دانشکده مهندسی مکانیک

بررسی عددی میدان جریان و انتقال حرارت در یک حفره به کمک تابع جریان – ورتیسیتی

پروژهٔ دوم درس دینامیک سیالات محاسباتی

گرایش تبدیل انرژی

علی باقری برمس

استاد مربوطه:

دکتر سید مصطفی حسینعلی پور

بهمن ۱۴۰۱

به نام خالق هستی

چکیده

با پیشرفت کامپیوتر و پیچیده‌تر شدن حل‌های تحلیلی، محققان به منظور تحلیل پدیده‌های حاکم بر طبیعت از روش‌های حل عددی استفاده کردند. پس از به کارگیری حل عددی در مسائل مکانیک سیالات، معادلات قابل توجهی به روش‌های متعدد حل شدند. یکی از این روش‌ها، استفاده از تابع جریان — ورتیسیتی بود. در این پروژه، از این روش جهت بررسی نتایج حل عددی جریان و انتقال حرارت در یک حفره استفاده شده است. پس از بی‌بعد سازی معادلات ناویر–استوکسِ جریان دوبعدی و تراکم‌ناپذیر و اعمال شرط بوزینسک به منظور تراکم‌ناپذیر در نظر گرفتن سیال و حذف ترم فشار از معادلات، گسسته سازی صورت گرفته و با تشکیل دستگاه معادلات، میدان جریان و انتقال حرارت حل شده‌اند. پس از حل، بررسی‌های مربوط به استقلال حل عددی از شبکه و اعتبارسنجی حل نیز صورت گرفته‌اند.

واژه‌های کلیدی: تابع جریان–ورتیسیتی؛ دینامیک سیالات محاسباتی؛ جریان حفره؛ تقریب بوزینسک.

فهرست مطالب

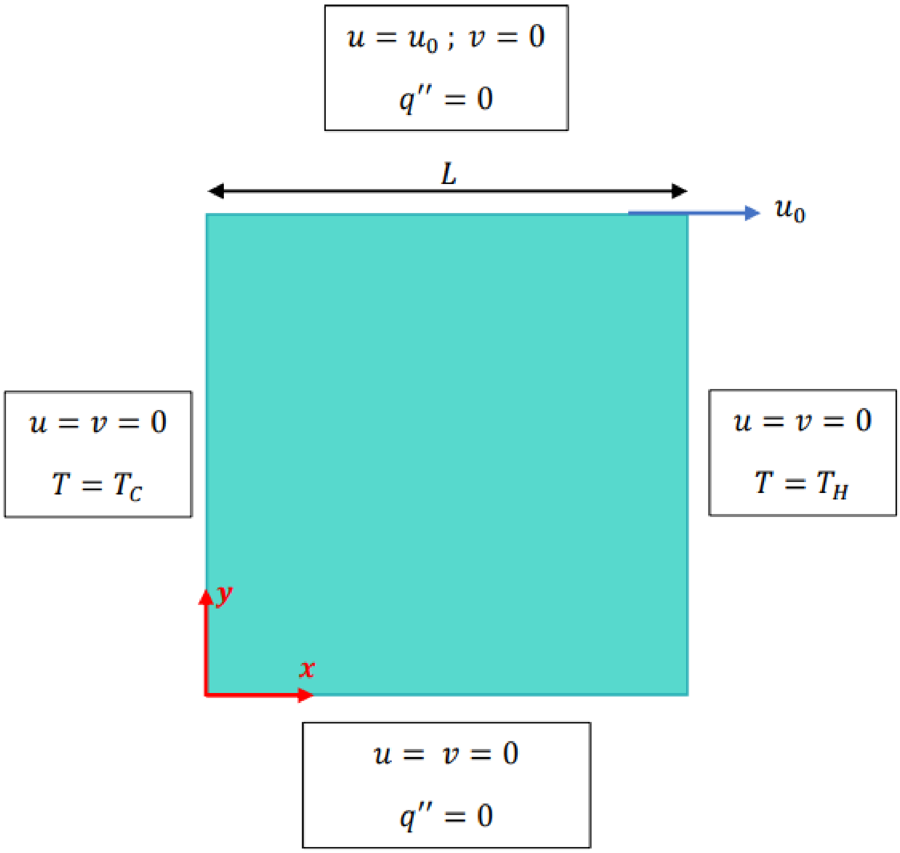
فهرست شکل‌ها

فصل ۱:

مقدمه

۱-۱- تعریف مساله

هدف از انجام این پروژه، شبیه‌سازی جریان و انتقال حرارت در یک حفره با استفاده از روش تابع جریان[۱]– ورتیسیتی[۲] است. هندسهٔ حفره[۳] در نشان داده شده است. دیوارهٔ بالایی با سرعت u_0 به سمت راست حرکت کرده و سایر دیواره‌ها ساکن هستند. دیوارهٔ بالایی و پایینی عایق بوده و دما در دیوارهای راست و چپ به ترتیب برابر T_H و T_C است.



شکل ۱–۱: هندسهٔ حفره و شرایط مرزی حاکم بر آن.

با تغییر دما، چگالی جریان نیز دچار تغییر می‌شود؛ بنابراین جریان از لحاظ فیزیکی تراکم‌پذیر است. اما می‌توان با

[1] Stream Function
[2] Vorticity
[3] Cavity

استفاده از تقریب بوزینسک[1] می‌توان آن را به صورت تراکم‌ناپذیر مدل کرد. در چنین تقریبی، فرض می‌شود که خواص سیال ثابت بوده و تغییرات آن به صورت یک جملهٔ چشمه($g\beta(T-T_c)$) در معادلهٔ ممنتوم ظاهر می‌شود که به آن شتاب گرانشی می گویند. در این رابطه، g شتاب گرانش و β ضریب انبساط حرارتی است. پس از نوشتن معادلات پیوستگی، بقای ممنتوم و بقای انرژی با فرضیات ارائه شده، مراحل زیر به ترتیب در این پروژه طی شده‌اند؛

۱- فیزیک حاکم بر مساله در قالب معادلات بقا نوشته شده و پس از تعریف تابع جریان (ψ) و ورتیسیتی (ω) و قرار دادن آن‌ها در معادلات، معادلات و شرایط مرزی بر حسب این دو متغیر بازنویسی می‌شوند.

۲- معادلات حاصل از قسمت ۱ به کمک روش تفاضل محدود گسسته‌سازی می‌شود. جهت گسسته‌سازی معادلهٔ حاکم بر تابع جریان از روش SOR و برای معادلات حاکم بر ورتیسیتی و انرژی از روش صریح FTCS استفاده می‌شود.

۳- معادلات گسسته‌سازی شده در نرم‌افزار متلب نوشته شده و پس از رسیدن به جواب پایا گزارش می‌شوند.

پس از حل این مساله و استخراج نتایج، به سوالات زیر پاسخ داده شده است؛

الف) در حالت ایزوترمال و به ازای $Re = 100$، مولفهٔ عمودی سرعت در $Y = 0.5$، شبکه‌ای که به ازای آن حل عددی مستقل از تعداد شبکه می‌شود، چه نوع شبکه‌ای است؟

ب) در حالت ایزوترمال و به ازای $Re = 100$، نتایج حاصل برای U در $Y = 0.5$، چه مقدار با نتایج حاصل قیا و همکاران [1] مطابقت دارد؟

ج)تاثیر عدد ریچاردسون بر روی نتایج حاصل چیست؟

د)پس از محاسبهٔ نیروی اصطکاک و نرخ انتقال حرارت بی‌بعد روی دیواره سمت چپ، دربارهٔ تاثیر عدد ریچاردسون بر آن‌ها بحث کنید.

---

[1] Boussinesq Approximation

ه)معادلهٔ حاکم بر فشار را استخراج کنید.

باید در نظر گرفته شود که در بررسی این پروژه، معیار همگرایی جواب در روش‌های تکراری 10^{-5} در نظر گرفته شده است.

فصل ۲:

معادلات حاکم و نحوهٔ گسسته‌سازی آن‌ها

۲-۱- معادلات حاکم بر مساله

باتوجه به تمام فرضیات گفته شده در فصل قبل، معادلات بقا به شکل زیر نوشته می‌شوند؛

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{۲-۱}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{۲-۲}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+g\beta(T-T_C) \tag{۲-۳}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{۲-۴}$$

که در معادلات بالا، ν لزجت سینماتیکی، ρ چگالی سیال و α ضریب پخش حرارت است. به منظور ساده‌سازی روند حل بهتر است به کمک پارامترهای بی‌بعدساز زیرمعادلات حاکم را بازنویسی کنیم؛

$$X=\frac{x}{L},\ \ Y=\frac{y}{L}\ \ ,\tau=\frac{t\times u_0}{L},\ \ U=\frac{u}{u_0},\ \ V=\frac{v}{v_0},\ \ P=\frac{p}{\rho u_0^2},\ \ \theta=\frac{T-T_C}{T_H-T_C}$$

فرم بی‌بعد معادلات به شکل زیرخواهند بود؛

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \tag{۲-۵}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}+U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}=-\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) \tag{۲-۶}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}+U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}=-\frac{\partial P}{\partial Y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right)+Ri\theta \tag{۲-۷}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau}+U\frac{\partial \theta}{\partial X}+V\frac{\partial \theta}{\partial Y}=\frac{1}{Pe}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right) \tag{۲-۸}$$

که در آن، Re عدد رینولدز، Ri عدد ریچاردسون و Pe عدد پکلت هستند که هر یک به صورت زیر تعریف می‌شوند؛

$$Re = \frac{u_0 \times L}{\nu} \tag{۹-۲}$$

$$Pe = Re \times Pr \tag{۱۰-۲}$$

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \; where \; Gr = \frac{g\beta L^3 (T_H - T_C)}{\nu^2} \tag{۱۱-۲}$$

۲-۲- شرایط مرزی

با توجه به اینکه در حل عددی با دو معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دو مواجه هستیم، به چهار شرط مرزی برای حل هر کدام از توابع جریان و ورتیسیتی نیازمندیم، این چهار شرط برای تابع جریان عبارتند از؛

$$u(0,y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x=0) = 0 \rightarrow \psi(0,y) = 0 \tag{۱۲-۲}$$

$$u(L,y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x=L) = 0 \rightarrow \psi(L,y) = 0 \tag{۱۳-۲}$$

$$v(x,0) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(y=0) = 0 \rightarrow \psi(x,0) = 0 \tag{۱۴-۲}$$

$$v(x,H) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(y=H) = 0 \rightarrow \psi(x,H) = 0 \tag{۱۵-۲}$$

شرایط مرزی ورتیسیتی نیز عبارتند از؛

$$\omega_{۱,j} = -۲\frac{\psi_{۲,j}}{\Delta X^۲}(j = ۲{:}\, jmax - ۱) \tag{۱۶-۲}$$

$$\omega_{imax,j} = \omega_{۱,j} - ۲\frac{\psi_{imax-۱,j}}{\Delta X^۲}(j = ۲{:}\, jmax - ۱) \tag{۱۷-۲}$$

$$\omega_{i,۱} = -۲\frac{\psi_{i,۲}}{\Delta Y^۲}(i = ۲: imax - ۱) \quad (۱۸-۲)$$

$$\omega_{i,jmax} = -۲\frac{\psi_{i,jmax-۱} + U\Delta Y}{\Delta Y^۲}(i = ۲: imax - ۱) \quad (۱۹-۲)$$

شرایط مرزی دمایی و سرعت‌ها نیز عبارتند از؛

$$\theta_{i,۲} = \theta_{i,۱} \quad (۲۰-۲)$$

$$\theta_{i,jmax} = \theta_{i,jmax-۱} \quad (۲۱-۲)$$

$$X = ۱ \rightarrow \theta = ۱ \quad (۲۲-۲)$$

$$X = ۰ \rightarrow \theta = ۰ \quad (۲۳-۲)$$

$$V(۰, Y) = V(۱, Y) = V(X, ۰) = V(۱,۰) = ۰ \quad (۲۴-۲)$$

$$U(۰, Y) = U(۱, Y) = U(X, ۰) = ۰ \quad (۲۵-۲)$$

$$U(۱,۰) = u_0 \quad (۲۶-۲)$$

به کمک تعریف تابع جریان و ورتیسیتی و جایگذاری آن‌ها در معادلات (۲-۵) تا (۲-۸) خواهیم داشت؛

