

سوال ۱: الف) با توجه به مطالب کلاس، الگوریتم ALS را به صورت زیر پیاده‌سازی می‌کنیم.

```
function [B, C] = NMF_ALS(A, j, B0, C0)
    if j==size(B0, 2) && j==size(C0, 1)
        B = B0;
        C = C0;
        iter = 100;
        epsilon = 1e-16;
        for i = 1:iter
            B = max(epsilon, A*C'*pinv(C*C'));
            C = max(epsilon, pinv(B'*B)*B'*A);
        end
    else
        printf('Number of components is not right!');
    end
end
```

ب) با توجه به مطالب کلاس، الگوریتم Multiplicative را به صورت زیر پیاده‌سازی می‌کنیم.

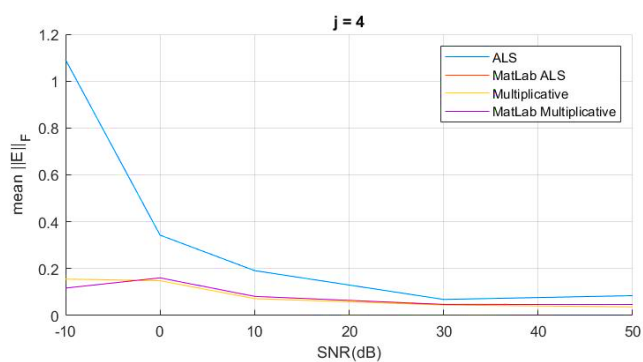
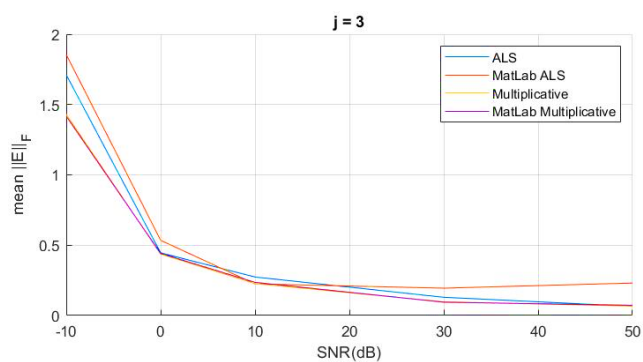
