به نام خدا

آونگ دوگانه

به زبان سی

گزارش پروژه درس مبانی برنامه نویسی: شبیه سازی حرکت آونگ دوگانه

اعضای گروه:

فاطمه رمضان زاده

علی اکرامیان

علیرضا پور حسن آستانه

مهسا رحیمی

یاسین سیفی

ریحانه ملاشفیعی

استاد درس:

دکتر حمزه اشراقی

نیمسال دوم سال تحصیلی 00-99

فهرست

بخش اول (معرفی)

الف) شرح مساله فیزیکی 2

ب)شرح روش های عددی حل معادله دیفرانسیل 4

بخش دوم(توضیح کد) 6

بخش سوم(مقایسه با برنامه های موجود) 7

بخش چهارم(توسعه) 8

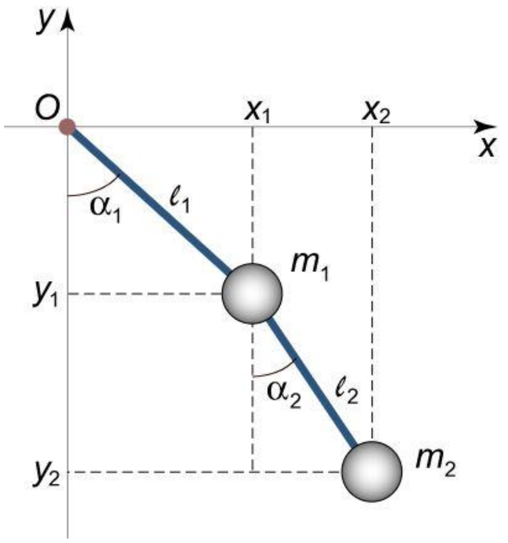
بخش پنجم(منابع) 9

بخش اول(معرفی):

الف) شرح مساله فیزیکی:

در فیزیک و ریاضیات، در حوزه سیستمهای دینامیکی، آونگ دوگانه یک سیستم فیزیکی با دو درجه آزادیست که رفتار دینامیکی آن به شدت به شرایط اولیه وابسته میباشد. این سیستم در حقیقت از آونگی تشکیل شده که یک آونگ دیگر به انتهای آن متصل است. در ادامه به تحلیل فیزیکی آن و بدست آوردن معادلات حرکت میپردازیم.

در مساله مورد بررسی ما هر یک از آونگ ها ساده هستند یعنی از یک میله بدون جرم و یک جرم نقطه ای در انتها تشکیل شده اند. طول میله ها l_1 و l_2 و جرم ها m_1 و m_2 هستند. مبدا مختصات را نقطه ثابت میله اول در نظر میگیریم و زاویه ها را چنین تعریف میکنیم:



که رابطه طولها و زوایا اینگونه است:

$$x_1 = l_1 sin\alpha_1 \, , x_2 = l_1 sin\alpha_1 + l_2 sin\alpha_2 \, , y_1 = -l_1 cos\alpha_1 \, , y_2 = -l_1 cos\alpha_1 - l_2 cos\alpha_2 \quad (1)$$

میخواهیم برای بدست آوردن معادلات حرکت از روش اویلر لاگرانژ استفاده کنیم. پس انرژی پتانسیل V و انرژی جنبشی آونگ T را بدست می آوریم.

$$T = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{1}{2}(m_1({\dot{x}_1}^2 + {\dot{y}_1}^2) + m_2({\dot{x}_2}^2 + {\dot{y}_2}^2)) \qquad (2)$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

پس لاگرانژین اینگونه است:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1({\dot{x}_1}^2 + {\dot{y}_1}^2) + m_2({\dot{x}_2}^2 + {\dot{y}_2}^2)) - (m_1 g y_1 + m_2 g y_2) \qquad (3)$$

با استفاده از معادلات قسمت یک، رابطه بین سرعتهای خطی و زاویه ای را بدست می آوریم:

$$\dot{x}_1 = l_1 cos\alpha_1 \dot{\alpha_1} \,, \dot{x_2} = l_1 cos\alpha_1 \dot{\alpha_1} + l_2 cos\alpha_2 \dot{\alpha_2} \,, \dot{y_1} = l_1 sin\alpha_1 \dot{\alpha_1} \,, \dot{y_2} = l_1 sin\alpha_1 \dot{\alpha_1} + l_2 sin\alpha_2 \dot{\alpha_2}$$

و با جایگذاری در سه خواهیم داشت:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + (m_1 + m_2) g l_1 cos\alpha_1 + m_2 g l_2 cos\alpha_2$$

معادله اویلر لاگرانژ به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \alpha_i} = 0 \,, \qquad i = 1{,}2$$

که با جایگذاری به ازای $i = 1$ داریم:

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\alpha_1} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha_2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_2}^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + (m_1 + m_2) l_1 g sin\alpha_1 = 0$$

