

گزارش کار تمرین پنجم شبیه سازی رایانه ای در فیزیک

علی اکرامیان - 99100563

تمرین 5.1 (اثبات رابطه ی 5):

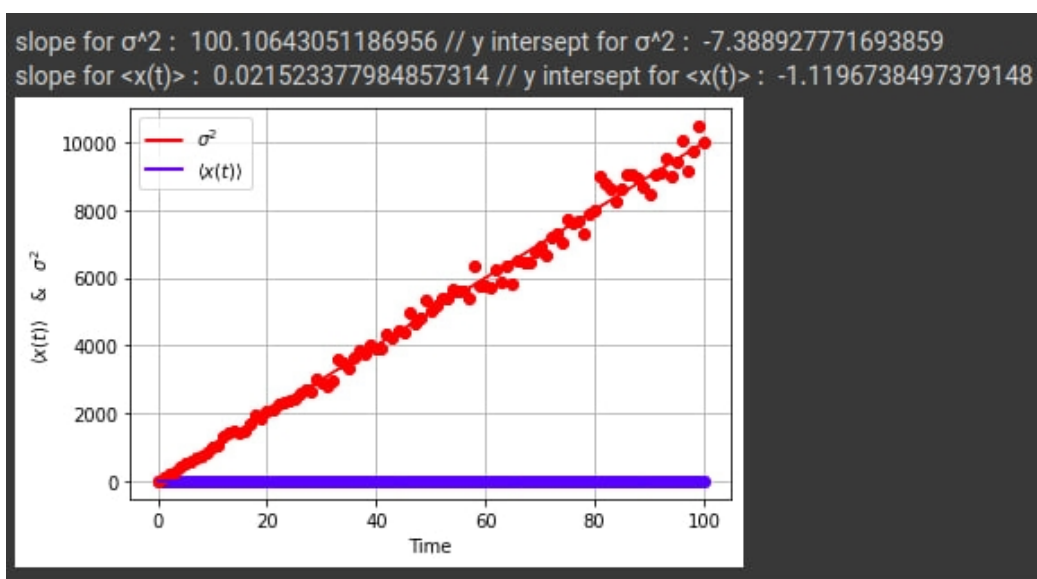
برای محاسبه ی رابطه ی 5 نیاز به داشتن متوسط یکس و متوسط مربع یکس داریم. متوسط یکس را مستقیماً از رابطه ی 4 استفاده کرده و متوسط مربع یکس را نیز این طور محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned}\langle x(t) \rangle &= \langle (x(t-\tau) + al)^2 \rangle = \langle x(t-\tau)^2 + a^2 l^2 + 2alx(t-\tau) \rangle \\ &= \langle x(t-\tau)^2 \rangle + l^2 + 2l^2(p-q)^2(t-\tau)/\tau = \sum_{j=1}^n [l^2 + l^2 + 2l^2(p-q)^2(j\tau)/\tau] \\ &= nl^2 + l^2 n(n-1)(p-q)^2 \Rightarrow \sigma^2 = \langle x(t)^2 \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = tl^2(p+q-p^2-q^2+2pq)/\tau \\ &\Rightarrow \sigma^2 = \boxed{\frac{4l^2 pqt}{\tau}}\end{aligned}$$

تمرین 5.2 (ولگشت یک بعدی و بررسی روابط 4 و 5):

من در قدم یک تابع step تعریف کردم که یک استپ تولید می کند: یک عدد رندوم بین 0 و 1 را برمی دارد و اگر کمتر از احتمال داده شده بود، 1 برمی گرداند و اگر کمتر بود 1- برمی گرداند که گام مثبت و منفی است.

