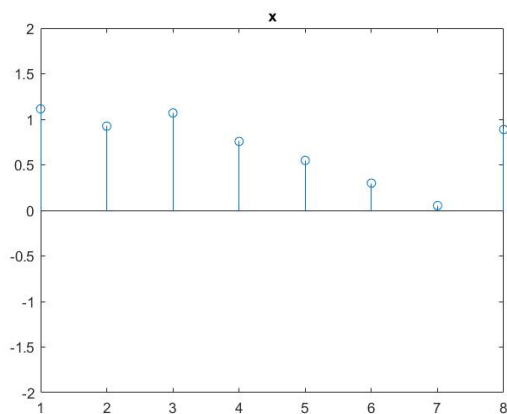
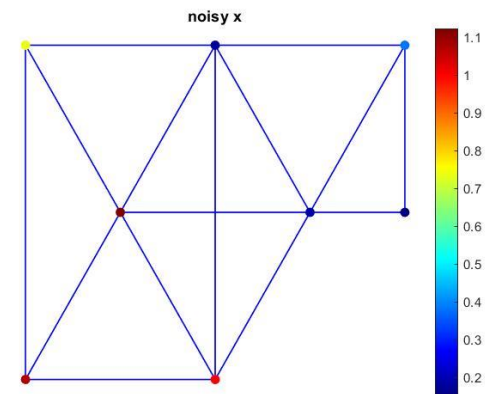
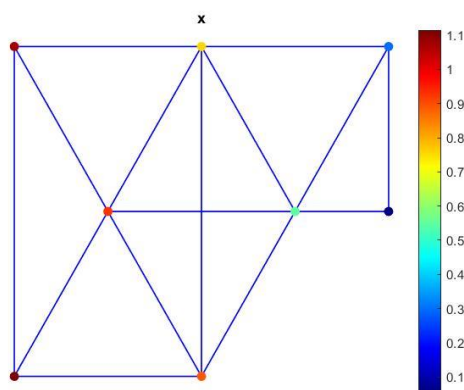


(۲) با استفاده از دستور `gsp_compute_fourier_basis`، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس L گراف G را محاسبه می‌کنیم. سیگنال x به صورت زیر بدست می‌آید.

$x = [1.1152 \quad 0.9253 \quad 1.0697 \quad 0.7576 \quad 0.5487 \quad 0.2990 \quad 0.0533 \quad 0.8880]$