و برای $i = 2$ داریم:

$$m_2 l_2^2 \ddot{\alpha_2} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha_1} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_1}^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + m_1 l_2 g sin\alpha_2 = 0$$

پس دستگاه معادلات ذیل (❊❊) پدید می آید:

$$\begin{pmatrix} (m_1 + m_2) l_1 & m_2 l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \\ m_2 l_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & m_2 l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha_1} \\ \ddot{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_2 l_2 \dot{\alpha_2}^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - (m_1 + m_2) g sin\alpha_1 \\ m_2 l_1 \dot{\alpha_1}^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m_1 g sin\alpha_2 \end{pmatrix}$$

این دستگاه معادلات دیفرانسیل حل تحلیلی ندارد، از این رو برای حل آن از روشهای عددی استفاده میکنیم که در بخش بعد به آن پرداخته خواهد شد.

ب) شرح روشهای حل عددی معادله دیفرانسیل:

از بخش قبل، دو تابع داریم به فرمهای $\ddot{\alpha_1} = p(t,X)$ و $\ddot{\alpha_1} = p(t,X)$ که در آنها $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix}$ میباشد.

اولین روش حلی که از آن استفاده میکنیم روش اویلر است. در این روش ما با داشتن شیب جواب، خطی با همان شیب رسم میکنیم و بوسیله مقدار فعلی تابع، مقدار بعدی آن پس از بازه زمانی کوتاهی (که در آن بازه نمودار و خط مماس فاصله زیادی ندارند) بدست می آوریم. که به صورت زیر است:

$$h = dt$$

$$X_{n+1} = X_n + hF_n$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ y \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ y \end{pmatrix}_n + h \begin{pmatrix} f(t,X) \\ g(t,X) \\ w(t,X) \\ z(t,X) \end{pmatrix}$$

حال برای تبدیل معادلات به فرم دستگاه بالا، دو متغییر $\dot{\alpha}_1 = \omega_1$ و $\dot{\alpha}_2 = \omega_2$ را اضافه کرده و مینویسیم:

$$\dot{x} = \dot{\alpha}_1 = \omega_1 = f(t,X)$$

$$\dot{y} = \dot{\alpha}_2 = \omega_2 = g(t,X)$$

$$\dot{z} = \dot{\omega}_1 = p(t,X)$$

$$\dot{w} = \dot{\omega}_2 = q(t,X)$$

پس در نتیجه:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t,X) \\ g(t,X) \\ w(t,X) \\ z(t,X) \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, F_n = \begin{pmatrix} f(t,X_n) \\ g(t,X_n) \\ w(t,X_n) \\ z(t,X_n) \end{pmatrix}$$

روش دوم، روش اویلر تصحیح شده یا هیون است که در آن بجای خط، یک سهمی با تقعر و شیب نمودار اصلی رسم میکنیم و مانند قسمت قبل با استفاده از آن مقدار تابع پس از مدت زمانی کوتاه را بدست می آوریم. در این روش جمله انم به صورت زیر میباشد:

$$X_{n+1} = X_n + \frac{h}{2}(F_n + F(t+h, X_n + hF_n)$$

روش سوم، رانگه-کوتای مرتبه چهار است که در آن در هر نقطه یک بسط تیلور مرتبه 4 به نمودار فیت میکنیم و مانند قسمت های قبل ادامه میدهیم:

$$X_{n+1} = X_n + \frac{h}{2}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

به طوریکه:

$$K_1 = F(t, X_n)$$

$$K_2 = F(t + \frac{h}{2}, X_n + \frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3 = F(t + \frac{h}{2}, X_n + \frac{h}{2}K_2)$$

$$K_4 = F(t + h, X_n + hK_3)$$

مشهود است که تابع $F(t, X)$ یک تابع $\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ است. ما در کد این تابع را به توابع اسکالر تفکیک کرده و در راستاهای *x,y,z,w* جداگانه بر حسب توابع $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *q,p,g,f* نوشته ایم.

بخش دوم (توضیح کد):

در کد ما چهار تابع تعریف شده اند:

$$f(t,x,y,z,w)=\dot{x}\,,g(t,x,y,z,w)=\dot{y}\,,p(t,x,y,z,w)=\dot{z}\,,q(t,x,y,z,w)=\dot{w}$$

که بر حسب متغییر های فیزیکی مساله ما اینگونه اند:

$$x=\alpha_1\,,y=\alpha_2\,,z=\omega_1\,,x=\alpha_1\,,w=\omega_2$$

لازم به ذکر است توابع p,q از حل دستگاه (**) بدست آمده در فیزیک مساله برای شتابها بدست می آیند.

