



دانشکده مهندسی مکانیک

# حل عددی معادلات لایه مرزی آرام هیدرودینامیکی و

## حرارتی روی صفحه تخت

پروژه درس انتقال حرارت پیشرفته

علی باقری برمس

استاد مربوطه:

دکتر حسینعلی پور

تدریسار مربوطه:

شهریار ریاضی

تیر ۱۴۰۲

به نام خالق هستی

## • طرح مساله

می‌خواهیم معادلات بلازیوس و پل‌هاوسن را برای لایه مرزی هیدرودینامیک و حرارتی جریان آرام به کمک روش پرتابی حل کنیم. ابتدا به تعریفی از معادلات ذکر شده و لزوم استفاده از روش پرتابی می‌پردازیم؛

**معادله بلازیوس<sup>۱</sup>** – معادله لایه مرزی هیدرودینامیک برای جریان آرام – با فرض حل تشابهی به شکل زیر است؛

$$f''' + ff'' = 0$$

این معادله دارای شرایط مرزی به شکل زیر است؛

$$f = f' = 0 @ \eta = 0 \text{ and } f' = 1 @ \eta \rightarrow \infty$$

در صورتی که بخواهیم این معادله را به روش رونگ-کوتا<sup>۲</sup> حل کنیم، لازم است که به کمک کاهش مرتبه، این معادله مرتبه سه را به سه معادله مرتبه یک تبدیل کرده و توامان آن‌ها را حل کنیم، بدین منظور از معادلات زیر استفاده می‌کنیم؛

$$\begin{cases} y_1 = f \rightarrow y_1' = y_2 \\ y_2 = f' \rightarrow y_2' = y_3 \\ y_3 = f'' \rightarrow y_3' = -y_1 y_3 \end{cases}$$

شرایط مرزی عبارات بالا به شکل زیر هستند؛

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2(\infty) = 1$$

روش رونگ-کوتا یک روشی است که برای حل معادله مرتبه یک نیاز به داشتن شرایط اولیه دارد، اما در معادله بلازیوس، مساله ما دارای شرایط اولیه نیست، بلکه دارای شرایط مرزی است. از این رو به کمک روش پرتابه‌ای، یک مقدار برای شرط اولیه حدس می‌زنیم و سپس با سعی و خطاهای متوالی شرط اولیه را طوری تنظیم می‌کنیم تا به شرط مرزی مدنظر برسیم.

---

<sup>۱</sup> Blasius Equation

<sup>۲</sup> Runge-Kutta

**معادله پل هاوسن<sup>۱</sup>** - معادله لایه مرزی حرارتی برای جریان آرام - به شکل زیر است؛

$$\theta'' + \frac{Pr}{2} \theta' f = 0 \rightarrow (Pr = 1): \theta'' + \frac{1}{2} f \theta' = 0$$