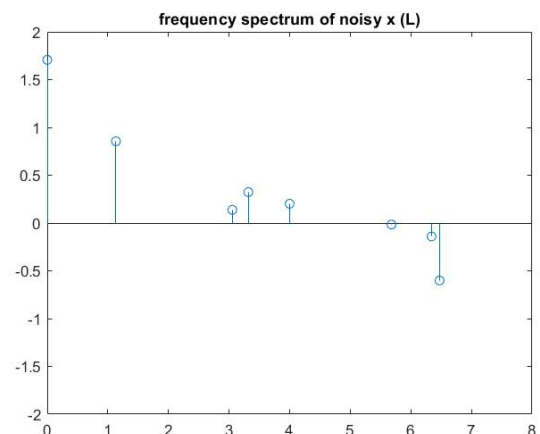
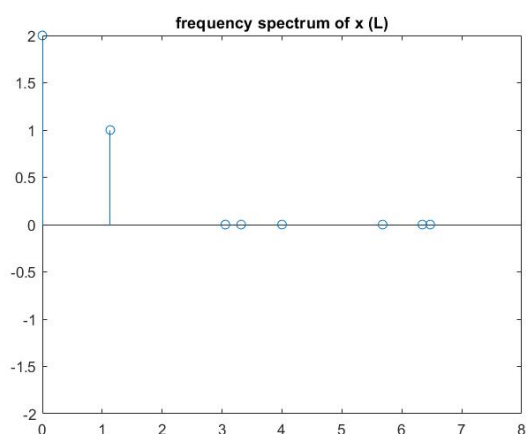
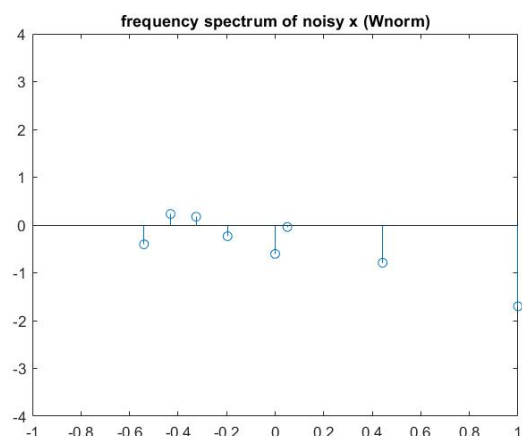
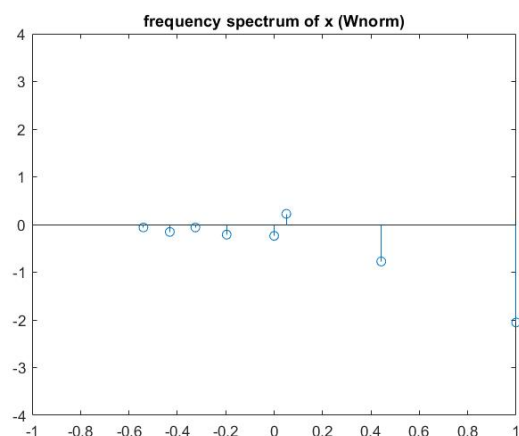
(۳) با استفاده از دستور `randn`، نویزی با واریانس مناسب تولید می‌کنیم. سیگنال نویزی شده x به صورت زیر بدست می‌آید.

$\text{noisy } x = [1.0711 \quad 1.1232 \quad 0.7367 \quad 0.1751 \quad 0.1865 \quad 0.3824 \quad 0.1511 \quad 1.0009]$



۴) ابتدا با استفاده از دستور eig، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس W گراف G را محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از تقسیم ماتریس W بر σ_{\max} ، ماتریس W_{norm} را بدست می‌آوریم.

حال با استفاده از بردارهای ویژه مناسب و رابطه $\hat{x} = U^{-1}x$ ، طیف فرکانسی هر دو سیگنال بدون نویز و نویزی x را با در نظر گرفتن ماتریس‌های W_{norm} و L ، به عنوان اپراتور شیفت محاسبه می‌کنیم.

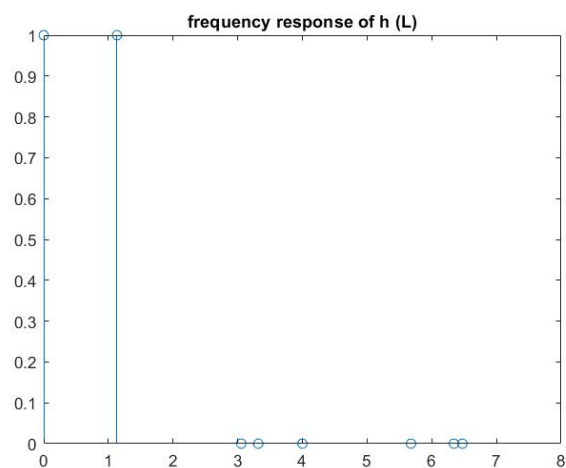
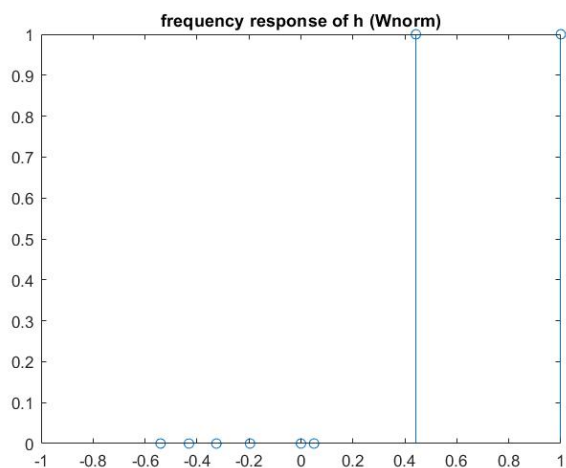