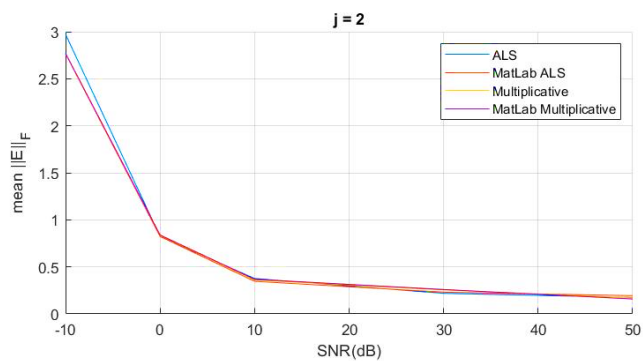
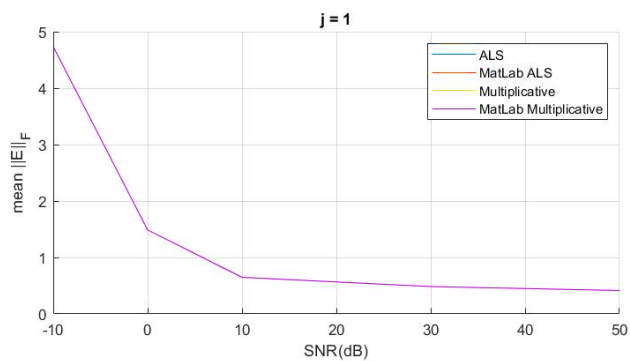
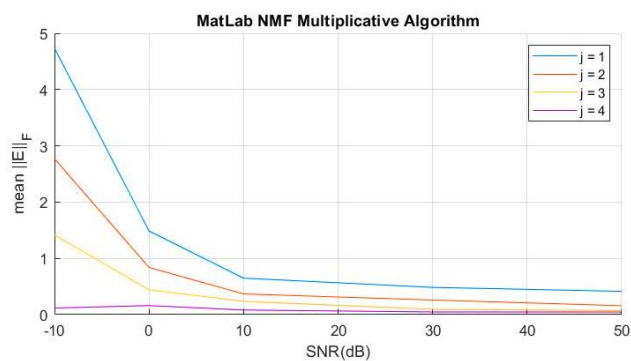
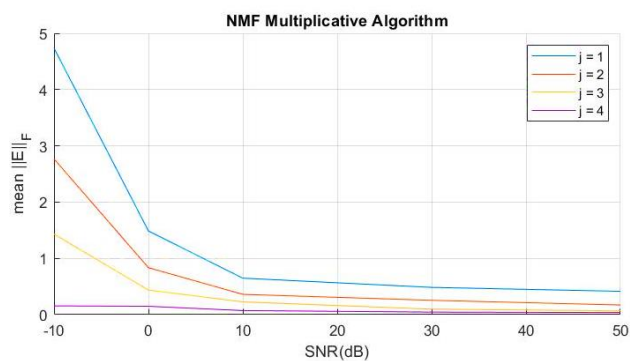
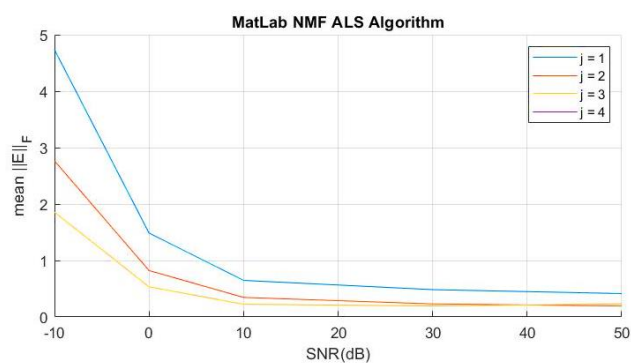
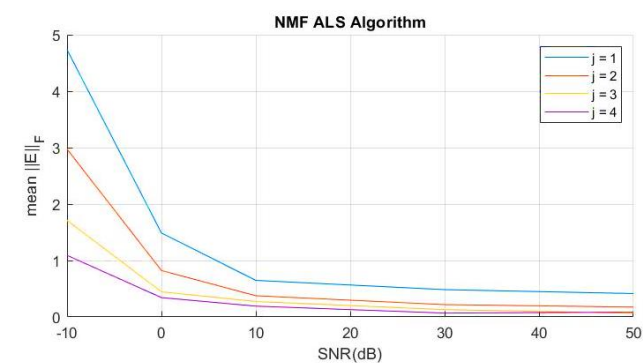
```
function [B, C] = NMF_Multiplicative(A, j, B0, C0)
    if j==size(B0, 2) && j==size(C0, 1)
        B = B0;
        C = C0;
        iter = 100;
        epsilon = 1e-16;
        for i = 1:iter
            B = B.*(A*C')./(B*(C*C')+epsilon);
            C = C.*(B'*A)./(B'*B)*C+epsilon);
        end
    else
        printf('Number of components is not right!');
    end
end
```