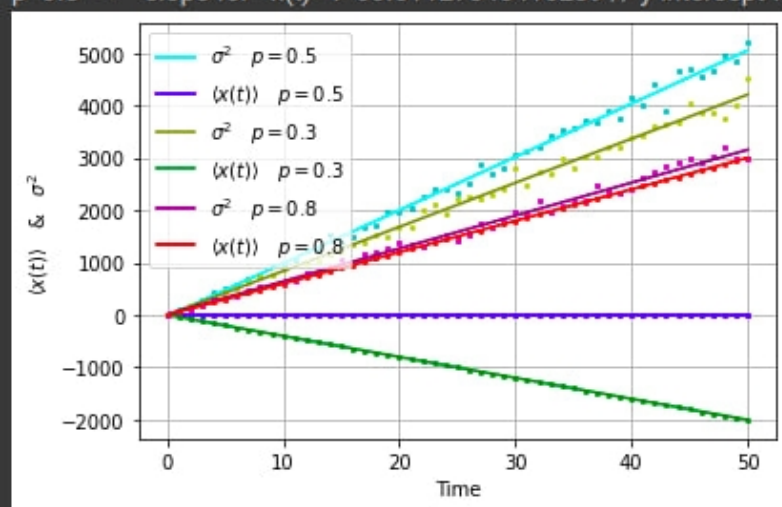
حال یک حلقه زده ام که برای تعداد گام های مختلف چک کند این ولگشت را و مقادیر واریانس و میانگین را بعد از هر بار اجرا در آرایه های متناظرش (AVG و VAR) می ریزد. در حلقه ی داخلی تر ز بار حلقه تکرار می شود. در حلقه ی داخلی تر نیز یک ولگشت با n قدم داریم که n در بیرونی ترین حلقه در حال تغییر است. (n را یا 10 تا 100 تا زیاد می کنم چون خیلی زیاد می شود محاسبات و به درد هم نمی خورد خیلی) سپس میانگین و واریانس را رسم می کنم و خط به آن ها فیت می کنم که در نتایج مشخص است. ابتدا برای p=0.5 نتیجه می بینیم:



در این نمودار برای $N=10000$ و 1000 بار تکرار این رسم را انجام دادم. خط فیت شده برای میانگین مطابق انتظار (رابطه‌ی 4) چون p و q برابراند باید صفر باشد و تقریباً همین طور هم هست. برای واریانس هم چون n را 100 تا 100 تا زیاد کردم محور تی به 100 باید اسکیل شود. پس شیب برای واریانس 1 هست. که کاملاً مطابق انتظار است. چون p و q نصف اند ضرب آن دو 4 را خنثی کرده و طول گام و زمان را که 1 گرفته بودیم از اول پس شیب 1 می‌شود که با شبیه‌سازی ما مطابقت دارد.

حال برای سه p و q متفاوت:

```
p=0.5 => slope for  $\sigma^2$  : 101.62125781393665 // y intercept for  $\sigma^2$  : -29.910974681750147
p=0.5 => slope for  $\langle x(t) \rangle$  : -0.0030593665158371018 // y intercept for  $\langle x(t) \rangle$  : -0.18465309200603325
p=0.3 => slope for  $\sigma^2$  : 84.16178299475114 // y intercept for  $\sigma^2$  : -0.35491753544496885
p=0.3 => slope for  $\langle x(t) \rangle$  : -40.014430950226235 // y intercept for  $\langle x(t) \rangle$  : 0.20261689291086724
p=0.8 => slope for  $\sigma^2$  : 62.795775332488695 // y intercept for  $\sigma^2$  : 14.431203825037752
p=0.8 => slope for  $\langle x(t) \rangle$  : 60.01127348416289 // y intercept for  $\langle x(t) \rangle$  : -0.10332730015124768
```