۵) برای حالت استفاده از ماتریس W_{norm} ، فرکانس‌های مربوط به مقادیر ویژه بزرگ‌تر و برای حالت استفاده از ماتریس L ، فرکانس‌های مربوط به مقادیر ویژه کوچک‌تر، معرف فرکانس‌های پایین هستند.

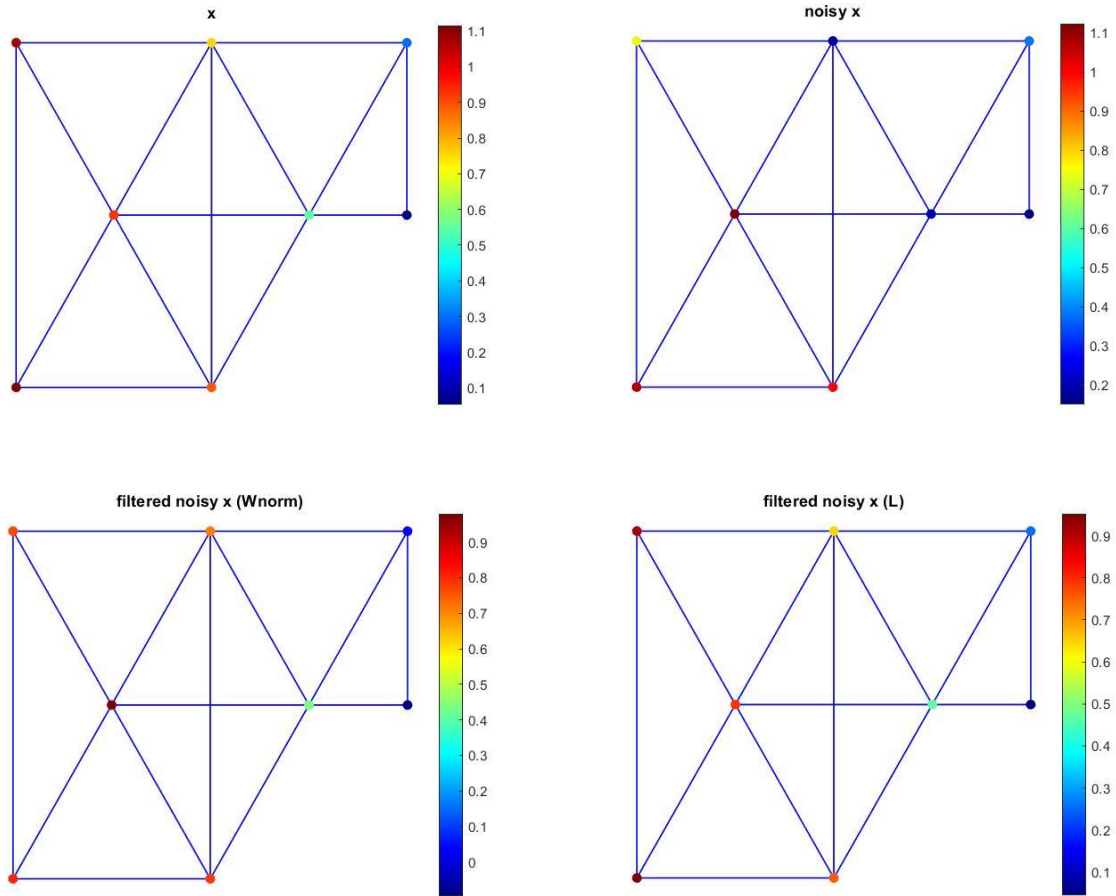
با در نظر گرفتن عبور دو فرکانس پایین و حذف بقیه فرکانس‌ها، داریم:

$$\text{frequency response of } h (W_{\text{norm}}) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$$

$$\text{frequency response of } h (L) = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$



۶) با استفاده از فیلترهای تعریف شده در قسمت قبل، سیگنال نویزی را در حوزه فرکانس فیلتر می‌کنیم.



