باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

درس سیگنال ها و سیستم ها

گزارش فازاول پروژه درس

علی محرابیان

96102331

پرهام محمدی

96102342

استاد

دکتر کربلایی آقاجان

<u>تبدیل فوریه گسسته</u>

تبدیل فوریه زمان گسسته - DTFT

- نشان دهید که تبدیل فوریه گسسته زمان نسبت به Ω متناوب است .

نشان می‌دهیم که $X(\Omega)$ با دوره تناوب 2π متناوب است

$$X(\Omega+2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j(\Omega+2\pi)n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \cdot \cancelto{1}{e^{-j2\pi n}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

- نشان دهید که برای سیگنال های حقیقی ، تنها داشتن بازه‌ی کافی است و می‌توان سیگنال اولیه را از روی آن بازسازی کرد .

با استفاده از خاصیت مزدوج نشان می‌دهیم که اندازه $X(\Omega)$ و فاز آن زوج است

$$X(-\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]\, e^{-j\Omega n}\right)^{*} = X^{*}(\Omega)$$

در نتیجه اگر مقدار $X(\Omega)$ را در بازه‌ی $[0,\pi]$ داشته باشیم ، مقدار $X(\Omega)$ در بازه‌ی $[-\pi,0]$ بدست خواهد آمد به طوری که مقدار $X(\Omega)$ در هر $-\Omega$ برابر است با مزدوج مقدار $X(\Omega)$ در Ω . یعنی اندازه $X(\Omega)$ زوج و فاز آن فرد است.

تبدیل فوریه گسسته - DFT

- سیگنال پیوسته و متناوب $x(t)$ با دوره تناوب T را در نظر بگیرید. سیگنال $\widetilde{x}(t)$ را یک دوره تناوب از سیگنال اولیه در نظر بگیرید؛ یعنی:

$$x(t) = \begin{cases} \widetilde{x}(t) & |t| < T/2 \\ 0 & O.W \end{cases}$$

نشان دهید که:

$$c_k = \frac{1}{T} X(w)|_{w=\frac{2k\pi}{T}} \qquad (۲)$$

که در رابطه بالا، c_k ضرایب سری فوریه مختلط سیگنال $x(t)$ هستند.

تبدیل فوریه سیگنال $X(\omega)$ را در نقاط مورد نظر محاسبه می‌کنیم

$$\frac{1}{T}\tilde{X}(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2K\pi}{T}} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{x}(t)\,e^{-j\omega t}\,dt\,\Big|_{\omega=\frac{2K\pi}{T}}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,e^{-j\frac{2\pi}{T}Kt}\,dt = C_K$$

با توجه به اینکه $\tilde{x}$ یک تناوب سیگنال $x(t)$ است، فقط در بازه $-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}$ مقدار غیرصفر دارد و در این بازه با $x(t)$ برابر است.

طبق فرمول محاسبه ضرایب سری فوریه سیگنال‌های متناوب

اگر توجه کرده باشید متوجه می‌شوید که در تعریف تبدیل فوریه گسسته، متغیر N ای وجود دارد که خود یکی از مشخصه‌ها و متغیرهای تبدیل است؛ برخلاف سری فوریه که خود یک متغیر T (دوره تناوب) دارد اما به صورت یکتا از روی سیگنال تعیین می‌شود. متغیر N می‌تواند هر مقدار طبیعی به خود بگیرد اما به ازای تمام این مقادیر، لزوماً نمی‌توان سیگنال اولیه را بازسازی کرد. اگر سیگنال گسسته زمان $x[n]$ به طول N_1 باشد، شرط لازم و کافی بازسازی $x[n]$ از روی $\tilde{X}$، $N \geq N_1$ است.

ابتدا $X[K]$ را به صورت یک سری برحسب $x[n]$ بدست می آوریم ولیس از روی $X[k]$ ، $x[n]$ را محاسبه می کنیم

$$X[K] = X_c(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2K\pi}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\frac{2K\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2K\pi}{N}n}$$

حال سری زیر را با توجه به $X[K]$ بدست آمده، محاسبه می کنیم :

$$\frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{j\frac{2K\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, e^{-j\frac{2K\pi}{N}m}\right) e^{j\frac{2K\pi}{N}n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, e^{j\frac{2K\pi}{N}(n-m)} \underset{\text{عوض کردن جای دو سیگما}}{=} \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{K=0}^{N-1} x[m]\, e^{j\frac{2K\pi}{N}(n-m)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \sum_{K=0}^{N-1} e^{j\frac{2K\pi}{N}(n-m)}$$

می دانیم که $\sum_{K=0}^{N-1} e^{j\frac{2K\pi}{N}(n-m)}$ ، فقط به ازای $m=n$ ، مقدار غیرصفر N دارد. پس چون m در بازه $[0 : N-1]$ قرار دارد ، فقط هنگامی که $n<N$ باشد، سیگمای $\sum_{K=0}^{N-1} e^{j\frac{2K\pi}{N}(n-m)}$ به ازای $m=n$ مقدار N دارد.

$$\xrightarrow{\text{if } n<N} \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{j\frac{2K\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \sum_{K=0}^{N-1} e^{j\frac{2K\pi}{N}(n-m)} = x[n]$$

پس دقیقاً $\underline{N}$ جمله از $x[n]$ بازسازی می شود و اگر نخواهیم داده ای از دست ندهیم باید $N \geq N_1$

- یک روش بازسازی سیگنال اولیه از روی تبدیل فوریه گسسته، طی مراحل زیر است:

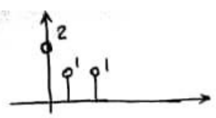
۱. پریودیک کردن تبدیل فوریه گسسته با N

۲. سری فوریه وارون گرفتن

۳. انتخاب دوره تناوب اول N تایی

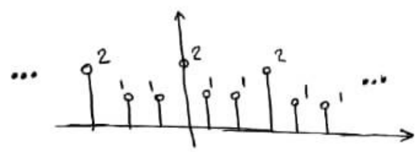
صحت مراحل ذکر شده را در حالتی که شرط $N \geq N_1$ برقرار است، بررسی کنید. برای این کار تعریف سری فوریه گسسته را از اینترنت جستجو کنید و با طی مراحلی مشابه مراحل طی شده تا کنون، صحت مراحل فوق را بررسی کنید.

سیگنال گسسته اولیه را ، سیگنال روبرو به طول 3 درنظر می‌گیریم :



1) حال برای نمونه‌برداری از تبدیل فوریه سیگنال بالا (همان DFT) ، سیگنال بالا را با $N=3$ متناوب می‌کنیم :

$(N=3 \geq 3 = N_1)$



حال ضرایب سری فوریه سیگنال روبرو را بدست می‌آوریم :

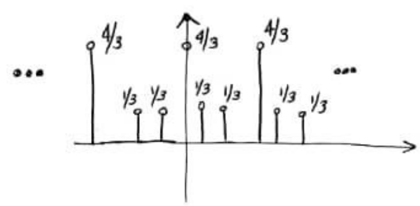
$$a_K = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn}$$

$$a_0 = \frac{1}{3}(2+1+1) = \frac{4}{3}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 1/3$$

و تبدیل فوریه گسسته مشابه روبرو بدست می‌آید :



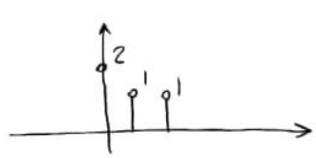
2) حال از سیگنال بالا سری فوریه وارون می‌گیریم :

$$x[n] = \sum_{K=\langle N \rangle} a_K e^{j\frac{2\pi}{N}Kn}$$

$$\Longrightarrow x[0] = \frac{4}{3}\times1+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times1 = 2 \quad , \quad x[1] = \frac{4}{3}\times1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = 1$$

$$x[2] = \frac{4}{3}\times1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = 1$$

3) حال تناوب اول N تایی ، سیگنال وارون را درنظر می‌گیریم که همان سیگنال اولیه است



با توجه به اینکه انرژی سیگنال از مشخصه‌های مهم آن است، حکم زیر را نیز ثابت کنید:

- مشابه تبدیل فوریه پیوسته، رابطه پارسوال برای تبدیل فوریه گسسته نیز برقرار است؛ یعنی داریم:

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X[k]|^2 \qquad (۴)$$

عبارت $\sum_{K=0}^{N-1}|X[K]|^2$ را باز می‌کنیم.

$$\sum_{K=0}^{N-1}|x[K]|^2=\sum_{K=0}^{N-1}x[K]\,x^*[K]$$

حال طبق رابطه تبدیل فوریه گسسته $x[K]$ و $x^*[K]$ را جایگذاری کنیم

$$=\sum_{K=0}^{N-1}\left(\sum_{t=0}^{N-1}x[t]e^{-j\frac{2K\pi}{N}t}\right)\left(\sum_{t'=0}^{N-1}x^*[t']\,e^{j\frac{2K\pi}{N}t'}\right)$$

$$=\sum_{K=0}^{N-1}\left(\sum_{t=0}^{N-1}\sum_{t'=0}^{N-1}x[t]x^*[t']\,e^{-j\frac{2K\pi}{N}(t-t')}\right)$$

حال می‌دانیم که اگر $e^{jan\frac{2\pi}{N}}$ را روی $\langle N\rangle$ جمع بزنیم، اگر $a\neq 0$ باشد، به مقدار صفر می‌رسیم و اگر $a=0$ باشد به مقدار N می‌رسیم. پس عبارت بالا فقط به ازای $t=t'$ مقدار غیرصفر دارد

$$=\sum_{K=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}x[i]\,x^*[i]=\sum_{K=0}^{N-1}N\,|x[i]^2|$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2=\frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1}|x[K]|^2$$

- قسمت حقیقی تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی ماهیت زوج دارد یا فرد؟ مشابهاً به همین سوال در مورد قسمت موهومی تبدیل نیز پاسخ دهید.