ج) برای بررسی درستی الگوریتم‌های پیاده‌سازی شده، خروجی آن‌ها را با خروجی تابع آماده MatLab برای تجزیه NMF مقایسه می‌کنیم.

برای این کار، مراحل گفته شده را به ترتیب انجام می‌دهیم. یعنی، برای هر SNR، ۱۰ بار آزمایش را تکرار می‌کنیم و در هر تکرار، ابتدا ماتریس‌های تصادفی B ، C ، E ، B_0 و C_0 را تشکیل می‌دهیم و سپس با اجرای چهار الگوریتم مذکور و محاسبه مقدار $\|E\|_F$ ، عملکرد آن‌ها را به ازای چهار مقدار ۱، ۲، ۳ و ۴ برای j ، ارزیابی می‌کنیم.

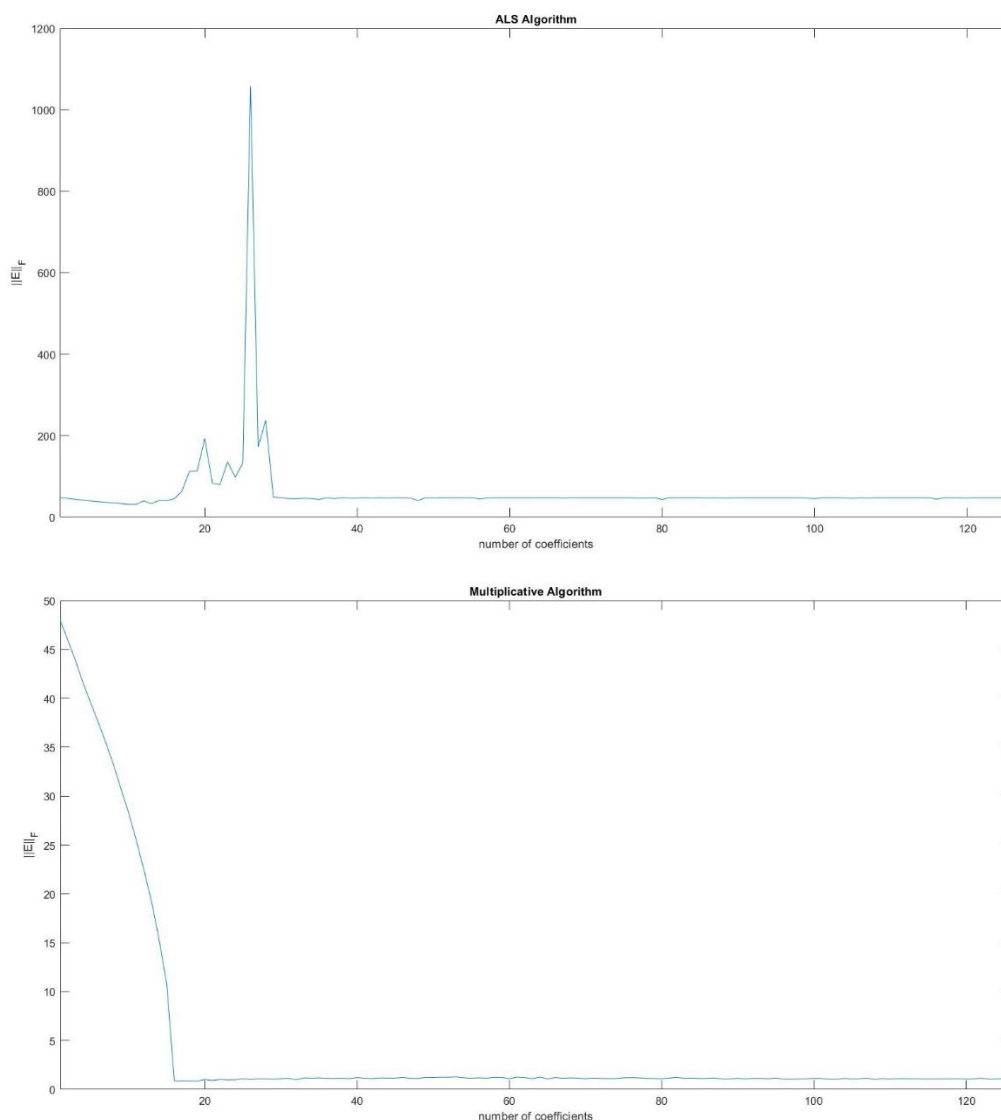
در انتها با محاسبه میانگین مقدار $\|E\|_F$ روی تکرارهای مختلف، نمودار خطا بر حسب SNR را، یک بار به ازای الگوریتم ثابت و بار دیگر به ازای مقدار j ثابت، رسم می‌کنیم.