۷) با محاسبه SNR داریم:

$$\text{SNR}(W_{\text{norm}}) = 12.1181, \quad \text{SNR}(L) = 16.6890$$

به وضوح در نظر گرفتن ماتریس L به عنوان اپراتور شیفیت بهتر است. از ابتدا نیز همین انتظار می‌رفت؛ زیرا سیگنال x از یک ترکیب خطی بردارهای ویژه اول و دوم ماتریس L ساخته شده است.

۸) از آنجایی که مقادیر ویژه ماتریس W_{norm} (L) متمایز هستند، ماتریس واندرموند مربوط به مقادیر ویژه این ماتریس وارون پذیر است و در نتیجه برای هر فیلتر دلخواهی در حوزه فرکانس، یک فیلتر معادل FIR وجود دارد، که از رابطه $h_{\text{FIR}} = \text{Vandermonde}^{-1} \hat{h}$ بدست می‌آید. پس فیلترهای ایده‌آل به صورت LSI عمل می‌کنند.

$$h_{\text{FIR}}(W_{\text{norm}}) = [-0.0000 \quad -0.0181 \quad 0.1552 \quad 3.3426 \quad 14.2691 \quad 17.5877 \quad -10.3238 \quad -24.0126]$$

$$h_{\text{FIR}}(L) = [1.0000 \quad 3.2349 \quad -5.5271 \quad 3.2938 \quad -0.9930 \quad 0.1631 \quad -0.0140 \quad 0.0005]$$

۹) برای بدست آوردن بهترین فیلتر از معیار MSE استفاده می‌کنیم. در این صورت جواب از حل مسئله بهینه‌سازی زیر بدست می‌آید:

$$\text{approximate } h_{\text{FIR}} = \underset{h}{\text{argmin}} \|\hat{h} - V_{1:3} h\|_2^2$$

که در آن $V_{1:3}$ ماتریس حاصل از نگه داشتن ستون‌های اول تا سوم ماتریس Vandermonde است. چون مقادیر ویژه ماتریس W_{norm} (L) متمایز هستند، ستون‌های ماتریس $V_{1:3}$ مستقل خطی خواهند بود.

در نتیجه جواب این مسئله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\text{approximate } h_{\text{FIR}} = (V_{1:3}^T V_{1:3})^{-1} V_{1:3}^T \hat{h}$$

