دانشکده مهندسی مکانیک

# مسالهٔ فیلم ریزان توام با انتقال حرارت و اثر ترموکپیلاری

**پروژهٔ درس انتقال حرارت پیشرفته**

علی باقری برمس

**استاد مربوطه:**

دکتر حسینعلی‌پور

**تدریسیار مربوطه:**

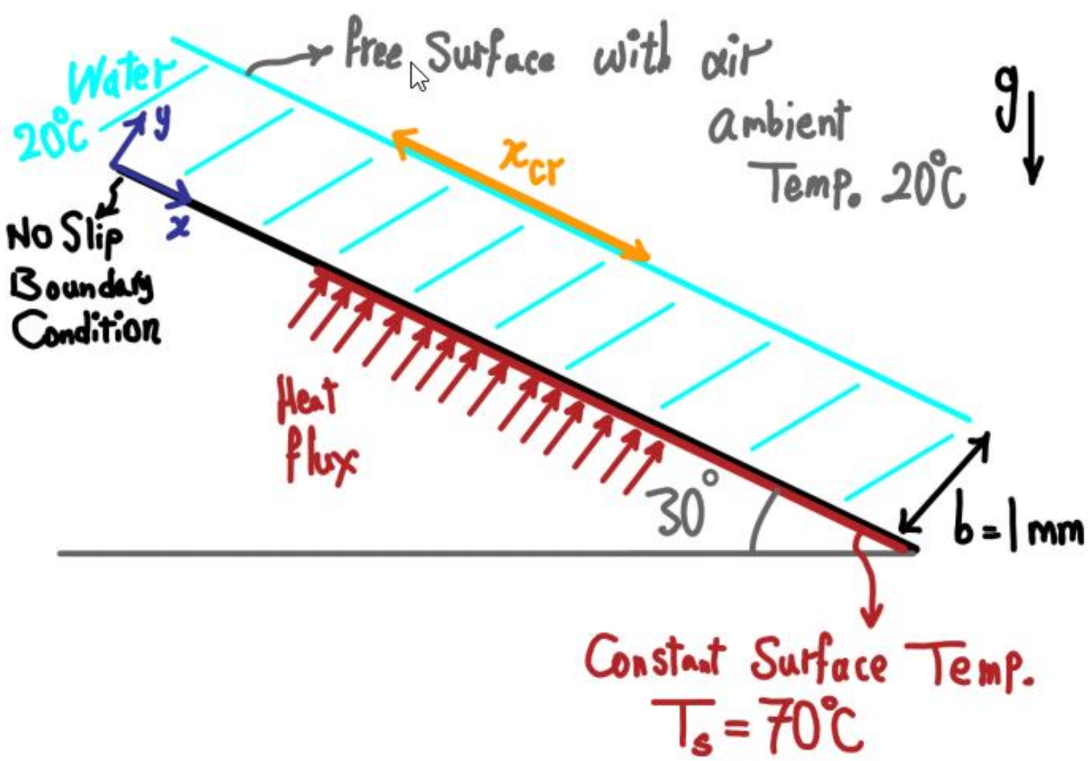
شهریار ریاضی

**تیر ۱۴۰۲**

# به نام خالق هستی

## • طرح مساله

فیلم نازک سیال، مطابق شکل ۱ تحت تاثیر نیروی جاذبه بر روی یک سطح شیبداری به سمت پایین ریخته می‌شود. پس از اینکه مولفهٔ سرعت به شکل تک جهته درآمد، مقداری شار حرارتی به صفحه اعمال می‌شود تا دمای صفحه را ثابت (۷۰ درجهٔ سلسیوس) نگه دارد. در این حین، تا یک x بحرانی طول می‌کشد تا خبر تغییر دمای صفحه به سطح آزاد برسد، پس از اینکه خبر تغییر دما رسید. با توجه به تغییرات کشش سطحی بر اثر دما، شرط مرزی معادلهٔ ممنتوم و معادلهٔ انتقال حرارت تغییر کرده و سرعت جدیدی به واسطهٔ پدیده‌های سطحی به سیال اعمال می‌شود.




شکل ۱: فیلم ریزان توام با انتقال حرارت و اثر ترموکپیلاری.

حل معادلهٔ ممنتوم و به دست آوردن پروفیل سرعت تک جهته

معادلهٔ پیوستگی به صورت زیر بیان می‌شود؛

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla . \rho \boldsymbol{V}) = 0 \xrightarrow{incompressible,steady} \nabla . V = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

با توجه به اینکه پروفیل سرعت تک‌جهته می‌شود، مولفهٔ v برابر صفر بوده و به کمک معادلهٔ پیوستگی می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{\partial u}{\partial x}$ نیز برابر صفر است. با توجه به اینکه مولفهٔ عمودی سرعت برابر صفر است، معادلهٔ ممنتوم در راستای عمود بر سطح شیب‌دار به شکل زیر نوشته می‌شود؛

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+gcos\theta$$

$$0+0+0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+0+gcos\theta \rightarrow P=\rho gcos\theta+f(x)$$

$$B.C\ @y=b, P=P_\infty \rightarrow f(x)=P_\infty+\rho gbcos\theta \rightarrow P=\rho g(b-y)cos\theta+P\_\infty$$