با استفاده از خاصیت مزدوج نشان می دهیم که اندازه $X(\Omega)$ و فاز آن فرد است

$$X(-\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]\, e^{-j\Omega n}\right)^{*} = X^{*}(\Omega)$$

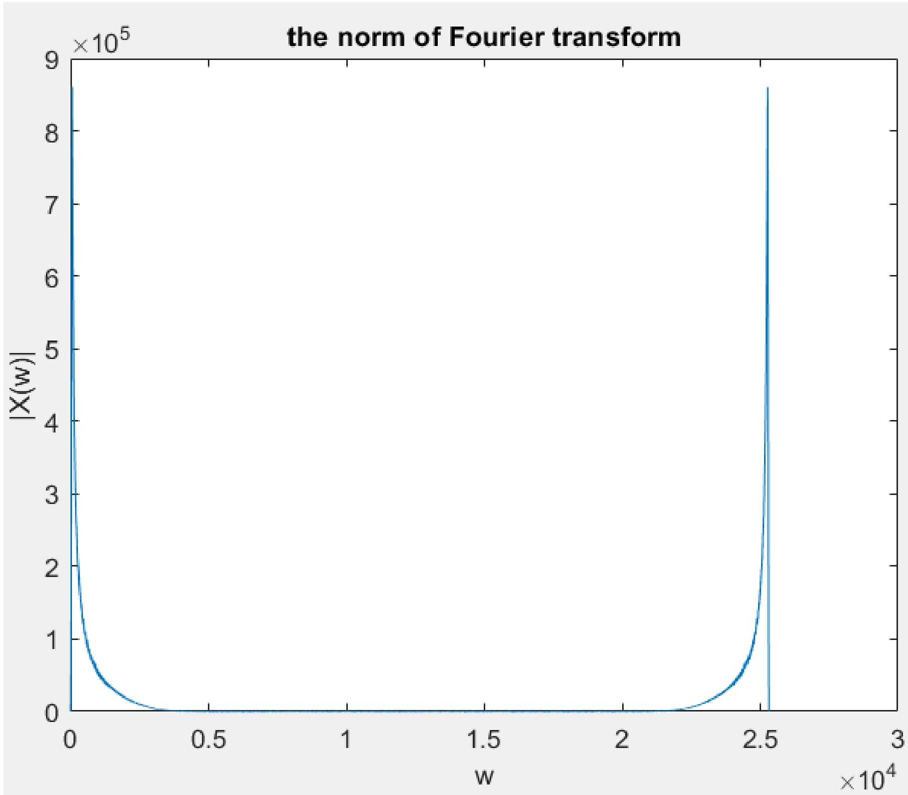
طبق اثبات بالا تبدیل فوریه X(-Ω) در بازه [-π,0] برابرست با مزدوج تبدیل فوریه X(Ω) در بازه [0,π]

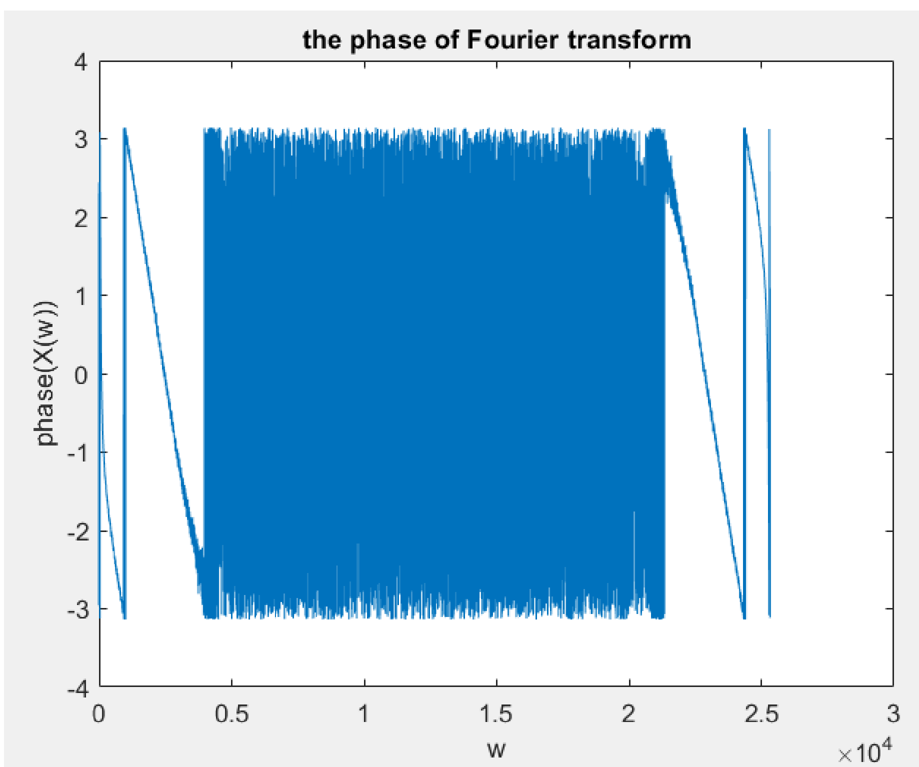
پس‌قسمت حقیقی آن ماهیت زوج دارد.

و قسمت موهومی آن ماهیت فرد دارد.

- فایل داده شده تحت عنوان `y.mat` را لود کنید و اندازه و فاز fft آن را رسم کرده و در گزارش ذکر کنید. برای بررسی دقیق‌تر این مورد نیاز است که کدی بنویسید تا این بررسی را برای شما انجام دهد. تنها به دید خود از نمودار اکتفا نکنید. آیا ماهیت تقارنی ذکر شده مشهود است؟ علّت چیست؟ با حذف نویزهایی که باعث این مورد شده‌اند، عکس نهایی تبدیل فوریه پس از حذف این داده‌ها را نیز در گزارش کار بیاورید.

با استفاده از دستور fft تبدیل فوریه بردار موردنظر را محاسبه کردیم و با abs اندازه آن و با angle فاز آن را حساب کردیم و نتایج به شرح زیر بدست آمد :


the norm of Fourier transform
$\times 10^5$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
|X(w)|
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
w
$\times 10^4$


the phase of Fourier transform
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
phase(X(w))
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
w
$\times 10^4$

برای اینکه چک کنیم ماهیت تقارنی زوج برای اندازه و ماهیت تقارنی فرد برای فاز وجود دارد ، از یک حلقه for استفاده می‌کنیم به این صورت که اختلاف اندازه و جمع فازها را در طول کل سیگنال جمع بزنیم . هر چه قدر این عدد بزرگتر باشد سیگنال نامتقارن‌تر است . قطعه کد متناظر آن ضمیمه شده است.

```
norm_diff = 0;
phase_diff = 0;
for k = 1:length(y)
    i = i+1;
    j = j-1;
    if i >= j
        break
    end
    norm_diff = norm_diff + abs(norm1(i)-norm1(j));
    phase_diff = phase_diff + abs(phase1(i)+phase1(j));
end
```

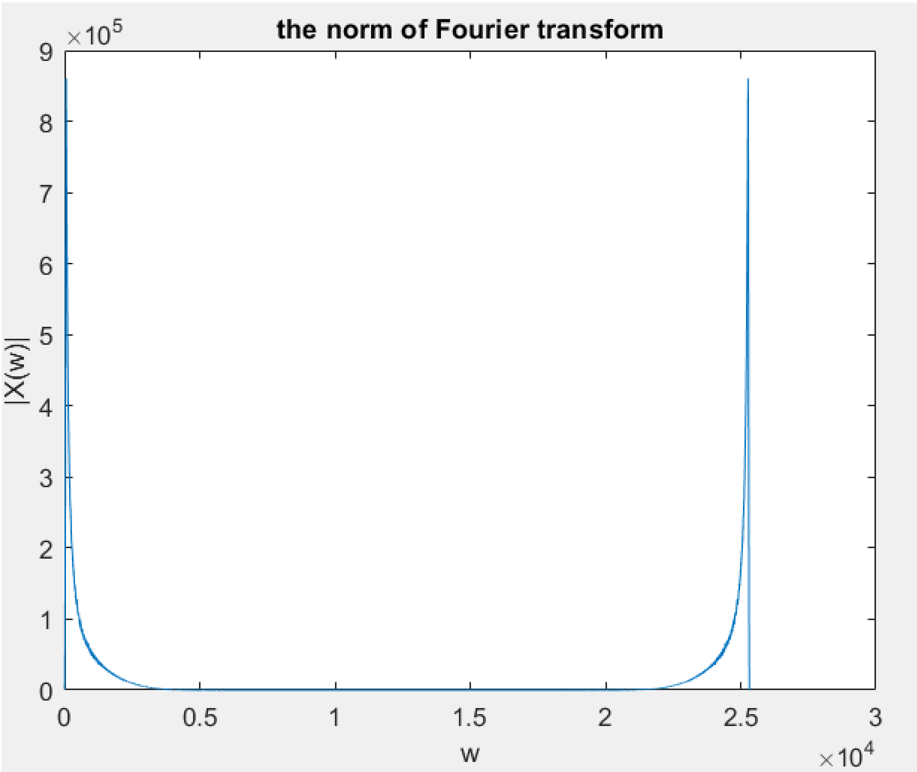
ابتدا برای سیگنال اصلی این کار را انجام می‌دهیم. همان طور که مشاهده می‌کنیم عدم تقارن در آن کاملا مشهود است.

```
phase_diff =        norm_diff =

   2.6786e+04          9.3226e+05
```

علت آن این است که نویزهایی که لزوما حقیقی نیستند و ممکن است جزء موهومی داشته باشند ، با سیگنال ترکیب شده‌اند و نامتقارنی در تبدیل فوریه بوجود می‌آورد.