خروجی به صورت زیر بدست می آید:



از نمودار اول مشخص است که هر چهار الگوریتم، با افزایش SNR عملکرد بهتری داشته اند. همچنین به طور تقریبی با افزایش مقدار j ، مقدار $\|E\|_F$ کاهش یافته است (به جز الگوریتم ALS تابع آماده MatLab که به ازای مقدار ۴ برای j ، در بسیاری از موارد واگرا شده است). شایان ذکر است در الگوریتم های Multiplicative، کاهش مقدار $\|E\|_F$ با افزایش مقدار j ، از ۳ به ۴، بسیار بیشتر از الگوریتم های ALS بوده است. با توجه به نمودار دوم، تفاوت چهار الگوریتم به ازای مقدارهای j کوچکتر مساوی ۳، اندک است. اما به ازای مقدار ۴ برای j ، که از تعداد مولفه های واقعی بیشتر است، الگوریتم های Multiplicative عملکرد بسیار بهتری نسبت به الگوریتم های ALS دارند.

سوال ۲: در ابتدا برای بدست آوردن تعداد تقریبی مولفه‌های اصلی و الگوریتم مناسب، به ازای مقدارهای ۱ تا 14×9 برای j ، هر یک از الگوریتم‌های ALS و Multiplicative را با ۵ حالت اولیه تصادفی مختلف برای ماتریس‌های B_0 و C_0 اجرا می‌کنیم. سپس با محاسبه کمترین مقدار $\|E\|_F$ به ازای هر مقدار j ، نمودار تقریبی خطا بر حسب تعداد مولفه را رسم می‌کنیم.



از نمودارهای فوق مشخص است که تعداد مولفه‌های اصلی برابر ۱۶ است. به وضوح الگوریتم ALS نتوانسته است عملکرد مناسبی داشته باشد و رفتار آن، تقریباً نوسانی بوده است؛ به ویژه، به ازای تعداد مولفه‌های کمی بیشتر از تعداد مولفه‌های اصلی، مقدار $\|E\|_F$ به شدت زیاد است. اما الگوریتم Multiplicative این چنین نیست و به ازای تعداد مولفه‌های بیشتر از تعداد مولفه‌های اصلی نیز، مقدار $\|E\|_F$ نزدیک به کمترین مقدار آن است.

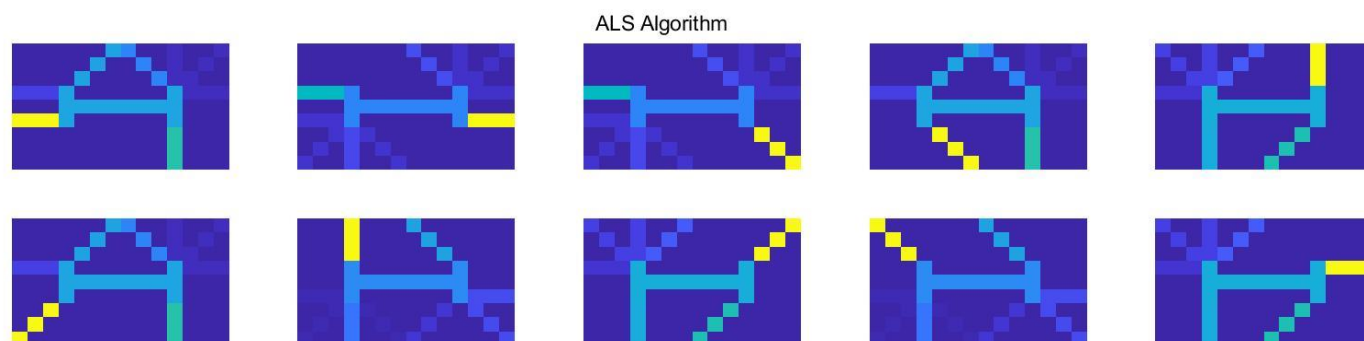
در نتیجه این آزمایش، دو مزیت الگوریتم Multiplicative نسبت به الگوریتم ALS به شرح زیر است:

(۱) الگوریتم Multiplicative، به ازای تعداد مولفه‌های درست، به تجزیه تقریباً دقیق، همگرا می‌شود. در حالی که در الگوریتم ALS ممکن است، حتی به ازای تعداد مولفه‌های درست، مقدار $\|E\|_F$ زیاد باشد.

