باسمه تعالی

پروژه‌ی درس آمار و احتمال مهندسی

مقدّمه‌ای بر قدم‌زدن تصادفی

استاد درس
دکتر محمّدحسین یاسائی میبدی

دانشکده‌ی مهندسی برق
دانشگاه صنعتی شریف

آذر ۱۴۰۲

آخرین مهلت تحویل:
۱۰ بهمن ۱۴۰۲

فهرست مطالب

۱ قدم برون نه اگر میل جست و جو داری! ۲

۲ پیش‌نیازها ۳
۱.۲ نامساوی‌های احتمالاتی ۳
۲.۲ معادلات تفاضلی ۴

۳ که دراز است رَهِ مقصد و من نوسفرم! ۵

۴ گر از این منزلِ ویران به سویِ خانه رَوَم! ۱۱

۵ به کویِ عشق مَنِه بی‌دلیلِ راه، قدم! ۱۴

۶ نصیحتی کُنَمَت بشنو و بهانه مَگیر! ۲۰

۱ قدم برون نه اگر میل جست و جو داری![۱]

ترم سوم چنگیز تمام شده و او می‌خواهد برای رفع خستگی آزمون‌ها به یک سفر برود. او اطّلاعات زیادی در مورد اماکن گردشگری ندارد و تصمیم می گیرد با سپردن سرنوشتش به دست تقدیر سفرش را آغاز کند. چنگیز به دلیل علاقه‌ی فراوانش به درس شیرین آمار و احتمال مهندسی، در تمام گام‌های این سفر به صورت تصادفی عمل می‌کند و ما می‌خواهیم درباره‌ی خصوصیات حرکت‌های او و اتّفاقاتی که ممکن است برایش رخ دهد، اطّلاعاتی به دست آوریم.

شکل ۱: تصویری کمتر دیده‌شده از چنگیز! (این تصویر با کمک Bing Copilot ساخته شده است. هرگونه شباهت به هرکس، تصادفی است!)

در دنیای آمار و احتمال، برای توصیف پدیده‌هایی مانند حرکت چنگیز از مدلی به نام قدم‌زدن تصادفی [۲] استفاده می‌شود. در این پروژه می‌خواهیم کمی با دنیای زیبای قدم‌زن‌های تصادفی آشنا شویم. امّا قبل از آن لازم است کمی معلومات خود را افزایش دهیم.

یک توصیه‌ی دوستانه همین ابتدای کار: قبل از هرکاری، بخش ۶ را بخوانید. بعد از آن، لااقل دوبار صورت پروژه را به طور کامل و با دقّت بخوانید، ولی پاسخ هیچ پرسشی را ننویسید. بعد از این که خوانش پروژه را به پایان رساندید، شروع به حلّ پروژه و نوشتن پاسخ پرسش‌ها کنید.

[۱] از کنج صومعه حافظ مجوی گوهر عشق/ قدم برون نه اگر میل جست و جو داری [حافظ]

[2] Random Walk

۲ پیش‌نیازها

۱.۲ نامساوی‌های احتمالاتی

در درس با نامساوی‌های احتمالاتی آشنا شده‌اید (یا خواهید شد!). معروف‌ترین نامساوی احتمالاتی نامساوی مارکف است.

قضیه ۲-۱. فرض کنید X یک متغیّر تصادفی پیوسته با مقادیر مثبت باشد و $a > 0$. در این صورت داریم:

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

پرسش تئوری ۱. قضیه‌ی ۲-۱ را اثبات کنید.

پرسش تئوری ۲. چنگیز مهارت بالایی در هک و نفوذ به سیستم‌های اطّلاعاتی دارد. او با هک کردن اطلاعات متروی شهر به مبدأ و مقصد تمام مسافران دسترسی پیدا می‌کند و اطّلاعات مسافران را استخراج می‌کند. او با تحلیل این اطلاعات متوجه می‌شود که درصدی از مردم که در یک روز در ایستگاه «سیرک» پیاده می‌شوند را می‌توان با یک متغیّر تصادفی با میانگین ۷۵ و واریانس ۲۵ مدل کرد. همچنین او دریافت که متغیّرهای تصادفی مربوط به روزهای مختلف از هم مستقلند.

۱. برای احتمال این‌که فردا حدّاقل ۸۵ درصد مردم در ایستگاه سیرک پیاده شوند یک کران بالا بیابید.

۲. برای احتمال این‌که فردا بین ۶۵ تا ۸۵ درصد مردم در ایستگاه سیرک پیاده شوند، یک کران پایین بیابید.

۳. اطّلاعات چند روز را باید بررسی کنیم تا مطمئن شویم که با احتمال حداقل ۰.۹ میانگین درصدی از مردم که در این روزها در ایستگاه سیرک پیاده شده‌اند، بین ۷۰ تا ۸۰ درصد بوده است؟

پرسش تئوری ۳. چنگیز به اطّلاعات قطارهای مترو هم دسترسی پیدا کرده است. او دریافته است تعداد قطارهایی که در مدّت زمان τ از ایستگاه نزدیک خانه‌ی او می‌گذرند را می‌توان به کمک متغیّر تصادفی X مدل کرد که $X \sim Poisson(\lambda)$. همچنین او دریافته است که تعداد قطارها در بازه‌های زمانی که باهم اشتراک ندارند، از هم مستقلند.

۱. متغیّر تصادفی Z_n را تعداد قطارهایی تعریف می‌کنیم که در مدّت زمان $T = n\tau$ از ایستگاه نزدیک خانه‌ی چنگیز گذشته‌اند. فرض کنید $k > 1$. کران بالایی برای عبارت زیر بیابید:

$$\mathbb{P}\left[Z_n \geq kn\lambda\right]$$

۲. فرض کنید $\lambda = 1, n = 20, k = 1/25$. به کمک قضیه‌ی حدّ مرکزی احتمال قسمت قبل را تخمین بزنید.

گاهی با توجّه به خواص متغیّرهای تصادفی، می‌توانیم کران‌های بهتری برای بعضی احتمال‌ها بیابیم.

تعریف ۲-۱. برای یک متغیّر تصادفی مانند X، تابع $\psi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_X(s) = \mathbb{E}\left[e^{sX}\right].$$

پرسش تئوری ۴. تعریف می‌کنیم $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ که در آن X_iها متغیّرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند. نشان دهید:

$$\psi_{Z_n}(s) = n\psi_X(s).$$

پرسش تئوری ۵. اگر فرض کنیم $s \geq ۰$ و $\beta > \mathbb{E}[X]$، ثابت کنید:

$$\mathbb{P}[Z_n \geq \beta n] = \mathbb{P}[e^{sZ_n} \geq e^{s\beta n}] \leq e^{-rn}$$

که در آن:

$$r = \sup_{s \geq ۰}\{s\beta - \psi_X(s)\}.$$

پرسش تئوری ۶.

۱. اگر فرض کنیم $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^۲)$، $\psi_X(s)$ را بیابید.

۲. برای هر متغیّر تصادفی X با فرض $\mathbb{E}[X] = ۰$ و $|X| < M$ نشان دهید: $\psi_X(s) \leq \frac{۱}{۲}M^۲s^۲$.

۳. تعریف می‌کنیم $Z_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ که در آن X_iها متغیّرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند و می‌دانیم $|X_i| \leq M$. با فرض $\beta > \mathbb{E}[X]$ نشان دهید:

$$\mathbb{P}[Z_n \geq \beta n] \leq e^{-\frac{\beta^۲}{۲.M^۲}n}.$$

۲.۲ معادلات تفاضلی

در این قسمت می‌خواهیم با معادلات تفاضلی آشنا شویم:
فرض کنید x_n به $x_{n-۱}$ و $x_{n-۲}$ وابسته است و رابطه‌ی زیر میان آن‌ها برقرار است:

$$x_n = ax_{n-۱} + bx_{n-۲}$$

واضح است که با داشتن $x_۰$ و $x_۱$، می‌توان $x_۲$ را تعیین کرد، سپس $x_۳$ و ...
برای یافتن جواب عمومی این معادله می‌توان به دنبال جواب‌هایی به فرم $x_n = z^n$ گشت. با جایگذاری در معادله داریم:

$$z^n = az^{n-۱} + bz^{n-۲}$$

طرفین را بر $z^{n-۲}$ تقسیم می‌کنیم:

$$z^۲ - az - b = ۰$$

به طور کلی، می‌توان دو ریشه‌ی متفاوت $z_۱$ و $z_۲$ پیدا کرد و پاسخ عمومی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_n = C_۱z_۱^n + C_۲z_۲^n$$

مثال زیر را در نظر بگیرید:
سری فیبوناچی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$x_n = x_{n-۱} + x_{n-۲}, \qquad x_۰ = ۰, x_۱ = ۱$$

حال می‌خواهیم این معادله را حل کنیم. کافی است مانند قبل قرار دهیم $x_n = z^n$ و داریم:

$$z^۲ - z - ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow z = \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$x_n = C_۱\left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\right)^n + C_۲\left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)^n$$

با داشتن $x_۰ = ۰$ و $x_۱ = ۱$ به دست می‌آوریم:

$$x_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\right)^n - \left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)^n\right]$$

۳ که دراز است رهِ مقصد و من نوسفرم![3]

ابتدا می‌خواهیم قدم‌زدن تصادفی را در یک بُعد بررسی کنیم و برخی ویژگی‌های پایه‌ای آن را باهم کشف کنیم. قدم‌زدن تصادفی در یک بُعد یک فرآیند تصادفی مانند $\{Z_n\}_{n=0}^{+\infty}$ است که در آن داریم:

$$Z_n = Z_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

و X_iها متغیّرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند.