برای رفع این نویزها ، از سیگنال اولیه real می‌گیریم و نمودار اندازه و فاز آن را مجددا محاسبه می‌کنیم.و سپس الگوریتم تشخیص تقارن را برای آن به کار می‌بریم .

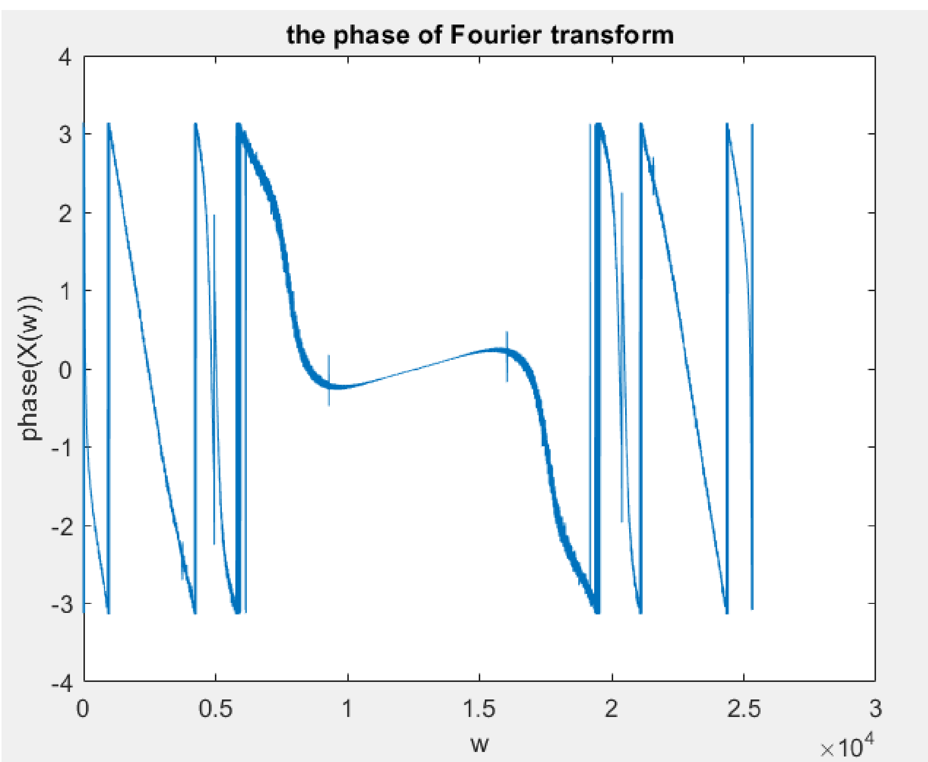



```
norm_diff =

     0
phase_diff =

     0
```

همان طور که مشاهده
می‌کنیم سیگنال کاملا
متقارن است.



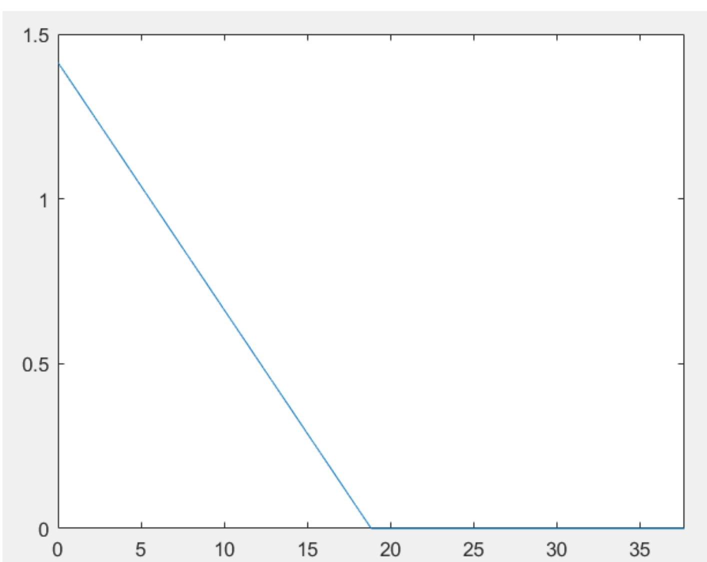
نمونه برداری - Sampling

- با توجه به توضیحاتی که در قسمت قبل در مورد تبدیل فوریه گسسته و تابع `fft` گفته شد و به کمک شکل ۱ تابعی بنویسید که با ورودی گرفتن سیگنال حقیقی، تبدیل فوریه آن را محاسبه کند و در خروجی برداری حاصل دهد که تنها فرکانس‌های $[0, \pi]$ را داشته باشد. توجه کنید که میخواهیم **انرژی** سیگنالی که در خروجی ظاهر می‌شود، در رابطه پارسوال صدق کند. نمودار اندازه این بردار را بکشید در گزارش بیاورید. تابع شما بایستی با ورودی گرفتن فرکانس نمونه‌برداری، محور فرکانس را به درستی نمایش دهد. تابع شما بایستی به شکل زیر باشد:

```
HalfBandFFT (InputSignal, Fs)
```

تابع HalfBandFFT را پیاده‌سازی کردیم . ابتدا با دستور fft تبدیل فوریه سیگنال را محاسبه کردیم و سپس نصف بردار خروجی را در یک بردار به طول نصف ذخیره کردیم . چون این بردار متقارن است و ما نصف آن را ذخیره کردیم انرژی آن نصف شده است . پس برای اینکه در رابطه‌ی پارسوال صدق کند در $\sqrt{2}$ ضرب کردیم تا انرژی آن کامل شود .در نهایت با استفاده از رابطه‌ی $\Omega = wT$ فرکانس واقعی را محاسبه کرده و اندازه آن را plot می‌کنیم .

بعنوان مثال خروجی این تابع به سیگنال متناظر با شکل 1 مطابق زیر شد که مطابق با انتظار است .



سیگنال نصف بازه را دارد و فرکانس های درست را نشان می‌دهد و از $\sqrt{2}$ شروع می‌شود.

- در این سوال می‌خواهیم حد پایین فرکانس نمونه برداری را محاسبه کنیم. برای این کار فرض کنید که سیگنال شما حقیقی و پایین‌گذر است؛ یعنی بعد از فرکانسی مانند $2\pi f_{max}$ محتوای فرکانسی ندارد. با توجه به نکاتی که تا کنون گفته شده از اینکه هر فرکانس گسسته نمایانگر چه فرکانس پیوسته‌ای است، نکات قسمت تبدیل فوریه گسسته و به کمک شکل ۱ حد فرکانس نمونه برداری را پیدا کنید که پهنای باند قسمت معادل $[0, \pi]$ با پهنای باند متقارن خود که از نقطه‌ی 2π شروع شده و تا π امتداد دارد، تداخلی نداشته باشد. به طور معادل، یعنی در شکل بالا دو مثلث ناقص با یکدیگر تداخلی نداشته باشند. این حد پایین فرکانس نمونه برداری، *فرکانس نایکوئیست* نام دارد.

برای اینکه دو مثلث ناقص تداخلی نداشته باشند باید فرکانس گسسته مربوط به فرکانس بیشینه قبل از قرار بگیرد بنابراین فرکانس نمونه برداری باید در بازه زیر باشد :

$$\frac{2 \times \pi \times f_{max}}{F_s} \leq \pi \quad \rightarrow \quad F_s \geq 2 \times f_{max}$$

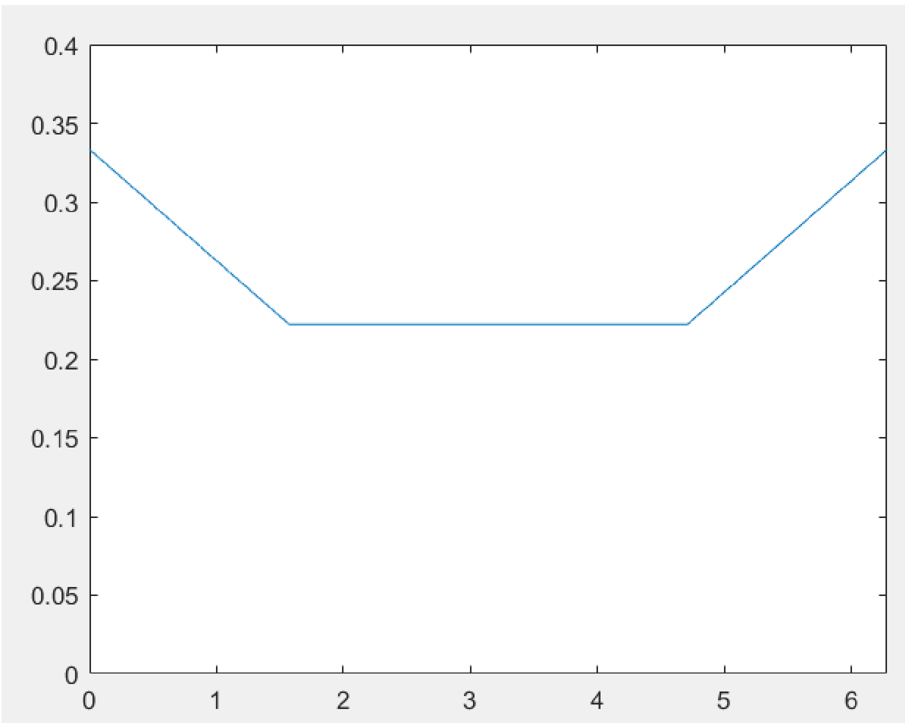
بنابراین حد پایین فرکانس نمونه‌برداری 2 برابر فرکانس بیشینه است.