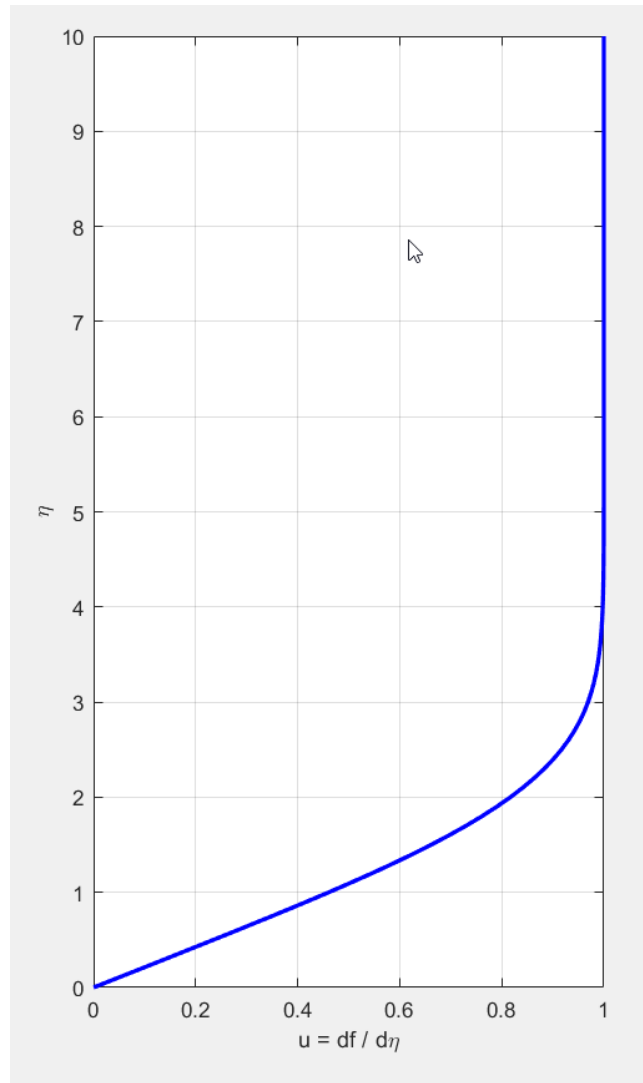
شرایط مرزی معادله بالا عبارتند از؛

$$\theta = 0 @ \eta = 0 \text{ and } \theta \rightarrow 1 @ \eta \rightarrow \infty$$

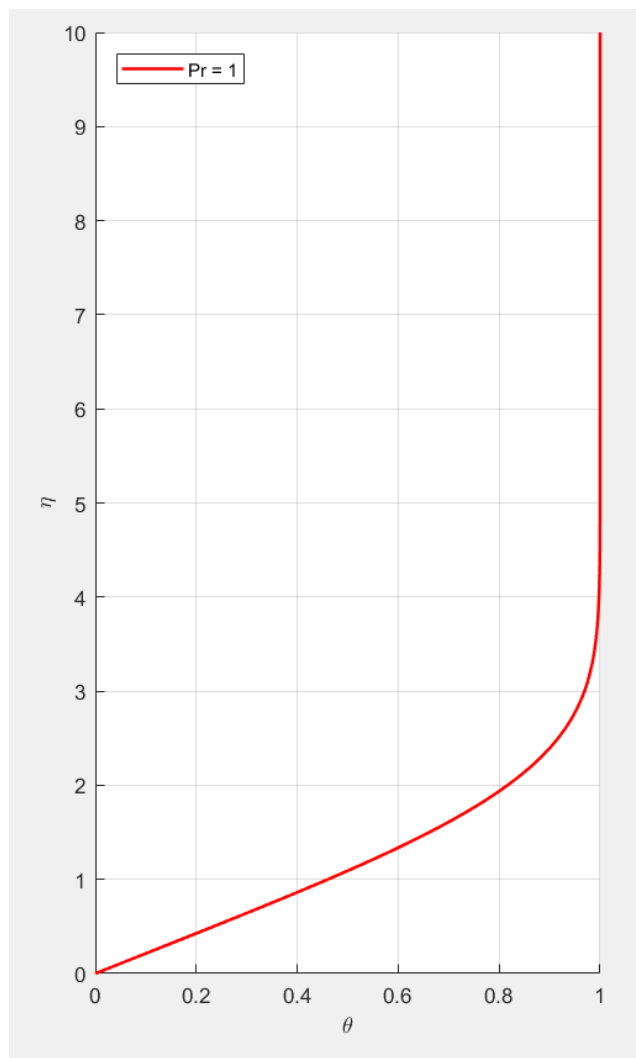
پس از حل معادلات بلازیوس و پل هاوسن، پروفیل سرعت، پروفیل دما، خطوط جریان و خطوط گرما به ترتیب در شکل ۱، شکل ۲، شکل ۳ و شکل ۴ آورده شده است.