پرسش تئوری ۷. چنگیز وارد ایستگاه مترو می‌شود. خط مترویی که چنگیز در آن قرار دارد به تعداد بی‌نهایت ایستگاه دارد که از شماره‌ی ۱ شروع شده و تا $+\infty$ ادامه پیدا می‌کند. او تصمیم می‌گیرد برای سوار شدن به مترو از یک سکه که با احتمال p شیر می‌آید استفاده کند. او سکّه را می‌اندازد، اگر نتیجه‌ی سکه خط بود سوار مترو نمی‌شود، و اگر نتیجه‌ی سکّه خط بود، سوار مترو می‌شود و در ایستگاه بعدی پیاده می‌شود. او در هر ایستگاه به صورت مستقل همین فرآیند را تکرار می‌کند. فرض کنید Z_n نشان‌دهنده‌ی شماره‌ی ایستگاه چنگیز بعد از n مرحله پرتاب سکه باشد.

۱. تابع جرم احتمال متغیّر تصادفی Z_n را به دست آورید.

۲. $\mathbb{E}[X], \mathrm{Var}[X]$ را محاسبه کنید.

۳. چه احساسی نسبت به $\mathbb{E}[Z]$ دارید؟ این مولفه چه چیزی را توصیف می‌کند؟

پرسش شبیه‌سازی ۱. نمودار تابع جرم احتمال متغیّر تصادفی Z_n را به ازای $p = 0/1, 0/2, 0/5, 0/7, 0/9$ و برای $n = 10, 20, 50, 100, 1000$ رسم کنید.

پرسش تئوری ۸. چنگیز می‌خواهد به موزه برود و برای این‌کار باید ایستگاه ۳۰۰–اُم را رد کند. او یک بلیط می‌خرد، سپس یک تاس ۱۰وجهی را پرتاب می‌کند و به اندازه‌ی عدد روی تاس، جلو می‌رود. سپس از قطار پیاده شده و دوباره بلیط دیگری می‌خرد و تاس می‌اندازد. احتمال اینکه حداقل ۸۰ بلیط برای رد کردن ایستگاه ۳۰۰–اُم نیاز باشد را حساب کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۲.

۱. به کمک شبیه‌سازی احتمال رد شدن از ۳۰۰ ایستگاه به کمک دقیقاً ۸۰ بلیط را محاسبه کنید. برای این کار ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی را انجام دهید و تعداد حالت‌هایی که چنگیز با کمک ۸۰ بلیط از ۳۰۰ ایستگاه رد شده را در خروجی نمایش دهید.

۲. نموداری رسم کنید و احتمال استفاده از ۷۰ تا ۱۵۰ بلیط را برای طی کردن ۳۰۰ ایستگاه رسم کنید.(یعنی برای تک تک حالت‌های استفاده از ۷۰ تا ۱۵۰ بلیط)

پرسش تئوری ۹. چنگیز وارد مترو می‌شود. این خط مترو دارای بی‌نهایت ایستگاه است که از $-\infty$ تا ∞ شماره گذاری شده‌اند و چنگیز وارد ایستگاه شماره ۰ شده است.او در هر مرحله به طور مستقل از مراحل قبلی، با احتمال $\frac{1}{2}$ یک ایستگاه به جلو و با احتمال $\frac{1}{2}$ یک ایستگاه به عقب می‌رود.

۱. فرض کنید که متغیر تصادفی Z_n نشان‌دهنده‌ی شماره‌ی مقصد چنگیز پس از n مرحله است. رابطه‌ای بین $p_{Z_n}(z) = \mathbb{P}[Z_n = z]$، $p_{Z_{n-1}}(z-1) = \mathbb{P}[Z_{n-1} = z-1]$ و $p_{Z_{n-1}}(z+1) = \mathbb{P}[Z_{n-1} = z+1]$ به دست آورید.

[3] همتم بدرقه‌ی راه کن ای طایر قدس/ که دراز است رهِ مقصد و من نوسفرم
ای نسیمِ سحری بندگیِ من برسان/ که فراموش مکن وقتِ دعای سحرم [حافظ]

۲. به کمک رابطه‌ی بازگشتی‌ای که قسمت قبل به دست آوردید نشان دهید:

$$p_{Z_n}(z) = \mathbb{P}[Z_n = z] = \frac{n!}{(\frac{n-z}{۲})!(\frac{n+z}{۲})!}\,(\frac{۱}{۲})^n.$$

۳. اگر فرض کنیم چنگیز در هر مرحله مستقل از مراحل قبلی با احتمال p یک ایستگاه به جلو و با احتمال $۱ - p$ یک ایستگاه به عقب می‌رود، تابع جرم احتمال متغیّر تصادفی Z_n، یعنی $p_{Z_n}(z) = \mathbb{P}[Z_n = z]$ را محاسبه کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۳.

۱. تابع جرم احتمالی را که در بخش ۲ پرسش تئوری ۹ به دست آورده‌اید را به ازای $n = ۱۰۰۰$ و $-۱۰۰۰ < z < ۱۰۰۰$ رسم کنید. نمودار نهایی شبیه کدام توزیع شده است؟

۲. تابع جرم احتمالی که در بخش ۳ پرسش تئوری ۹ به دست آوردید را برای $p = ۰/۱, ۰/۲, ۰/۵, ۰/۷, ۰/۹$ و $n = ۱۰۰۰$ رسم کنید.

۳. حرکت چنگیز را $N = ۱۰۰۰۰$ بار شبیه‌سازی کنید و میانگین موقعیت او بعد از $n = ۱۰۰۰۰$ مرحله را برای $p = ۰/۱, ۰/۲, ۰/۵, ۰/۷, ۰/۹$ در خروجی نمایش دهید.

۴. حرکت چنگیز را $N = ۱۰۰۰۰۰$ بار شبیه‌سازی کنید و هیستوگرام موقعیت او بعد از $n = ۱۰۰۰۰$ مرحله را برای $p = ۰/۱, ۰/۲, ۰/۵, ۰/۷, ۰/۹$ رسم کنید.

ب) حال این بار فرض کنید که حرکت چنگیز از توزیع نرمال با میانگین ۲ و واریانس ۲ تبعیت می‌کند. فرض کنید $A = ۱۰, B = ۲$. حال برای ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی که در هر بار چنگیز ۱۰۰ بار جابه‌جا می‌شود P_A را حساب کنید.

پرسش تئوری ۱۰. چنگیز وارد ایستگاه شماره‌ی ۰ می‌شود. باغ‌وحش در ایستگاه $+۲$ و شهربازی در ایستگاه -۱ قرار دارد. او در هر مرحله مستقل از مراحل قبلی با احتمال $\frac{۱}{۲}$ یک ایستگاه به جلو و با احتمال $\frac{۱}{۲}$ یک ایستگاه به عقب می‌رود و به محض این‌که به یکی از ایستگاه‌های باغ‌وحش یا شهربازی رسید از مترو خارج می‌شود. احتمال رسیدن او به هرکدام از این دو مکان تفریحی را محاسبه کنید.

پرسش تئوری ۱۱. پرسش تئوری ۱۰ را در حالت کلّی‌تری حل کنید. فرض کنید خط مترو $l + ۱$ ایستگاه دارد که از ایستگاه ۰ تا l شماره‌گذاری شده‌اند. چنگیز در ابتدا وارد ایستگاه شماره‌ی n می‌شود. او در هر مرحله مستقل از مراحل قبل، با احتمال p یک ایستگاه به جلو و و با احتمال $۱ - p$ یک ایستگاه به عقب می‌رود. او به محض این‌که به ایستگاه ۰ یا l برسد، از مترو پیاده می‌شود.