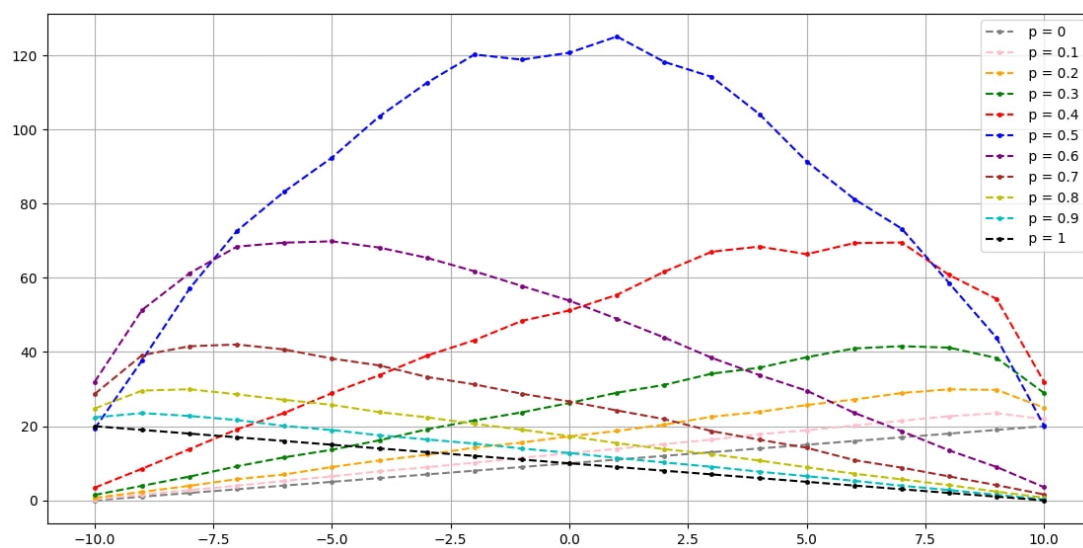


که این کار در کد اصلی با نام 5.2 نیست و در فایل ipynb قرار دارد. در این نمودار برای $N=10000$ و 1000 بار تکرار این رسم را انجام دادم. در این عکس نیز که خروجی را از گوگل کلب گرفته‌ام، برای هر احتمال، شیب‌های میانگین و واریانس آمده‌اند. در این کد نیز 100 تا 100 تا تغییر داده‌ام و باید شیب واریانس و میانگین تقسیم بر 100 کرد تا واقعیت بدست بیاید. وقتی این کار را انجام بدهیم کاملاً با تئوری (رابطه‌ی 4 و 5) تطابق دارد.

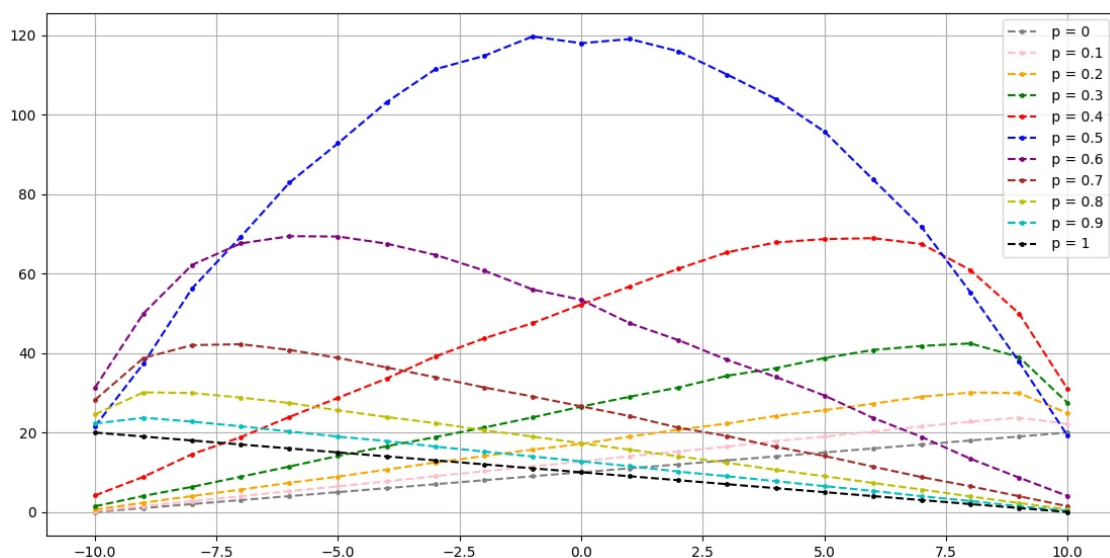
تمرین 5.3 (ولگشت با تله):