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{۱}{L}\frac{\partial\psi}{\partial Y} \quad (۲۷-۲)$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{۱}{L}\frac{\partial\psi}{\partial X} \quad (۲۸-۲)$$

$$\omega = -\left(\frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲\psi}{\partial y^۲}\right) \quad (۲۹-۲)$$

$$U\frac{\partial\omega}{\partial X} + V\frac{\partial\omega}{\partial Y} = \frac{۱}{Re}\left(\frac{\partial^۲\omega}{\partial X^۲} + \frac{\partial^۲\omega}{\partial Y^۲}\right) + Ri\frac{\partial\theta}{\partial X} \quad (۳۰-۲)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+U\frac{\partial\theta}{\partial X}+V\frac{\partial\theta}{\partial Y}=\frac{1}{Pe}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}\right) \tag{۲-۳۱}$$

حال به ترتیب شروع به گسسته‌سازی معادلات (۲-۲۷) تا (۲-۳۱) به روش FTCS می‌کنیم، برای معادلهٔ (۲-۲۷) و (۲-۲۸) به طور مشابه می‌توان نوشت؛

$$uU=\frac{1}{L}\frac{\partial\psi}{\partial Y}\rightarrow U_{i,j}=\frac{1}{uL}\frac{\partial\psi}{\partial Y}=\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2\Delta Y} \tag{۲-۳۲}$$

$$vV=-\frac{1}{L}\frac{\partial\psi}{\partial X}\rightarrow V_{i,j}=\frac{1}{vL}\frac{\partial\psi}{\partial X}=\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2\Delta X} \tag{۲-۳۳}$$

برای معادلهٔ (۲-۲۹) نیز داریم؛

$$\omega_{i,j}=-\left(\frac{\psi_{i+1,j}-2\psi_{i,j}+\psi_{i-1,j}}{\Delta X^2}+\frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{\Delta Y^2}\right) \tag{۲-۳۴}$$

برای معادلهٔ (۲-۳۰) و (۲-۳۱) نیز به طور مشابه خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i,j}^{n}}{\Delta\tau}+U_{i,j}\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{2\Delta X}+V_{i,j}\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{2\Delta Y}\\=\frac{1}{Re}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-2\omega_{i,j}+\omega_{i-1,j}}{\Delta X^2}\right.\\\left.+\frac{\omega_{i,j+1}-2\omega_{i,j}+\omega_{i,j-1}}{\Delta Y^2}\right)+Ri\frac{\theta_{i+1,j}-\theta_{i-1,j}}{2\Delta X}\end{aligned} \tag{۲-۳۵}$$

$$\begin{aligned}\frac{\theta_{i,j}^{n+1}-\theta_{i,j}^{n}}{\Delta\tau}+U_{i,j}\frac{\theta_{i+1,j}-\theta_{i-1,j}}{2\Delta X}+V_{i,j}\frac{\theta_{i,j+1}-\theta_{i,j-1}}{2\Delta Y}\\=\frac{1}{Pe}\left(\frac{\theta_{i+1,j}-2\theta_{i,j}+\theta_{i-1,j}}{\Delta X^2}\right.\\\left.+\frac{\theta_{i,j+1}-2\theta_{i,j}+\theta_{i,j-1}}{\Delta Y^2}\right)\end{aligned} \tag{۲-۳۶}$$

حال معادلات گسسته شده را به صورت قابل استفاده در متلب به صورت زیر می‌نویسیم، تا بتوانیم مساله را حل عددی بکنیم؛

$$U_{i,j}^{n}=\frac{\psi_{i,j+۱}^{n}-\psi_{i,j-۱}^{n}}{۲\Delta Y} \tag{۲-۳۷}$$

$$V_{i,j}^{n}=\frac{\psi_{i+۱,j}^{n}-\psi_{i-۱,j}^{n}}{۲\Delta X} \tag{۲-۳۸}$$

$$U_{i,j}^{n}=\frac{\psi_{i,j+۱}^{n}-\psi_{i,j-۱}^{n}}{۲\Delta Y} \tag{۲-۳۹}$$

$$\begin{aligned}\omega_{i,j}^{n+۱}=\omega_{i,j}^{n}+\Delta\tau\Bigg[&-U_{i,j}\frac{\omega_{i+۱,j}-\omega_{i-۱,j}}{۲\Delta X}-V_{i,j}\,\frac{\omega_{i,j+۱}-\omega_{i,j-۱}}{۲\Delta Y}\\&+\frac{۱}{Re}\left(\frac{\omega_{i+۱,j}-۲\omega_{i,j}+\omega_{i-۱,j}}{\Delta X^{۲}}\right.\\&\left.+\frac{\omega_{i,j+۱}-۲\omega_{i,j}+\omega_{i,j-۱}}{\Delta Y^{۲}}\right)+Ri\frac{\theta_{i+۱,j}-\theta_{i-۱,j}}{۲\Delta X}\Bigg]\end{aligned} \tag{۲-۴۰}$$

$$\begin{aligned}\theta_{i,j}^{n+۱}=\theta_{i,j}^{n}+\Delta\tau\Bigg[&-U_{i,j}\frac{\theta_{i+۱,j}-\theta_{i-۱,j}}{۲\Delta X}-V_{i,j}\,\frac{\theta_{i,j+۱}-\theta_{i,j-۱}}{۲\Delta Y}\\&+\frac{۱}{Pe}\left(\frac{\theta_{i+۱,j}-۲\theta_{i,j}+\theta_{i-۱,j}}{\Delta X^{۲}}\right.\\&\left.+\frac{\theta_{i,j+۱}-۲\theta_{i,j}+\theta_{i,j-۱}}{\Delta Y^{۲}}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{۲-۴۱}$$

$$\psi_{i,j}^{k+۱}=\frac{\psi_{i+۱,j}^{k}+\psi_{i-۱,j}^{k+۱}+\psi_{i,j+۱}^{k}+\psi_{i,j-۱}^{k+۱}+\left(\omega_{i,j}^{k+۱}\right)(\Delta X)^{۲}}{۴} \tag{۲-۴۲}$$

به منظور به دست آوردن توزیع فشار نیز کافی است، از معادلهٔ ممنتوم در راستاهای مختلف نسبت به راستاهای مربوطه مشتق گرفته و دو معادلهٔ حاصل را با یکدی گر جمع کنیم. نتیجهٔ نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla^{۲}p=۲\rho\left[\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial x^{۲}}\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial y^{۲}}-\left(\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial x\partial y}\right)\right] \tag{۲-۴۳}$$

که فرم گسسته شدهٔ آن به صورت زیر خواهد بود:

$$P_{i,j} = \frac{\rho}{\Delta X^{۲}}\Big[(\psi_{i+۱,j} - ۲\psi_{i,j} + \psi_{i-۱,j})\big(\psi_{i,j+۱} - ۲\psi_{i,j} + \psi_{i,j-۱}\big) - \frac{۱}{۱۶}\Big[\Big(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j-1}\Big)^{۲}\Big] - \frac{Ri\Delta X\rho}{۸}\big(\theta_{i,j+۱} - \theta_{i.j-۱}\big) + \frac{۱}{۴}(P_{i+۱,j} + P_{i-۱,j} + P_{i,j+۱} + P_{i,j-۱}) \qquad (۴۴-۲)$$

فصل ۳:

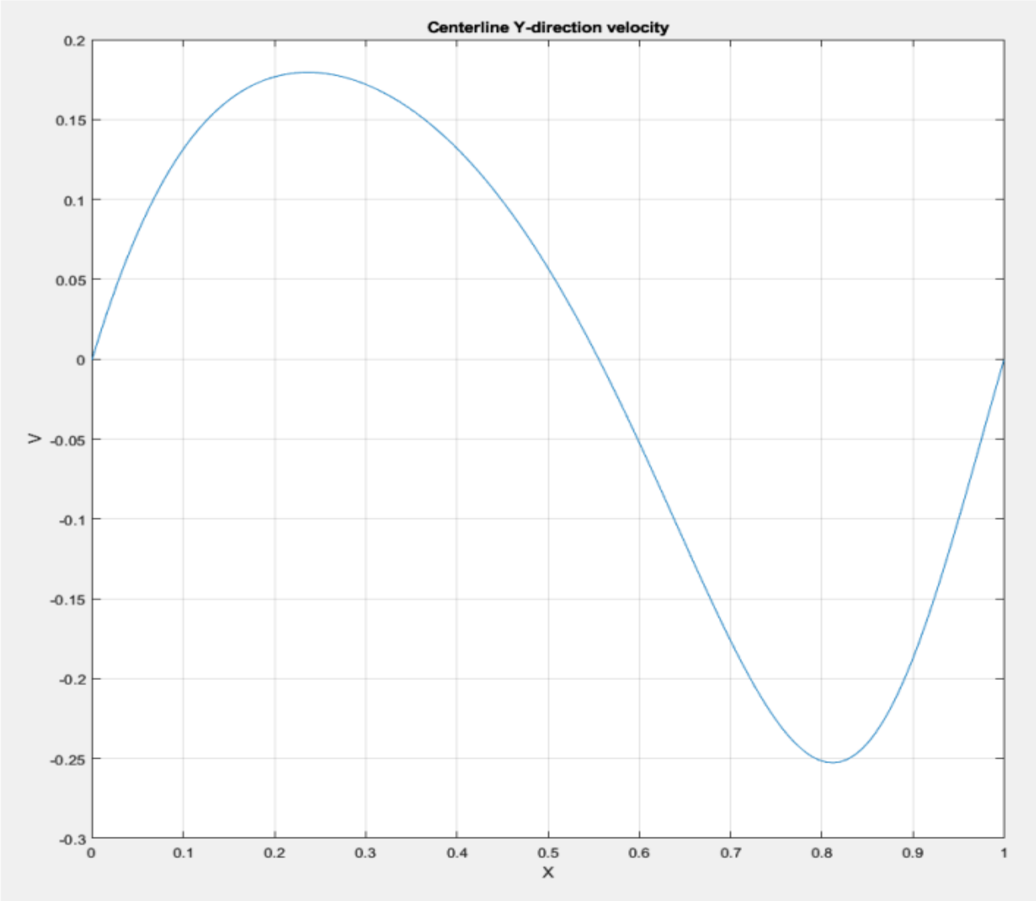
نتایج حل عددی

۳-۱- مقدمه

باتوجه به خواستهٔ پروژه، مساله برای دو حالت ایزوترمال و حالت گرادیان دما در نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی شده است، معادلات و روند حل هر دو مساله به یک شکل هستند با این تفاوت که در حالت ایزوترمال، به دلیل نبود گرادیان دما معادلهٔ انرژی حل نمی‌شود. کدهای متلب مربوط به مساله برای عدد گراشف $۱۰^{۳}$ در قسمت پیوست آورده شده است.