۱. احتمال خروج چنگیز از مترو در ایستگاه شماره‌ی l هنگامی که او در ایستگاه شماره‌ی n سوار مترو شده باشد را با p_n نشان می‌دهیم. p_n را به دست آورید.

۲. امید ریاضی تعداد مراحل لازم برای پیاده‌شدن از مترو (در ایستگاه ۰ یا l)، هنگامی که حرکت چنگیز از ایستگاه n شروع شده باشد را با t_n نشان می‌دهیم، t_n را به دست آورید. شروع حرکت از کدام ایستگاه t_n را بیشینه می‌کند؟

پرسش تئوری ۱۲. فرض کنید خط مترو دارای بی‌نهایت ایستگاه است که از ۰ تا $+\infty$ شماره‌گذاری شده‌اند. چنگیز در ایستگاه شماره‌ی n سوار مترو می‌شود و در هر مرحله، مستقل از مراحل قبلی با احتمال p یک ایستگاه به جلو راست و با احتمال $q = ۱ - p$ یک ایستگاه به عقب حرکت می‌کند. او به محض رسیدن به ایستگاه شماره‌ی ۰ از مترو خارج می‌شود.

۱. احتمال خروج او از مترو با فرض شروع از ایستگاه n را با p_n نشان می‌دهیم. p_n را محاسبه کنید. آیا ممکن است او هرگز از مترو خارج نشود؟

۲. امید ریاضی تعداد مراحل لازم برای پیاده‌شدن از مترو (در ایستگاه ۰)، هنگامی که حرکت چنگیز از ایستگاه n شروع شده باشد را با t_n نشان می‌دهیم، t_n را به دست آورید. جواب خود را در حالت‌های $p = q$ و $p > q$ بررسی کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۴. حرکت چنگیز در پرسش تئوری ۱۰ را $N = ۱۰۰۰۰۰$ بار شبیه‌سازی کنید. چند بار چنگیز به باغ‌وحش و چند بار به شهربازی می‌رسد؟

پرسش شبیه‌سازی ۵. نمودار p_n در پرسش تئوری ۱۱ را به صورت تابعی از n و با فرض $l = ۲۰$ و $p = ۰/۴۵, ۰/۵, ۰/۵۵$ رسم کنید.

پرسش تئوری ۱۳. فرض کنید خطّ مترو بی‌نهایت ایستگاه دارد که از شماره‌ی $-\infty$ تا $+\infty$ شماره‌گذاری شده‌اند. چنگیز در ایستگاه شماره‌ی ۰ وارد مترو می‌شود. او در هر مرحله مستقل از مراحل قبلی با احتمال p یک ایستگاه به جلو و با احتمال $۱ - p$ یک ایستگاه به عقب می‌رود.

۱. حرکت‌های پیچیده‌ی چنگیز را می‌توان به کمک حرکت‌های ساده‌تر او مدل کرد. برای مثال به جای این‌که بگوییم چنگیز سه ایستگاه به جلو رفت، می‌توانیم بگوییم که چنگیز سه بار و هر بار یک ایستگاه به جلو رفته است. در واقع به جای اینکه طول قدم‌ها برایمان مهم باشد، تعداد تک قدم‌ها برایمان مهم می‌شود. مدل توصیف شده را به زبان ریاضی بنویسید.

۲. احتمال آن‌که چنگیز در جایی از حرکتش به ایستگاه شماره‌ی k برسد را با p_k نشان می‌دهیم، یعنی:

$$p_k = \mathbb{P}\left[\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = k\right].$$

با توجّه به قسمت قبل می‌توان نوشت:

$$p_۱ = p + qp_۲.$$

استدلال کنید که این رابطه چرا درست است؟

۳. با توجّه به قسمت‌های قبل معادله‌ی درجه‌دومی برای محاسبه‌ی $p_۱$ به دست آورید و آن را حل کنید. درباره‌ی ریشه‌های به دست آمده بر حسب p و q بحث کنید. هر یک از ریشه‌ها به ازای چه مقادیری از p و q معتبر هستند؟

۴. p_k را به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ دست آورید.

۵. رفتار p_k را در حالت‌های $p > \frac{۱}{۲}$ و $p < \frac{۱}{۲}$ بررسی کنید.
همچنین توضیح دهید اگر $p = \frac{۱}{۲}$ باشد، درباره‌ی حضور چنگیز در هر ایستگاه چه می‌توان گفت؟

۶. به ازای $p = ۰/۳$ احتمال آن که چنگیز در جایی از حرکتش به ایستگاه شماره‌ی ۵ برسد را به دست آورید.

پرسش شبیه‌سازی ۶. با فرض $p = ۰/۳$ حرکت چنگیز در پرسش تئوری ۱۳ را شبیه‌سازی کنید. چنگیز چند بار وارد ایستگاه ۲ شده است؟

پرسش تئوری ۱۴. فرض کنید خطّ مترو بی‌نهایت ایستگاه دارد که از شماره‌ی $-\infty$ تا $+\infty$ شماره‌گذاری شده‌اند. چنگیز در ایستگاه شماره‌ی ۰ وارد مترو می‌شود. او در هر مرحله مستقل از مراحل قبلی با احتمال p یک ایستگاه به جلو و با احتمال $۱ - p$ یک ایستگاه به عقب می‌رود.

۱. زمان لازم برای رسیدن از ایستگاه شماره‌ی ۰ به ایستگاه شماره‌ی k را با T_k نشان می‌دهیم. نشان دهید:

$$\mathbb{E}[T_k] = k\,\mathbb{E}[T_۱].$$

۲. سعی کنید $\mathbb{E}[T_۱]$ را برحسب p، q و $\mathbb{E}[T_۲]$ به دست آورید. سپس معادله را حل کنید و $\mathbb{E}[T_۱]$ را محاسبه کنید.

۳. $\mathbb{E}[T_k]$ را حساب کنید.

۴. $\mathbb{E}[T_{50}]$ را به ازای $p = 0/55$ محاسبه کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۷. به ازای $p = 0/55$، مدت زمانی که به طور متوسّط طول می‌کشد که چنگیز به ایستگاه k–اُم وارد شود را با کمک شبیه‌سازی به دست آورید. آیا نتیجه‌ی به دست آمده برای $k = 50$ با بخش ۴ پرسش تئوری ۱۴ مطالقت دارد؟

تا کنون در همه‌ی مسائلی که حل کرده‌ایم، متغیّرهای تصادفی X_i را متغیّرهای تصادفی گسسته با دو مقدار $\{1, -1\}$ در نظر گرفته‌ایم. ولی می‌توان X_iها را متغیّرهای تصادفی پیوسته هم در نظر گرفت.

پرسش تئوری ۱۵. چنگیز می‌خواهد سوار تاکسی شود. خیابان را به صورت محور اعداد حقیقی در نظر بگیرید. نقطه‌ای که چنگیز سوار تاکسی می‌شود، $Z_0 = 100$ است. در مرحله‌ی i–اُم تاکسی به اندازه‌ی X_i حرکت می‌کند که X_i یک متغیّر تصادفی است و در مورد آن می‌دانیم $\mathbb{E}[X_i] = 0, \mathrm{Var}[X_i] = 1$. همچنین می‌دانیم X_iها از یک‌دیگر مستقلند و توزیع آن‌ها با یک‌دیگر یکسان است. با چه احتمالی بعد از $n = 10$ مرحله، مکان چنگیز جلوتر از $z = 105$ است؟

پرسش تئوری ۱۶.

۱. نشان دهید که تابع چگالی احتمال مشترک $(X_i)_{i=1}^{n} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ با تابع چگالی احتمال مشترک $(X_i)_{i=n}^{1} = (X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1)$ یکسان است.

۲. اگر فرض کنیم $\mathbb{E}[X_i] > 0$، و تعریف کنیم:

$$N = \min\{n : X_1 + X_2 + \cdots + X_n > 0\},$$

ثابت کنید:

$$\mathbb{E}[N] < \infty.$$

۳. موقعیت ماشین در مرحله‌ی n–اُم را با $Z_n = Z_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$ نشان می‌دهیم. اگر R_n را به صورت تعداد مقدارهای متمایز $(Z_0, Z_1, Z_2, \ldots)$ تعریف کنیم، آنگاه نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[R_n]}{n} = \mathbb{P}[\text{never returns to } 0].$$

پرسش تئوری ۱۷. فرض کنید تاکسی در هر مرحله با احتمال $\frac{1}{2}$ یک واحد به جلو و با احتمال $\frac{1}{2}$ یک واحد به عقب می‌رود. همچنین فرض کنید تاکسی در ابتدا در موقعیت $Z_0 = 0$ قرار دارد. ثابت کنید برای هر $k \neq 0$ امید ریاضی تعداد دفعاتی که پیش از صفر شدن دوباره‌ی موقعیت تاکسی، موقعیت تاکسی برابر با k می‌شود، برابر با ۱ است.

