

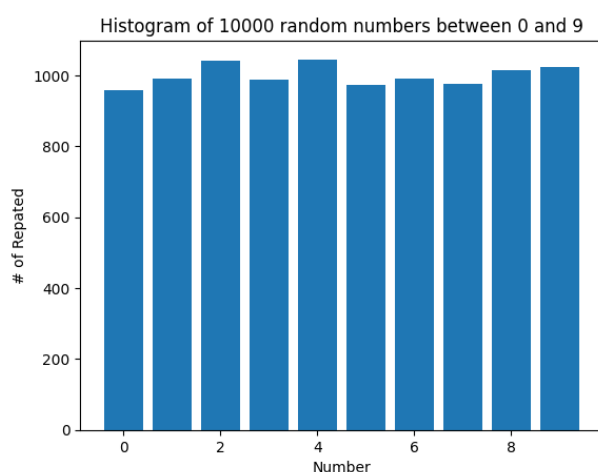
گزارش کار تمرین ششم شبیه‌سازی رایانه‌ای در فیزیک

علی اکرامیان - 99100563

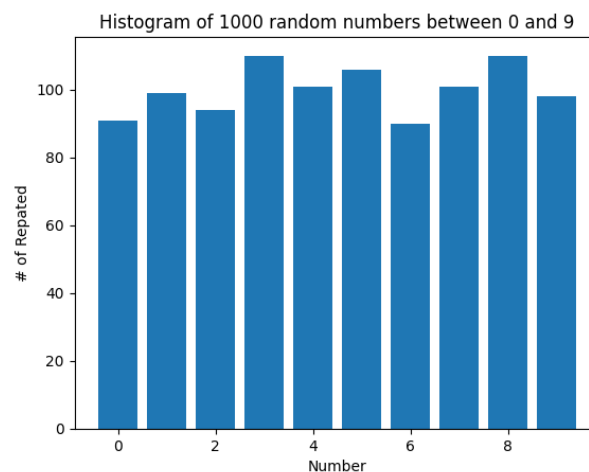
تمرین 6.1 (تولید اعداد کاتوره‌ای):

در این تمرین باید چک کنیم که آیا واقعا این رندوم جنریتور ما یونیفرم است یا خیر. رابطه‌ی داده شده را نیز چک می‌کنیم. من در این کد ابتدا یک عدد که تعداد عددهای جنریت شده است را می‌دهم (N) و سپس دو آرایه‌ی T که زمان است و یک آرایه‌ی N_STD که برای چک کردن رابطه به کار می‌آید را تعریف می‌کنم. حال یک n داریم که تا N پیش می‌رود و نتیجه‌ها را ثبت می‌کند. اگر کل کد را داخل حلقه نیندازم (در فایل HW6.ipynb این کدم هست) می‌توانم هیستوگرام این‌ها را رسم کنم و ببینیم که مانند ول نشست است و این قضیه چک شود. حال در حلقه می‌اندازم و در هر بار n را به اندازه‌ی خودش افزایش می‌دهم (تا وقتی مقیاس‌ها لگاریتمی می‌شود در نتایج فواصل داده‌های من ثابت باشد) حال یک آرایه‌ی $umbers$ دارم که در آن اعداد تولید شده را می‌ریزم و یک آرایه‌ی $counter$ دارم که شمارگان عدد را ذخیره می‌کنم (هر بار تکرار این عدد بین 0 تا 9 یک دانه به خانه‌ی متناظر آن در این آرایه اضافه می‌کند) حال انحراف معیار را حساب کرده و آن را به تعداد تقسیم می‌کنم و مستقیم رابطه‌ی داده شده را چک کنم. حال n را در آرایه‌ی زمان و انحراف معیار نرمال شده را نیز در آرایه‌ی N_STD می‌ریزم. حال از لوپ خارج شده و لگاریتم این دو آرایه را می‌گیرم و سپس یک خط مانند تمارین قبلی روی آنها فیت می‌کنم و خط فیت شده به همراه نقاط داده‌هایم را می‌کشم. در ادامه هیستوگرام‌ها و تحلیل داده‌ها را می‌آورم:

هیستوگرام‌ها:



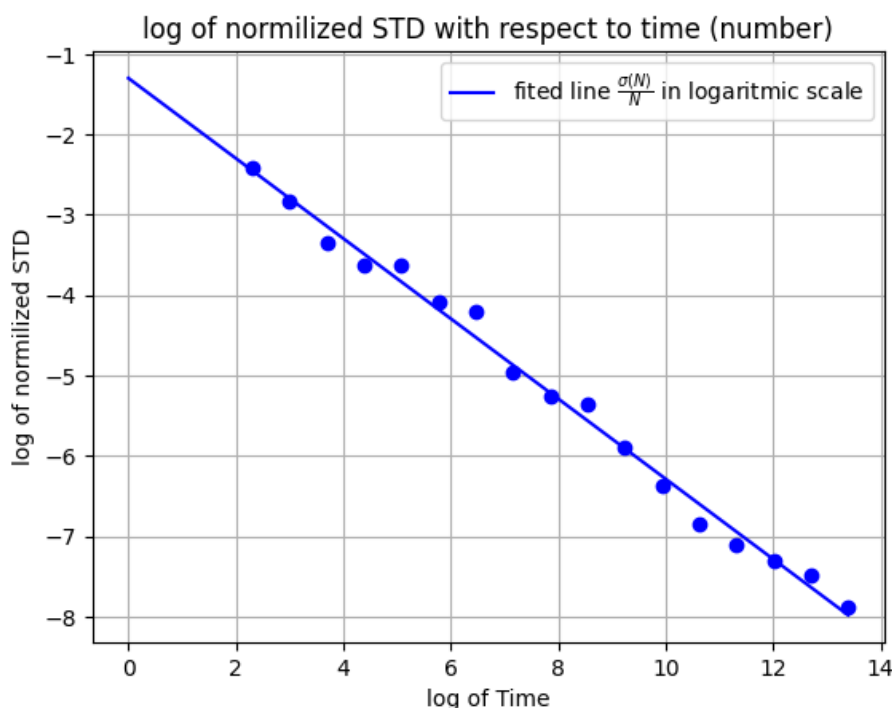
برای 10000 داده



برای 1000 داده

که می‌بینیم مانند ول نشست است. به وضوح معلوم است که درست است که ناهمواری‌ها مقدارشان رشد می‌کند ولی میزان ناهمواری‌ها به مقدار خودشان (همان نرمال شده‌ی انحراف معیار) با افزایش تعداد در حال کاهش است که رابطه‌ی داده شده را تایید می‌کند.

تحلیل داده‌ها:



که خروجی زیر را نیز برنامه می‌دهد:

slope for log STD(T) : -0.49855970 // y intercept for log STD(T) : -1.300468413

نمودار رسم شده نمودار لگاریتم انحراف معیار تقسیم بر تعداد است که برحسب لگاریتم زمان (تعداد) رسم شده که مشخص است که شیب منفی نیم است (-0.5) همان طور که طبق رابطه انتظار داشتیم انحراف معیار نرمال شده با یک به رادیکال تعداد متناسب باشد (همان توان 0.5 -)

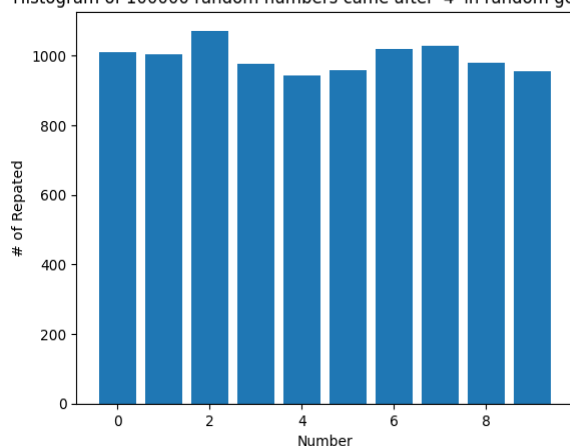
این تحلیل داده را من تا $N=1000000$ در فایل HW6.ipynb انجام داده‌ام و چون تا حد خوبی توان 0.5 - بدست می‌آمد دیگر میانگین گیری آنسامبلی انجام ندادم (اگر این میانگین گیری که صرفاً باید یک درایه تعریف کرد و نتایج را بدست آورد به ازای L بار تکرار و میانگین گرفت را انجام می‌دادم خیلی نزدیک‌تر به 0.5 - بود ولی این‌گونه بنظم تقریب خوبی بود پس نیازی ندیدم)

تمرین 6.2 (اعداد کاتوره‌ای پس از عدد 4):

در این تمرین من تقریباً همان کارهای تمرین 6.1 است با این تفاوت که یک شرط اضافی در حلقه گذاشته‌ام که چک کند اگر عدد $number[i]$ برابر با 4 است، $number[i+1]$ را در لیست اعداد قرار دهد. لیست اعدادی که پس از 4 آمده است نیز در آرایه‌ی num_after_4 ریخته‌ام. بقیه‌ی کارها مانند تمرین پیشین است. در فایل نوت‌بوکم هیستوگرام‌ها را نیز رسم کرده‌ام که در این‌جا نیز می‌آورم‌شان:

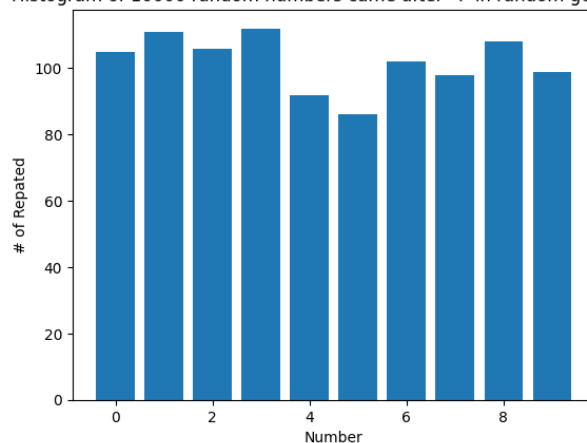
هیستوگرام‌ها:

Histogram of 100000 random numbers came after '4' in random generator



برای 100000 داده

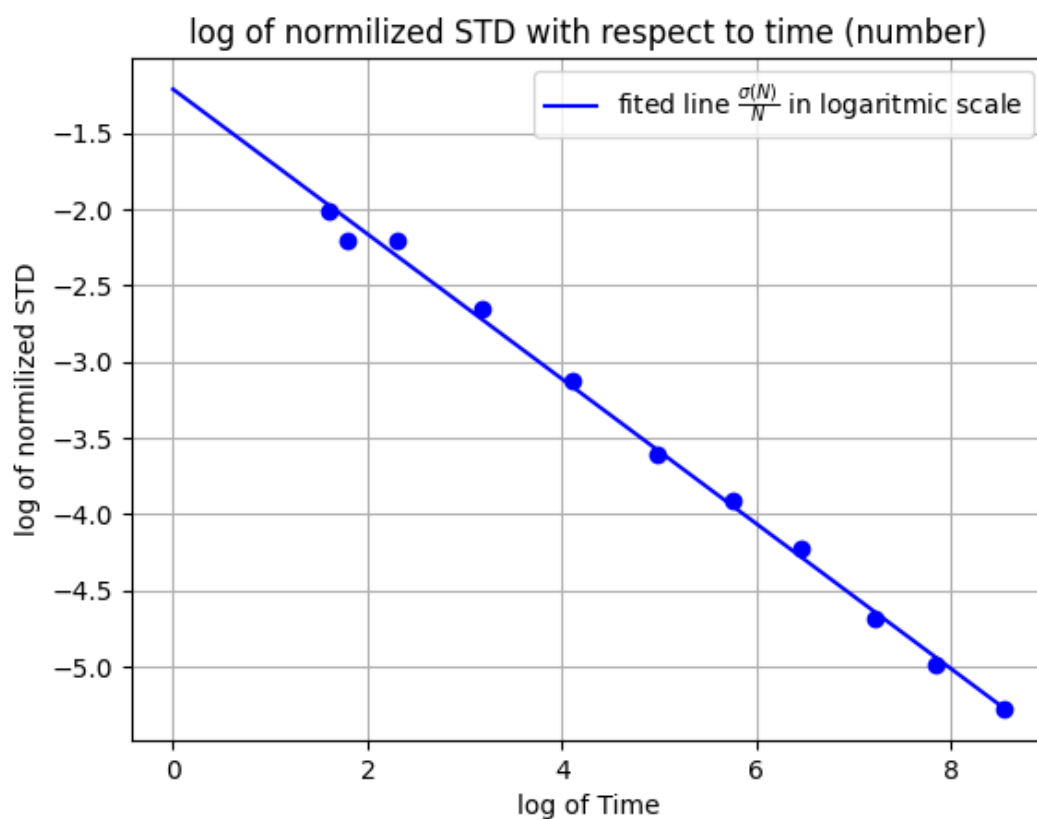
Histogram of 10000 random numbers came after '4' in random generator



برای 10000 داده

که تعداد داده‌ها منظور اعداد تولید شده است که به طور میانگین 1/10 آنها بعد از 4 است. در این تمرین نیز مانند قبلی چون اعداد تولید شده مستقل از هم اند پس به گونه‌ای ول نشست است و ناهموازی مانند همان رشد می‌کند.

تحلیل داده:



در این نمودار هم که لگاریتم انحراف معیار را بر حسب لگاریتم زمان رسم کرده‌ام مانند قبلی خروجی زیر را برنامه می‌دهد که -0.5 بودن توان انحراف معیار به تعداد را تایید می‌کند (مانند بخش قبل)

slope for log STD(T) : -0.475362508 // y intercept for log STD(T) : -1.2134849203

در این تمرین نیز چون با دقت خوبی داشت -0.5 را می‌داد از میانگین گیری صرف نظر کردم (یک‌جورهایی از رندوم بودنش خوشم آمد:))

که این نمودار تحلیل داده برای تعداد تا 100000 تاست که در شکل مشاهده می‌کنید.