۳-۲- استقلال حل عددی از شبکه

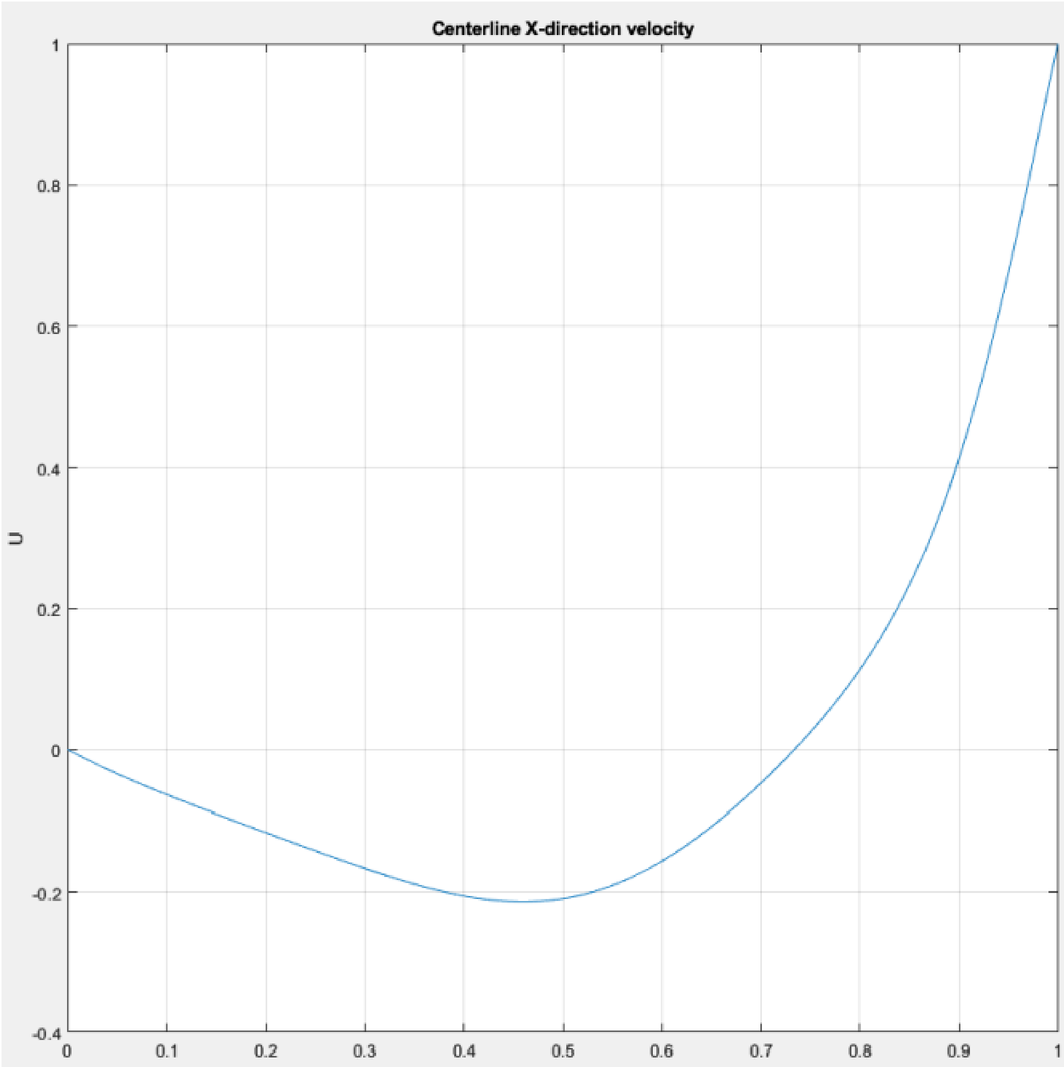
در صورتی که تعداد شبکه‌ها از حدی پایین‌تر باشد، دقت نتایج کاهش پیدا می‌کند. از طرف دیگر، شبیه‌سازی ساختارهایی با تعداد شبکهٔ بالا به سیستم پردازش قوی‌تر و رم‌های با ظرفیت بالاتر نیاز دارد. به همین دلیل مطالعهٔ استقلال حل عددی از تعداد شبکه انجام شده است. بدین منظور در $Re = 100$، نمودار مولفهٔ عمودی سرعت در $Y = ۰/۵$ در شکل ۳–۱رسم شده است. پس از آن به منظور استقلال حل عددی از شبکه، شبکه ریزتر شده و با معیار قرار دادن اندازهٔ سرعت در دیواره این نکته بررسی شده است. نتایج حاصل نشان داده است در اندازهٔ شبکهٔ با تعداد گره ۱۳۰ در دو راستا حل عددی مستقل از تعداد شبکه می‌شود.



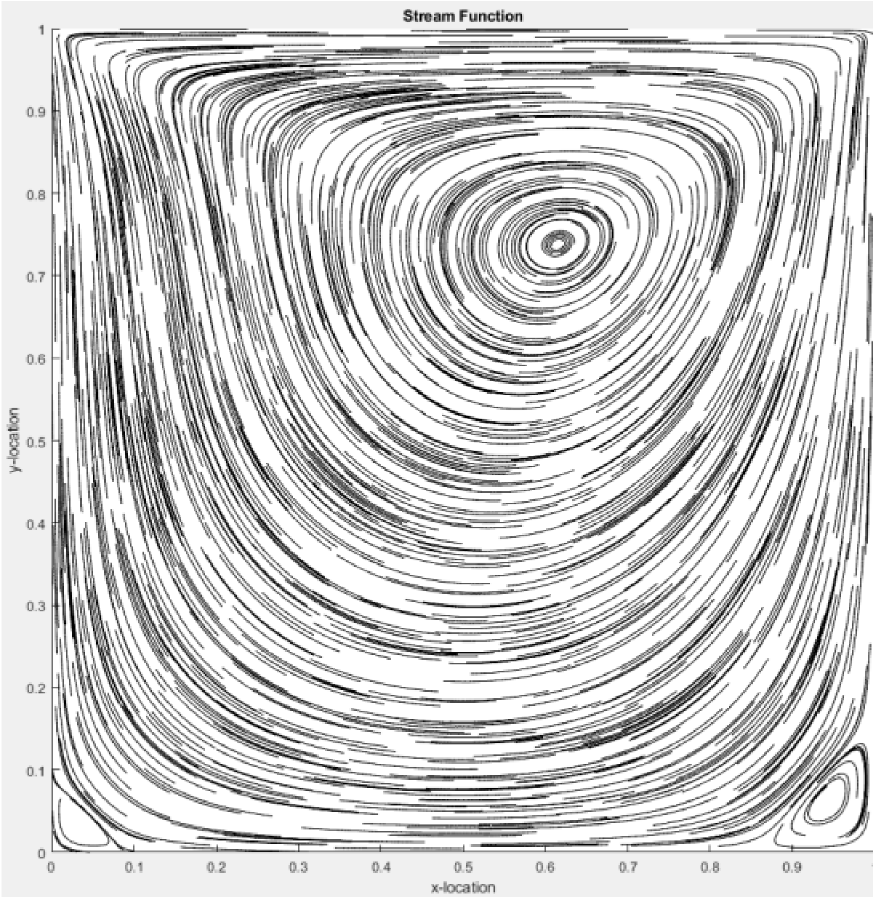
شکل ۳–۱: نمودار مولفهٔ عمودی سرعت در $Y = ۰/۵$.

۳-۳- اعتبار سنجی نتایج

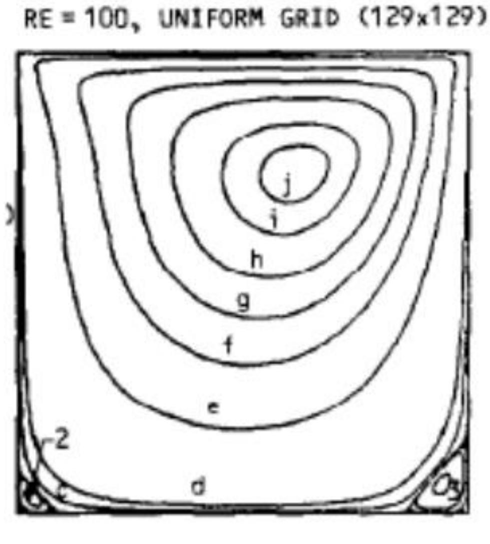
به منظور اعتبارسنجی حل عددی، مولفهٔ افقی سرعت بر روی $X = ۰/۵$ در شکل ۳–۲ رسم شده و نتیجهٔ حاصل همراه با تابع جریان () با نتایج قیا و همکاران [1] مقایسه گردیده است. مشاهده است که نتیجهٔ حاصل از دقت مناسب برخوردار است.



شکل ۳–۲: نمودار مولفهٔ افقی سرعت بر روی $X = ۰/۵$.



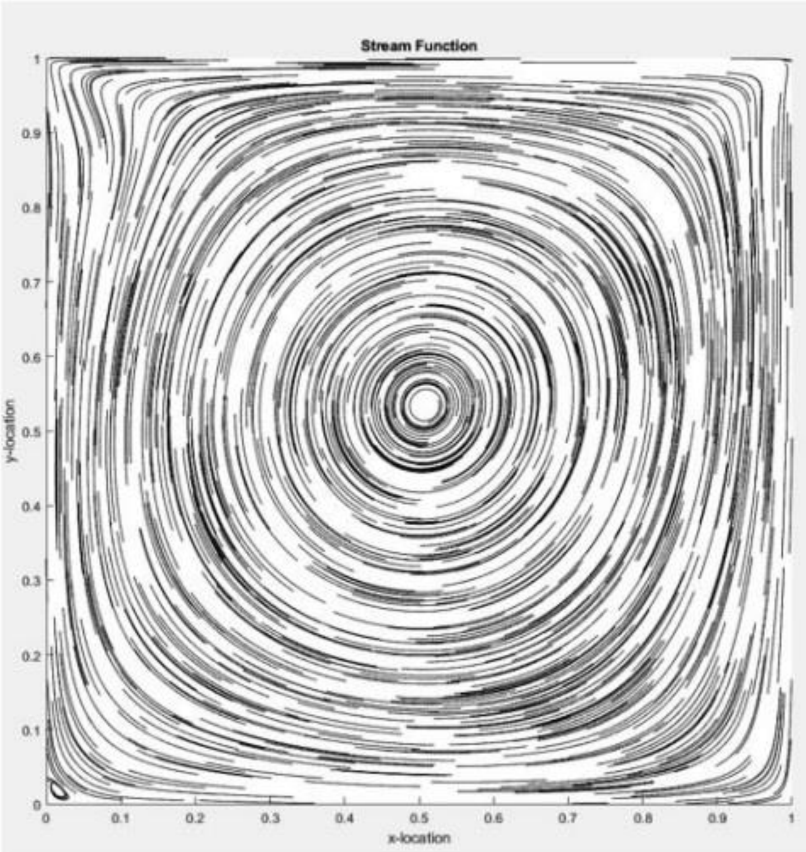
شکل ۳–۳: تابع جریان رسم شده برای حالت ایزوترمال در Re=100.



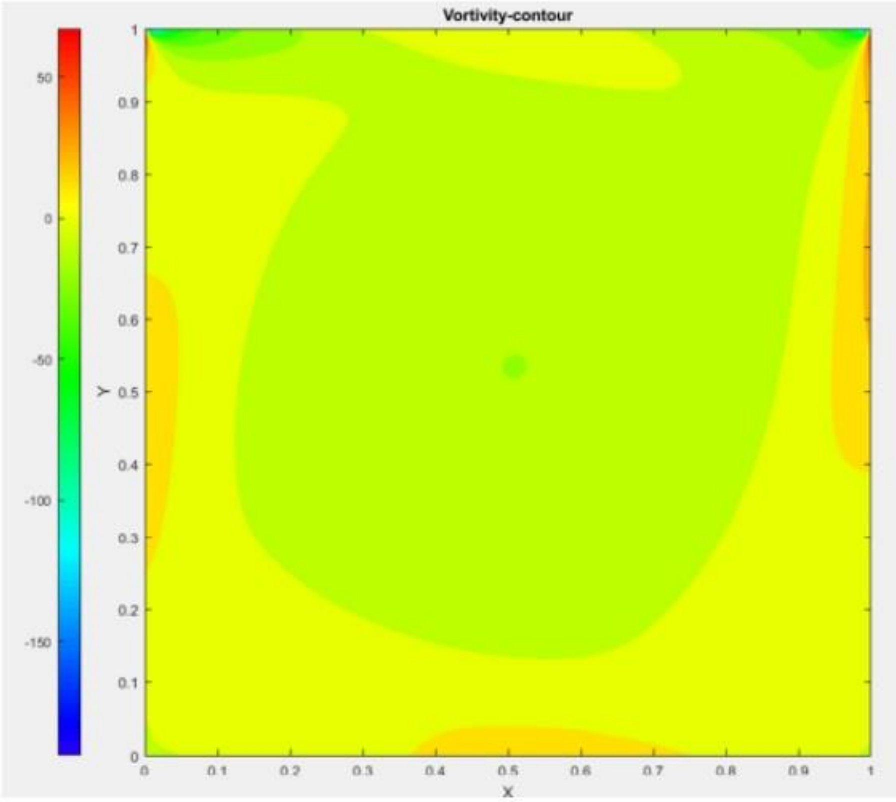
شکل ۳–۴: تابع جریان رسم شده برای حالت ایزوترمال در Re=100 {۱}.