پرسش شبیه‌سازی ۸. با توجه به پرسش تئوری ۱۵، موقعیت مکانی تاکسی را به کمک شبیه‌سازی تعیین کنید. فرض کنید $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. حرکت تاکسی را $N = 10000$ بار شبیه‌سازی کنید و برای $n = 10, 20, 50, 100, 200$ تعداد دفعاتی که موقعیت نهایی تاکسی جلوتر از نقطه‌ی ۱۰۵ است را گزارش کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۹.

۱. با توجه به بخش ۲ پرسش تئوری ۱۶ فرض کنید $X_i \sim \mathcal{N}(5, 1)$. احتمال هرگز صفر نشدن موقعیت تاکسی بعد از شروع به حرکت را به کمک شبیه‌سازی به دست آورید. برای این کار، حرکت تاکسی را $N = 1000$ بار شبیه‌سازی کنید و هر بار ۱۰۰ قدم بردارید. تعداد دفعاتی که تاکسی در جایی از حرکتش به نقطه‌ی صفر بازگشته (برابر یا کوچکتر از صفر شده) را به عنوان حالت مطلوب در نظر بگیرید.

۲. قسمت قبلی را در حالتی که $X_i \sim \mathcal{N}(2, 5)$ تکرار کنید.

۳. با توجه به تعریف R_n در پرسش تئوری ۱۶ شبیه‌سازی را با فرض $X_i \sim \mathcal{N}(5, 1)$ انجام دهید و مقدار $\frac{\mathbb{E}[R_n]}{n}$ را با جواب قسمت ۱ مقایسه کنید.

۴. شبیه‌سازی را با فرض $X_i \sim \mathcal{N}(۲, ۵)$ تکرار کنید و پاسخ را با قسمت ۲ مقایسه کنید.

پرسش تئوری ۱۸. فرض کنید که $\mathbb{E}[X_i] = \mu \neq ۰$ است. به ازای هر $A, B > ۰$ می‌خواهیم احتمال اینکه $Z_n = \sum_{i=۱}^n X_i$ به مقدار A یا بیشتر برسد، قبل از این‌که به مقدار $-B$ یا کمتر از آن برسد را حساب کنیم. این احتمال را با P_A نشان می‌دهیم. نقطه‌ی توقف چنگیز از این رابطه به دست می آید:

$$N = \min\{n : Z_n \geq A \text{ or } Z_n \leq -B\}.$$

۱. θ^* را پاسخ معادله‌ی $\mathbb{E}[e^{\theta X}] = ۱$ تعریف کنید. فرض کنید θ^* وجود دارد و یکتاست. احتمال P_A را محاسبه کنید.

۲. با کمک جواب به دست آمده در قسمت قبلی تخمینی از $\mathbb{E}[N]$ به دست آورید.

۳. ثابت کنید: $\mathbb{E}[N] < \infty$.
راهنمایی: ابتدا نشان دهید که kای وجود دارد که $\mathbb{P}[Z_k > A + B] > ۰$ سپس نشان دهید که $\mathbb{E}[N] \leq \mathbb{E}[G]$ که G یک متغیّر تصادفی هندسی است.

پرسش تئوری ۱۹. چنگیز بعد از پیاده‌شدن از تاکسی، سوار تاکسی دیگری می‌شود که آزادی عمل بیشتری دارد. این تاکسی در هر گام در یک صفحه‌ی دوبُعدی قدمی با اندازه‌ی ثابت r و با زاویه‌ی تصادفی برمی‌دارد. به تعبیر دیگر، داریم:

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} r\cos(\Theta) \\ r\sin(\Theta) \end{bmatrix},$$

که $\Theta \sim Uniform(۰, ۲\pi)$. موقعیت چنگیز پس از n گام را با متغیّر تصادفی $\mathbf{Z}_n = \sum_{i=۱}^n \mathbf{X}_i$ نشان می‌دهیم.

۱. $\mathbb{E}[\mathbf{Z}_n]$ را محاسبه کنید.

۲. $\mathbb{E}[||\mathbf{Z}_n||^۲]$ را محاسبه کنید.

۳. $\mathbb{E}[||\mathbf{Z}_n||^۴]$ را محاسبه کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۱۰. چنگیز مجدّداً وارد مترو می‌شود. او این‌بار استراتژی متفاوتی را برای حرکت خود انتخاب می‌کند. او ابتدا دو عدد حقیقی A, B که $A > B$ را انتخاب می‌کند. سپس در هر مرحله یک تحقّق از متغیّر تصادفی حقیقی Y را مشاهده می‌کند. اگر $Y \geq A$ بود، یک ایستگاه به جلو می‌رود، اگر $Y \leq B$ بود، یک ایستگاه به عقب می‌رود و اگر $B < Y < A$ بود، در ایستگاه فعلی خود می‌ماند.

۱. حرکت چنگیز را برای $n = ۱۰۰۰$ قدم شبیه‌سازی کنید. فرض کنید $Y \sim Uniform(۰, ۱)$. مقادیر (A, B) را به ترتیب $(۰/۶, ۰/۴), (۰/۷۵, ۰/۲۵), (۰/۹۵, ۰/۰۵)$ در نظر بگیرید و نمودار موقعیت مکانی چنگیز بر حسب مرحله را رسم کنید.

۲. فرض کنید $Y \sim \mathcal{N}(۰, ۱)$، حرکت چنگیز را برای $n = ۱۰۰۰$ قدم شبیه‌سازی کنید. مقادیر (A, B) را $(۵, -۵)$ در نظر بگیرید و نمودار موقعیت مکانی چنگیز بر حسب مرحله را رسم کنید.

۳. فرض کنید $Y \sim \mathcal{N}(۰, \sigma^۲)$، $A = ۵$، $B = -۵$. به ازای مقادیر

$$\sigma = ۱, ۱/۱, ۱/۳, ۱/۵, ۱/۷۵, ۲, ۲/۵, ۳, ۵$$

رفتار حرکت چنگیز را بررسی کنید. با افزایش σ رفتار چنگیز چه تغییری می‌کند؟ دلیل این نوع رفتار چیست؟ توضیح دهید.

۴. فرض کنید $Y \sim \mathcal{N}(۱۰, \sigma^۲)$، $A = ۵$، $B = -۵$. به ازای مقادیر

$$\sigma = ۱, ۵, ۱۰, ۲۰, ۵۰, ۱۰۰, ۲۰۰, ۵۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰۰, ۱۰۰۰۰۰$$

رفتار حرکت چنگیز را بررسی کنید. با افزایش σ رفتار چنگیز چه تغییری می‌کند؟

پرسش شبیه‌سازی ۱۱. چنگیز از مترو خارج می‌شود و می‌خواهد سوار تاکسی شود. خیابانی که او می‌خواهد طی کند را به صورت محور اعداد حقیقی در نظر بگیرید. تاکسی در هر مرحله به اندازه‌ی متغیّر تصادفی X_i حرکت می‌کند. همچنین فرض می‌کنیم متغیّرهای تصادفی X_i مستقل و هم‌توزیع هستند.

۱. با فرض اینکه او از نقطه‌ی ۰ شروع به حرکت می‌کند و $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$، نمودار حرکت چنگیز را به ازای $N = 10000$ مرحله حرکت شبیه‌سازی کنید.

۲. شبیه‌سازی را ۵ بار تکرار کنید و در هر مرتبه $N = 1000$ قدم را شبیه‌سازی کنید. نتایج را در یک تصویر به نمایش بگذارید.

۳. قسمت ۲ را با فرض $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ و به ازای $\mu = 2, 3, 4, 5$ تکرار کنید.

۴. قسمت ۳ را با فرض $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$، به ازای تک‌تک μهای بخش ۳ و به ازای

$$\sigma = 1, 2, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 50, 75, 100, 200$$

تکرار کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۱۲.

۱. با فرض اینکه او از نقطه‌ی ۰ شروع به حرکت می‌کند و $X_i \sim Gamma(k = 0, \theta = 1)$، یعنی:

$$f_X(x) = \frac{x^{k-1} e^{\frac{-x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)} u(x),$$

که u پلّه‌ی واحد و Γ تابع گاما است، نمودار حرکت چنگیز را به ازای $N = 10000$ مرحله حرکت شبیه‌سازی کنید.

۲. شبیه‌سازی را ۵ بار تکرار کنید و در هر مرتبه $N = 1000$ قدم را شبیه‌سازی کنید. نتایج را در یک تصویر به نمایش بگذارید.

۳. قسمت ۲ را با فرض $X_i \sim Gamma(k, \theta = 1)$ و به ازای $k = 2, 3, 4, 5$ تکرار کنید.