تمرین 6.3 (قضیه‌ی حد مرکزی):

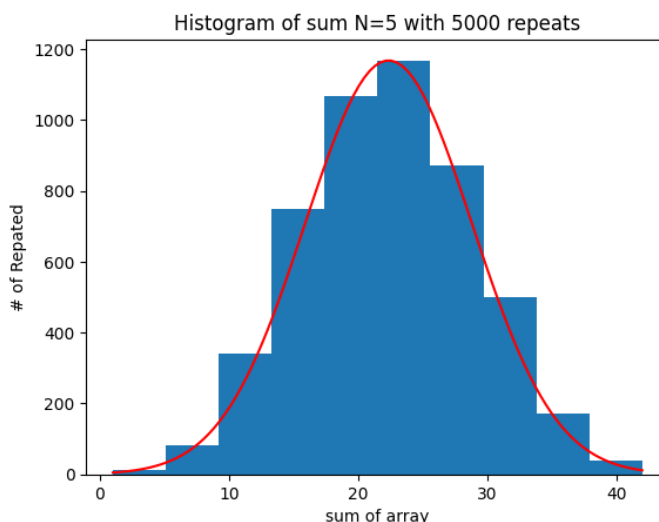
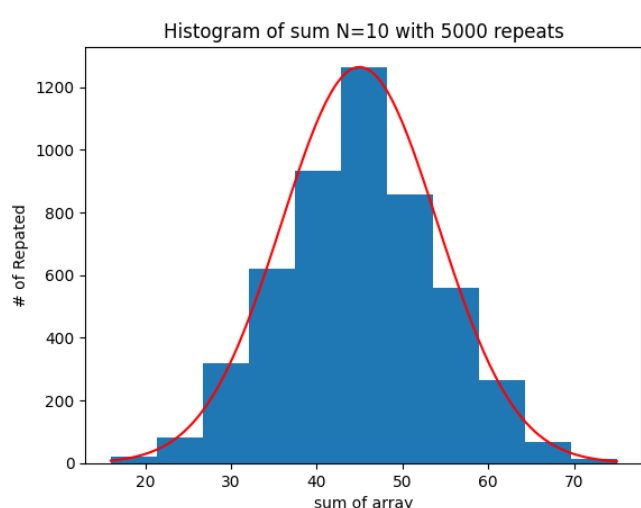
در این تمرین من یک آرایه از N های صورت سوال گرفتم که حلقه‌ام روی این‌ها باشد. سپس حلقه را زدم و یک آرایه‌ی counts تعریف کردم سپس یک حلقه زدم تا L بار تکرار کند. حال یک آرایه‌ی data دارم که برای اعداد رندوم است و هر بار n بار (حلقه‌ی درونی اجرا شده و یک آرایه به طول n درست می‌کند سپس روی این آرایه با sum جمع می‌زنم و نتیجه‌ی نهایی را در counts می‌ریزم. حال برای این‌که ان‌ها خیلی با هم فرق داشت و برای مرزهای هیستوگرام به مشکل می‌خوردم تابعی به شکل زیر با کمک Desmos فیت کردم که تعداد قسمت‌ها را به من بدهد (bins):

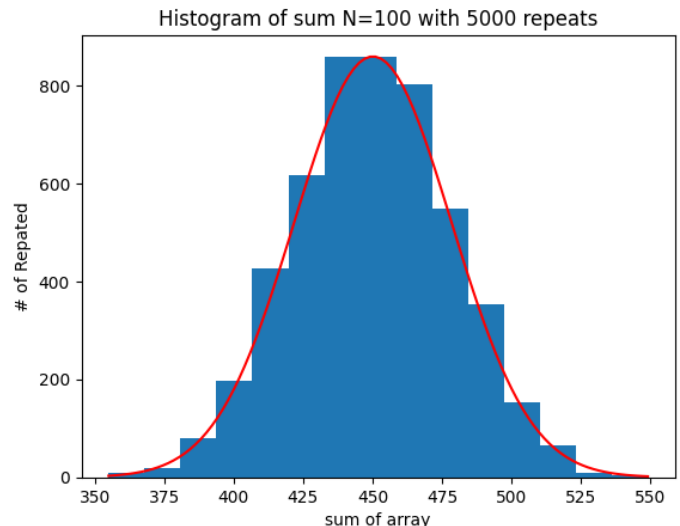
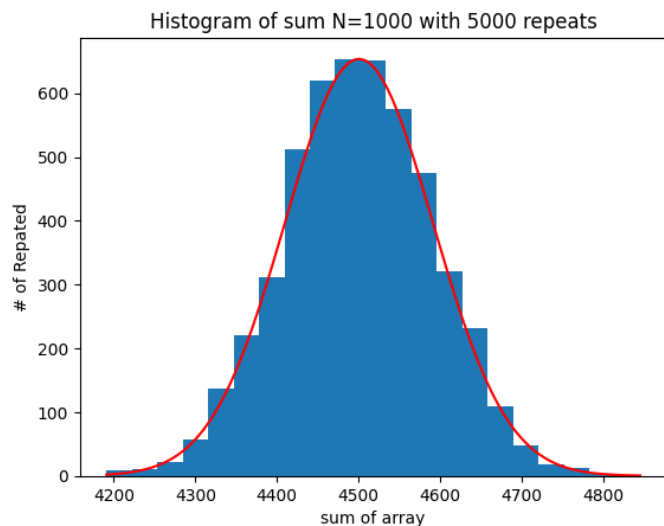
x_1	y_1	e_1
5	10	0.14172466
10	10	-0.1503538
100	15	0.0087046936
1000	20	-7.555467×10^{-5}