که به این فرکانس نمونه برداری (2*fmax) فرکانس نایکوئیست می‌گویند.

- فرض کنید که نمودار شکل ۱ نمونه برداری شده از یک سیگنال با فرکانس نمونه‌برداری 6 است. پهنای‌باند سیگنال اولیه چند بوده است؟ با استفاده از رابطه ۶ و تعبیری که از آن داده شد، اگر از سیگنال ذکر شده به جای فرکانس 6 با فرکانس 2 نمونه برمی‌داشتیم،چه اتفاقی می‌افتاد؟ شکل متناظر با این حالت را به کمک متلب رسم کرده و در گزارش کار ذکر کنید. به این پدیده **aliasing** گفته می‌شود.

برای اینکه فرکانس نمونه برداری را از 6 به 2 کاهش دهیم ، باید نرخ نمونه برداری را یک‌سوم کنیم یعنی از هر 3 نمونه ، یکی را نگه داریم.

برای این منظور ابتدا با دستور ifft از تبدیل شکل 1 وارون می‌گیریم تا سیگنال اصلی بدست آید سپس از هر 3 داده متوالی ، یکی را نگه می‌داریم و از سیگنال جدید با دستور fft تبدیل فوریه می‌گیریم که نتیجه مشابه زیر بدست می‌آید :



همان‌طور که مشاهده می کنیم دو مثلث متقارن از بازه $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ تداخل دارند و سیگنال قابل بازسازی نمی‌باشد. همان‌طور که مشاهده می کنیم دو مثلث متقارن از بازه تا تداخل دارند و سیگنال قابل بازسازی نمی‌باشد.

آشنایی با سیگنال های EEG

- فرق داده گیری invasive و noninvasive سیگنال های EEG

Invasive : در داده گیری invasive یا همان تهاجمی پوست سر شکافته می‌شود و الکترودها به درون مغز و در مجاورت قشر مغز فرو برده می‌شوند.کاربرد این روش در تشخیص بیماری های بسیار خاص و نادر مغزی یا در حین انجام جراحی های باز مغز می‌باشد .

noninvasive : در داده گیری noninvasive یا همان غیر تهاجمی الکترود های مغزی بر روی پوست سر قرار داده می‌شوند و نیاز به جراحی و شکاف نیست .

کاربرد این روش انجام تحقیقات آزمایشگاهی و انجام پروژه های در زمینه BCI می‌باشد .

معرفیP300 :

سیستم های مبتنی بر BCI ویژگی‌های کاربردی سیگنال های EEG را اندازه‌گیری کرده و سیگنال‌های کنترلی را تولید میکنند که از جمله آن‌ها پتانسیل رویدادی می‌باشد.هنگامی که توجه انسان به یک محرک جلب می‌شود بخشی از یک پتانسیل رویدادی معروف به P300 در EEG او ظاهر می‌شود.این پتانسیل یک پتانسیل درونی است چون اتفاق افتادن آن مربوط به ویژگی‌های فیزیکی محرک نیست بلکه مربوط به عکس‌العمل انسان به آنهاست.این مولفه به صورت یک انحراف مثبت با تاخیر 250 تا 500 میلی‌ثانیه در سیگنال ظاهر می‌شود .در تحقیقات آزمایشگاهی معمولا از تحریک بینایی و شنوایی برای تحریک کردن شخص و ظاهر شدن در سیگنال الکتریکی مغز او استفاده می‌شود.دیگر مشخصه‌هایی که به عنوان EPR شناخته می‌شوند :

P50 :

مربوط به واکنش‌نورون‌ها هنگامی که دو محرک مشابه اتفاق می‌افتد و نورون ها پاسخ را با داده‌های قبلی مطابقت می‌دهند

N100 :

یک انحراف منفی که 90 تا 200 میلی‌ثانیه بعد از رخ دادن تحریک در سیگنال ظاهر می‌شود و هنگامی ظاهر می‌شود که یک تحریک غیرمنتظره رخ دهد.

P200 :

یک انحراف مثبت که 100 تا 250 میلی‌ثانیه بعد از تحریک اتفاق می‌افتد و این مولفه بر نتیجه‌گیری ما از احساس فرد تاثیر می‌گذارد.

N200 :

یک انحراف منفی است که تا حدود 200 میلی‌ثانیه بعد از تحریک اتفاق می‌افتد و شامل سه مولفه مختلف N2a و N2b و N2c است.

N300 :

در دو موضوع تطابق معنایی و امید به زندگی به وجود می‌آید.

N400

300 تا 600 میلی‌ثانیه بعد از تحریک است و یک موج منفی است و هنگام عدم تطابق معنایی بوجود می‌آید.

P600

هنگامی بوجود می‌آید که جمله‌ای شنیده شود که از نظر قواعد نحوی یا متناقض باشد یا ساختار غیر ارجاع داده شده داشته باشد یا ساختار پیچیده‌ای داشته باشد.

همچنین 3 مولفه دیگر با نام های Movement-related cortical potentials و Contingent negative variation و Post-imperative negative variation وجود دارند.

باند های فرکانسی به صورت زیر هستند.

نام طیف	بازه فرکانسی	ویژگی‌ها
دلتا Δ	0 – 4	امواج مغزی افراد بالغ در هنگام خواب امواج مغزی کودکان
تتا Θ	4 – 7	مربوط به نوجوانان مربوط به حالت خواب آلودگی در جوانان مربوط به حالت مدیتیشن در بزرگسالان
آلفا α	8 – 12	مربوط به حالت آرامش بزرگسالان در حالت بسته بودن چشم ها ایجاد می شود
بتا β	12 – 30	مربوط به حالت هوشیاری و انجام فعالیت در حالت مشغول بودن ذهن و استرس و نگرانی ایجاد می شود
گاما Γ	30 – 100	مربوط به حالت هوشیاری و انجام فعالیت زمانی که یک تصور ذهنی انجام شود ایجاد می گردد
میو $\mu\gamma$	~ 10	با انجام تصورات حرکتی دامنه سیگنال های این طیف کاهش می یابد.

طبق قضیه نمونه برداری نایکوئیست برای اینکه سیگنال بتواند بازسازی شود ، باید فرکانس نمونه برداری در رابطه‌ی Ws > 2*Wm صدق کند و با توجه به اینکه بالاترین باند فرکانسی مربوط به طیف گاما و حدود 100 هرتز است ، فرکانس نمونه‌برداری حدود 200 تا 300 هرتز مناسب است.

با توجه به اینکه سطر اول ماتریس subject1 مربوط به زمان آزمایش است ، اختلاف دو درایه متوالی همان نرخ نمونه برداری یا T است.

با توجه به اینکه این مقدار 0.0039 است ، عکس این مقدار فرکانس نمونه‌برداری را نشان می‌دهد.

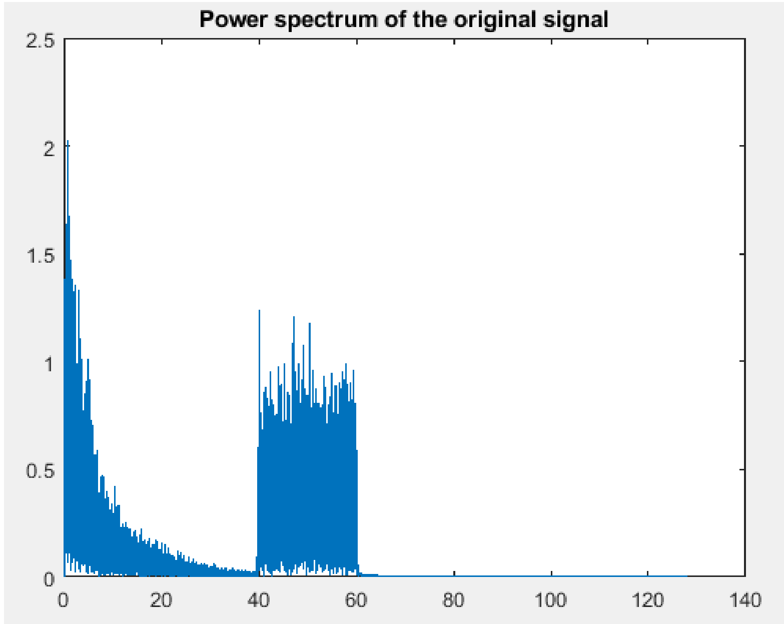
$$F_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.0039} = 256.41\ Hz$$

با استفاده از قطعه کد زیر اندازه طیف فرکانسی سطرهای ماتریس subject1 را رسم کردیم.