در این تمرین، من همان تابع step قبلی را دارم که همان کار را انجام می‌دهد. حال یک حلقه‌ی بیرونی دارم که برای p های با فاصله‌ی 0.1 این ولگشت را انجام می‌دهد. حال یک آرایه‌ی $life$ و X تعریف می‌کنم که به ترتیب طول عمر و مکان شروع هستند. حال یک حلقه‌ی درونی دارم که از 0 تا 20 مکان شروع اولیه را تغییر می‌دهد (از انتهای چپ تا انتهای راست) سپس 10 تا افزایش کم می‌کنم تا از -10 تا +10 شود. برای زیبایی:). حال حلقه‌ی ز تکرار را دارم که تکرار می‌کند و میانگین می‌گیرد (مثل تمرین 5.2) حال یک حلقه‌ی درونی دارم که به آن می‌گویم این ولگشت را ادامه دهد تا زمانی که کمتر از -10 یا بیشتر از +10 شود. و هر بار که قدمی بر می‌دارد آن را در یک آرایه بگذارد (تعداد قدم‌ها را) سپس رویشان میانگین می‌گیرم و به عنوان مانگین طول عمر این ولگرد با این مکان اولیه قرار می‌دهم. حال این عمر را بر حسب مکان اولیه رسم می‌کنم. به ازای هر p . شکل‌ها را می‌بینیم:

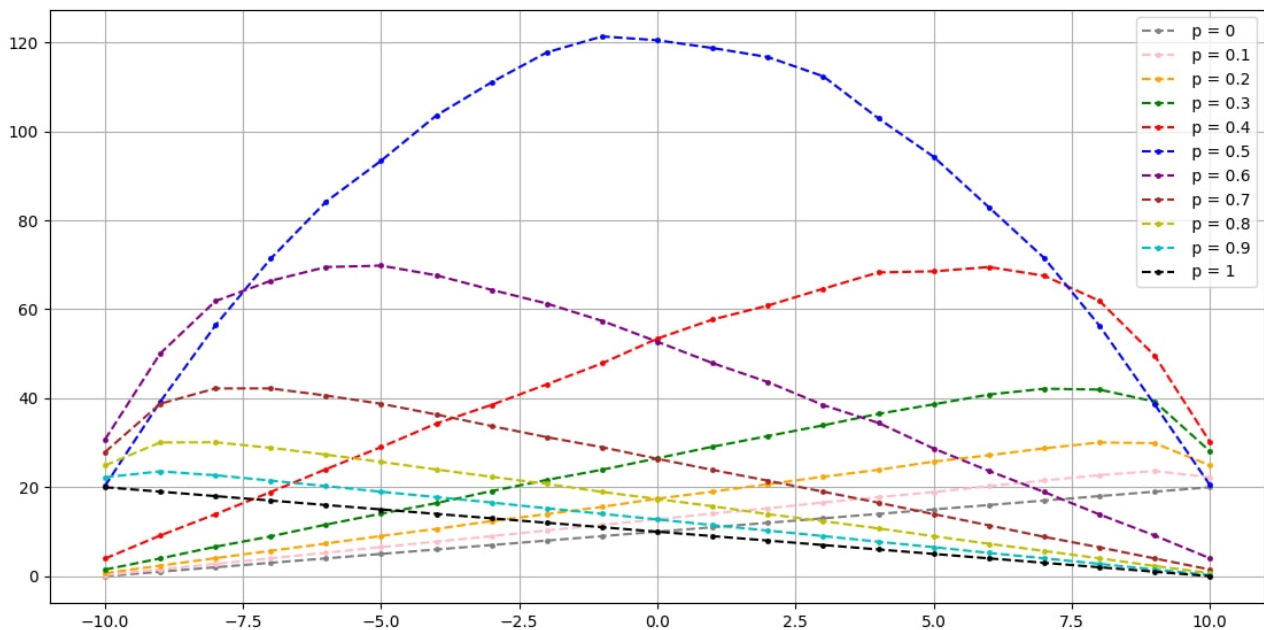
برای 1000 بار تکرار:



برای 5000 بار تکرار:



و برای 10000 بار تکرار و میانگین گیری داریم:



که واضح است هر چقدر تکرار را بیشتر کنیم نمودار نرم‌تری خواهیم داشت. در خود نمودارها رنگ‌ها مشخص است (برای رنگ آمیزی‌شان هم یک لیست رنگ تعریف کردم و برای هر p گفتم آرایه‌ی $p \times 10$ در آرایه را بردارد!) که به ازای احتمال نصف نصف، بیشترین طول عمر را خواهیم داشت و مطابق انتظار اگر از وسط شروع شود این احتمال بیشتر نیز می‌شود. ولی در p و q متفاوت در جاهای مختلفی این طول عمر ماکزیمم می‌شود.

من در کد اصلی ام که در پوشه‌ی 5.3 هست برای 1000 را دادم چون طول می‌کشید. بقیه در فایل ipynb موجود است (تکرار بالاتر).