۳-۴- کانتورها و نمودارهای جریان

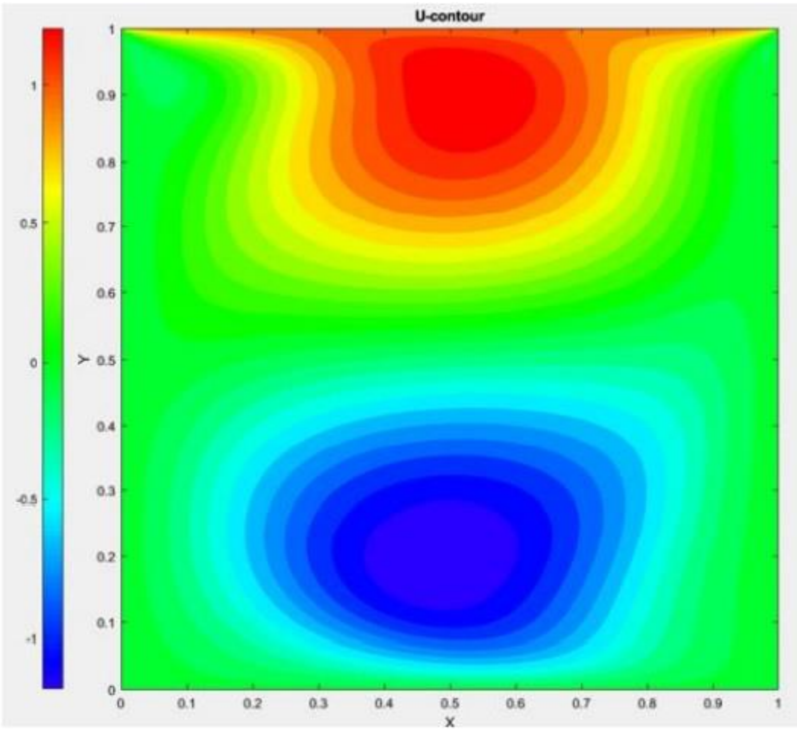
۳-۴-۱- ارائهٔ نتایج برای عدد گراشف ۱۰۰۰



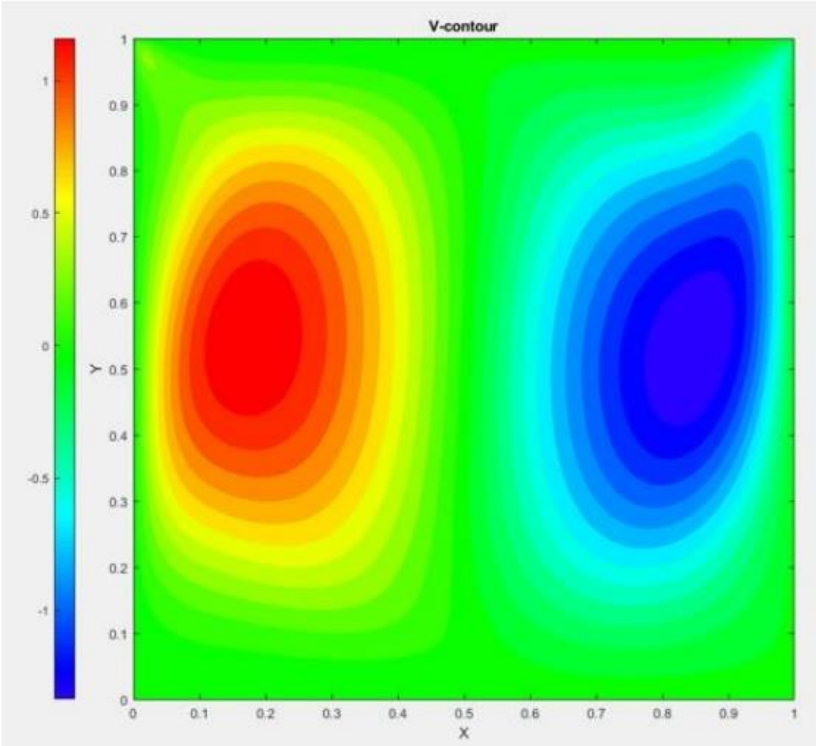
شکل ۳–۵: نمایش تابع جریان برای عدد گراشف ۱۰۰۰.



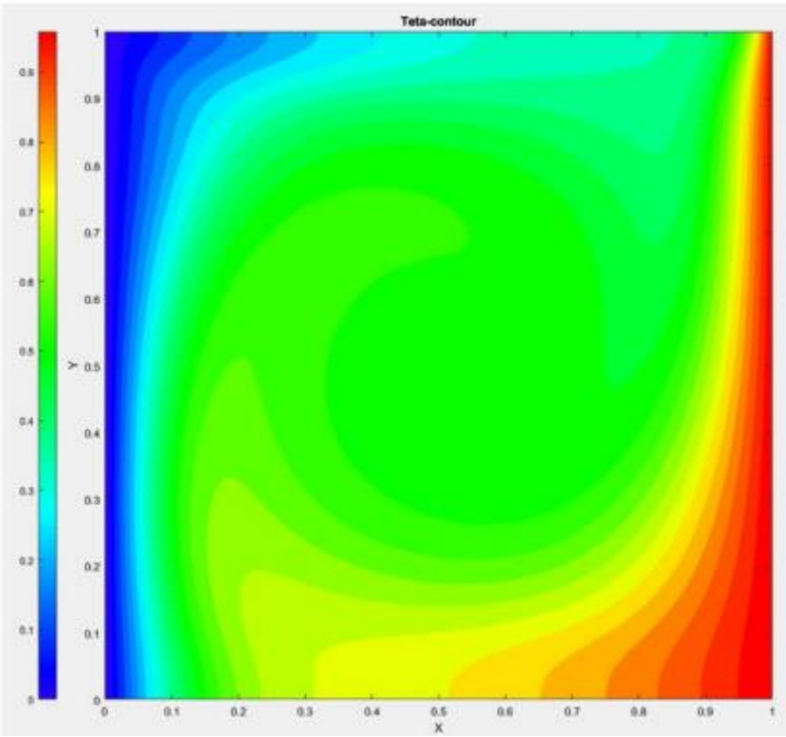
شکل ۳—۶: کانتور ورتیسیتی برای عدد گراشف ۱۰۰۰.



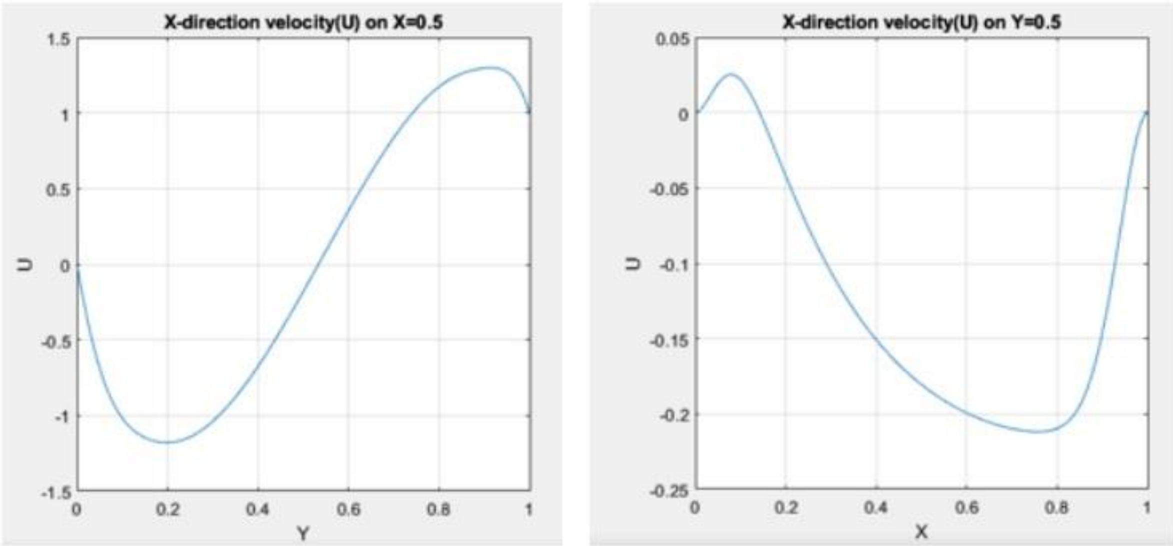
شکل ۳—۷: کانتور مولفهٔ افقی سرعت برای عدد گراشف ۱۰۰۰.



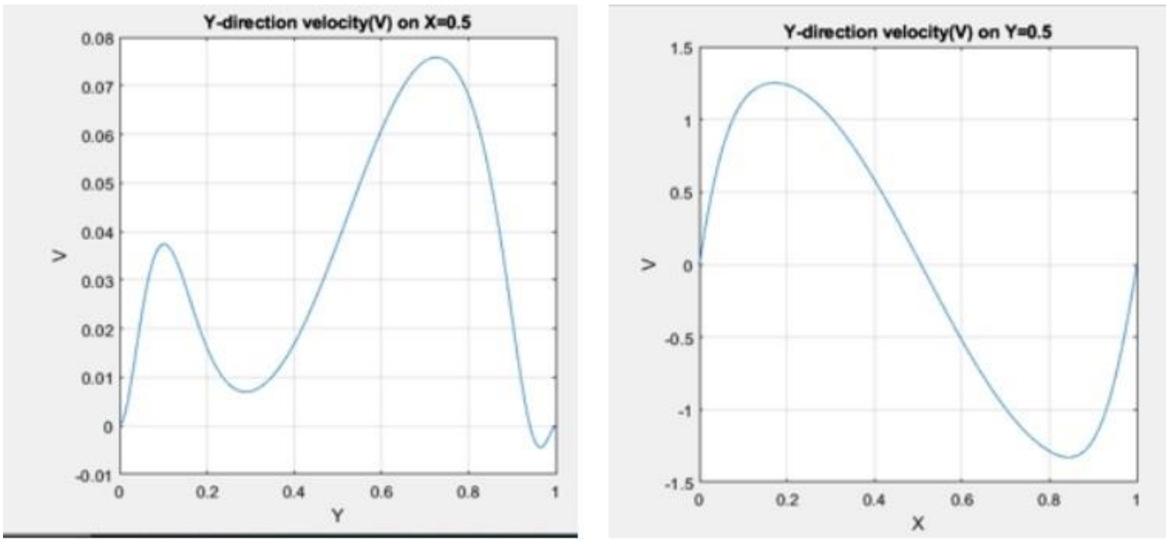
شکل ۳–۸: کانتور مولفهٔ عمودی سرعت برای عدد گراشف ۱۰۰۰.



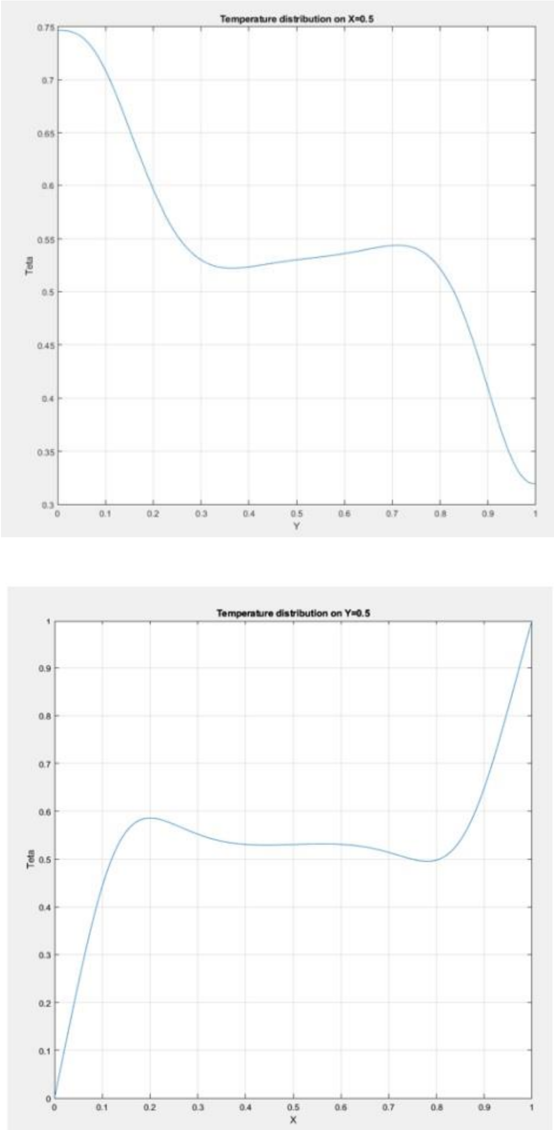
شکل ۳–۹: کانتور دمای بی‌بعد برای عدد گراشف ۱۰۰۰.



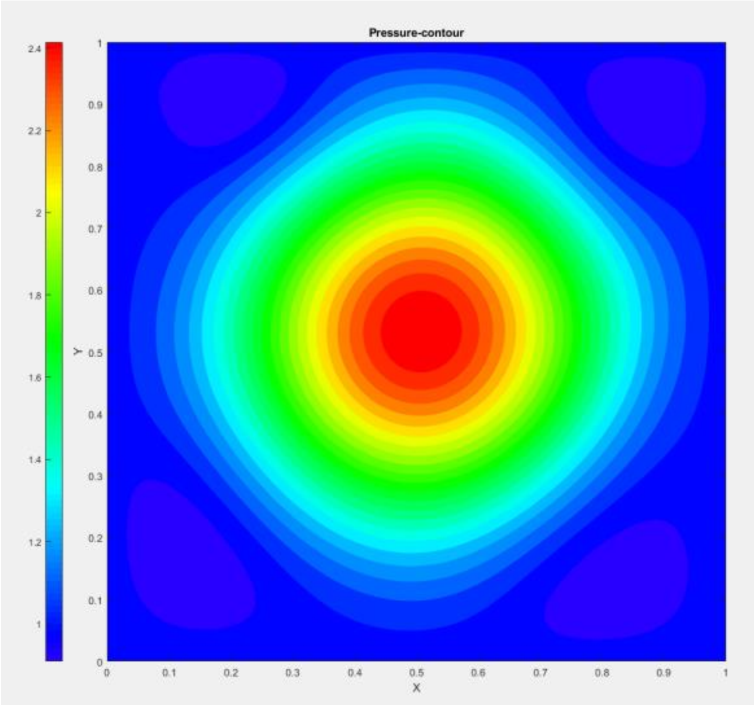
شکل ۳–۱۰: پروفیل مولفهٔ افقی سرعت در x=۰.۵ و y=۰.۵ در عدد گراشف ۱۰۰۰.