$$y_1 \sim mx_1^2 + ax_1 + b$$

STATISTICS	RESIDUALS
$R^2 = 0.9994$	e_1
PARAMETERS	
$m = -0.00004871$	
$a = 0.0591463$	
$b = 9.56376$	

حال هیستوگرام را رسم کردم با تعداد bins که به ازای هر ان بدست می‌آمد از تابع و سپس انحراف معیار و میانگین را حساب کردم و یک تابع گوسی روی داده‌های هیستوگرام انداختم تا نرمال بودن واضح باشد. (تابع گوسی را در ماکزیمم تعداد شمرده شده ضرب کردم تا روی داده‌ها بیوفتد اگر این کار را نمی‌کردم باید هیستوگرام را نرمال می‌کردم ولی این بنظرم قشنگ‌تر است). نتایج را می‌بینیم:





که نمودارها به ازای N های داده شده است.

تمرین 6.4 (مولد گوسی):

در این تمرین ابتدا باید طبق متن کتاب (درسنامه!) مولدی برای ایکس و وای پیدا کنیم که محاسبات را می‌آورم. پس از پیدا شدن این مولدها، رو و تتا را از توزیع‌های یونیفرم (یکنواخت) رندوم می‌گیرم و سپس در مولدهای گوسی بدست آمده قرار می‌دم. سپس ایکس‌ها و وای‌ها را در آرایه‌هایی میریزم تا بتوانم آنها را پرینت کنم. حال یکی از ایکس یا وای را می‌توان انتخاب کرد و دید که هیستوگرامش نرمال است (من ایکس را گرفتم ولی فرقی نمی‌کند چون یکی سینوس است یکی کسینوس تفاوتی ندارد) حال مانند تمرین قبل یک نمودار نرمال نیز روی آن می‌اندازم تا نرمال بودنش را متوجه بشویم. سپس با تابع scatter این ایکس‌ها و وای‌ها که داشتیم را در یک صفحه‌ی دو بعدی رسم کردم و مشخص است که به صورت نرمال حول (0,0) نرمال است (اگر سه بعدی رسم شود، یک نرمال در سه بعد می‌شود) حال ابتدا محاسبات تابع مولد و سپس خروجی‌های برنامه را می‌بینیم:

$$f = 1 - e^{\rho^2/2\sigma^2} \Rightarrow \rho^2/2\sigma^2 = \ln(1 - f)$$

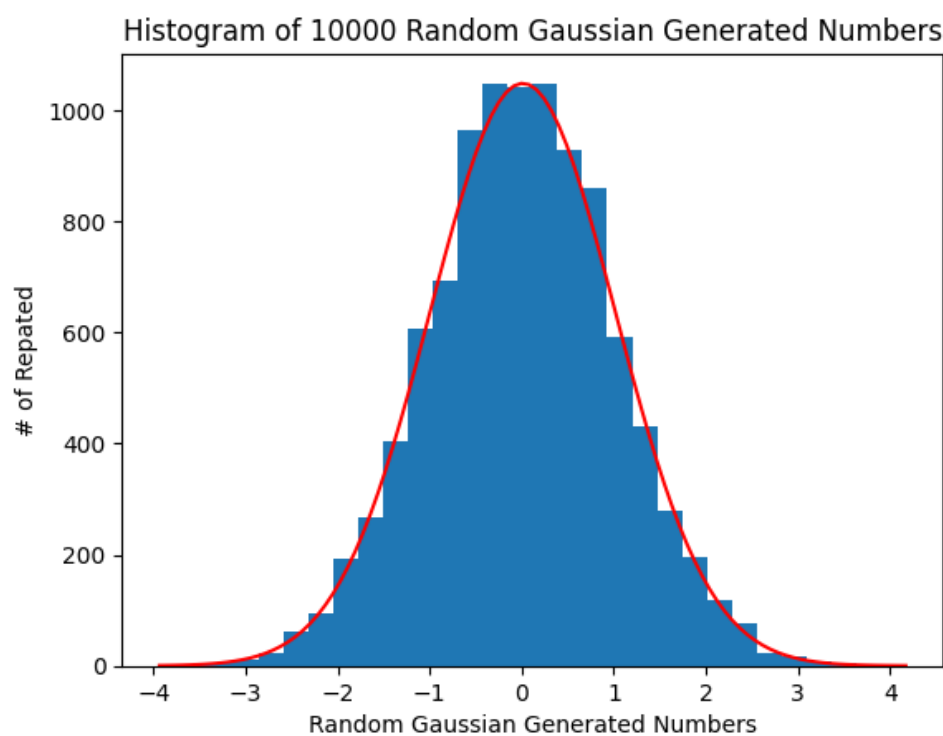
$$\Rightarrow \rho = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - f)}$$

$$x = \rho \cos(\theta) \Rightarrow x = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - f)} \cos(\theta)$$

$$y = \rho \sin(\theta) \Rightarrow y = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - f)} \sin(\theta)$$

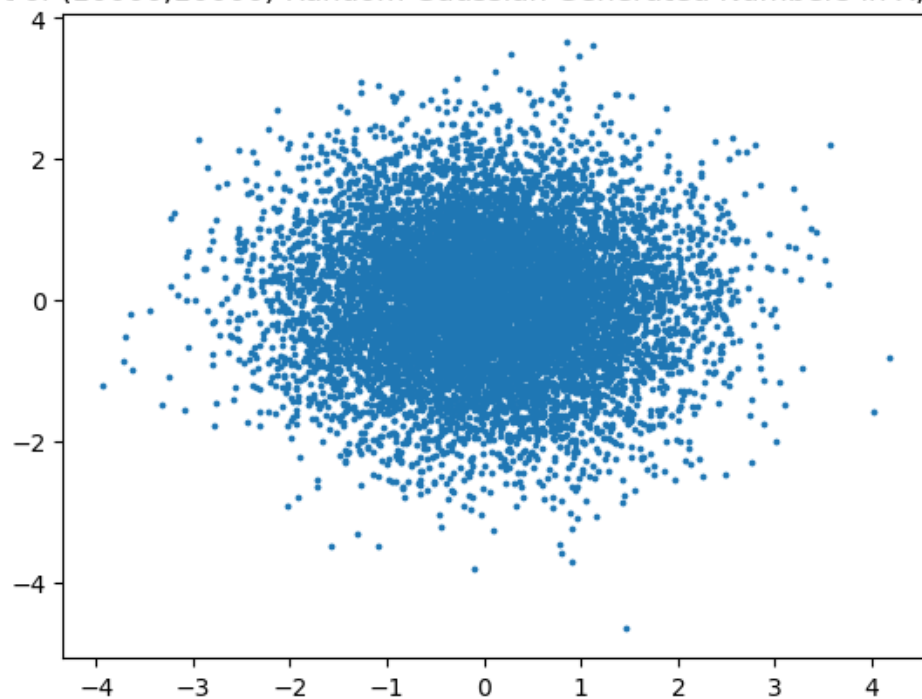
که رو را بین 0 و 1 و تتا را یونیفرم بین 0 تا 360 درجه گذاشته‌ام.

گوسی بودن هریک از مولفه‌ها:



و گوسی بودن توزیع ایکس و وای در صفحه‌ی دو بعدی:

Plot of (10000,10000) Random Gaussian Generated Numbers in X,Y Plane

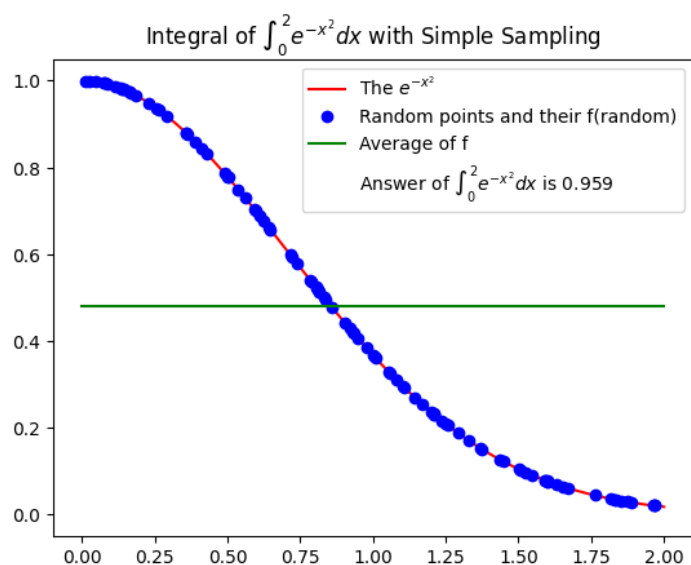


تمرین 7.1 (انتگرال گیری):