(۲) الگوریتم Multiplicative می‌تواند تعداد مولفه‌های بیشتر از تعداد مولفه‌های درست را نیز، کنترل کند و لذا دانستن تعداد دقیق مولفه‌های درست نیاز نیست. در حالی که در الگوریتم ALS ممکن است به ازای تعداد مولفه‌های بیشتر از تعداد مولفه‌های درست، مقدار $\|E\|_F$ به شدت نسبت به کمترین مقدار آن در همین الگوریتم، افزایش یابد.

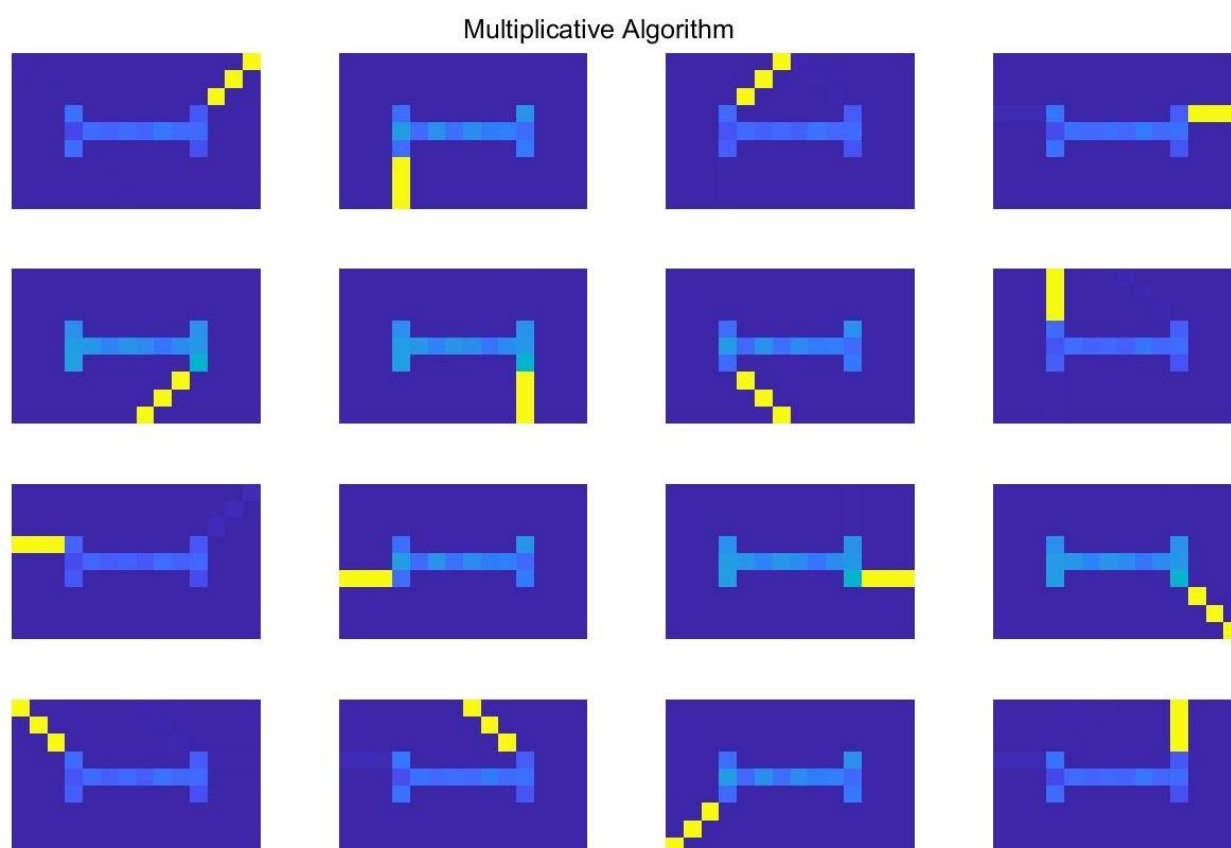
حال به بررسی بهترین عملکرد هر الگوریتم می‌پردازیم.