تمرین 5.4 (ولگشت با تله با جدول):

در این سوال من یک آرایه‌ی دوبعدی که 23 ستون دارد تعریف کردم که خانه‌ی 0 و 22 مرگ هستند! حال ستون وسط از ردیف اول را 1 می‌کنم. حال الگوریتم را می‌نویسم به طوری که از ردیف دوم شروع به چک کردن می‌کند تا آخر. حال برای ستون‌های غیر مرگ نیز هر ارایه را حاصل جمع آرایه‌ی چپ بالا در p به علاوه‌ی راست بالا در q می‌کند و نتیجه را ذخیره می‌کند. و اگر که در ردیف‌های کنار مرگ (ردیف 1 و 21) بود نیز فقط از طرف وسط این کار را انجام بدهد. حال نتیجه را در ترمینال پیرنت می‌کنم:

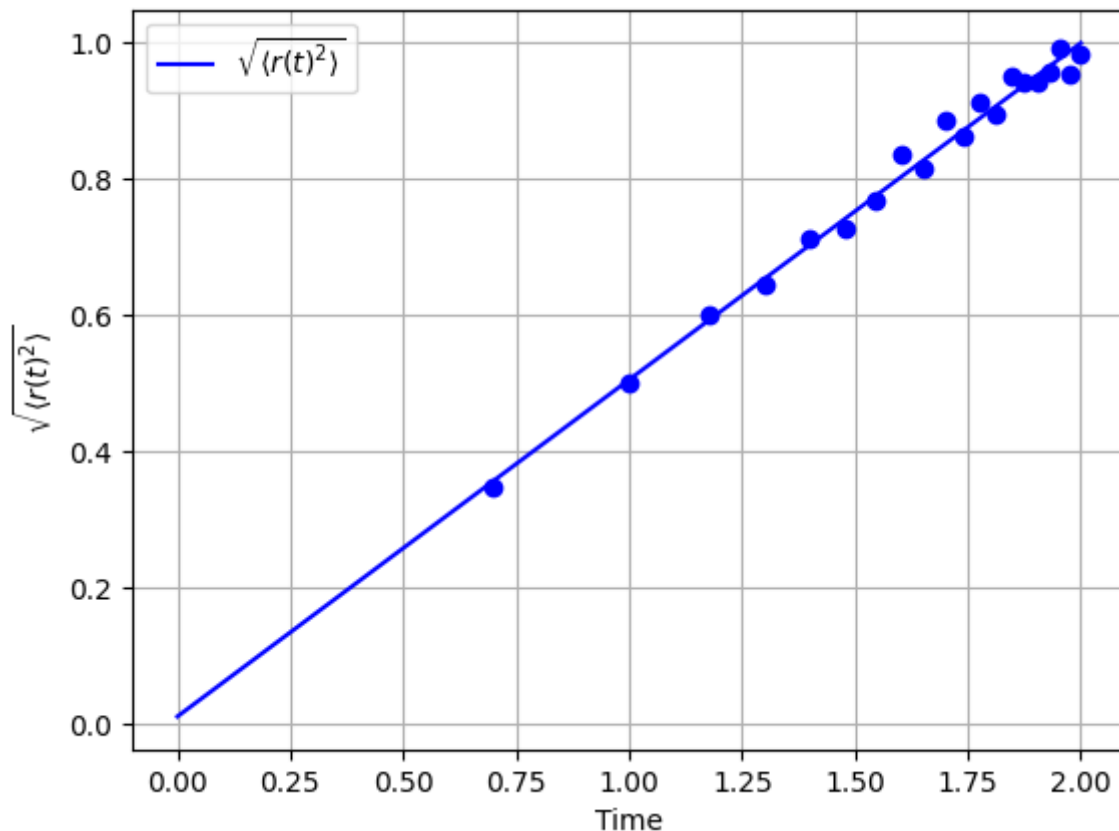
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.5000 | 0.0000 | 0.5000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.2500 | 0.0000 | 0.5000 | 0.0000 | 0.2500 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.1250 | 0.0000 | 0.3750 | 0.0000 | 0.3750 | 0.0000 | 0.1250 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0625 | 0.0000 | 0.2500 | 0.0000 | 0.3750 | 0.0000 | 0.2500 | 0.0000 | 0.0625 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0312 | 0.0000 | 0.1562 | 0.0000 | 0.3125 | 0.0000 | 0.3125 | 0.0000 | 0.1562 | 0.0000 | 0.0312 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0156 | 0.0000 | 0.0938 | 0.0000 | 0.2344 | 0.0000 | 0.3125 | 0.0000 | 0.2344 | 0.0000 | 0.0938 | 0.0000 | 0.0156 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0078 | 0.0000 | 0.0547 | 0.0000 | 0.1641 | 0.0000 | 0.2734 | 0.0000 | 0.2734 | 0.0000 | 0.1641 | 0.0000 | 0.0547 | 0.0000 | 0.0078 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0039 | 0.0000 | 0.0312 | 0.0000 | 0.1094 | 0.0000 | 0.2188 | 0.0000 | 0.2734 | 0.0000 | 0.2188 | 0.0000 | 0.1094 | 0.0000 | 0.0312 | 0.0000 | 0.0039 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0020 | 0.0000 | 0.0176 | 0.0000 | 0.0703 | 0.0000 | 0.1641 | 0.0000 | 0.2461 | 0.0000 | 0.2461 | 0.0000 | 0.1641 | 0.0000 | 0.0703 | 0.0000 | 0.0176 | 0.0000 | 0.0020 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0010 | 0.0000 | 0.0098 | 0.0000 | 0.0439 | 0.0000 | 0.1172 | 0.0000 | 0.2051 | 0.0000 | 0.2461 | 0.0000 | 0.2051 | 0.0000 | 0.1172 | 0.0000 | 0.0439 | 0.0000 | 0.0098 | 0.0000 | 0.0010 |