پس از آن، برای زیبایی مقداری تزیینات به کد اضافه شده است و سپس یک رابط کاربری طراحی شده که مقادیر طولها، جرمها، زوایای اولیه، سرعت زاویه ای های اولیه، زمان نهایی (مدت زمانی که میخواهیم آونگ حرکت کند)، گام زمانی مورد نظر برای استفاده در تقریب (dt) و در نهایت روش حل عددی مورد نظر کاربر را با چاپ پیام مرتبط دریافت میکند. سپس وارد بدنه اصلی کد میشویم که الگوریتم حل عددی معادله در آن اجرا خواهد شد. در این بخش یک حلقه وجود دارد که در هر دور مقدار توابع را حساب میکند، بسته به متد حل با روشی که در بخش قبل توضیح داده شد جملات مورد نیاز برای تقریب را محاسبه میکند، از رابطه بازگشتی مورد نظر مقادیر را آپدیت میکند و زمان را به اندازه dt جلو میبرد تا با مقادیر جدید وارد دور بعد شود. در انتهای هر دور، زمان فعلی به همراه زاویه ها و سرعتهای زاویه چاپ میشوند. شایان ذکر است زاویه های بزرگتر از پی به معنی دور زدن جسم هستند.

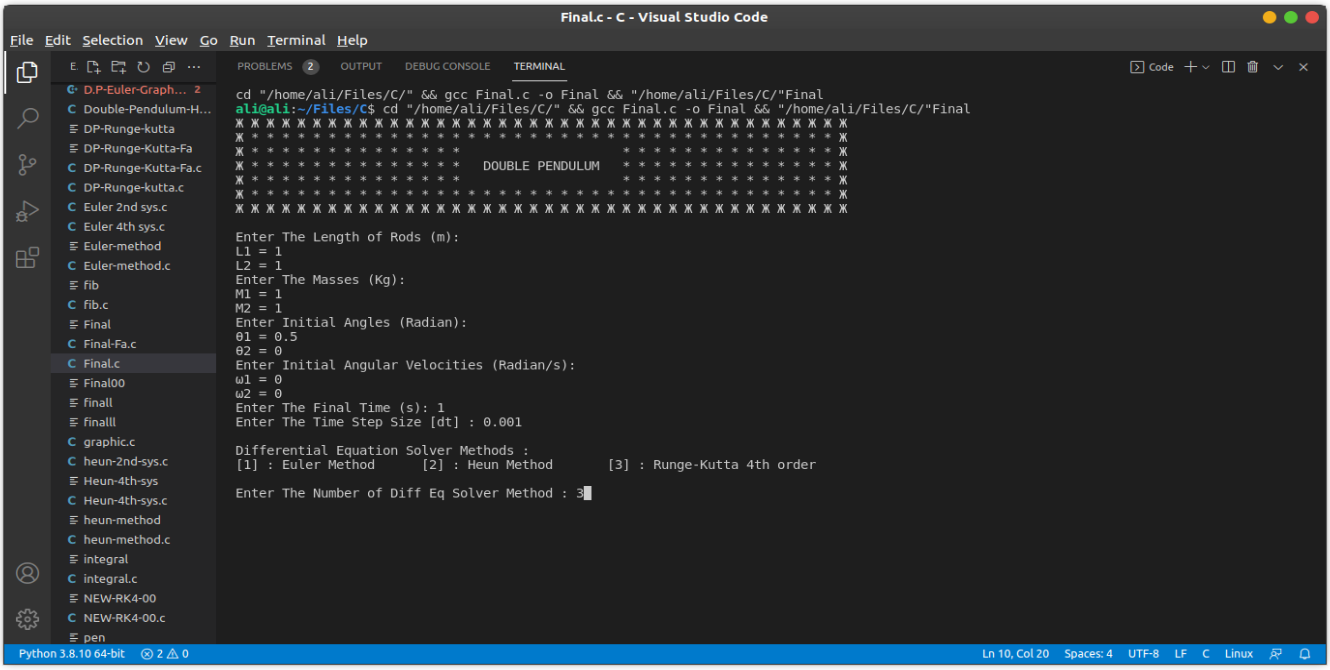
توضیحی راجع به خطای مقادیر:

در بخش معرفی مساله، به بستگی قابل توجه نتایج به شرایط اولیه اشاره شد. در حقیقت با اینکه این سیستم هیچ متغییر رندومی ندارد و قطعی است، به علت آشوبناک بودن آن نمیتوانیم رفتارش را به طور دقیق پیش بینی کنیم و هرچه زمان طولانی تر شود، خطای مقادیر محاسبه شده بیشتر خواهد شد. مقادیر دریافت شده از کاربر نیز در این خطا موثرند به طوریکه افزایش نسبت جرمها و طولها خطا را افزایش داده و از سوی دیگر کوچک بودن گام زمانی محاسبات را دقیقتر و خطا را کمتر میکند. البته باید توجه داشت هرچه این متغییر کوچک شود، حجم محاسبات انجام شده توسط کد بیشتر شده و نتیجه نهایی در زمان بیشتری بدست خواهد آمد.