الگوریتم ALS: با توجه به نمودار قسمت قبل، کمترین مقدار $\|E\|_F$ در این الگوریتم، به ازای مقدار ۱۰ برای j بدست می‌آید. مولفه‌های بدست آمده در این حالت به صورت زیر اند:



مشخص است که الگوریتم ALS در تشخیص مولفه‌های اصلی ناموفق بوده است. در نتیجه مقدار $\|E\|_F$ بزرگ است و تجزیه بدست آمده معتبر نخواهد بود.

الگوریتم Multiplicative: با توجه به نمودار قسمت قبل، کمترین مقدار $\|E\|_F$ در این الگوریتم، به ازای مقدار ۱۶ برای j بدست می‌آید. مولفه‌های بدست آمده در این حالت به صورت زیر اند:

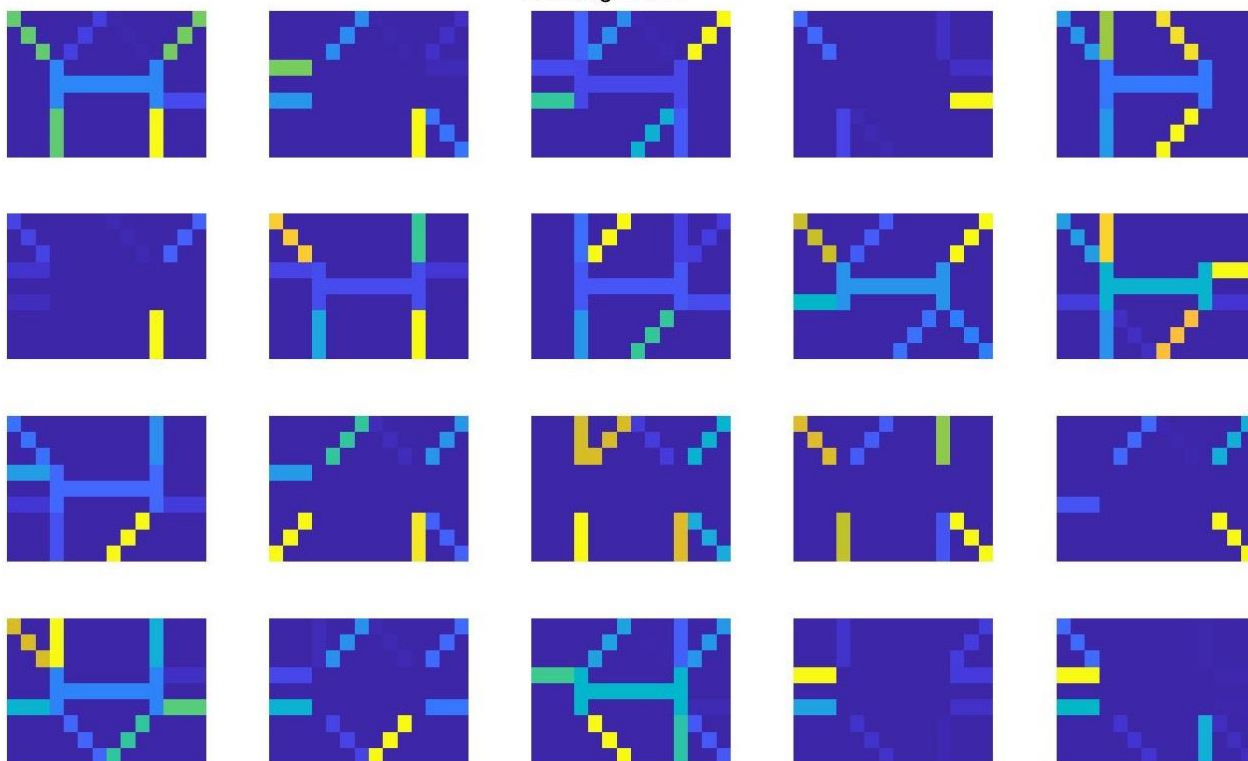


با توجه به خروجی، واضح است که الگوریتم Multiplicative عملکرد بسیار خوبی داشته است و هر یک از مولفه‌های بدست آمده، دقیقا معرف یکی از چهار وضعیت ممکن برای یکی از پاها یا یکی از دست‌ها به همراه سایه‌ای از تنه به عنوان بخش مشترک است. در نتیجه مقدار $\|E\|_F$ کوچک است و می‌توان از تجزیه بدست آمده به عنوان مولفه‌های اصلی سازنده وضعیت‌های ممکن استفاده نمود.