---

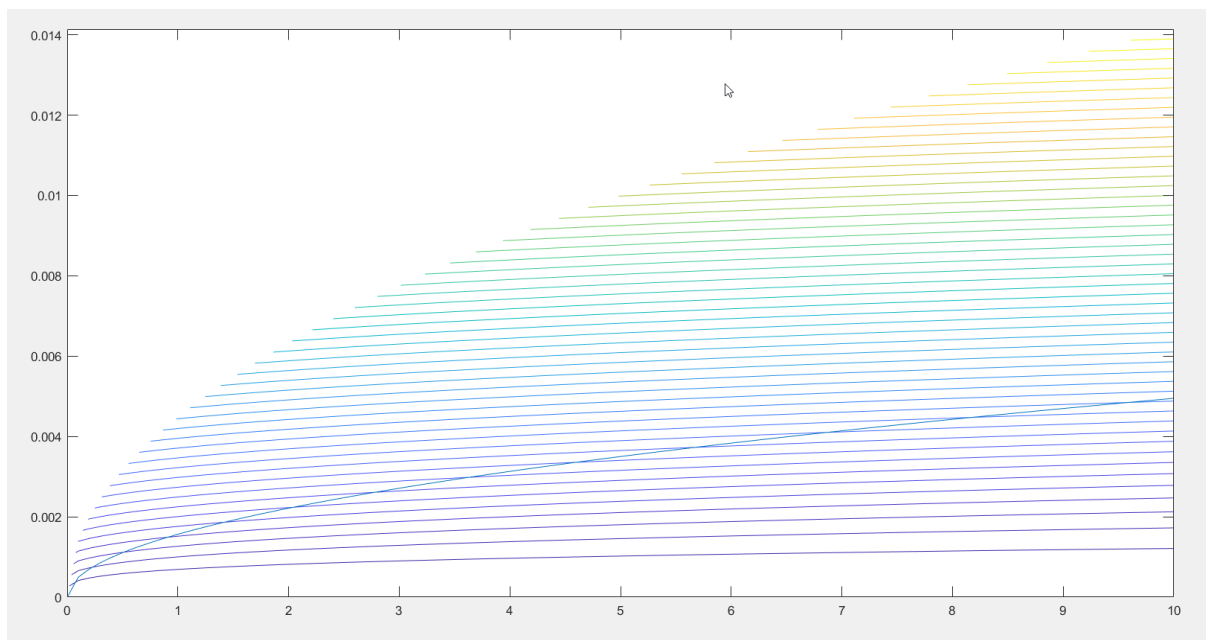
<sup>۱</sup> Polhausen Equation



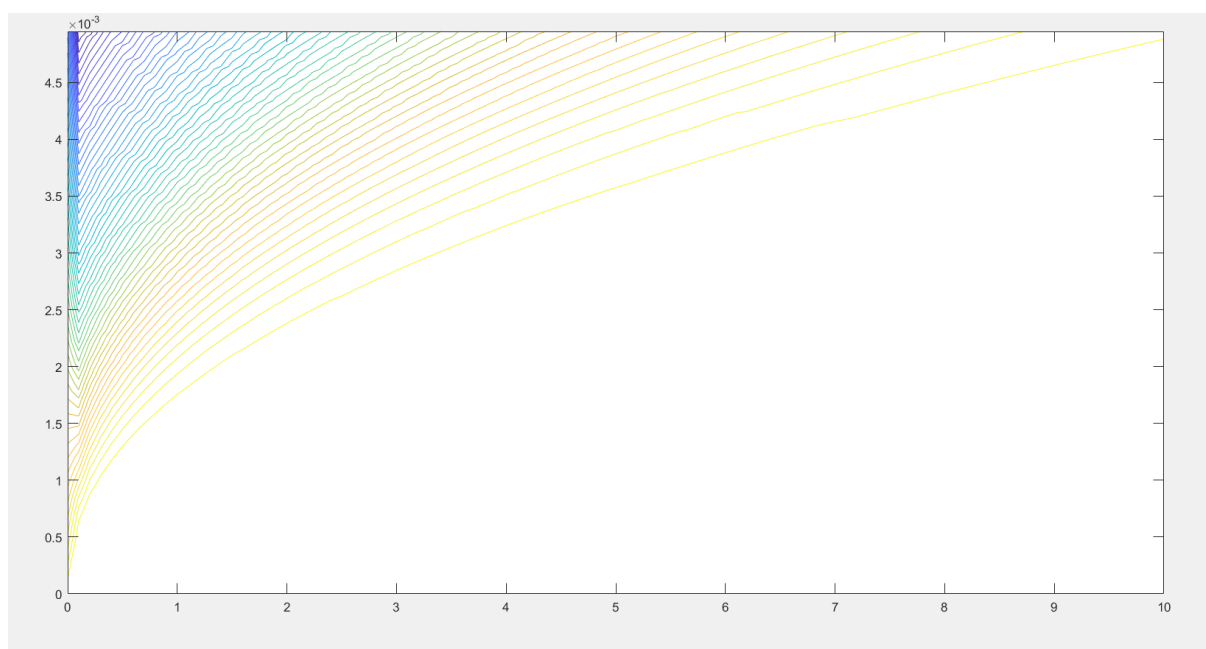
شکل ۱: پروفیل سرعت حاصل از حل تشابهی معادلهٔ بلازیوس.



شکل ۲: پروفیل دما حاصل از حل تشابهی معادله پل هاوسن.



شکل ۳: خطوط جریان و لایه مرزی.



شکل ۴: خطوط گرما.