۴. قسمت ۳ را با فرض $X_i \sim Gamma(k, \theta)$، به ازای تک‌تک kهای بخش ۳ و به ازای

$$\theta = 1, 2, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 50, 75, 100, 200$$

تکرار کنید.

۴ گر از این منزلِ ویران به سویِ خانه رَوَم![۴]

چنگیز از سفر خسته شده و می‌خواهد بداند آیا به خانه باز خواهد گشت یا نه؟

تعریف ۴-۱. می‌گوییم حرکت تصادفی چنگیز بی‌وفا است، اگر احتمال بازگشت او به مبدأ کمتر از ۱ باشد و می‌گوییم وفادار است، اگر احتمال بازگشت او به مبدا ۱ باشد.

پرسش تئوری ۲۰. بازگشت به مبدا را به کمک پیشامد زیر تعریف می‌کنیم:

$$R = \{\exists n \in \mathbb{N}: \ Z_n = 0\}.$$

همچنین تعداد دفعات بازگشت به مبدأ در طول حرکت را با N نشان می‌دهیم. اگر چنگیز در ایستگاه ۰ وارد مترو شود و در هر مرحله مستقل از مراحل قبلی با احتمال $\frac{1}{2}$ یک قدم به جلو و با احتمال $\frac{1}{2}$ یک قدم به عقب برود، $\mathbb{P}[R]$ و $\mathbb{E}[N]$ را محاسبه کنید.

پرسش تئوری ۲۱. فرض کنید تابع جرم احتمال X_iها به صورت زیر باشد:

$$\mathbb{P}[X_i = x] = \begin{cases} \frac{2}{3} & x = 1 \\ \frac{1}{3} & x = -1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$\mathbb{P}[R]$ و $\mathbb{E}[N]$ را محاسبه کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۱۳.

۱. فرض کنید تابع جرم احتمال X_iها به صورت زیر باشد:

$$\mathbb{P}[X_i = x] = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 1 \\ \frac{1}{2} & x = -1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

حرکت چنگیز را $N = 10000$ بار شبیه‌سازی کنید و در هر بار شبیه‌سازی را تا $n = 100$ قدم ادامه دهید. با کمک نتایج شبیه‌سازی احتمال بازگشت به مبدأ را محاسبه کنید. چنگیز چند بار به مبدأ بازمی‌گردد؟ تعداد دفعات بازگشت چنگیز به مبدأ با افزایش تعداد قدم‌ها چگونه تغییر می‌کند؟

۲. فرض کنید تابع جرم احتمال X_iها به صورت زیر باشد:

$$\mathbb{P}[X_i = x] = \begin{cases} \frac{2}{3} & x = 1 \\ \frac{1}{3} & x = -1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

حرکت چنگیز را $N = 10000$ بار شبیه‌سازی کنید و در هر بار شبیه‌سازی را تا $n = 100$ قدم ادامه دهید. با کمک نتایج شبیه‌سازی احتمال بازگشت به مبدأ را محاسبه کنید. چنگیز چند بار به مبدأ بازمی‌گردد؟ تعداد دفعات بازگشت چنگیز به مبدأ با افزایش تعداد قدم‌ها چگونه تغییر می‌کند؟

پرسش تئوری ۲۲. ثابت کنید حرکت تصادفی چنگیز وفادار است اگر و فقط اگر به صورت تقریبا قطعی بیشمار دفعه به مبدأ بازگردد.

[۴] گر از این منزل ویران به سوی خانه رَوَم/ دگر آن جا که رَوَم عاقل و فرزانه رَوَم
زین سفر گر به سلامت به وطن باز رَسَم/ نذر کردم که هم از راه به میخانه روم [حافظ]

تعریف ۴-۲. به تابعی مثل $f(x)$ طوری که $x \in \mathbb{Z}$ باشد و داشته باشیم:

$$f(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} f(x+y)\, p_Y(y)$$

که $p_Y(y)$ یک تابع جرم احتمال است، تابع متوسط دوست می‌گوییم.

پرسش تئوری ۲۳. شماره‌ی ایستگاه چنگیز در مرحله‌ی n-اُم را با متغیّر تصادفی Z_n نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم حرکت او از مبدأ شروع شود و در هر مرحله مستقل از مراحل قبلی با احتمال $\frac{1}{2}$ یک ایستگاه به جلو و با احتمال $\frac{1}{2}$ یک ایستگاه به عقب برود. پیشامد A_x را «زودتر رسیدن چنگیز به ایستگاه $-1-x$ نسبت به ایستگاه $M-x$» تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر پیشامد A_x هنگامی رخ می‌دهد که رویداد $Z_n = -1-x$ زودتر از رویداد $Z_n = M - x$ رخ دهد. تابع f را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f : \{-1, 0, \dots, M-1, M\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \mathbb{P}[A_x]$$

با توجّه به تعریف، بدیهی است که: $f(-1) = 1, f(M) = 0$. نشان دهید:

$$f(x) = \frac{1}{2} f(x+1) + \frac{1}{2} f(x-1)$$

بنابراین تابع f متوسط دوست است. حال $f(x)$ را محاسبه کنید.

پرسش تئوری ۲۴.

۱. مقدار $f(0)$ را محاسبه کنید و تعبیر احتمالاتی آن را بنویسید.

۲. با توجه به اینکه رویداد «هرگز نرسیدن به ایستگاه -1» با رویداد «به ازای هر $M \in \mathbb{N}$ به ایستگاه M زودتر از ایستگاه -1 رسیدن» هم ارز است و رابطه‌ای که برای $f(0)$ به دست آوردید، استدلال کنید که با احتمال ۱ یعنی به صورت تقریبا قطعی چنگیز به ایستگاه -1 خواهد رفت.

۳. با استفاده از تقارن و کمی استدلال نشان دهید که حرکت چنگیز وفادار است.

پرسش شبیه‌سازی ۱۴. به ازای $M = 5, 10, 15, 25, 30$، $f(0)$ را با شبیه‌سازی به دست آورید. برای به دست آوردن احتمال باید به تعداد زیاد مثلاً $N = 1000$ بار و هر بار تعداد زیادی قدم مثلاً $n = 1000$ قدم را شبیه‌سازی کنید و سپس با محاسبه‌ی نسبت تعداد دفعات رخ‌دادن رویداد مدّنظر به تعداد کلّ شبیه‌سازی‌ها احتمال را حساب کنید.

پرسش تئوری ۲۵. با استفاده از صورت قوی قانون اعداد بزرگ نشان دهید اگر X_iها مستقل و هم‌توزیع باشند و داشته باشیم $\mathbb{E}[X_i] \neq 0$ (در این حالت می‌گوییم حرکت drift دارد.) آن‌گاه حرکت تصادفی قطعاً بی‌وفا است.

تعریف ۴-۳. برای یک حرکت تصادفی، تعداد دفعات عبور از نقطه‌ی z را با M_z نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $m(z) = \mathbb{E}[M_z]$.

پرسش تئوری ۲۶. نشان دهید:

$$m(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[Z_n = z].$$

پرسش تئوری ۲۷. با کمک شرطی‌سازی امیدریاضی نشان دهید که تابع $m(z)$ در $z = ۰$ به مقدار بیشینه‌ی خود می‌رسد.

پرسش تئوری ۲۸. فرض کنید متغیّرهای تصادفی X_i مستقل و هم‌توزیع باشند و داشته باشیم $\mathbb{E}[X_i] = ۰$. همچنین فرض کنید عددی مانند B وجود دارد که همواره $|X_i| \leq B$.

۱. با استفاده از نامساوی مارکف نشان دهید:

$$\mathbb{P}[|Z_n| \leq ۲M\sqrt{n}] \geq \frac{۱}{۲}.$$

۲. با توجّه به نتیجه‌ی قبل نشان دهید:

$$\sum_{z=-۲M\sqrt{n}}^{۲M\sqrt{n}} m(z) \geq \frac{n}{۲}.$$

۳. حال با توجّه به این‌که همواره $m(z) \leq m(۰)$، نشان دهید اگر به ازای هر $z \in \mathbb{Z}$، داشته باشیم $m(z) < +\infty$، نتیجه‌ی بخش ۲ به تناقض منجر می‌شود و در نتیجه حرکت تصادفی با شرط $\mathbb{E}[X_i] = ۰$ وفادار است.

---

۵ به کویِ عشق مَنه بی‌دلیل راه، قدم![5]

با اندکی تعمیم می‌توان قدم‌زدن تصادفی را به ابعاد بالاتر از ۱ هم به آسانی تعمیم داد. ابتدا با کمک شبیه‌سازی در چند حالت ساده قدم‌زدن تصادفی در ابعاد ۲ و ۳ را مشاهده می‌کنیم.