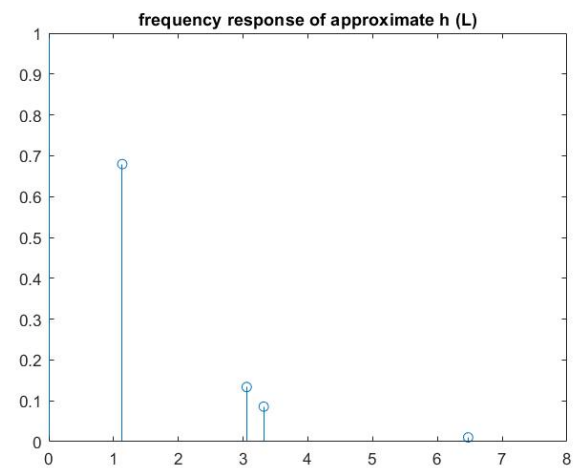
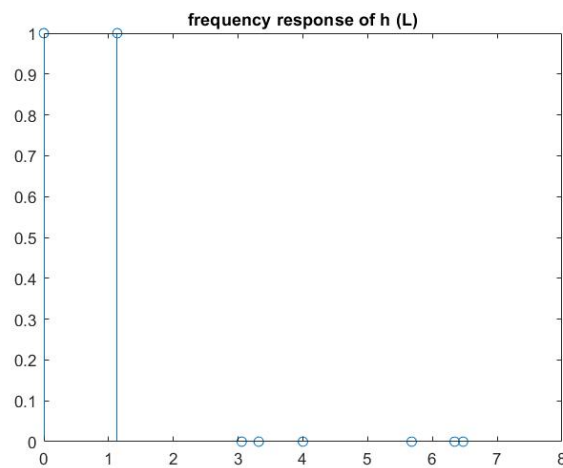
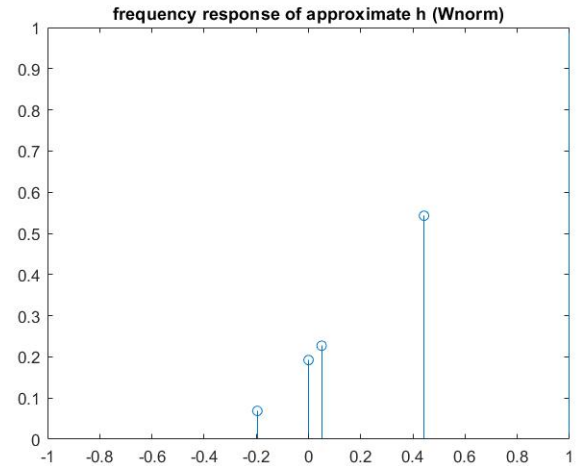
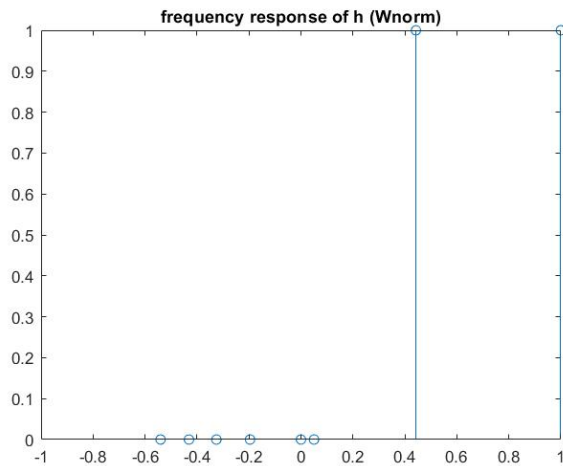
$$\text{approximate } h_{\text{FIR}}(W_{\text{norm}}) = [0.1923 \quad 0.6800 \quad 0.2537]$$

$$\text{approximate } h_{\text{FIR}}(L) = [1.1625 \quad -0.4787 \quad 0.0465]$$

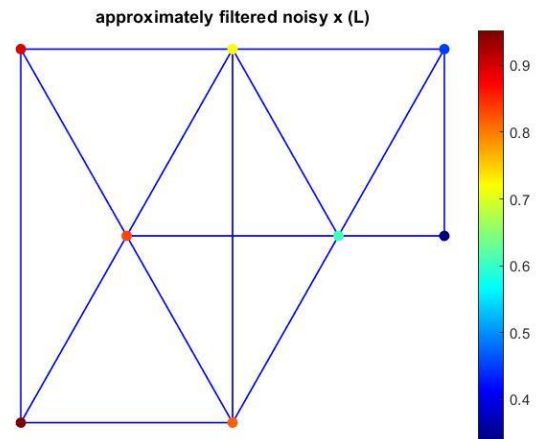
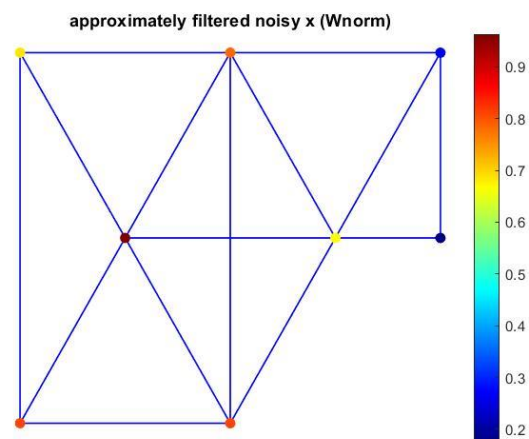
۱۰) با استفاده از رابطه $\hat{h} = U^{-1}h$ پاسخ فرکانسی فیلترهای مورد نظر را بدست می‌آوریم:

$$\text{frequency response of approximate } h(W_{\text{norm}}) = [-0.10 \quad -0.05 \quad 0.00 \quad 0.07 \quad 0.19 \quad 0.23 \quad 0.54 \quad 1.13]$$

$$\text{frequency response of approximate } h(L) = [1.16 \quad 0.68 \quad 0.13 \quad 0.09 \quad -0.01 \quad -0.06 \quad -0.01 \quad 0.01]$$



۱۱) برای ماتریس W_{norm} ، SNR افزایش و برای ماتریس L ، SNR کاهش می‌یابد. نتایج به صورت زیر بدست می‌آیند:



$$\text{SNR of approximate filter } (W_{\text{norm}}) = 12.5079,$$

$$\text{SNR of approximate filter } (L) = 14.5089$$

(۱۲) برای دو حالت فیلترهای طول ۲ و طول ۵، شبیه‌سازی را تکرار می‌کنیم.

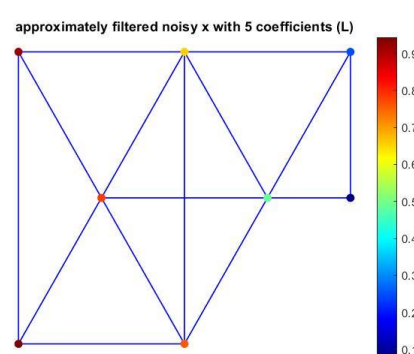
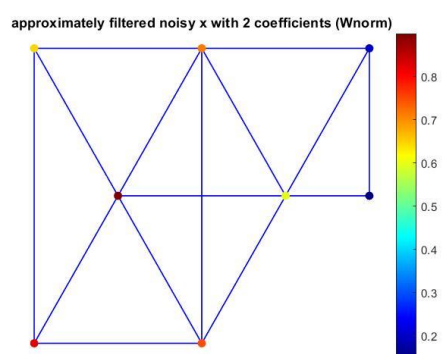
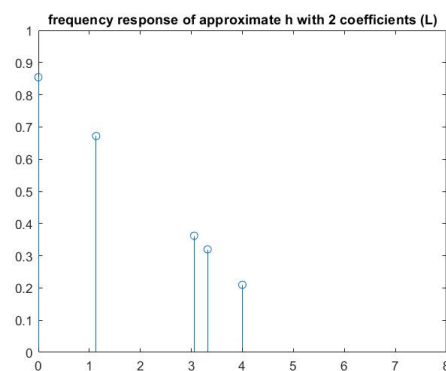
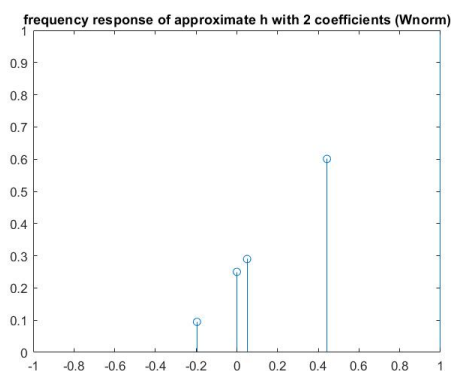
فیلتر با طول ۲:

$$\text{approximate } h_{\text{FIR}}(W_{\text{norm}}) = [0.2500 \quad 0.7925]$$

$$\text{approximate } h_{\text{FIR}}(L) = [0.8544 \quad -0.1612]$$

$$\text{frequency response of approximate } h(W_{\text{norm}}) = [-0.18 \quad -0.09 \quad -0.01 \quad 0.09 \quad 0.25 \quad 0.29 \quad 0.60 \quad 1.04]$$

$$\text{frequency response of approximate } h(L) = [0.85 \quad 0.67 \quad 0.36 \quad 0.32 \quad 0.21 \quad -0.06 \quad -0.17 \quad -0.19]$$



$$\text{SNR of approximate filter } (W_{\text{norm}}) = 12.1215,$$

$$\text{SNR of approximate filter } (L) = 9.9713$$

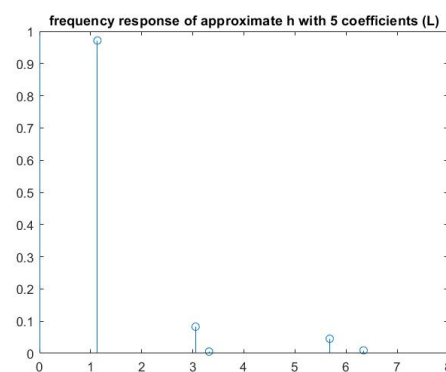
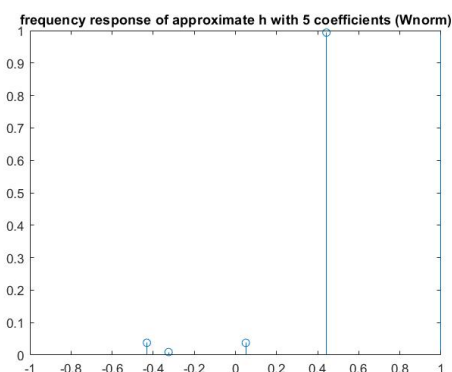
فیلتر با طول ۵:

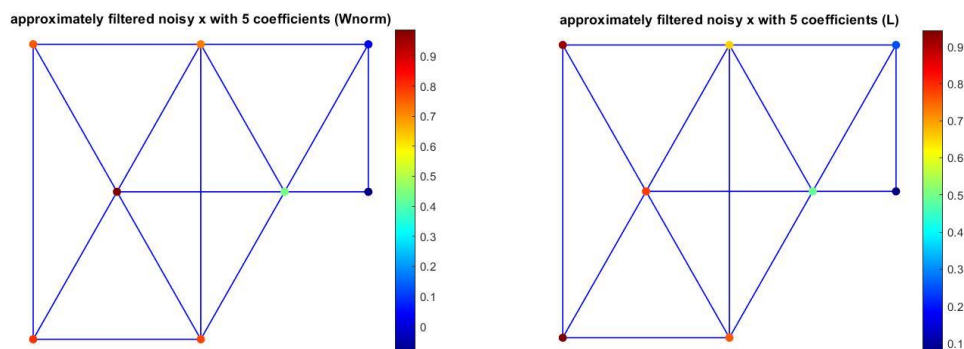
$$\text{approximate } h_{\text{FIR}}(W_{\text{norm}}) = [-0.0121 \quad 0.8039 \quad 3.6445 \quad 1.4149 \quad -4.8507]$$

$$\text{approximate } h_{\text{FIR}}(L) = [1.0085 \quad 0.4696 \quad -0.5900 \quad 0.1409 \quad -0.0100]$$

$$\text{frequency response of approximate } h(W_{\text{norm}}) = [-0.02 \quad 0.04 \quad 0.01 \quad -0.05 \quad -0.01 \quad 0.04 \quad 1.00 \quad 1.00]$$

$$\text{frequency response of approximate } h(L) = [1.01 \quad 0.98 \quad 0.08 \quad 0.01 \quad -0.09 \quad 0.05 \quad 0.01 \quad -0.03]$$