شکل ۳–۱۱: پروفیل مولفهٔ عمودی سرعت در x=۰.۵ و y=۰.۵ در عدد گراشف ۱۰۰۰.

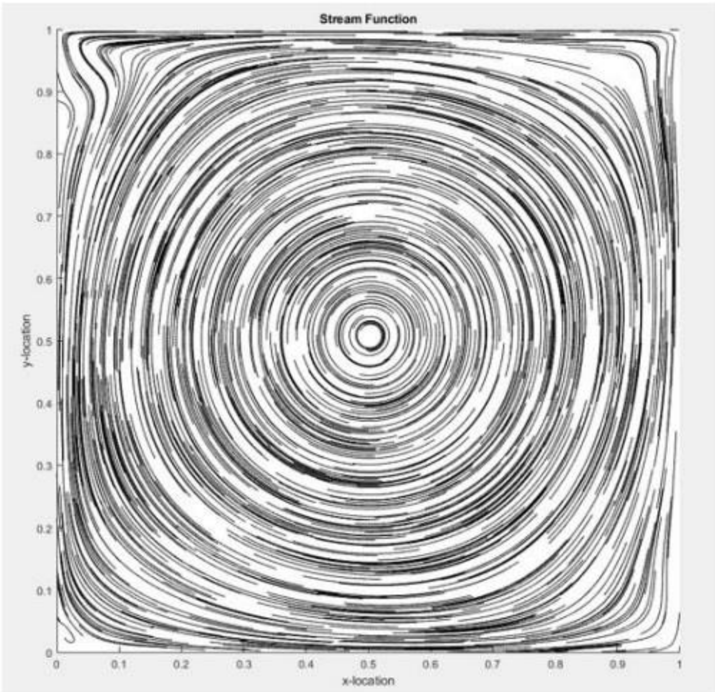


شکل ۳–۱۲: پروفیل دمای بی‌بعد در x=0.5 و y=0.5 در عدد گراشف ۱۰۰۰.

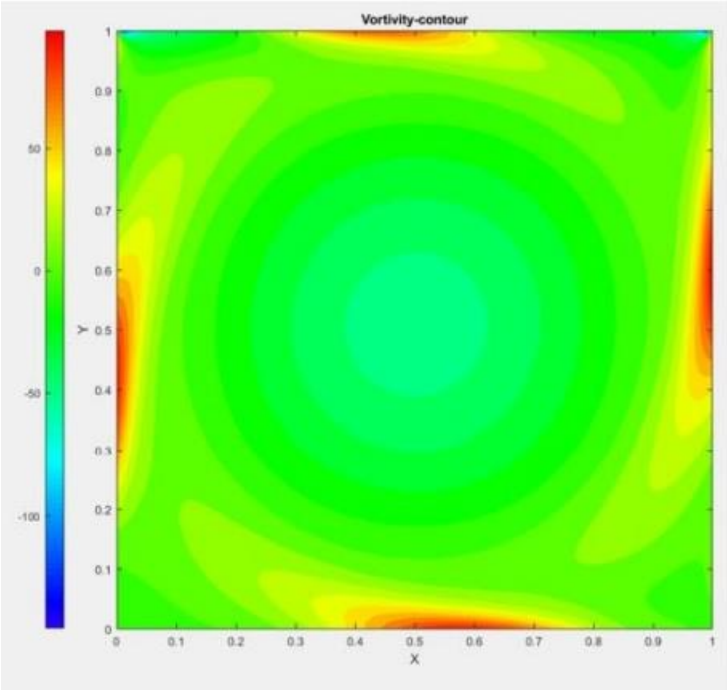


شکل ۳–۱۳: کانتور فشار برای عدد گراشف ۱۰۰۰.

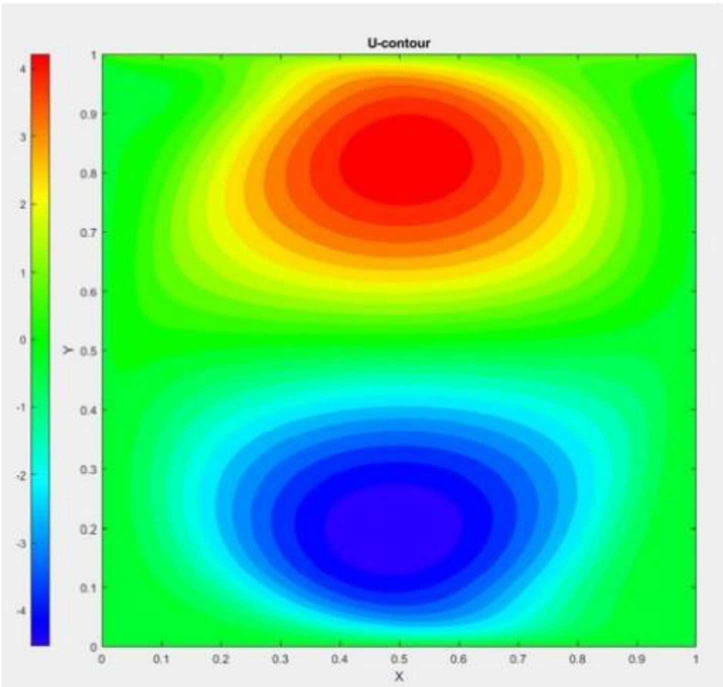
۳-۴-۲- ارائهٔ نتایج برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰



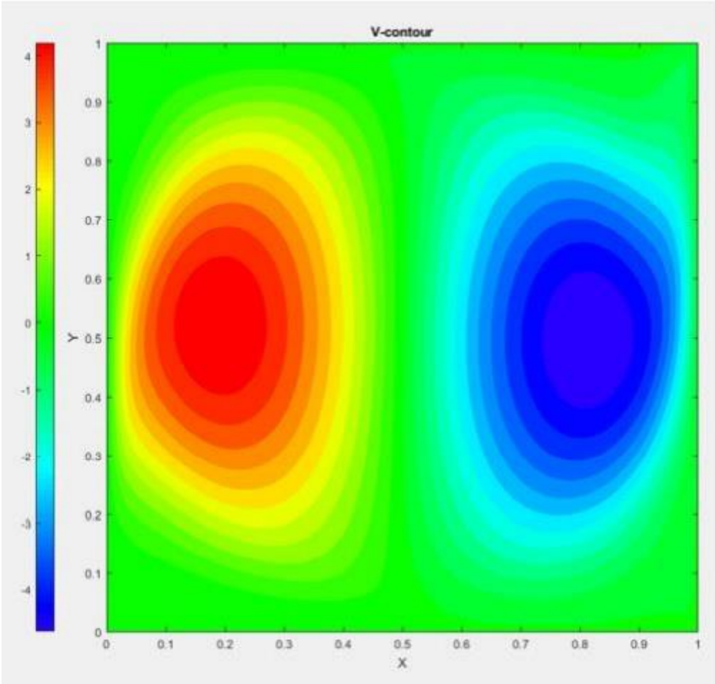
شکل ۳–۱۴: نمایش تابع جریان برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰.



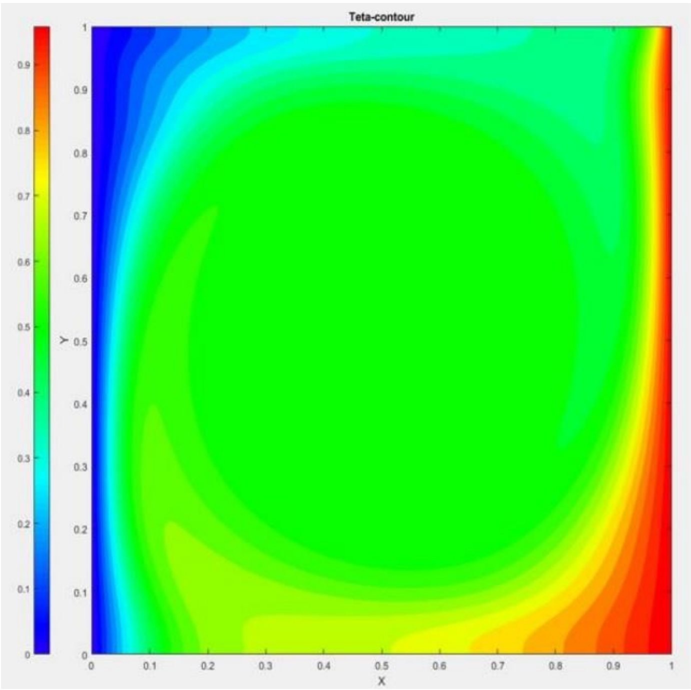
شکل ۳–۱۵:کانتور ورتیسیتی برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰.



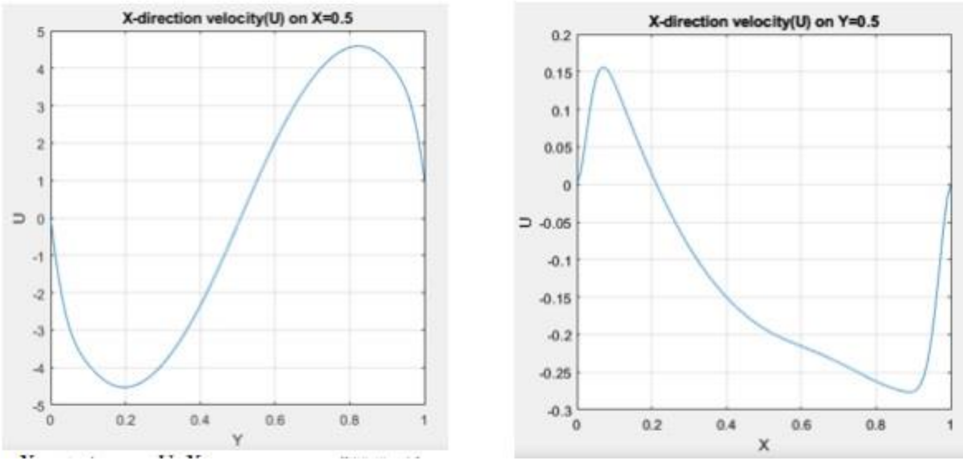
شکل ۳–۱۶: کانتور مولفهٔ افقی سرعت برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰.



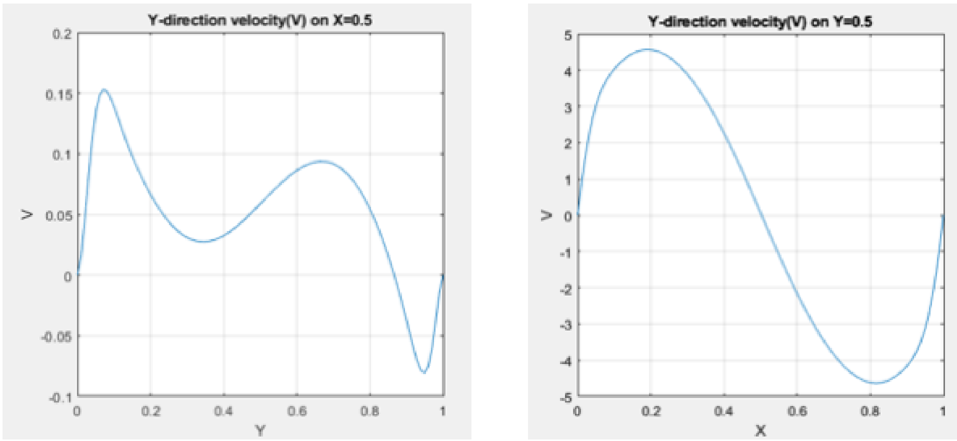
شکل ۳–۱۷: کانتور مولفهٔ عمودی سرعت برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰.



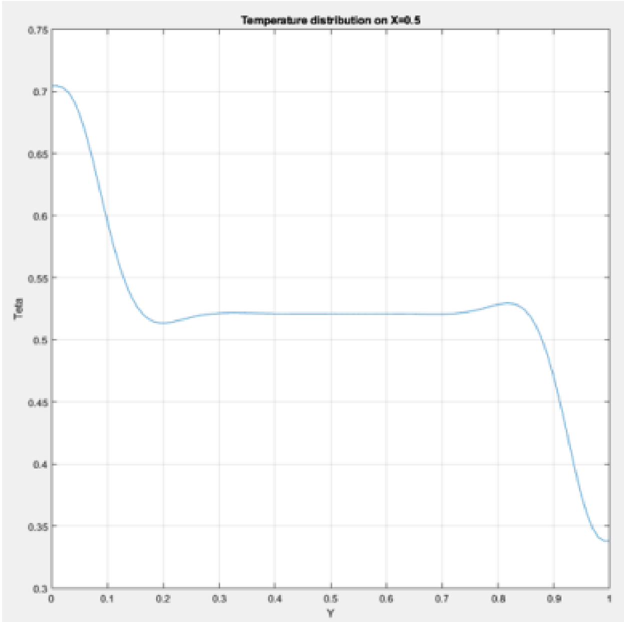
شکل ۳–۱۸: کانتور دمای بی‌بعد برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰.