| 0.0005 | 0.0000 | 0.0054 | 0.0000 | 0.0269 | 0.0000 | 0.0806 | 0.0000 | 0.1611 | 0.0000 | 0.2256 | 0.0000 | 0.2256 | 0.0000 | 0.1611 | 0.0000 | 0.0806 | 0.0000 | 0.0269 | 0.0000 | 0.0054 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0029 | 0.0000 | 0.0161 | 0.0000 | 0.0537 | 0.0000 | 0.1208 | 0.0000 | 0.1934 | 0.0000 | 0.2256 | 0.0000 | 0.1934 | 0.0000 | 0.1208 | 0.0000 | 0.0537 | 0.0000 | 0.0161 | 0.0000 | 0.0029 |
| 0.0015 | 0.0000 | 0.0095 | 0.0000 | 0.0349 | 0.0000 | 0.0873 | 0.0000 | 0.1571 | 0.0000 | 0.2095 | 0.0000 | 0.2095 | 0.0000 | 0.1571 | 0.0000 | 0.0873 | 0.0000 | 0.0349 | 0.0000 | 0.0095 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0055 | 0.0000 | 0.0222 | 0.0000 | 0.0611 | 0.0000 | 0.1222 | 0.0000 | 0.1833 | 0.0000 | 0.2095 | 0.0000 | 0.1833 | 0.0000 | 0.1222 | 0.0000 | 0.0611 | 0.0000 | 0.0222 | 0.0000 | 0.0055 |
| 0.0027 | 0.0000 | 0.0139 | 0.0000 | 0.0417 | 0.0000 | 0.0916 | 0.0000 | 0.1527 | 0.0000 | 0.1964 | 0.0000 | 0.1964 | 0.0000 | 0.1527 | 0.0000 | 0.0916 | 0.0000 | 0.0417 | 0.0000 | 0.0139 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0083 | 0.0000 | 0.0278 | 0.0000 | 0.0667 | 0.0000 | 0.1222 | 0.0000 | 0.1746 | 0.0000 | 0.1964 | 0.0000 | 0.1746 | 0.0000 | 0.1222 | 0.0000 | 0.0667 | 0.0000 | 0.0278 | 0.0000 | 0.0083 |
| 0.0042 | 0.0000 | 0.0180 | 0.0000 | 0.0472 | 0.0000 | 0.0944 | 0.0000 | 0.1484 | 0.0000 | 0.1855 | 0.0000 | 0.1855 | 0.0000 | 0.1484 | 0.0000 | 0.0944 | 0.0000 | 0.0472 | 0.0000 | 0.0180 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0111 | 0.0000 | 0.0326 | 0.0000 | 0.0708 | 0.0000 | 0.1214 | 0.0000 | 0.1669 | 0.0000 | 0.1855 | 0.0000 | 0.1669 | 0.0000 | 0.1214 | 0.0000 | 0.0708 | 0.0000 | 0.0326 | 0.0000 | 0.0111 |
| 0.0055 | 0.0000 | 0.0219 | 0.0000 | 0.0517 | 0.0000 | 0.0961 | 0.0000 | 0.1442 | 0.0000 | 0.1762 | 0.0000 | 0.1762 | 0.0000 | 0.1442 | 0.0000 | 0.0961 | 0.0000 | 0.0517 | 0.0000 | 0.0219 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