پرسش شبیه‌سازی ۱۵. چنگیز وارد یک بازار شده است که بی‌نهایت مغازه دارد. این مغازه‌ها در فضای $\mathbb{R}^{۲}$ قرار دارند. فرض کنید چنگیز در ابتدا در نقطه‌ی $\mathbf{z}_{\circ} = [\circ, \circ]^{\top}$ قرار دارد.

۱. فرض کنید جابجایی‌های او در مراحل مختلف از هم مستقلند و جابجایی او در مرحله‌ی i–اُم را با بردار تصادفی $\mathbf{X}_i$ نشان می‌دهیم که:

$$\mathbb{P}[\mathbf{X}_i = \mathbf{x}_i] = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & \mathbf{x}_i = [۱, \circ]^{\top} \\ \frac{۱}{۴} & \mathbf{x}_i = [-۱, \circ]^{\top} \\ \frac{۱}{۴} & \mathbf{x}_i = [\circ, ۱]^{\top} \\ \frac{۱}{۴} & \mathbf{x}_i = [\circ, -۱]^{\top} \\ \circ & \text{o.w.} \end{cases} .$$

حرکت او را برای $n = ۱\circ, ۱\circ\circ, ۱\circ\circ\circ, ۱\circ\circ\circ\circ, ۱\circ\circ\circ\circ\circ$ قدم شبیه‌سازی کنید و نمودار موقعیت مکانی او را رسم کنید.

۲. فرض کنید جابجایی‌های او در مراحل مختلف از هم مستقلند و جابجایی او در مرحله‌ی i–اُم را با بردار تصادفی $\mathbf{X}_i$ نشان می‌دهیم که:

$$\mathbb{P}[\mathbf{X}_i = \mathbf{x}_i] = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & \mathbf{x}_i = [۱, ۱]^{\top} \\ \frac{۱}{۴} & \mathbf{x}_i = [-۱, ۱]^{\top} \\ \frac{۱}{۴} & \mathbf{x}_i = [۱, -۱]^{\top} \\ \frac{۱}{۴} & \mathbf{x}_i = [-۱, -۱]^{\top} \\ \circ & \text{o.w.} \end{cases} .$$

حرکت او را برای $n = ۱\circ, ۱\circ\circ, ۱\circ\circ\circ, ۱\circ\circ\circ\circ, ۱\circ\circ\circ\circ\circ$ قدم شبیه‌سازی کنید و نمودار موقعیت مکانی او را رسم کنید.

۳. قسمت ۲ را تکرار کنید، با این فرض که تعداد قدم‌های او در هر مرحله نیز لزوماً برابر یک نیست و می‌تواند عددی با توزیع یک‌نواخت بین ۱ تا ۱۰ باشد. نمودار حرکت چنگیز را برای $n = ۱\circ, ۱\circ\circ, ۱\circ\circ\circ, ۱\circ\circ\circ\circ, ۱\circ\circ\circ\circ\circ$ حرکت رسم کنید.

۴. فرض کنید جابجایی‌های او در مراحل مختلف از هم مستقلند و جابجایی او در مرحله‌ی i–اُم را با بردار تصادفی $\mathbf{X}_i$ نشان می‌دهیم که:

$$\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}(\begin{bmatrix} \mu_۱ \\ \mu_۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_۱^۲ & \circ \\ \circ & \sigma_۲^۲ \end{bmatrix})$$

حرکت او را برای $n = ۱\circ, ۱\circ\circ, ۱\circ\circ\circ, ۱\circ\circ\circ\circ, ۱\circ\circ\circ\circ\circ$ قدم شبیه‌سازی کنید و نمودار موقعیت مکانی او را رسم کنید. مقادیر μ_iها و $\sigma_i^۲$ها را

$$\mu_i = \circ, \pm۱, \pm۲, \pm۵, \pm۱\circ, \qquad \sigma_i^۲ = ۱, ۲, ۵, ۱\circ, ۲\circ, ۲۵, ۵\circ, ۱\circ\circ,$$

در نظر بگیرید.

[5] به کوی عشق مَنه بی‌دلیل راه، قدم/ که من به خویش نمودم صد اهتمام و نشد
فغان که در طَلبِ گنجِ نامهٔ مقصود/ شدم خرابِ جهانی ز غم تمام و نشد [حافظ]

پرسش شبیه‌سازی ۱۶.

۱. مدل حرکت را به صورت مدل توصیف‌شده در بخش ۱ پرسش شبیه‌سازی ۱۵ در نظر بگیرید. حرکت چنگیز را $N = ۱۰۰۰$ بار شبیه‌سازی کنید و هربار شبیه‌سازی را تا $n = ۱۰۰۰$ قدم ادامه دهید. سپس احتمال بازگشت به مبدأ را در این حالت محاسبه کنید.

۲. مدل حرکت را به صورت مدل توصیف‌شده در بخش ۲ پرسش شبیه‌سازی ۱۵ در نظر بگیرید. حرکت چنگیز را $N = ۱۰۰۰$ بار شبیه‌سازی کنید و هربار شبیه‌سازی را تا $n = ۱۰۰۰$ قدم ادامه دهید. سپس احتمال بازگشت به مبدأ را در این حالت محاسبه کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۱۷. چنگیز وارد یک پاساژ بزرگ شده است که بی‌نهایت طبقه‌ی بی‌نهایت بزرگ دارد! مغازه‌های این پاساژ در فضای $\mathbb{R}^۳$ قرار دارند. فرض کنید چنگیز در ابتدا در نقطه‌ی $\mathbf{z}_۰ = [۰, ۰, ۰]^\top$ قرار دارد.

۱. فرض کنید جابجایی‌های او در مراحل مختلف از هم مستقلند و جابجایی او در مرحله‌ی i-اُم را با بردار تصادفی $\mathbf{X}_i$ نشان می‌دهیم که:

$$\mathbb{P}[\mathbf{X}_i = \mathbf{x}_i] = \begin{cases} \frac{۱}{۶} & \mathbf{x}_i = [۱, ۰, ۰]^\top \\ \frac{۱}{۶} & \mathbf{x}_i = [-۱, ۰, ۰]^\top \\ \frac{۱}{۶} & \mathbf{x}_i = [۰, ۱, ۰]^\top \\ \frac{۱}{۶} & \mathbf{x}_i = [۰, -۱, ۰]^\top \\ \frac{۱}{۶} & \mathbf{x}_i = [۰, ۰, ۱]^\top \\ \frac{۱}{۶} & \mathbf{x}_i = [۰, ۰, -۱]^\top \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases}.$$

حرکت او را برای $n = ۱۰۰۰$ قدم شبیه‌سازی کنید و نمودار موقعیت مکانی او را رسم کنید.

۲. فرض کنید جابجایی‌های او در مراحل مختلف از هم مستقلند و جابجایی او در مرحله‌ی i-اُم را با بردار تصادفی $\mathbf{X}_i$ نشان می‌دهیم که:

$$\mathbb{P}[\mathbf{X}_i = \mathbf{x}_i] = \begin{cases} \frac{۱}{۸} & \mathbf{x}_i = [۱, ۲, ۴]^\top \\ \frac{۱}{۸} & \mathbf{x}_i = [-۱, ۲, ۴]^\top \\ \frac{۱}{۸} & \mathbf{x}_i = [۱, -۲, ۴]^\top \\ \frac{۱}{۸} & \mathbf{x}_i = [-۱, -۲, ۴]^\top \\ \frac{۱}{۸} & \mathbf{x}_i = [۱, ۲, -۴]^\top \\ \frac{۱}{۸} & \mathbf{x}_i = [-۱, ۲, -۴]^\top \\ \frac{۱}{۸} & \mathbf{x}_i = [-۱, -۲, -۴]^\top \\ \frac{۱}{۸} & \mathbf{x}_i = [-۱, -۲, -۴]^\top \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases}.$$

حرکت او را برای $n = ۱۰۰۰$ قدم شبیه‌سازی کنید و نمودار موقعیت مکانی او را رسم کنید.