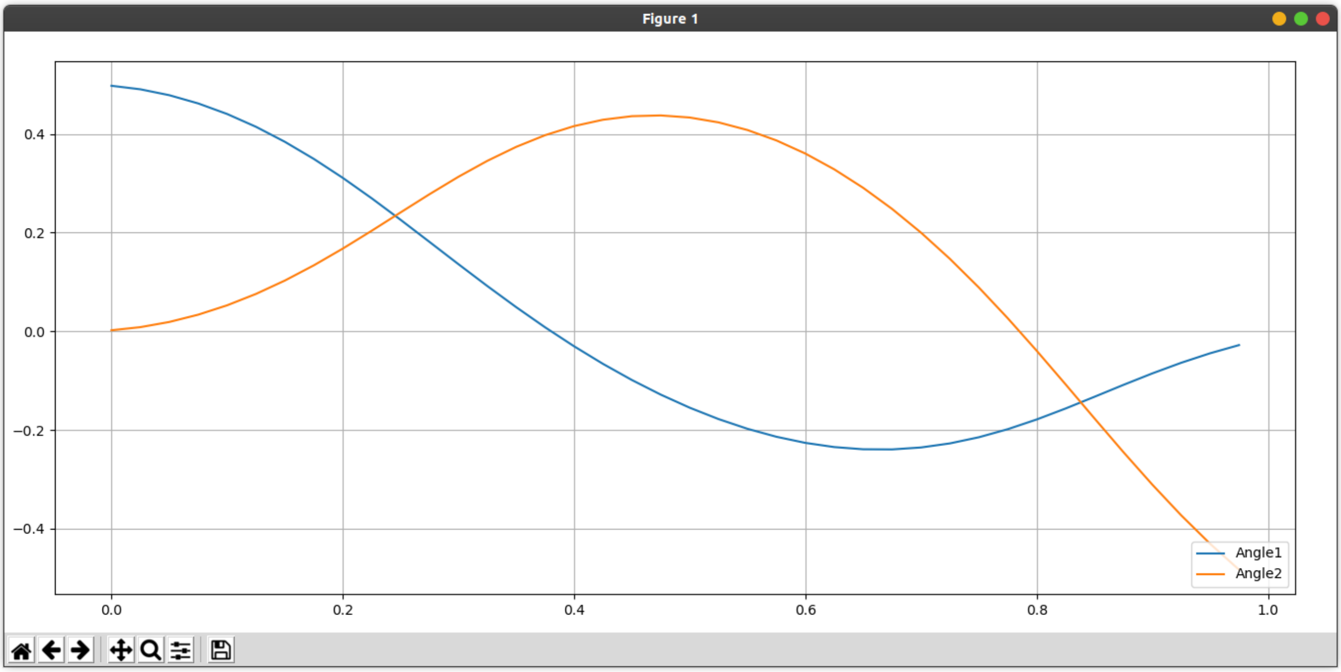
بخش سوم(مقایسه با برنامه های موجود):

در این بخش مقادیر محاسبه شده توسط برنامه خود را با نموداری که در سایت *my physics lab* میتوان با مقادیر اولیه دلخواه رسم کرد، به ازای یک سری شرایط اولیه مقایسه خواهیم کرد (مقادیر خروجی کد به علت زیاد بودن در فایل *sample* پیوست شده اند):

شرایط اولیه:



نمودار:



بخش چهارم(توسعه):

از کتابخانه <graphics.h> استفاده کرده ایم و در این بخش، روش حل عددی ما روش اویلر است. در بخش قبل، مقادیر خروجی ما زوایا بودند که آنها به مختصات هر جسم (x,y) تبدیل کرده ایم. در این دو مکان در هر لحظه دایره ای نشان دهنده اجسام رسم کرده ایم و خطوط گذرنده از مختصات ها و مبدا را نیز کشیدیم که نمایانگر میله ها هستند. لازم به ذکر است به علت محدودیت های گرافیکی، در این بخش مقادیر طول ثابت و برابر 1 هستند، گام زمانی نیز برابر 0.001 داده شده و جرمها از کاربر دریافت میشوند که برای رسم بهتر باید از 5 کوچکتر باشند زوایا، سرعتهای زاویه ای اولیه و زمان نهایی نیز مانند قبل از کاربر دریافت میشوند.

در کنار کد گرافیک دار مذکور، ویدیو های اجرای آن نیز در پوشه گرافیک پیوست شده اند.

بخش پنجم (منابع):

1- William E Boyce, Richard C DiPrima, Douglas B Meade: Elementary Differential Equations
2- myphysicslab.com
3- Double Pendulum in C (Graphics)
4- Wikipedia: Double Pendulum
5- Scipython: The Double Pendulum