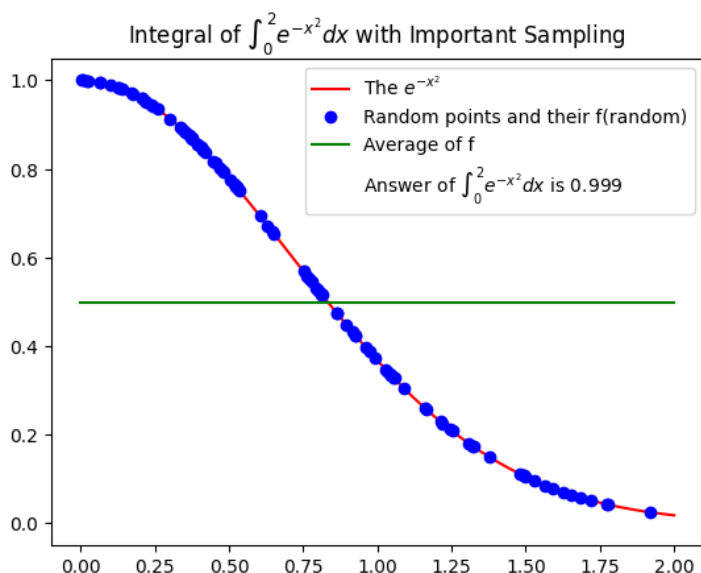
در این تمرین کد من دو بخش پشت سر هم است که ابتدا یک تعداد داریم که نقاط داده شده است و سر و ته بازه را مشخص می‌کنیم. سپس ابتدا نمونه گیری ساده است که دو آرایه‌ی F و RND داریم که اف مقدار تابع است در نقاط رندوم و آرایه‌ی بعدی نیز خود لیست نقاط رندوم است. حال یک حلقه می‌زنم و به طور یکواخت در این بازه نقطه برداشته داخل اف می‌گذارم و داخل آرایه‌ها می‌ریزم. سپس در نهایت میانگین این اف‌ها را گرفته و در طول بازه ضرب می‌کنم و به عنوان جواب انتگرال S گزارش می‌کنم. حال هم خود تابع را رسم می‌کنم و هم نقاطی که گرفتم به طور رندوم را در آن می‌اندازم و هم میانگین تابع را به صورت یک خط می‌کشیم (خط سبز) و عدد که هم در خروجی ترمینال است و هم در legend خود شکل آورده‌ام.

قسمت دوم نیز نمونه برداری هوشمند است که طبق مولدی که داشتیم اعداد رندوم را در آن می‌گذارم و سپس در تابع قرار داده و همین کار قسمت اول را تکرار می‌کنم. با این تفاوت که این بار یک arg داریم که باید مقدار F/G را طبق توزیع هوشمندمان $G=\exp(-x)$ میانگین گیری کرده و سپس گزارش کنیم. حال من همین کار را با یک حلقه زدن انجام دادم و جواب نهایی را مانند قسمت قبل بدست می‌آورم. و همان چیزهایی که قسمت قبل پرینت کردم را اینجا نیز پرینت و رسم می‌کنم. نتایج را می‌بینیم:

به ازای دادن 100 نقطه:



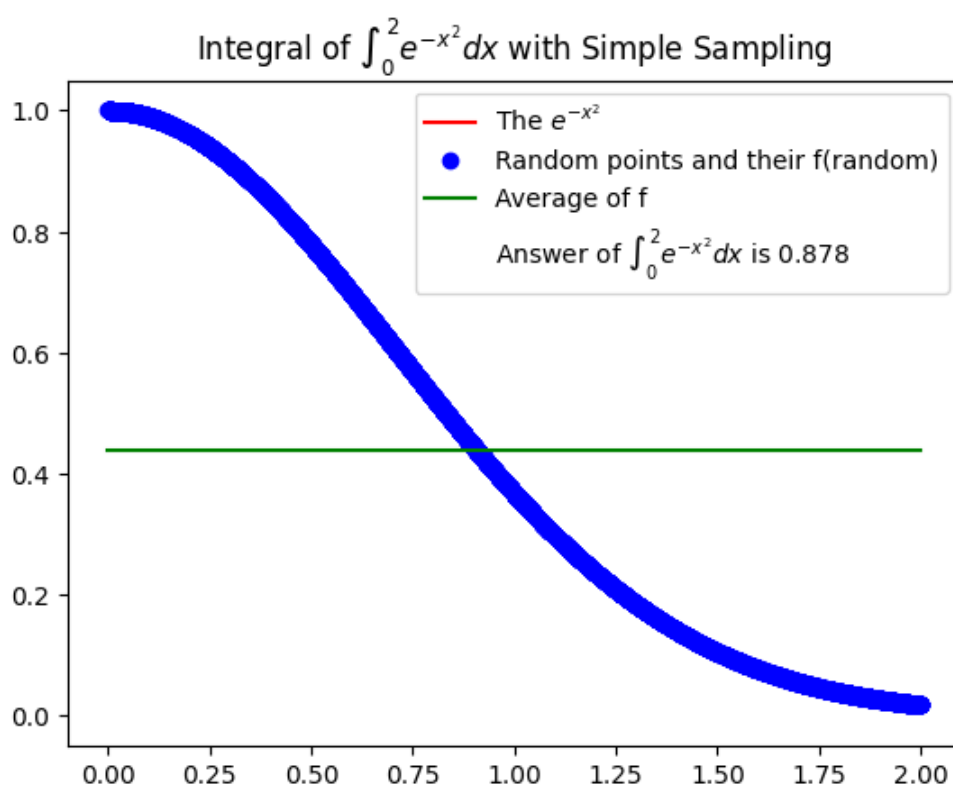
نمونه گیری ساده:



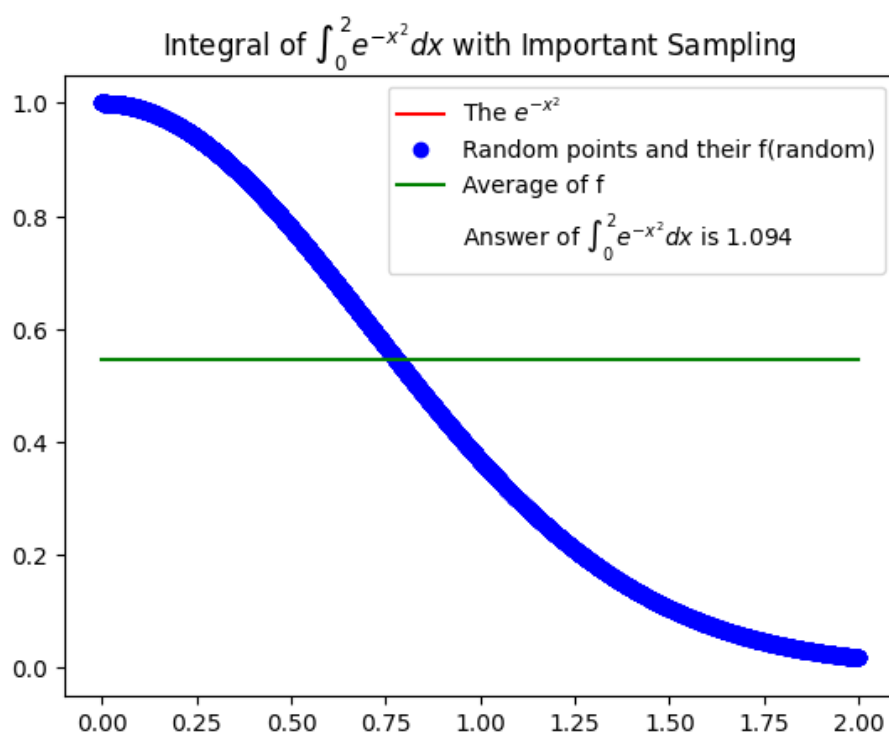
نمونه گیری هوشمند:

به ازای 10000 نقطه:

نمونه گیری ساده:



و هوشمند:



تمرین 7.2 (انتگرال گیری سه بعدی):

من انتگرال را نوشتم به صورت زیر و یک بعدی شد و میدانم که می‌توان این انتگرال یک بعدی را به روش مونت کارلو و غیره گرفت ولی چیزی از آن سه بعدی نبود که بگیرم):

$$\rho(z) = \frac{3\rho}{4} + \frac{\rho}{4}z$$

$$\langle z \rangle = \frac{1}{M} \int_{-R}^{+R} z \pi (R^2 - z^2) \rho(z) dz$$

$$\langle z \rangle = \frac{1}{M} \int_{-R}^{+R} z \pi (R^2 - z^2) \left(\frac{3\rho}{4} + \frac{\rho}{4}z \right) dz$$