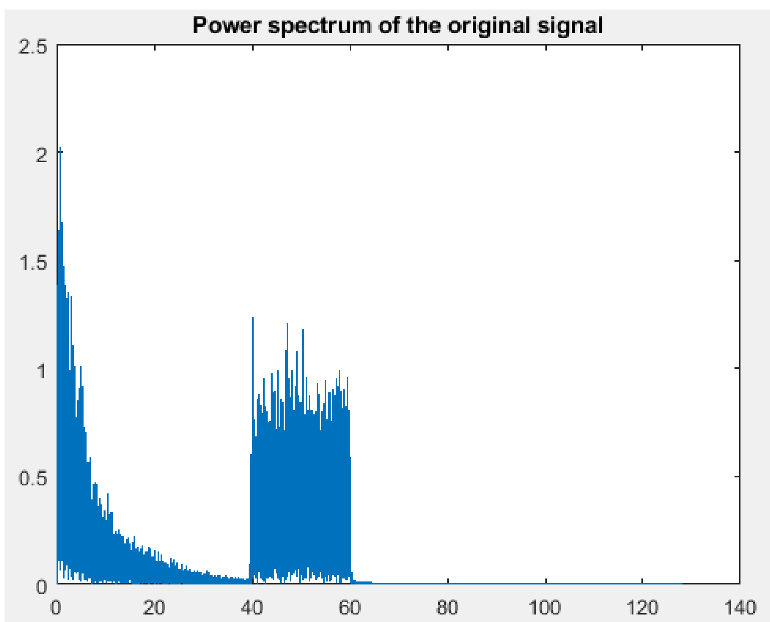
```
X = fft(u(5,:,1));


P22 = abs(X/L);
P11 = P22(1:L/2+1);
P11(2:end-1) = 2*P11(2:end-1);

    figure;
    plot(f,P1);
    title('Power spectrum of the original signal');
```



کانال اول



کانال چهارم

همان طور که مشاهده می‌شود فرکانس داده های مطلوب تا حدود 40 هرتز است و بعد از آن تقریبا با نویز مواجه هستیم. پس فرکانس قطع حدود 40 هرتز است.

برای محاسبه فرکانس قطع با کمک انرژی از دستور bandpower استفاده می‌کنیم.برای این منظور انرژی که تا فرکانس 120 هرتز متمرکز شده است را به عنوان انرژی کل در نظر می‌گیریم و فرکانسی که 99 درصد انرژی قبل آن تجمع پیدا کرده است را می‌یابیم.برای‌این منظور از قطعه کد زیر استفاده می‌کنیم و فرکانس را از 0 متوالیا به اندازه 0.5 زیاد می‌کنیم تا جایی که به 99 درصد انرژی برسیم.که کد آن در زیر ضمیمه شده است.

```
while(o<0.99)
   if  (bandpower(mk,fs,[0 j])/ bandpower(mk,fs,[0 120]))<0.99

      j=j+0.5
 o=(bandpower(mk,fs,[0 j])/ bandpower(mk,fs,[0 120]));
   end
end
```

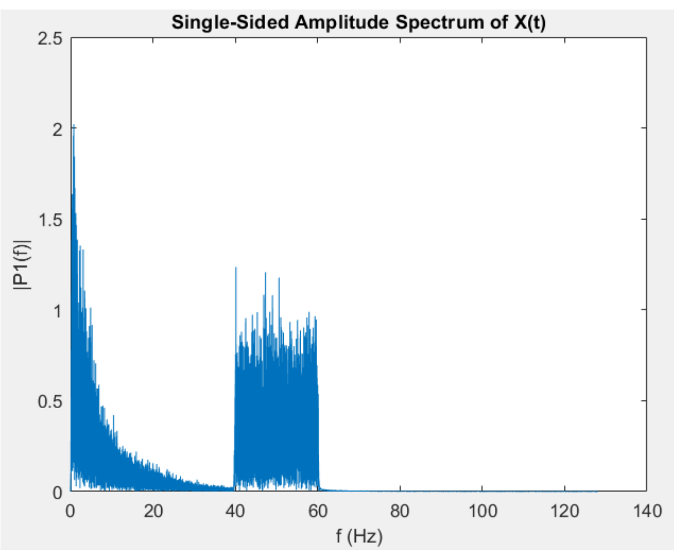
```
j =

    60
```

همان طور که مشاهده می‌شود ،

فرکانس 60 هرتز بدست می‌آید که فرکانس های نویز را هم شامل می‌شود و با توجه به اینکه نویز انرژی قابل توجهی دارد این نتیجه منطقی است.

پس با این روش یعنی تجمع انرژی نمی‌توان فرکانس قطع را محاسبه کرد چون نویز انرژی زیادی دارد.



با توجه به نتایج بالا فرکانس قطع فیلتر پایین گذر باید حدود 40 هرتز باشد.

سیگنال علاوه بر میانگین DC ایی که دارد و با کم کردن سیگنال از میانگینش حذف می‌شود ، نویز DC هم دارد و باعث می‌شود که کم کردن سیگنال از میانگینش برای حذف آن ها کافی نباشد.

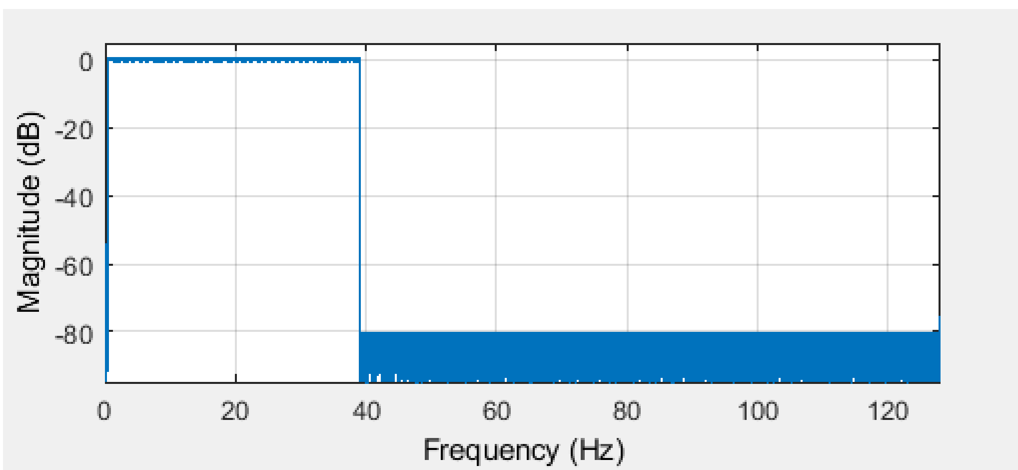
در این قسمت به کمک filter_designer متلب،یک فیلتر میان گذر با مشخصات زیر طراحی می کنیم.