که در جمع خانه‌های مرگ اشتباه عمل می‌کند. و مقداری ایراد دارد ولی در بجزخانه‌های مرگ خوب عمل می‌کند! برای همین دیگر به رسم نمودار و غیره نرسیدم.

تمرین 5.5 (ولگشت دو بعدی):

در این سوال یک تابع `last_non_zero` تعریف کرده‌ام که آخرین درایه‌ی غیر صفر آرایه‌ام را می‌گیرد که در کد به درد می‌خورد و می‌گوییم! حال یک حلقه‌ی بیرونی (مانند 5.2) می‌زنم که تعداد قدم‌ها را مشخص می‌کند. سپس دو آرایه‌ی `final_x` و `final_y` تعریف می‌کنم که پوزیشن نهایی را پس از میانگین‌گیری در آن‌ها میریزم. حلقه‌ی داخلی تر همان حلقه‌ی `z` من یا تکرار است که 100 بار تکرار می‌کنم و میانگین می‌گیرم. حال دو آرایه‌ی `x` و `y` که همه‌ی درایه‌هایشان 0 است تعریف می‌کنم. سپس ولگشت `n` قدمی را اجرا می‌کنم به صورتی که ابتدا یک عدد رندوم بین 0 و 1 تولید می‌کنم و اگر کمتر از 0.25 بود، یک قدم به راست (ایکس زیاد می‌شود ولی وای خودش می‌ماند) و اگر بین 0.25 و 0.5 بود یک قدم به سمت چپ (ایکس کم می‌شود ولی وای ثابت است) و به همین ترتیب برای دو بازه‌ی دیگر بالا و پایین می‌شود (بدون تغییر ایکس). حال با استفاده از تابعی که اول تعریف کرده‌ام، آخرین درایه‌ی غیر صفر این ایکس و وای‌ها را می‌گیرم و در `final` هایشان می‌اندازم. حال 100 بار تکرار می‌شود و این آرایه‌ها طول 100 دارند. حال برای این 100 داده‌ی بدست آمده، کمیت شعاع را مشخص می‌کنیم. ($r^2 = x^2 + y^2$) سپس همه‌ی این شعاع‌ها را در یک آرایه‌ی `R` میریزم و سپس آن را میانگین گرفته و رادیکال می‌گیرم که همان رادیکال میانگین مربعات شعاع است و در آرایه‌ی `R_AVG` میریزم. سپس مانند 5.2 و 5.3 آرایه‌ی `T` را درست می‌کنم که زمان است. سپس درایه‌های اول `T` و شعاع‌ها را دور می‌اندازم. چون صفر اند و لگاریتم تعریف نشده دارند. سپس ازین آرایه‌ها لوگ می‌گیرم و `log_R` را برحسب `log_T` رسم می‌کنم و شیب باید 7 را بدهد که می‌بینیم 0.5 را می‌دهد. (رابطه‌ی 13 درسنامه)

خروجی را می‌بینیم:



و در ترمینال نیز شیب پرینت می‌شود:

```
[ 9.02884267223657, 9.784681905918045, 8.99110671719561, 9.592705562040356]
slope for log <r(t)> : 0.49403182040153704 // y intercept for log <r(t)> : 0.01146152205818053
ali@Ali:~/Documents/VS_Code$
```

که 0.5 بودن آن را اثبات می‌کند. اگر تکرار را بالاتر ببریم به 0.5 نزدیک‌تر نیز خواهیم شد.