با توجه به دست آمدن توزیع فشار، می‌توان نتیجه گرفت که فشار فقط در راستای عمودی تغییر می‌کند و در راستای سطح شیب‌دار تغییرات آن صفر است، به کمک این گزاره و رابطهٔ حاصل از معادلهٔ پیوستگی، معادلهٔ ممنتوم در راستای x به شکل زیر نوشته و حل می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+gsin\theta$$

$$0+0+0=0+\nu\left(0+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+gsin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{g}{\nu}sin\theta y+C_1$$

$$B.C\ (Free\ Surface) \rightarrow @y=b \rightarrow \tau_w=\tau_a \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=0 \rightarrow C_1=\frac{g}{\nu}bsin\theta$$

$$u=-\frac{g}{2\nu}sin\theta\ y^2+\frac{g}{\nu}sin\theta y+C_2$$

$$B.C\ (No\ Slip) \rightarrow @y=0, u=0 \rightarrow C_2=0$$

$$u=-\frac{g}{2\nu}sin\theta\ y^2+\frac{g}{\nu}sin\theta y$$

که به صورت بی‌بعد به شکل زیر بازنویسی می‌شود؛

$$\frac{u}{U} = 2\frac{y}{b} - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \ where\ U = \frac{gsin\theta}{\nu} . \frac{b^2}{2}$$

پس از به دست آمدن میدان فشار و میدان سرعت، به سراغ معادلهٔ انتقال حرارت از هنگام اعمال شدن شار حرارتی می‌رویم؛

$$\rho C_P \frac{DT}{Dt} = k\ \nabla^2 T + \mu\phi$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho c_P \left(0 + u\frac{\partial T}{\partial x} + 0\right) = k\left(0 + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

با توجه به تشابه پروفیل سرعت و دما، ابتدا پروفیل درجه دو برای دما فرض کرده و سپس به منظور پیدا کردن عمق نفوذ دمای سطح، از معادلهٔ بالا انتگرال می گیریم؛

$$\theta = a + b\left(\frac{y}{\delta_T}\right) + c\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^2 \ where\ \theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_0}$$

$$B.C\ @y = 0, \theta = 1 \rightarrow a = 1$$

$$B.C\ @y = \delta_T, \theta = 0 \rightarrow b + c = -1$$

$$B.C\ @y = \delta_T, \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \rightarrow b + 2c = 0$$

$$\theta = 1 - 2\left(\frac{y}{\delta_T}\right) + \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^2 \ where\ \theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_0}$$

در صورتی که از معادلهٔ انرژی انتگرال بگیریم، خواهیم داشت؛

$$\int_0^{\delta_T} \alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy = \int_0^{\delta_T} u\frac{\partial}{\partial x} T\ dy$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\delta_T} uT\ dy\right) = \alpha\frac{\partial T}{\partial y}|_{y=\delta_T} - \alpha\frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0} = 0 - \alpha\frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0}$$

با داشتن پروفیل‌های سرعت و پروفیل دما و جاگذاری و گرفتن انتگرال در معادلهٔ بالا به عبارت زیر می‌رسیم؛

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta^2}{6}-\frac{\Delta^3}{30}\right)=\frac{2}{\Delta}\frac{\alpha}{Ub^2}\ where\ \Delta=\frac{\delta_T}{b}$$

$$\frac{\Delta^3}{9}-\frac{\Delta^4}{4}=\frac{2\alpha x}{Ub^2}$$

برای محاسبهٔ مقدار x بحرانی کافی است به دنبال موقعیتی باشیم که دمای صفحه به سطح رسیده است که این یعنی باید مقدار $\Delta$ را در معادلهٔ بالا برابر ۱ گذاشته و x را محاسبه کنیم،

$$x_{cr}=\frac{31}{720}\frac{Ub^2}{\alpha}$$

$$U=\frac{g\sin\theta}{\nu}\cdot\frac{b^2}{2}=\frac{9.81\times\sin(30)\times10^{-6}}{2\times10^{-6}}=2.45\frac{m}{s}$$

$$x_{cr}=\frac{31}{720}\frac{2.45*10^{-6}}{0.14558\times10^{-6}}=0.726\ m=72.6\ cm$$

پس از رسیدن به این موقعیت، دیگر معادلات بالا صادق نبوده و مساله بایستی به شکل دیگری حل شود.

اولین تفاوت مساله با حالت قبلی این است که با توجه به اینکه پروفیل سرعت در راستای x تغییر خواهد کرد، دیگر مساله تک‌جهته نبوده و باید به صورت دو بعدی حل شود. دومین تفاوت مساله این است که شرایط مرزی سطح آزاد دیگر به صورت مسالهٔ قبل نبوده و به صورت زیر دچار تغییر می‌شوند.

$$k_w\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=b}=h(T_{int}-T_a)$$

$$\tau_w=\mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=\frac{d\sigma}{dT}\frac{dT}{dx}$$