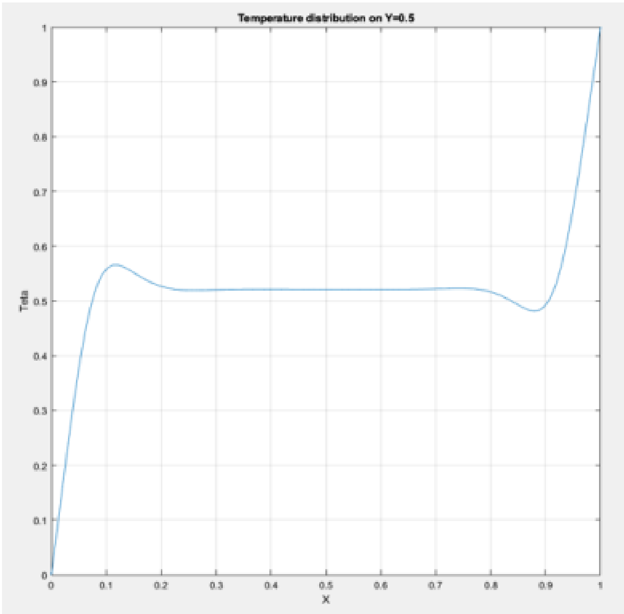


شکل ۳—۱۹: پروفیل مولفهٔ افقی سرعت در x=۰.۵ و y=۰.۵ در عدد گراشف ۱۰۰۰۰.

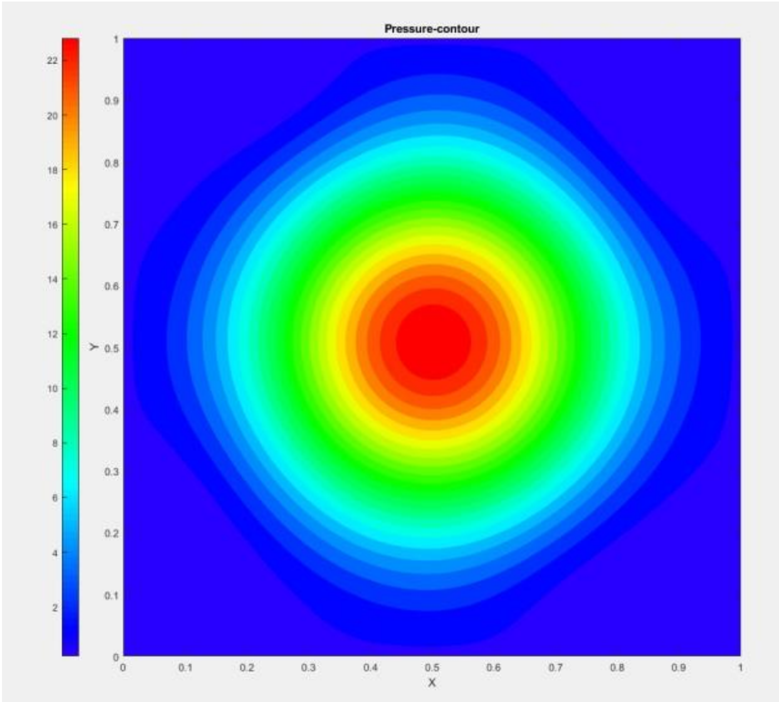


شکل ۳—۲۰: پروفیل مولفهٔ عمودی سرعت در x=۰.۵ و y=۰.۵ در عدد گراشف ۱۰۰۰۰.



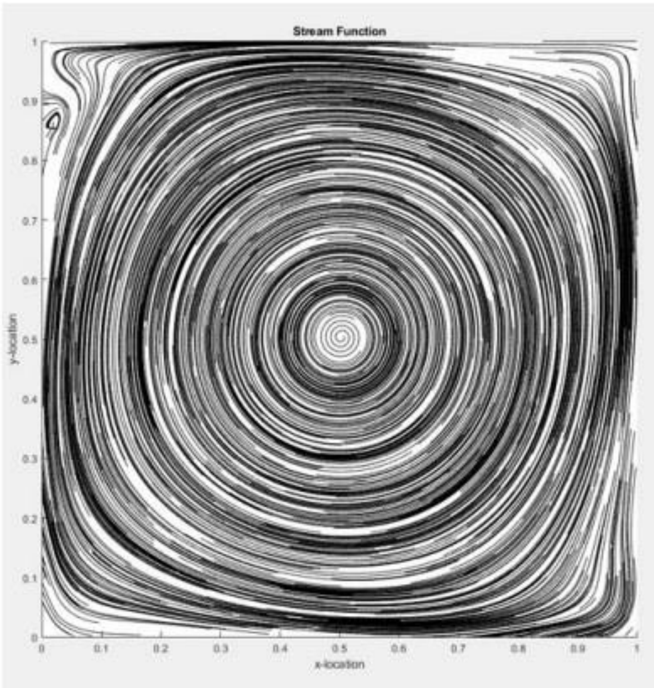


شکل ۳–۲۱: پروفیل دمای بی‌بعد در x=۰.۵ و y=۰.۵ در عدد گراشف ۱۰۰۰۰.

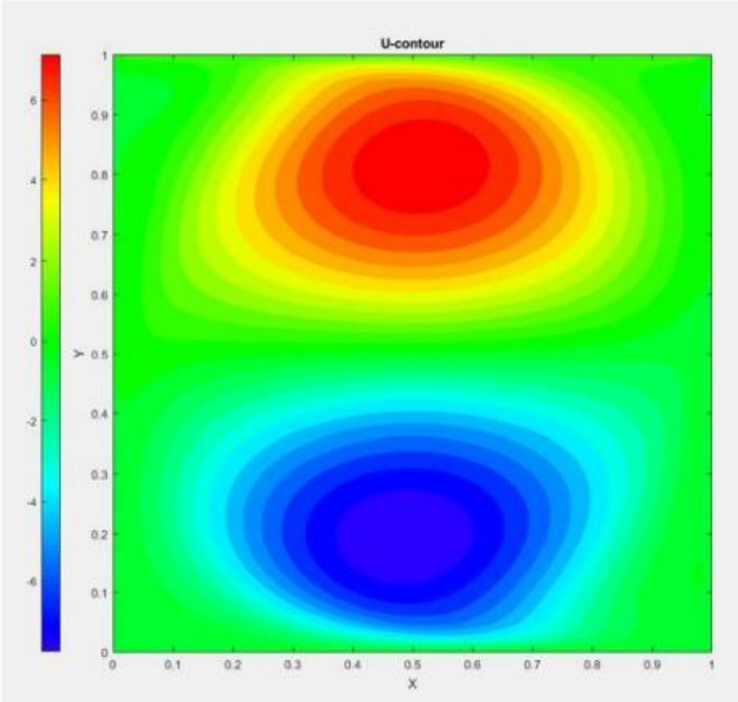


شکل ۳–۲۲: کانتور فشار در عدد گراشف ۱۰۰۰۰.

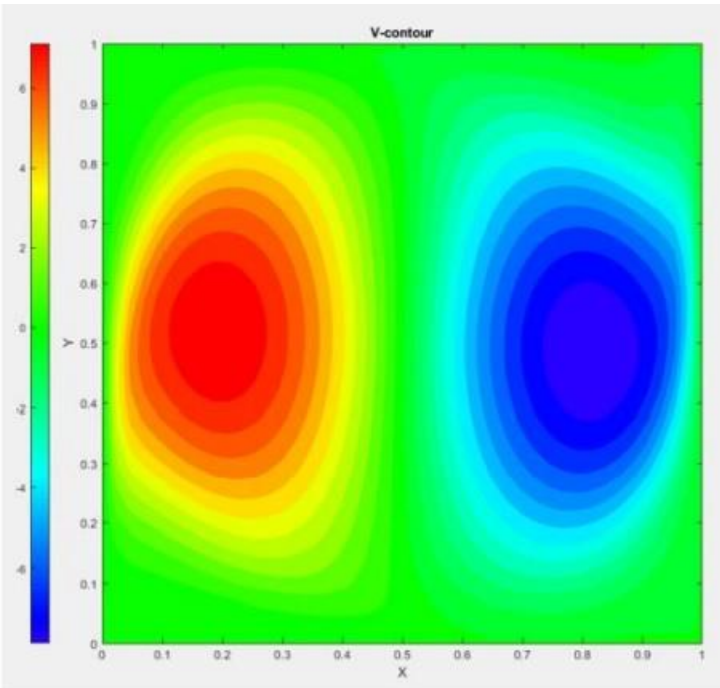
۳-۴-۳- ارائهٔ نتایج برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰۰



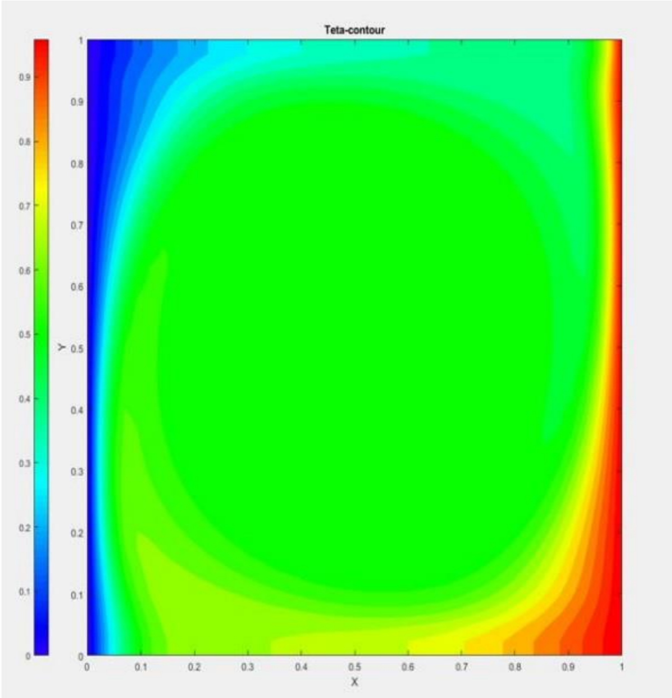
شکل ۳–۲۳: نمایش تابع جریان برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰۰.



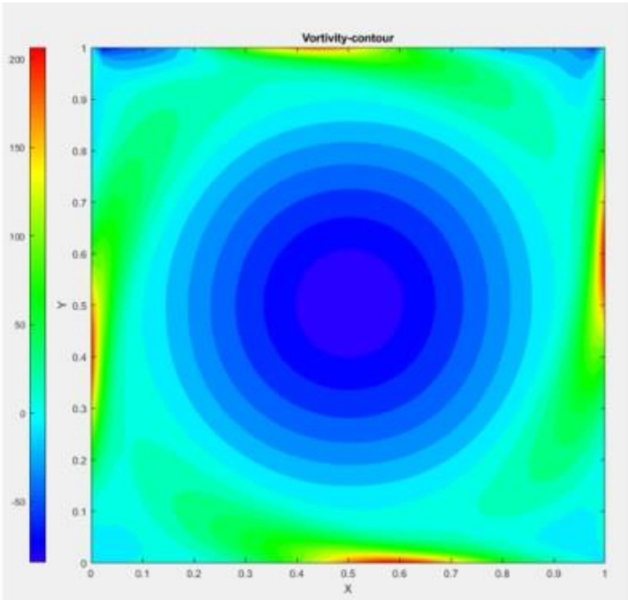
شکل ۳–۲۴: کانتور مولفهٔ افقی سرعت برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰۰.