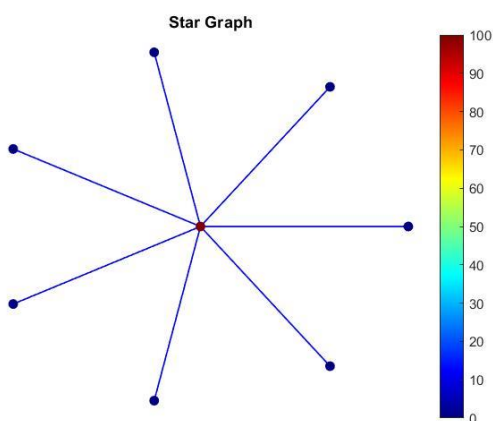


SNR of approximate filter (W_{norm}) = 12.6844, SNR of approximate filter (L) = 119478

برای هر دو ماتریس، افزایش طول فیلتر، دقت تقریب فیلتر ایده‌آل را افزایش می‌دهد. اما در ماتریس W_{norm} ، افزایش طول الزاماً باعث افزایش SNR نمی‌شود و این موضوع تنها در مورد ماتریس L ، صادق است.

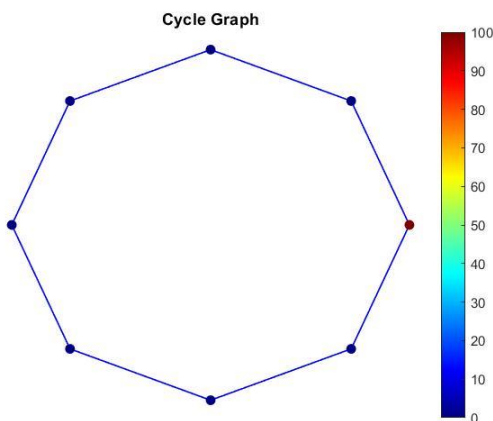
بخش دوم: شیفت راسی

(۱) گراف مورد نظر را تولید می‌کنیم و سیگنال مورد نظر را روی آن نمایش می‌دهیم.



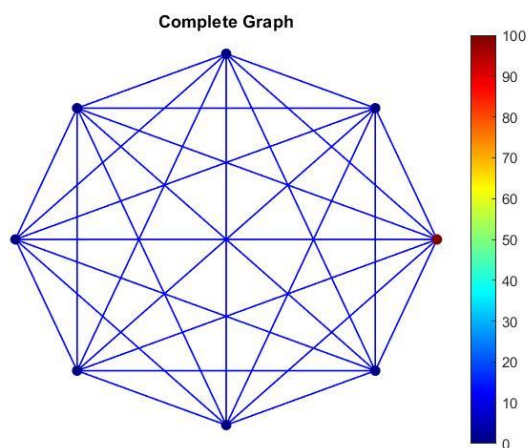
سپس با انجام محاسبات لازم، نتیجه شیفت راسی سیگنال مورد نظر را نسبت به تمام رئوس و ماتریس‌های W_{norm} و L بدست می‌آوریم. نتایج در کد موجود است.

(۲) گراف مورد نظر را تولید می‌کنیم و سیگنال مورد نظر را روی آن نمایش می‌دهیم.



سپس با انجام محاسبات لازم، نتیجه شیفت راسی سیگنال مورد نظر را نسبت به تمام رئوس و ماتریس‌های W_{norm} و L بدست می‌آوریم. نتایج در کد موجود است.

۳) گراف مورد نظر را تولید می‌کنیم و سیگنال مورد نظر را روی آن نمایش می‌دهیم.



سپس با انجام محاسبات لازم، نتیجه شیفت راسی سیگنال مورد نظر را نسبت به تمام رئوس و ماتریس‌های W_{norm} و L بدست می‌آوریم. نتایج در کد موجود است.