۳. فرض کنید جابجایی های او در مراحل مختلف از هم مستقلند و جابجایی او در مرحله‌ی i-اُم را با بردار تصادفی $\mathbf{X}_i$ نشان می‌دهیم که: $\mathbf{X}_i = [X_i^{(۱)}, X_i^{(۲)}, X_i^{(۳)}]^\top$. همچنین فرض می‌کنیم $X_i^{(۱)} \sim \mathcal{N}(\mu = ۰, \sigma^۲ = ۴)$، $X_i^{(۲)} \sim Gamma(k = ۵, \theta = ۲)$ و $X_i^{(۳)} \sim Laplace(\mu = -۱۰, b = ۳)$. حرکت او را برای $n = ۱۰۰۰$ قدم شبیه‌سازی کنید و نمودار موقعیت مکانی او را رسم کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۱۸. فرض کنید چنگیز در فضای $\mathbb{R}^۳$ در حال حرکت است. حرکت او از نقطه‌ی $\mathbf{z}_۰ = [۰, ۰, ۰]^\top$ شروع شده و جابجایی‌های او در مراحل مختلف از هم مستقلند. جابجایی او در مرحله‌ی i-اُم را با بردار

تصادفی $\mathbf{X}_i$ نشان می‌دهیم که:

$$\mathbb{P}[\mathbf{X}_i = \mathbf{x}_i] = \begin{cases} \frac{1}{8} & \mathbf{x}_i = [1, 1, 1]^\top \\ \frac{1}{8} & \mathbf{x}_i = [-1, 1, 1]^\top \\ \frac{1}{8} & \mathbf{x}_i = [1, -1, 1]^\top \\ \frac{1}{8} & \mathbf{x}_i = [-1, -1, 1]^\top \\ \frac{1}{8} & \mathbf{x}_i = [1, 1, -1]^\top \\ \frac{1}{8} & \mathbf{x}_i = [-1, 1, -1]^\top \\ \frac{1}{8} & \mathbf{x}_i = [-1, -1, -1]^\top \\ \frac{1}{8} & \mathbf{x}_i = [-1, -1, -1]^\top \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}.$$

حرکت چنگیز را $N = 1000$ بار شبیه‌سازی کنید و هربار شبیه‌سازی را تا $n = 100$ قدم ادامه دهید. سپس احتمال بازگشت به مبدأ را در این حالت محاسبه کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۱۹. پاسخ پرسش‌های شبیه‌سازی ۱۶ و ۱۸ را مقایسه کنید.

ابتدا تلاش می‌کنیم تا پدیده‌ای که در پرسش شبیه‌سازی ۱۹ مشاهده کردید را به صورت تئوری هم اثبات کنیم.

پرسش تئوری ۲۹. با استفاده از تقریب استرلینگ می‌توان نشان داد:

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

با استفاده از این نامساوی روی مراحل زوج حرکت تصادفی چنگیز استدلال کنید که برای یک شبکه‌ی ۲ بعدی حرکت او وفادار و برای شبکه‌ی ۳ بعدی حرکت او بی‌وفا است.

فرض کنید چنگیز می‌تواند در فضای سه‌بُعدی حرکت کند و حرکت تصادفی او به صورت زیر مدل می‌شود:

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_{n-1} + \mathbf{X}_n.$$

که $\mathbf{Z}_n$ مکان او در مرحله‌ی n-اُم و $\mathbf{X}_n$ بُردار جابجایی او در مرحله‌ی n-اُم از حرکت است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{z}_n) = \int_{\mathbb{R}^3} f_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{x}_n) f_{\mathbf{Z}_{n-1}}(\mathbf{z}_n - \mathbf{x}_n)\, d\mathbf{x}_n, \qquad (1)$$

که در آن منظور از انتگرال نوشته شده، انتگرال گیری روی کل فضای $\mathbb{R}^3$ است. یعنی:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 dx_3.$$

.

پرسش تئوری ۳۰. فرض کنید که جابجایی چنگیز در هر مرحله از مراحل قبل مستقل است و تابع چگالی احتمال جابه‌جایی چنگیز در هر مرحله به صورت زیر است:

$$f_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{x}_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_n^\top \mathbf{x}_n}{2\sigma^2}\right).$$

یعنی در هر مرحله چنگیز به صورت تصادفی با یک توزیع گوسی جابه‌جا می‌شود.
با فرض اینکه در ابتدا چنگیز در مبدأ مختصات بوده است، تابع چگالی احتمال مکان او در مرحله‌ی n–اُم، یعنی $f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{z}_n)$ را به دست آورید.

حالا می‌خواهیم بدون داشتن اطلاعات نه چندان زیاد حرکت تصادفی چنگیز را بررسی کنیم. فرض کنید که متوسّط بردار جابجایی او در هر مرحله صفر باشد، یعنی $\mathbb{E}[\mathbf{X}_n] = ۰$. همچنین فرض کنید می‌دانیم ماتریس کوواریانس بردار جابه‌جایی او در هر مرحله به صورت $\mathbb{E}[\mathbf{X}_n\mathbf{X}_n^\top] = \sigma^۲\mathbf{I}$ است که مقدار $\sigma^۲$ را هم می‌دانیم.

پرسش تئوری ۳۱. می‌خواهیم در nهای بزرگ ببینیم که توزیع مکان او به چه شکل است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که به صورت متوسط در هر مرحله جابه‌جایی خیلی بزرگی در مقایسه با فاصله‌اش نسبت به مبدأ ندارد. بنابراین در انتگرال رابطه‌ی (۱) می‌توانیم عبارت $f_{\mathbf{Z}_{n-۱}}(\mathbf{z}_n - \mathbf{x}_n)$ را نسبت به بردار $\mathbf{x}_n$ بسط دهیم. این بسط را تا مرتبه‌ی دوم انجام دهید و عبارت به دست آمده برای $f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{z}_n)$ را بنویسید. (راهنمایی: در بسط دادن یک تابع اسکالر نسبت به یک بردار تا مرتبه‌ی دوم کمیت‌های بردار گرادیان و ماتریس هسین ظاهر می‌شوند.)

پرسش تئوری ۳۲. حالا فرض کنید که زمانی که هر مرحله طول می‌کشد زمان کوتاه δt باشد. با توجه به کوتاه‌بودن این زمان و کوچک‌بودن واریانس بردار جابه‌جایی در هر مرحله (یعنی فرض کنید $\sigma^۲ = s\delta t$.) به یک معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای برسید که در آن فرض حدّ پیوستار را برای زمان در نظر می‌گیریم، یعنی تغییرات کمیت‌ها (در اینجا تغییر تابع توزیع از مرحله‌ی $(n-۱)$–اُم به مرحله‌ی n–اُم در زمان کوتاه δt) را کوچک در نظر می‌گیریم، طوری که نسبت این تغییرات به δt محدود باشد. در نهایت δt را به صفر میل می‌دهیم و از اینجا به بعد همه‌ی کمیت‌ها را به جای این‌که تابع شماره‌ی مرحله یعنی n بنویسیم، تابع کمیت پیوسته‌ی زمان یعنی t می‌نویسیم. تمامی ضرایب ثابت را نیز با هم تجمیع کرده و α بنامید. جواب نهایی شما باید فرم زیر را داشته باشد:

$$\mathrm{LHS} = \alpha\, \mathrm{RHS}.$$

که LHS عبارتی شامل مشتق‌های زمانی تابع چگالی احتمال موقعیت چنگیز در زمان t، $f_{\mathbf{Z}_t}(\mathbf{z}_t)$ و RHS عبارتی تنها شامل مشتق‌های مکانی تابع چگالی احتمال موقعیت چنگیز است.

برای حل‌کردن معادله‌ای که به دست آورده‌اید، نیازمندیم که گریزی به درس ریاضیات مهندسی بزنیم. در درس ریاضیات مهندسی با تبدیل فوریه آشنا شده‌اید و می‌دانید برای یک سیگنال زمانی مانند $x(t)$، تبدیل فوریه و عکس آن به صورت زیر هستند:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$x(t) = \mathcal{F}^{-۱}\{X(\omega)\} = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

به طریقی کاملاً مشابه می‌توان برای یک سیگنال مکانی مانند $g(x)$ تبدیل فوریه‌ی مکانی و عکس آن را در نظر گرفت:

$$\tilde{g}(k) = \mathcal{F}\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-jkx}dx$$
$$g(x) = \mathcal{F}^{-۱}\{\tilde{g}(k)\} = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k)e^{jkx}dk.$$

در روابط بالا k فرکانس مکانی است.

همچنین اگر تابع $g : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ را داشته باشیم، می‌توانیم با اندکی تعمیم، زوج تبدیل فوریه‌ی مکانی را برای آن به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\tilde{g}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{g(\mathbf{x})\} = \int_{\mathbb{R}^۳} g(\mathbf{x}) e^{-j\mathbf{k}^\top \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x}) e^{-j\mathbf{k}^\top \mathbf{x}} dx_۱ dx_۲ dx_۳$$

$$g(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-۱}\{\tilde{g}(\mathbf{k})\} = \frac{۱}{۲\pi} \int_{\mathbb{R}^۳} \tilde{g}(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k}^\top \mathbf{x}} d\mathbf{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k}^\top \mathbf{x}} dk_۱ dk_۲ dk_۳.$$

به راحتی می‌توانید مشاهده کنید که قضیه‌ی کانولوشن در تبدیل فوریه‌ی سه بعدی نیز برقرار است.