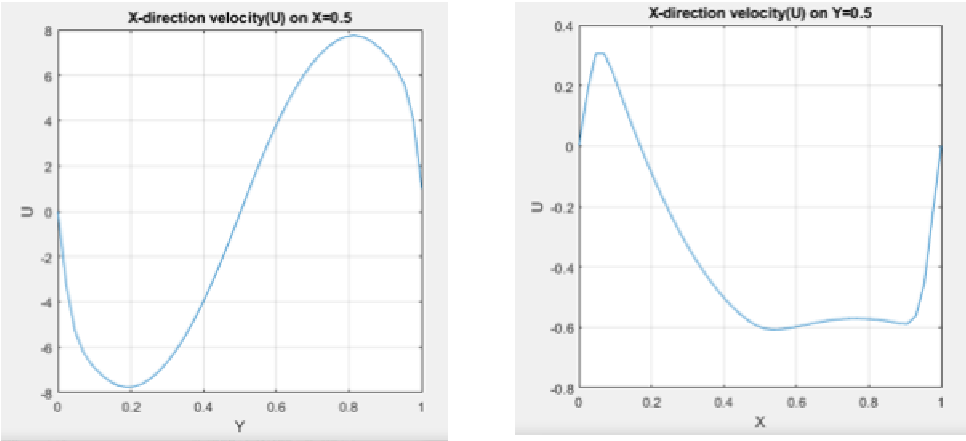
شکل ۳–۲۵: کانتور مولفهٔ عمودی سرعت برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰۰.



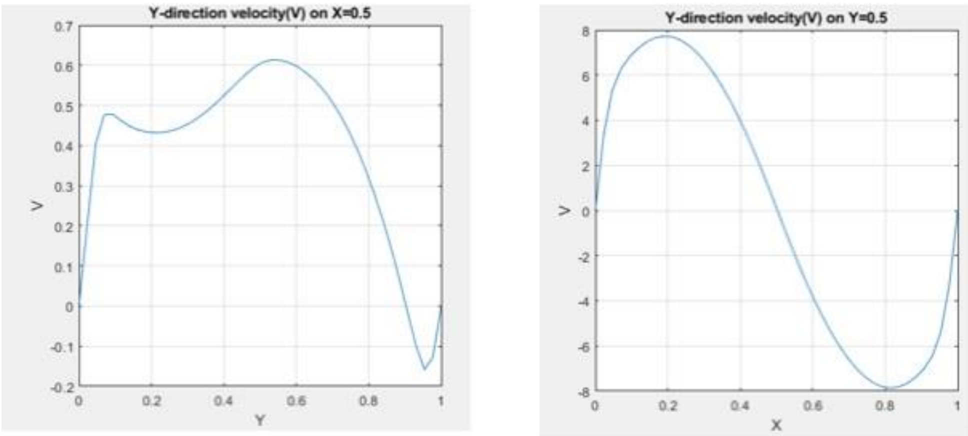
شکل ۳–۲۶: کانتور دمای بی‌بعد برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰۰.



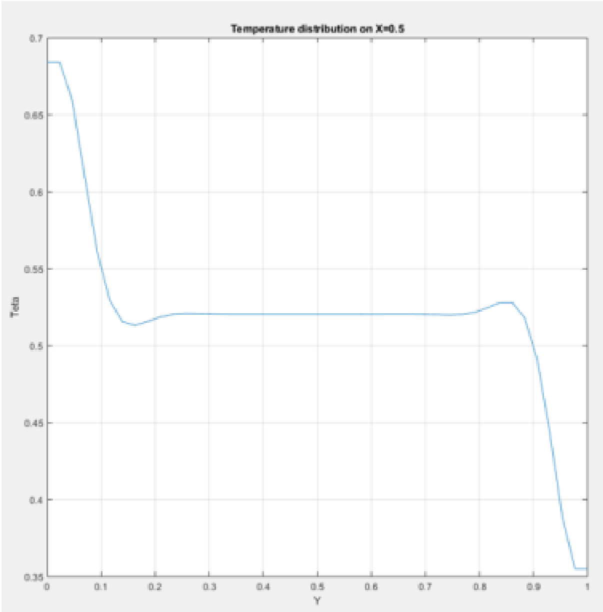
شکل ۳–۲۷: کانتور ورتیسیتی برای عدد گراشف ۱۰۰۰۰۰.

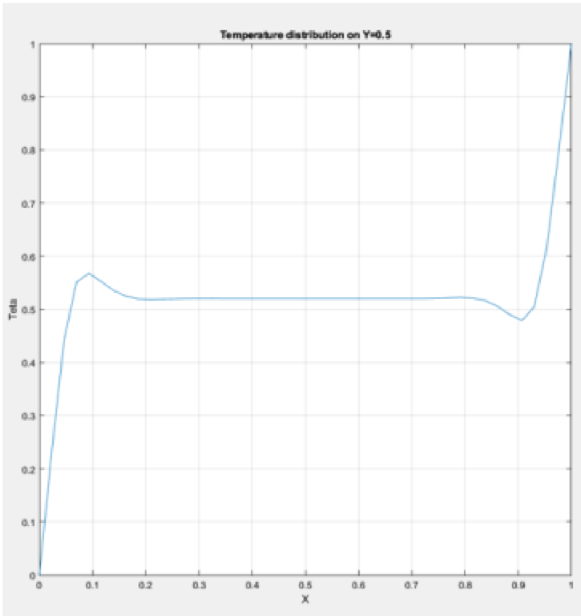


شکل ۳–۲۸: پروفیل مولفهٔ افقی سرعت در x=۰.۵ و y=۰.۵ در عدد گراشف ۱۰۰۰۰۰.

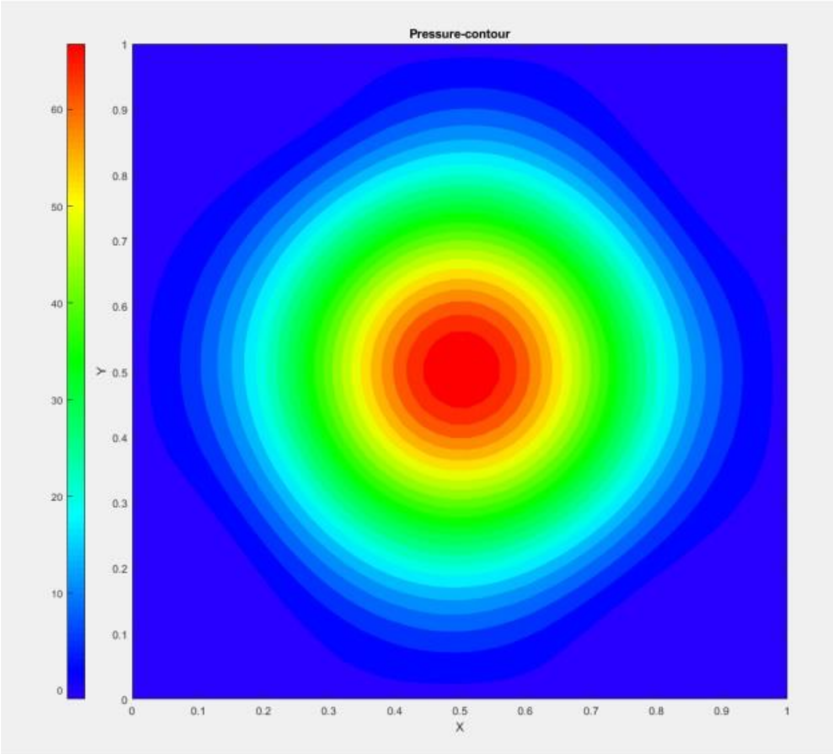


شکل ۳–۲۹: پروفیل مولفهٔ عمودی سرعت در x=۰.۵ و y=۰.۵ در عدد گراشف ۱۰۰۰۰۰.





شکل ۳–۳۰: پروفیل دمای بی‌بعد در x=۰.۵ و y=۰.۵ در عدد گراشف ۱۰۰۰۰۰.



شکل ۳–۳۱: کانتور فشار در عدد گراشف ۱۰۰۰۰.

۳-۵- پردازش داده

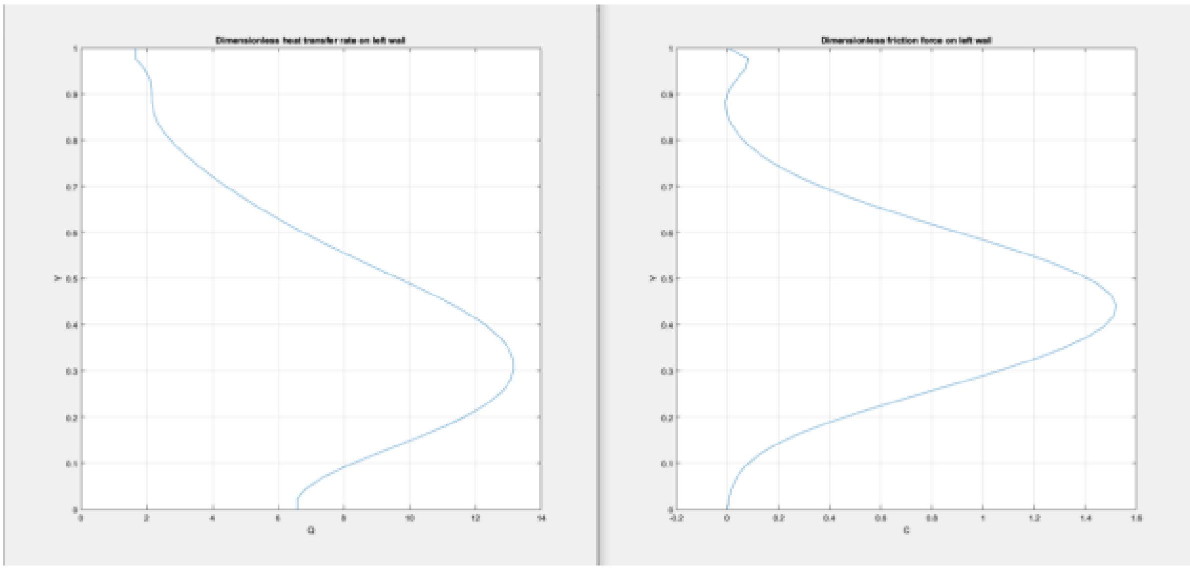
به کمک نتایج حاصل از حل عددی، دو مولفهٔ مهم نیروی اصطکاک و نرخ بی‌بعد انتقال حرارت به شکل زیرقابل محاسبه هستند؛

$$c = \frac{2}{Re}\frac{\partial V}{\partial X} \qquad (۱-۳)$$

$$q = -\frac{\partial T}{\partial X} \qquad (۲-۳)$$

به کمک شرط مرزی عدم لغزش[1] و عدم پرش دمایی[2] روابط بالا گسسته شده و نمودارهای زیر حاصل می‌شوند؛

[1] No Slip Condition
[2] No Temperature Jump



شکل ۳–۳۲: پروفیل نیروی اصطکاک و نرخ بی‌بعد انتقال حرارت.

فصل ۴:

نتایج و بحث

۴-۱- نتیجه‌گیری

نتایج حاصل از حل عددی باتوجه به هر کانتور و پروفیل به شکل زیر قابل بیان هستند؛

۴-۱-۱- تابع جریان و ورتیسیتی

به دلیل شتاب سیال و حرکت آن به سمت راست، لزجت، شرط عدم لغزش و آرام بودن رژیم جریان انتظار می‌رفت یک ورتیسیتی در جریان شکل گرفته و جریان حول این ورتیسیتی شروع به گردش کند. در نمایش توابع جریان و کانتورهای ورتیسیتی، این گردش قابل ملاحظه است.

۴-۱-۲- کانتور مولفهٔ افقی سرعت

با نزدیک شدن به دیواره، مولفهٔ افقی سرعت کمتر شده و در روی دیوارهٔ پایینی (imax) مقدار آن به صفر می‌رسد، لازم به ذکر است مقدار مولفهٔ افقی سرعت در دیوارهٔ بالایی (jmax) بیشینه است. با نگاه کردن به پروفیل مولفهٔ افقی سرعت در مرکز صفحه مشاهده می‌شود به علت ورتیسیتی شکل گرفته در مرکز حفره، مقادیر سرعت در قسمت پایینی منفی و در قسمت بالایی مثبت هستند.

۴-۲- تاثیر عدد ریچاردسون

این عدد، برتری دو نوع جابه‌جایی آزاد و اجباری را بر یکدیگر مشخص می‌کند. در صورتی که عدد ریچاردسون کمتر از یک باشد، جابه‌جایی اجباری بر جابه‌جایی آزاد غلبه کرده و تاثیر بیشتری بر مساله دارد. اما، در صورتی که عدد ریچاردسون بیشتر از یک باشد، جابه‌جایی آزاد بر جابه‌جایی اجباری غلبه کرده و تاثیر بیشتری بر مساله دارد. در حل جریان حفره با روش مزبور، نتایج نشان داده است در صورتی که عدد ریچاردسون به یک نزدیک می‌شود، حل ناپایدار شده و جابه‌جایی آزاد و اجباری هر دو در مساله دیده می‌شوند. در چنین مواردی لازم است جهت رفع ناپایداری تمهیدات مناسب اندیشیده شود.