با اجرای الگوریتم‌های فوق به ازای مقدار ۲۰ برای λ ، که بیشتر از تعداد مولفه‌های اصلی است، نتایج زیر بدست می‌آید:

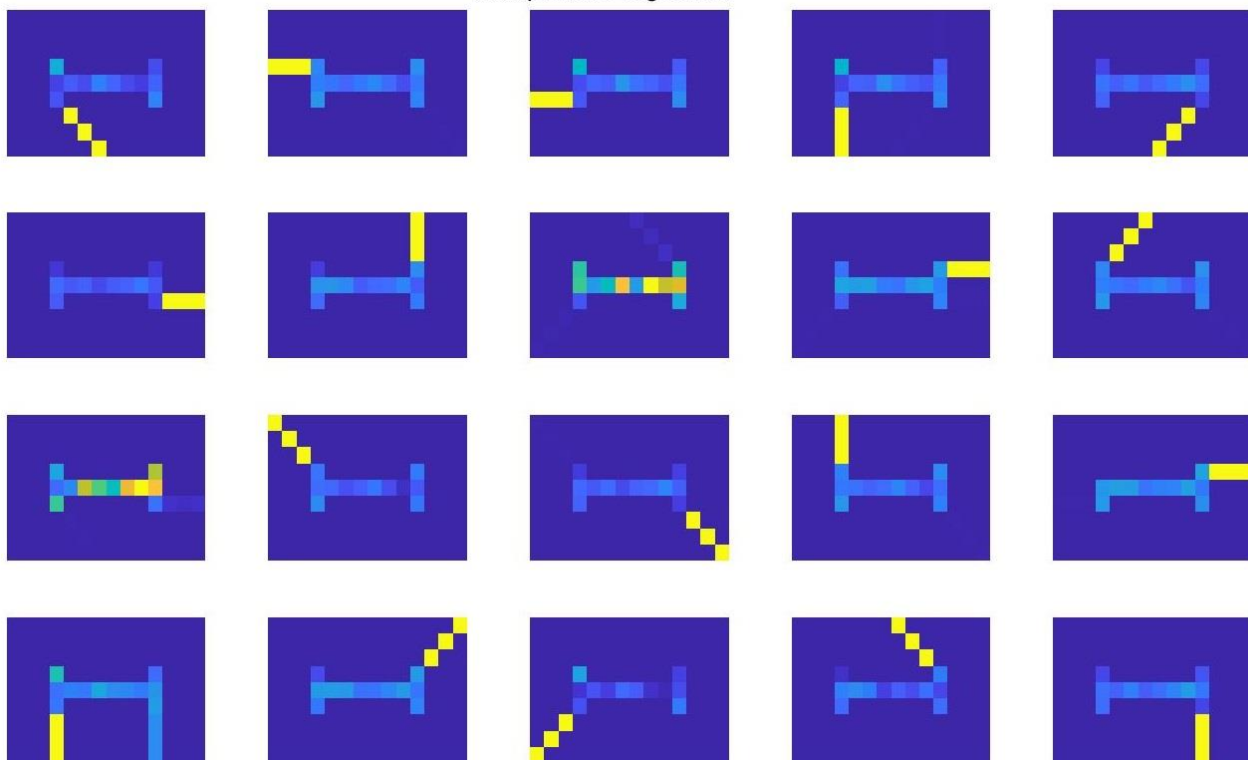
الگوریتم ALS:

ALS Algorithm



الگوریتم Multiplicative:

Multiplicative Algorithm



به ازای تعداد مولفه‌های بیشتر از تعداد مولفه‌های اصلی، عملکرد الگوریتم ALS به شدت افت کرده است؛ اما الگوریتم Multiplicative با تعریف مولفه‌های اضافی از طریق تقسیم مناسب مولفه‌های اصلی، دقت خورد را حفظ کرده است.