پرسش تئوری ۳۳. از طرفین معادله دیفرانسیلی که در پرسش تئوری ۳۲ به دست آوردید، نسبت به مکان تبدیل فوریه بگیرید. معادله‌ی دیفرانسیل جدید را که تنها شامل مشتق‌های زمانی است را حل کنید. سپس با توجه به این‌که در لحظه‌ی صفر فرض می‌کنیم چنگیز در مبدأ مختصات قرار دارد، تابع چگالی احتمال مکان چنگیز را برحسب زمان به دست آورید.

پرسش تئوری ۳۴. تابع چگالی اندازه‌ی فاصله از مبدأ مختصات، یعنی $f_{\|\mathbf{Z}_t\|}(r)$ متوسط اندازه‌ی فاصله از مبدأ مختصات، یعنی $\mathbb{E}\left[\|\mathbf{Z}_t\|\right]$ و واریانس آن، یعنی $\mathrm{Var}\left[\|\mathbf{Z}_t\|\right]$ را به دست آورید.

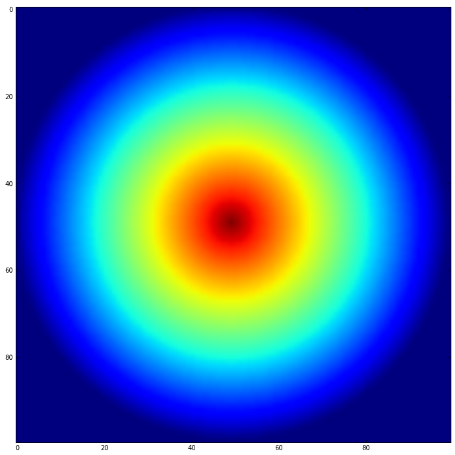
پرسش تئوری ۳۵. نتیجه‌ی پرسش تئوری ۳۳ را برحسب شماره‌ی مرحله یعنی n به جای زمان بازنویسی کنید و پارامتر α که در پرسش تئوری ۳۲ تعریف کردید را نیز بر حسب پارامترهای اوّلیه‌ی مسئله بازنویسی کنید. نتیجه‌ی به دست آمده را با قضیه‌ی حدّ مرکزی مقایسه کنید.

پرسش تئوری ۳۶. فرض کنید ما مکان اوّلیه‌ی چنگیز را نمی‌دانیم و تنها اطّلاع ما از مکان اوّلیه‌ی او تابع چگالی زیر است:

$$f_{\mathbf{Z}_۰}(\mathbf{z}_۰) = \frac{۱}{(۲\pi\sigma_۰^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \exp\left(-\frac{\mathbf{z}_۰^\top \mathbf{z}_۰}{۲\sigma_۰^۲}\right)$$

بدون انجام محاسبات پیچیده، تابع چگالی احتمال مکان چنگیز بر حسب زمان به دست آورید.

پرسش شبیه‌سازی ۲۰. با تنظیم پارامتر α به طریق مناسب اندازه‌ی تابع چگالی احتمال مکان چنگیز بر حسب زمان را به صورت یک انیمیشن Heatmap دوبعدی (برشی از فضای سه‌بعدی، برای مثال صفحه‌ی $x - y$ مختصات) رسم کنید، طوری که به صورت کاملاً نرم و پیوسته بتوان تغییرات را مشاهده کرد.



شکل ۲: تصویر یک لحظه از انیمیشن به عنوان مثال

حالا می‌خواهیم نگاه دقیق‌تری به حرکت تصادفی چنگیز داشته باشیم. تا کنون همواره فرض کرده‌ایم جابجایی‌های او در مراحل مختلف از هم مستقلند و توزیع جابجایی او در مراحل مختلف را یکسان فرض کرده‌ایم. در این‌جا می‌خواهیم فرض دوم را کنار بگذاریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{z}_n) = \int_{\mathbb{R}^۳} f_{\mathbf{X}_n}^{(n)}(\mathbf{x}_n) f_{\mathbf{Z}_{n-۱}}(\mathbf{z}_n - \mathbf{x}_n)\, d\mathbf{x}_n, \qquad (۲)$$

رابطه‌ی (۲) همان رابطه‌ی (۱) است، تنها برای تأکید روی این نکته که تابع چگالی احتمال بردار جابجایی چنگیز در مراحل مختلف می‌توانند باهم متفاوت باشند، بالانویس (n) را به تابع $f_{\mathbf{X}_n}$ افزوده‌ایم. فرض کنید که تبدیل فوریه‌ی تابع چگالی جابه‌جایی چنگیز در مرحله‌ی m-اُم را با $\tilde{f}_{\mathbf{X}_m}^{(m)}(\mathbf{k})$ نشان دهیم.

پرسش تئوری ۳۷. با فرض اینکه سفینه‌ی چنگیز در ابتدا در مبدأ مختصات بوده، تابع چگالی $f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{z}_n)$ را به صورت یک انتگرال که شامل $\tilde{f}_{\mathbf{X}_m}^{(m)}(\mathbf{k})$ها می‌شود بنویسید.

پرسش تئوری ۳۸. می‌خواهیم فرض کنید که در هر مرحله از حرکت واریانس جابه‌جایی چنگیز افزایش می‌یابد. یک روش برای تحقّق این فرض آنست که تابع چگالی احتمال جابه‌جایی چنگیز در مرحله‌ی m-اُم را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$f_{\mathbf{X}_m}^{(m)}(\mathbf{x}_m) = \frac{۱}{(۲\pi m^۲ \sigma_۰^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_m^\top \mathbf{x}_m}{۲m^۲\sigma_۰^۲}\right)$$

تابع چگالی احتمال $f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{z}_n)$ را در این حالت به دست آورید.

---

۶ نصیحتی کُنَمَت بشنو و بهانه مَگیر![۶]

لطفاً به نکات زیر دقّت کنید:

۱. این پروژه بخشی از نمره‌ی شما در این درس را تشکیل خواهد داد.

۲. می‌توانید پروژه را در قالب گروه‌های ۲ نفره انجام دهید. فرمی برای ثبت گروه‌ها در اختیار شما قرار خواهد گرفت. دقّت داشته باشید که در هنگام تحویل پروژه باید تمامی اعضای گروه به تمامی بخش‌ها مسلّط باشند و در نهایت همه‌ی اعضای یک گروه نمره‌ی واحدی را دریافت خواهند کرد.

۳. عنوان بخش‌های مختلف پروژه از آثار شعرا و بزرگان ادبیات فارسی انتخاب شده است. این اشعار بی‌ربط به مفاهیمی که در هر بخش با آن‌ها برخورد می‌کنید نیستند.

۴. تمامی شبیه‌سازی‌ها باید با کمک زبان Python انجام شود. شما تنها مجاز به استفاده از کتاب‌خانه‌های `numpy`، `scipy`، `random`، `plotly` و `matplotlib` هستید. اگر روی عنوان هر کتاب‌خانه کلیک کنید، به راهنمای آن کتاب‌خانه هدایت می‌شوید.

۵. تحویل پروژه به صورت گزارش و کدهای نوشته‌شده است. گزارش باید شامل پاسخ پرسش‌ها، تصاویر و نمودارها و نتیجه‌گیری‌های لازم باشد. توجه کنید که قسمت عمده بارم شبیه سازی را گزارش شما و نتیجه‌ای که از خروجی کد میگیرید دارد. همچنین تمیزی گزارش بسیار مهم است. کدها و گزارش را در یک فایل فشرده‌شده در سامانه‌ی درس‌افزار آپلود کنید.

۶. اگر برای پاسخ به پرسش‌ها، از منبعی (کتاب، مقاله، سایت و...) کمک گرفته‌اید، حتماً به آن ارجاع دهید.

۷. نوشتن گزارش کار با LaTeX نمره‌ی امتیازی دارد.

۸. پرسش‌های شبیه‌سازی با رنگ سبز و پرسش‌های تئوری با رنگ آبی مشخص شده‌اند.

۹. بخش‌های تئوری گزارش که در قالب پرسش‌ها طرح شده‌اند را می‌توانید روی کاغذ بنویسید و تصویر آن‌ها را در گزارش خود بیاورید، ولی توصیه‌ی برادرانه می‌کنم که این کار را نکنید!

۱۰. درصورت مشاهده‌ی تقلّب، نمره‌ی هردو فرد صفر منظور خواهد شد.

موفّق باشید!

[۶] نصیحتی کُنَمَت بشنو و بهانه مَگیر/ هر آنچه ناصحِ مُشفِق بگویَدَت بپذیر [حافظ]