فصل ۵:

پیوست

Isothermal code%%%

```
;clc

;clear

close all

Parameters%%%

Re= 100;              %Reynolds Number

Pr = .7;              %Prantel Number

Gr = 10^4;            %Grashove Number

Pe = Re*Pr;           %Peccklet Number

Ri = Gr/Re^2;         %Richardson Number

r = 1;                %Density

Nx = 99;              %Number of nodes in x-direction

L = 1;                %Dimensionless length(Domain size)

U = 1;                %Velocity on upper wall

deltt = 0.001;        %Time increments
```

```
max_iteration = 50000;  %Maximum iteration

max_error = 1e-5;       %Maximum error
```

Setting matrixes and requirements for code %%%

```
;Ny = Nx

;d=L/(Nx-1)

;x = 0:d:L

;y = 0:d:L

w = zeros(Nx,Ny);       %Vorticity matrix

wp = w;                 %Previous time iteration values of vorticity

S = zeros(Nx,Ny);       %Stream function

u = zeros(Nx,Ny);       %X-direction velocity

u(2:Nx-1,Ny) = U;       %Top surface velocity

v = zeros(Nx,Ny);       %Y-direction velocity

T = zeros(Nx,Ny);       %Temperature matrix
```

Unsteady solving for w and T%%%

```
for iter = 1:max_iteration
```

Boundary conditions٪٪٪

for vorticity٪٪٪

```
w(:,Ny) = -2*S(:,Ny-1)/(d^2) - U*2/d;       % Top
w(:,1) = -2*S(:,2) /(d^2);                  % Bottom
w(1,:) = -2*S(2,:) /(d^2);                  % Left
w(Nx,:) = -2*S(Nx-1,:)/(d^2);               % Right
```

for temperature٪٪٪

```
T(2:Nx-1,1) = T(2:Nx-1,2);                  %Bottom
T(2:Nx-1,Ny) = T(2:Nx-1,Ny-1);              %Top
```

Calculating vorticity٪٪٪

```
;wp = w
```

```
;Tp=T

for i = 2:Nx-1
for j = 2:Ny-1
...+(w(i,j) = wp(i,j)+(-1*max(u(i,j),0).*((wp(i,j)-wp(i-1,j))/d
...–max(-1*u(i,j),0).*((wp(i+1,j)-wp(i,j))/d)
...+max(v(i,j),0).*((wp(i,j)-wp(i,j-1))/d)
...+max(-1*v(i,j),0).*((wp(i,j+1)-wp(i,j))/d)
...Re*(wp(i+1,j)+wp(i-1,j)-4*wp(i,j)+wp(i,j+1)+wp(i,j-1))/(d^2))*deltt/۱
;deltt*Ri*(T(i+1,j)-T(i-1,j)/(2*d)) +

...+(T(i,j)=Tp(i,j) + (-1*u(i,j).* (Tp(i+1,j)-Tp(i-1,j))/(2*d
...+(-v(i,j)).*(Tp(i,j+1)-Tp(i,j-1))/(2*d)
;Pe*(Tp(i+1,j)+Tp(i-1,j)-4*Tp(i,j)+Tp(i,j+1)+Tp(i,j-1))/(d^2))*deltt/۱
end
end
```

Calculating stream function%%%

```
for i = 2:Nx-1
for j = 2:Ny-1
;S(i,j) = (w(i,j)*d^2 + S(i+1,j) + S(i,j+1) + S(i,j-1) + S(i-1,j))/4
end
end
```

Calculating velocities%%%

```
for i = 2:Nx-1
for j =2:Ny-1
;u(i,j) = (S(i,j+1)-S(i,j-1))/(2*d)
;v(i,j) = (-S(i+1,j)+S(i-1,j))/(2*d)
end
end
```

Convergence check%%%

Error! Reference source not found.

```
if iter > 10

error = max(max(w - wp))

if error < max_error

;break

end

end

end



Plots٪٪٪



;cm = hsv(ceil(100/0.7)); cm = flipud(cm(1:100,:))

;figure(1); plot(x,v(:,round(Ny/2)))

;title('Centerline Y-direction velocity')

xlabel('X'); ylabel('V'); axis('square'); xlim([0 L]); grid on



;figure(2); plot(y,u(round(Ny/2),:))

;title('Centerline X-direction velocity')

xlabel('Y'); ylabel('U'); axis('square'); xlim([0 L]); grid on



;N = 1000; xstart = max(x)*rand(N,1); ystart = max(y)*rand(N,1)
```

;[X,Y] = meshgrid(x,y)

;figure(4); h=streamline(x,y,u',v',xstart,ystart,[0.1, 200])

title('Stream Function'); xlabel('x-location'); ylabel('y-location')

axis('equal',[0 L 0 L]); set(h,'color','k')

Unsteady condition code ٪٪٪

;clc

;clear

close all

Parameters٪٪٪

Re= 100;   %Reynolds Number

Pr = .7;   %Prantel Number

Gr = 10^5;   %Grashove Number

Pe = Re*Pr;   %Peccklet Number

Ri = Gr/Re^2;   %Richardson Number

r = 1;   %Density

```
Nx = 44;             %Number of nodes in x-direction

L = 1;               %Dimensionless length(Domain size)

U = 1;               %Velocity on upper wall



deltt = 0.001;       %Time increments

max_iteration = 50000;  %Maximum iteration

max_error = 1e-5;    %Maximum error



Setting matrixes and requirements for code ٪٪٪



;Ny = Nx

;d=L/(Nx-1)

;x = 0:d:L

;y = 0:d:L

w = zeros(Nx,Ny);     %Vorticity matrix

wp = w;               %Previous time iteration values of vorticity

S = zeros(Nx,Ny);     %Stream function

u = zeros(Nx,Ny);     %X-direction velocity

u(2:Nx-1,Ny) = U;     %Top surface velocity

v = zeros(Nx,Ny);     %Y-direction velocity

T = zeros(Nx,Ny);     %Temperature matrix
```

```
T(Nx,:) = 1;        %Boundary condition on right wall

Unsteady solving for w and T٪٪٪

for iter = 1:max_iteration

Boundary conditions٪٪٪

for vorticity٪٪٪

w(:,Ny) = -2*S(:,Ny-1)/(d^2) - U*2/d;    % Top
w(:,1) = -2*S(:,2) /(d^2);              % Bottom
w(1,:) = -2*S(2,:) /(d^2);              % Left
w(Nx,:) = -2*S(Nx-1,:)/(d^2);             % Right

for temperature٪٪٪

T(2:Nx-1,1) = T(2:Nx-1,2);              %Bottom
```

T(2:Nx-1,Ny) = T(2:Nx-1,Ny-1);　　　　%Top

Calculating vorticity٪٪٪

;wp = w

;Tp=T

for i = 2:Nx-1

for j = 2:Ny-1

...+(w(i,j) = wp(i,j)+(-1*max(u(i,j),0).*((wp(i,j)-wp(i-1,j))/d

...–max(-1*u(i,j),0).*((wp(i+1,j)-wp(i,j))/d)

...+max(v(i,j),0).*((wp(i,j)-wp(i,j-1))/d)

...+max(-1*v(i,j),0).*((wp(i,j+1)-wp(i,j))/d)

...Re*(wp(i+1,j)+wp(i-1,j)-4*wp(i,j)+wp(i,j+1)+wp(i,j-1))/(d^2))*deltt/١

;deltt*Ri*(T(i+1,j)-T(i-1,j)/(2*d)) +

...+(T(i,j)=Tp(i,j) + (-1*u(i,j).* (Tp(i+1,j)-Tp(i-1,j))/(2*d

```
...+(-v(i,j)).*(Tp(i,j+1)-Tp(i,j-1))/(2*d)

;Pe*(Tp(i+1,j)+Tp(i-1,j)-4*Tp(i,j)+Tp(i,j+1)+Tp(i,j-1))/(d^2))*deltt/١

end

end

Calculating stream function٪٪٪

for i = 2:Nx-1

for j = 2:Ny-1

;S(i,j) = (w(i,j)*d^2 + S(i+1,j) + S(i,j+1) + S(i,j-1) + S(i-1,j))/4

end

end

Calculating velocities٪٪٪

for i = 2:Nx-1

for j =2:Ny-1

;u(i,j) = (S(i,j+1)-S(i,j-1))/(2*d)

;v(i,j) = (-S(i+1,j)+S(i-1,j))/(2*d)
```

```
end

end

Convergence check٪٪

if iter > 10

error = max(max(w - wp))

if error < max_error

;break

end

end

end

Calculating pressure after reaching to steady state٪٪

;p = ones(Nx,Ny)

;err_presure = 1
```

```
;t = 0

while err_presure > 0.00001

;po = p
for i = 2:Nx-1
for j = 2:Ny-1
...–((p(i,j) = r/(4*d^2)*(2*((S(i+1,j)-2*S(i,j)+S(i-1,j))*(S(i,j+1)-2*S(i,j)+S(i,j-1

...–((S(i+1,j+1)-S(i-1,j+1)-S(i+1,j-1)+S(i-1,j-1))^2*۱۶/۱

;(Ri*d^3/2*(T(i,j+1)-T(i,j-1))+d^2/r*(p(i+1,j)+p(i-1,j)+p(i,j+1)+p(i,j-1))

end
end

if t > 10
err_presure = max(max(p - po))
end
;t = t+1
end
```

Dimensionless heat transfer rate on left wall٪٪٪

for j = 1:Ny

;q(j,1) = -(T(1,j)-T(2,j))/d

end

Dimensionless friction force on left wall٪٪٪

for j = 1:Ny

;c(j,1) = 1/Re*v(2,j)/d

end

Plots٪٪٪

;cm = hsv(ceil(100/0.7)); cm = flipud(cm(1:100,:))

;figure(1); contourf(x,y,u',23,'LineColor','none')

title('U-contour'); xlabel('X'); ylabel('Y')

;axis('equal',[0 L 0 L]); colormap(cm); colorbar('westoutside')

```
;figure(2); contourf(x,y,v',23,'LineColor','none')
title('V-contour'); xlabel('X'); ylabel('Y')
;axis('equal',[0 L 0 L]); colormap(cm); colorbar('westoutside')

;figure(3); contourf(x,y,T',23,'LineColor','none')
title('Teta-contour'); xlabel('X'); ylabel('Y')
;axis('equal',[0 L 0 L]); colormap(cm); colorbar('westoutside')

;N = 1000; xstart = max(x)*rand(N,1); ystart = max(y)*rand(N,1)
;[X,Y] = meshgrid(x,y)
;figure(4); h=streamline(x,y,u',v',xstart,ystart,[0.1, 200])
title('Stream Function'); xlabel('x-location'); ylabel('y-location')
axis('equal',[0 L 0 L]); set(h,'color','k')

;figure(5); contourf(x,y,w',23,'LineColor','none')
title('Vortivity-contour'); xlabel('X'); ylabel('Y')
;axis('equal',[0 L 0 L]); colormap(cm); colorbar('westoutside')

;figure(6); plot(y,u(round(Nx/2),:))
;title('X-direction velocity(U) on X=0.5')
```

```
xlabel('Y'); ylabel('U'); axis('square'); xlim([0 L]); grid on


;figure(7); plot(x,u(:,round(Ny/2)))
;title('X-direction velocity(U) on Y=0.5')
xlabel('X'); ylabel('U'); axis('square'); xlim([0 L]); grid on


;figure(8); plot(y,v(round(Nx/2),:))
;title('Y-direction velocity(V) on X=0.5')
xlabel('Y'); ylabel('V'); axis('square'); xlim([0 L]); grid on


;figure(9); plot(x,v(:,round(Ny/2)))
;title('Y-direction velocity(V) on Y=0.5')
xlabel('X'); ylabel('V'); axis('square'); xlim([0 L]); grid on


;figure(10); plot(y,T(round(Nx/2),:))
;title('Temperature distribution on X=0.5')
xlabel('Y'); ylabel('Teta'); axis('square'); xlim([0 L]); grid on


;figure(11); plot(x,T(:,round(Ny/2)))
```

```
;title('Temperature distribution on Y=0.5')

xlabel('X'); ylabel('Teta'); axis('square'); xlim([0 L]); grid on



;figure(12); contourf(x,y,p',23,'LineColor','none')

title('Pressure-contour'); xlabel('X'); ylabel('Y')

;axis('equal',[0 L 0 L]); colormap(cm); colorbar('westoutside')



;figure(13); plot(q,y)

;title('Dimensionless heat transfer rate on left wall')

xlabel('Q'); ylabel('Y'); axis('square'); ylim([0 L]); grid on



;figure(14); plot(c,y)

;title('Dimensionless friction force on left wall')

xlabel('C'); ylabel('Y'); axis('square'); ylim([0 L]); grid on
```

مراجع

1. Ghia, U.K.N.G., Ghia, K.N. and Shin, C.T., 1982. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. Journal of computational physics,48(3), pp.387-411