f-stop1=0.4

f_pass1=0.5

f_pass2=39

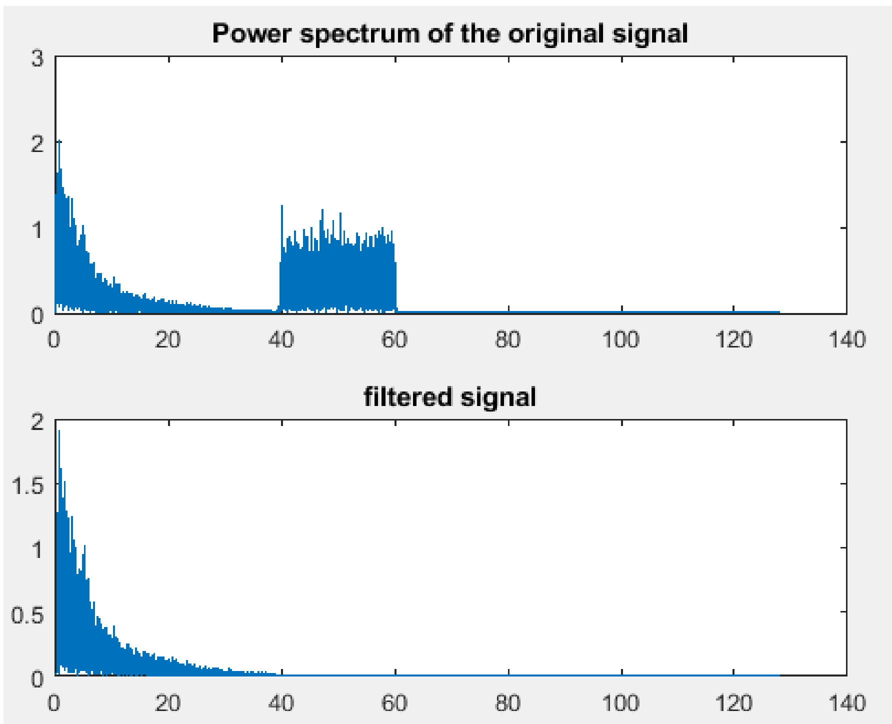
f_stop2=39.1



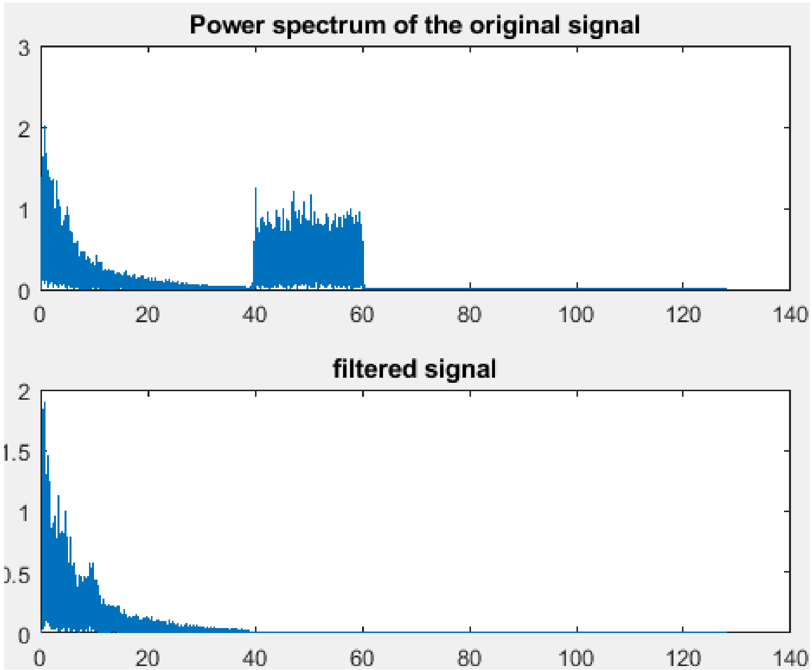
که با نام filter_1.mat ضمیمه شده است.

- پس از اعمال فیلتر، در یک بازه‌ی ثابت، نمودار داده‌ی زمانی سیگنال اولیه و سیگنال فیلتر شده را بر روی یک نمودار بکشید. واضح است که نویز بایستی کم شود اما آیا این تنها تغییر اعمال شده بر سیگنال است؟ آیا این دو سیگنال شبیه یکدیگر رفتار میکنند و در زمان‌های یکسان مقادیر نزدیک به هم دارند؟

ابتدا در حوزه فرکانس مشاهده می کنیم که سیگنال فیلتر شده است.

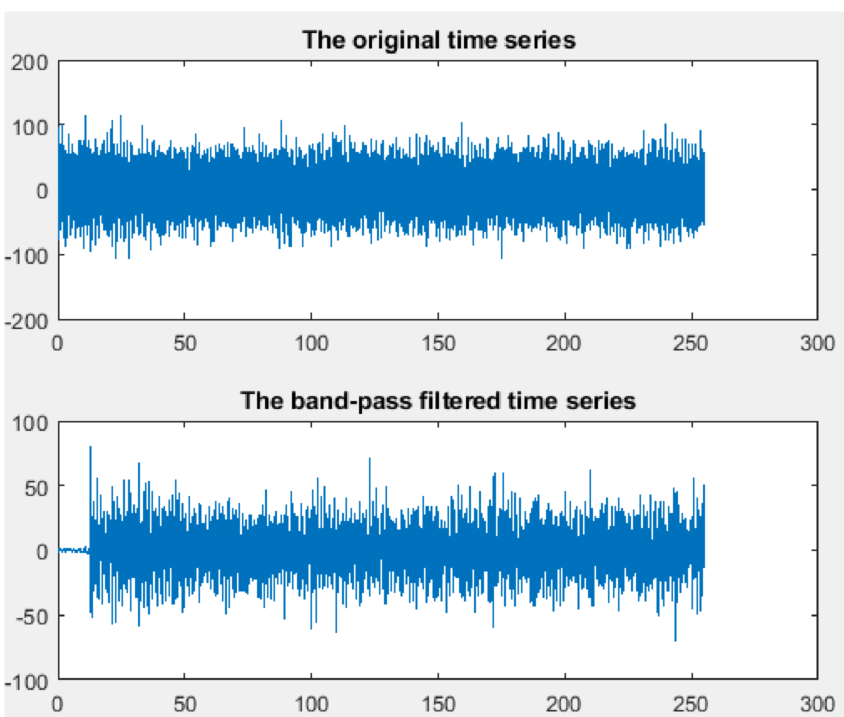


کانال اول

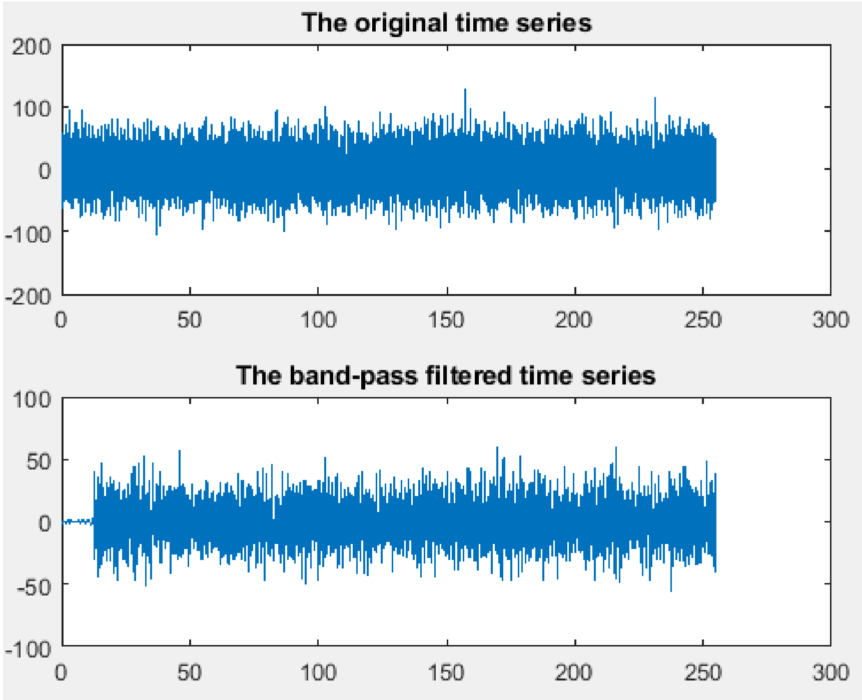


کانال چهارم

اما در حوزه زمان همان طور که ملاحظه می شود،علاوه بر این که نویز سیگنال حذف شده است،دامنه سیگنال نیز کاهش یافته است.



کانال اول



کانال چهارم

مرحله‌ی دیگری که معمولاً در پیش‌پردازش طی می‌شود، کاهش فرکانس نمونه برداری است. با توجه به اصل نایکوئیست، فرکانس نمونه‌برداری معادل با ۲ برابر پهنای‌باند سیگنال برای انتقال کامل اطلاعات سیگنال کافی است پس می‌توان فرکانس نمونه برداری را در صورتی که بیشتر از حد نایکوئیست باشد، تا آن حد کاهش دهیم.

- با توجه به نکته‌ای که گفته‌شد و با توجه به فرکانس قطعی که در مرحله پیش انتخاب کردید، فرکانس نمونه‌برداری را کاهش دهید.

با توجه به قضیه نایکوئیست،با فرکانس نمونه برداری برابر با دو برابر فرکانس نمونه،می توان اطلاعات سیگنال را بازیابی کرد.کاهش فرکانس نمونه برداری به این دلیل است که حجم محاسبات ما را می تواند کاهش دهد.

تابع epoching همان طور که در دستور کار گفته شد،مطابق زیر نوشته شد.در هر پنجره،داده های 200 میلی ثانیه قبل از شروع تحریک و 800 میلی ثانیه پس از شروع تحریک را نگه می داریم.

```
function y=epoching (o,Back_s,Forward_s,h)

l=length(o);
p=length(h);
m1=o(1,:);
m2=o(2,:);
T=m1(1,2)-m1(1,1);
sb=floor(Back_s/T);
sf=floor(Forward_s/T);
EPOCH=zeros(9,sb+sf+1,p);
for i=1:p
    EPOCH(:,:,i) = o(1:9,h(1,i)-sb:h(1,i)+sf);
     end
y=EPOCH;
end
```

چون در تحلیل گسسته،فرکانس های بالاتر از 2π نداریم و هارمونیک های بالا بر فرکانس های پایین تاثیر می گذارند،در نتیجه فرکانس نمونه برداری را قبل از فیلتر کردن نمی توانیم کاهش دهیم.

در پاسخ به این سوال که ابتدا باید فیلتر کرد یا epoch،می توان این گونه گفت که اگر ابتدا epoch کنیم ممکن است که سیگنال ما حاوی نویز بوده و پس از آن،به سادگی نتوان نویز آن را رفع کرد.epochingبا کاهش فرکانس نمونه برداری همراه است که ممکن است پدیده aliasing رخ دهد.پس ابتدا باید فیلتر کرد و سپس عمل epoch را انجام داد.

برای محاسبه انرژی باند های فرکانسی،تابع freqband را تعریف کردیم که انرژی را در یک بازه فرکانسی محاسبه می کند.انرژی را به کمک رابطه پارسوال که در قسمت های قبل بحث شد،محاسبه می کنیم.

یک ماتریس 5*2700 خواهیم داشت که به ترتیب انرزی باند های دلتا ،تتا، آلفا، بتا، گاما می باشد.ماتریسE،ماتریس مطلوب ماست.

data	63x1800x44 single
E	5x2700 double
Epoch	9x256x2700 double

برای طراحی فیلتر قبل از محاسبه انرژی مشکلاتی نظیر طول فیلتر را داریم چرا که طول فیلتر باید از طول EPOCH ما کمتر باشد.

```
function y=freqband(x,f1,f2,fs)
L=length(x);
dF = fs/L;
f  = (-fs/2:dF:fs/2-dF)';

if isempty(f1) || f1==-Inf
    BPF = (abs(f) < f2);
elseif isempty(f2) || f2==Inf
    BPF = (f1 < abs(f));
else
    BPF = ((f1 < abs(f)) & (abs(f) < f2));
end
Y=fftshift(fft(x));
P2 = abs(Y);
spec=P2.*BPF;
a=spec.*conj(spec);
y=(1/L)*(sum(a(:)));
end
```

خوشه‌بندی بر مبنای همبستگی

- نشان دهید که

$$r_{XY} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} X(t)Y(t)dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} X^2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} Y^2(t)dt}}$$

عددی بین 1 و -1 است.

از نظر شهودی هنگامی که انتگرال در فضای برداری نگاشته می‌شود ، اندازه یک بردار به توان 2 ، انتگرال توان دوم آن تابع و ضرب داخلی دو بردار ، انتگرال حاصلضرب آن دو تابع می‌باشد.پس صورت r_{xy} ضرب داخلی X و Y و مخرج آن حاصلضرب اندازه X در Y است که میدانیم برابر است با کسینوس زاویه بین دو بردار که عددی بین 1 و -1 است.

$$r_{xy} = \frac{X.Y}{|X||Y|} = cos < X, Y >$$

اما اگر بخواهیم دقیق اثبات کنیم ، ابتدا به تعمیم نامساوی کوشی شوارتز به فضای انتگرال ها که توسط بونیاکوفسکی اثبات شده است ، اشاره میکنیم :

$$\left| \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \right|^۲ \le \left(\int_a^b |f(t)|^۲ dt \right) \left(\int_a^b |g(t)|^۲ dt \right), \quad f, g \in \mathcal{L}^۲([a, b]).$$

گر r_{xy} را به توان 2 برسانیم ، صورت عبارت ، جمله سمت چپ نامساوی و مخرج آن ، جمله سمت راست تساوی خواهد شد که طبق نامساوی کوچکتر یا مساوی 1 خواهد شد . پس r_{xy} بین 1 و -1 است.

$$r_{xy}^2 = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt\right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2\, dt \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt} \le \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2\, dt \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2\, dt \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt}$$

$$\rightarrow \quad r_{xy}^2 \le 1 \quad \rightarrow \quad -1 \le r_{xy} \le 1$$

- نشان دهید $|r_{XY}| = 1$ تنها در حالتی رخ می‌دهد که دو سیگنال تنها در یک ضریب تفاوت داشته باشند یعنی $X(t) = \alpha Y(t)$.

از نامساوی کوشی شوارتز به یاد داریم که در صورتی نامساوی به تساوی تبدیل میشود که ضرایب a_i و b_i همبسته خطی باشند یعنی $\frac{a_i}{b_i}$ عددی ثابت باشد.

حال رابطه انتگرالی فوق را به صورت حالت حدی سیگما می‌نویسیم و کوشی شوارتز را بر روی آن اعمال می‌کنیم:

$$r_{XY}=1 \Longrightarrow \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t)\,dt\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)\,dt$$

$$\xrightarrow[\text{در حالت حدی}]{\text{تساوی بالا}} \left(\sum_{\substack{K=-\infty \\ \Delta t\to 0}}^{\infty} x(K\Delta t)\,y(K\Delta t)\right)^2 = \sum_{\substack{K=-\infty \\ \Delta t\to 0}}^{\infty} x^2(K\Delta t) \sum_{K=-\infty}^{\infty} y^2(K\Delta t)$$

$$\xrightarrow[\text{کوشی-شوارتز}]{\text{طبق نامساوی}} \forall\ -\infty<K<+\infty:\ \frac{y(K\Delta t)}{x(K\Delta t)} = a \qquad (*)$$

$$\xrightarrow[\Delta t\ \text{را به سمت صفر میل دهیم}]{\text{حال اگر در رابطه‌ی } (*)} y(t) = a\,x(t) \Longrightarrow \text{حکم ثابت می‌شود}$$

- استدلال کنید که چرا این معیار، معیار مناسبی برای سنجش شباهت دو سیگنال است.

ابتدا یک کمیت به اسم فاصله (distance) تعریف می کنیم و شباهت دو سیگنال را کوچک بودن این کمیت تعریف می‌کنیم :

$$distance(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)| dt$$

حال اگر اندازه دو سیگنال را ثابت فرض کنیم ، کاهش فاصله دو سیگنال معادل با افزایش همبستگی آن هاست :

$$distance(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)^2 + y(t)^2 - 2x(t)y(t)) dt$$

با افزایش همبستگی دو سیگنال عبارت بالا به سمت صفر می‌رود و هنگامی که دو سیگنال فقط در یک ضریب ثابت اختلاف داشته باشند ، دقیقا صفر می‌شود.

پس می‌توان گفت هرچه r_{xy} به 1 نزدیک‌تر باشد ، فاصله دو سیگنال کمتر و شباهتشان بیشتر است.

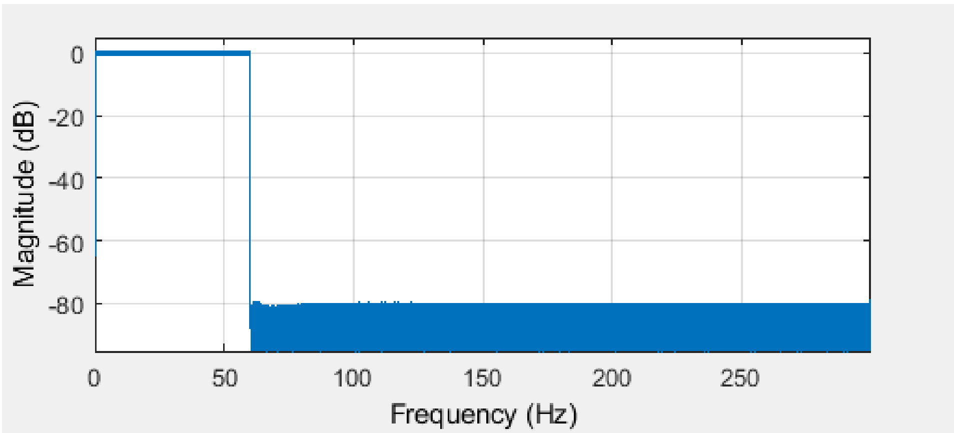
در این قسمت نیز مانند قسمت قبل،یک فیلتر برای حذف نویز DC،و با توجه به طیف فرکانسی سیگنال ها،یک فیلتر میان گذر با مشخصات زیر اعمال می کنیم.

f-stop1=0.4

f_pass1=0.5

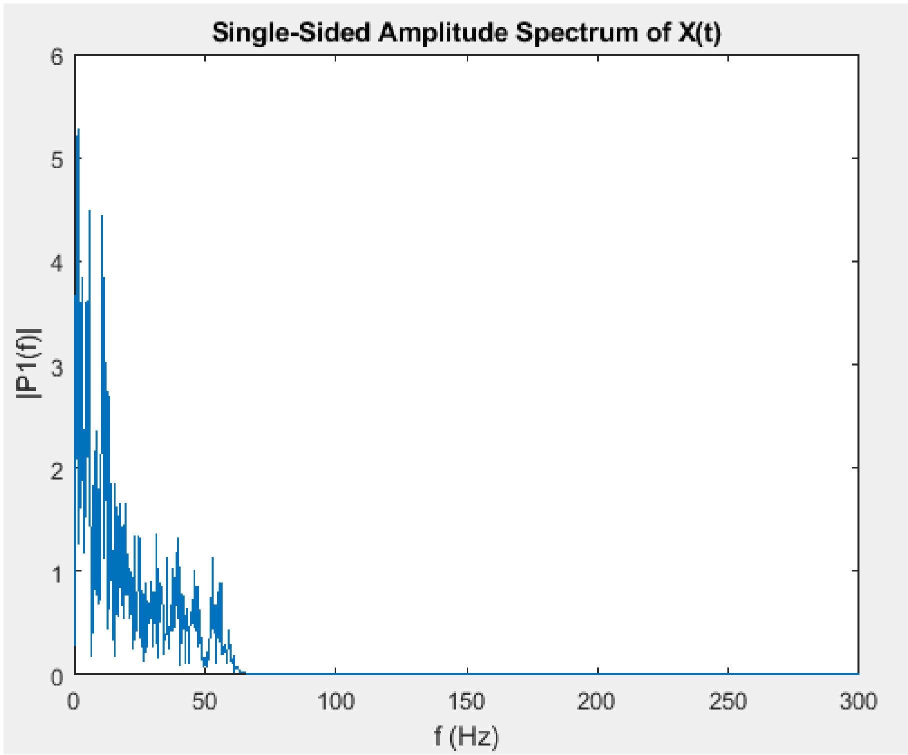
f_pass2=39

f_stop2=39.1



با نام filter_2 ضمیمه شده است.

طیف فرکانسی اکثر کانال ها به صورت زیر است.



طبق قضیه نایکوئیست،برای باسازی سیگنال اولیه،فرکانس نمونه برداری باید دو برابر بیشترین فرکانس طیف سیگنال باشد. پس می توانیم فرکانس را به 240 هرتز کاهش دهیم.

ماتریس r را که ماتریسی متقارن است،طبق تعریف پیاده سازی می کنیم.

در زیر،خلاصه از روش خوشه بندی که استفاده کردیم،ارائه می کنیم.مباحث کامل تر طی لینک هایی که گذاشته خواهدشد،قابل مطالعه است.

در ابتدا ماتریس فاصله را بیان می کنیم.

$$d = 1 - r$$

در هرمرحله،کوچک ترین عضو ماتریس d را پیداکرده،دو عضو که سطر ستون این درایه هستند را داخل یک خوشه قرار می دهیم. سپس با دو الگوریتم upgma,wpgma ماتریس فاصله را تغییر می دهیم.در upgma،درایه عنصری که با دو عضو خوشه بندی شده رابطه داشت،با رابطه زیر به دست می آید.

$$d_{(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}),X} = \frac{|\mathcal{A}| \cdot d_{\mathcal{A},X} + |\mathcal{B}| \cdot d_{\mathcal{B},X}}{|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|}$$

در الگوریتم wpgma،این درایه با رابطه زیر به دست می آید.

$$d_{(i\cup j),k} = \frac{d_{i,k} + d_{j,k}}{2}$$

این دو روش به طور کامل در لینک های زیر بررسی شده اند.

https://en.wikipedia.org/wiki/WPGMA

https://en.wikipedia.org/wiki/UPGMA

به کمک ماتریس Correlation_clustring خوشه بندی را انجام می دهیم.

```
function C = Correlation_clustering(Matrix,Method,Parameter,Value)
```

Matrix برابر با ماتریس همبستگی می باشد. Method نیز یکی از دو روشی که در بالا گفته شد،می باشد.Parameter برابر limit و حد بالایی است که باید برای فاصله بین خوشه ها در نظر بگیریم. Valueنیز برابر با این مقدار است.

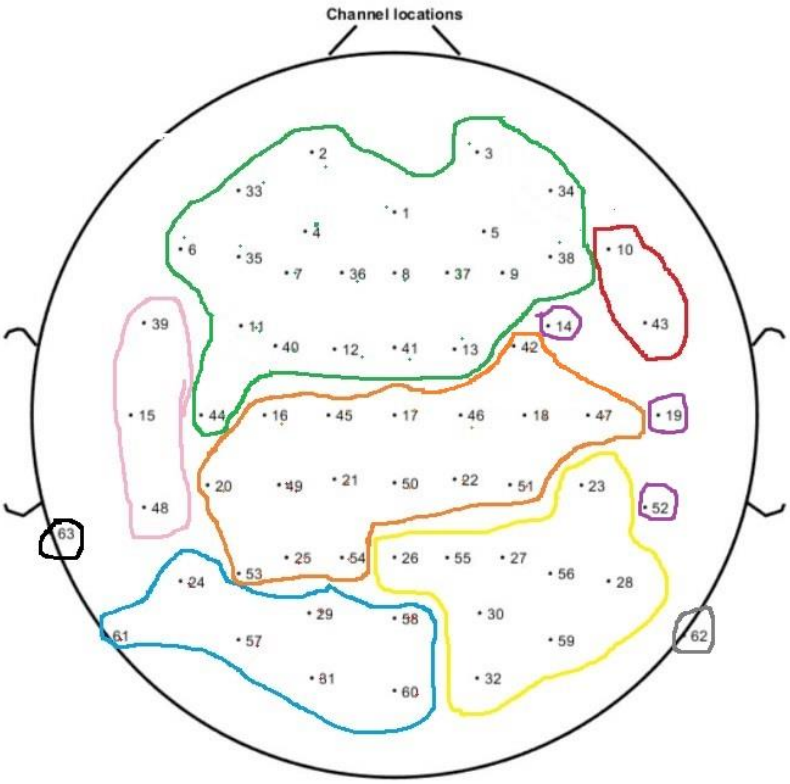
تعریف دیگری که برای فاصله در نظر گرفته می شود،به صورت زیر است.

$$d(x_i, y_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (r_{i,k} - r_{j,k})^2}$$

ولی ما برای سادگی همان تعریف اول را در نظر می گیریم.

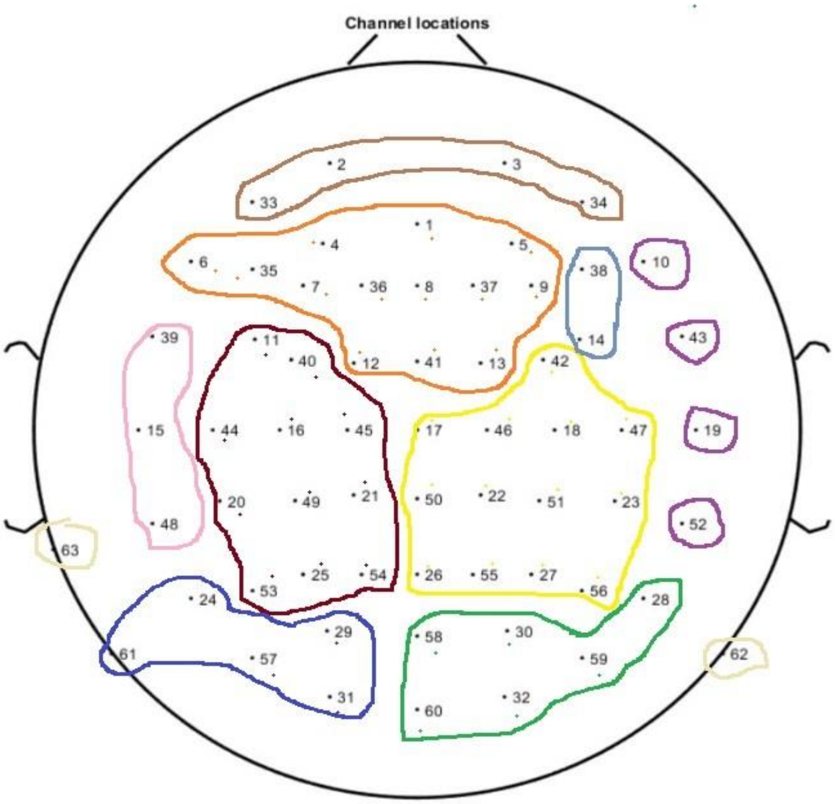
خروجی ما یک struct می باشد که شامل 11 cell array بوده و در هر کدام،خوشه بندی انجام شده است.لازم به ذکر است که برای مقایسه راحت تر،هر 4 epoch را کنار هم قرار دادیم و و تعداد را به 11 عدد رساندیم تا خوشه بندی و مقایسه بهتر شود.

در عکس های زیر چند نمونه از خوشه بندی Epochها و در نهایت خوشه بندی غالب آمده است.در این مورد از الگوریتم UPGMA و VALUE=0.3 بهره گرفتیم.



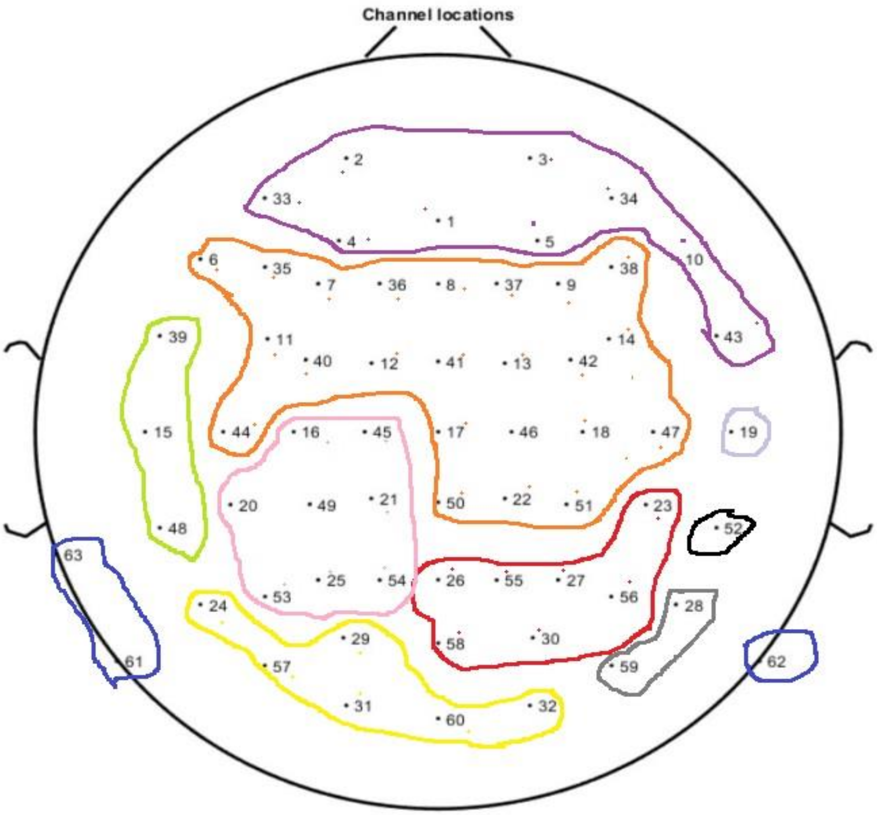
Epoch

1



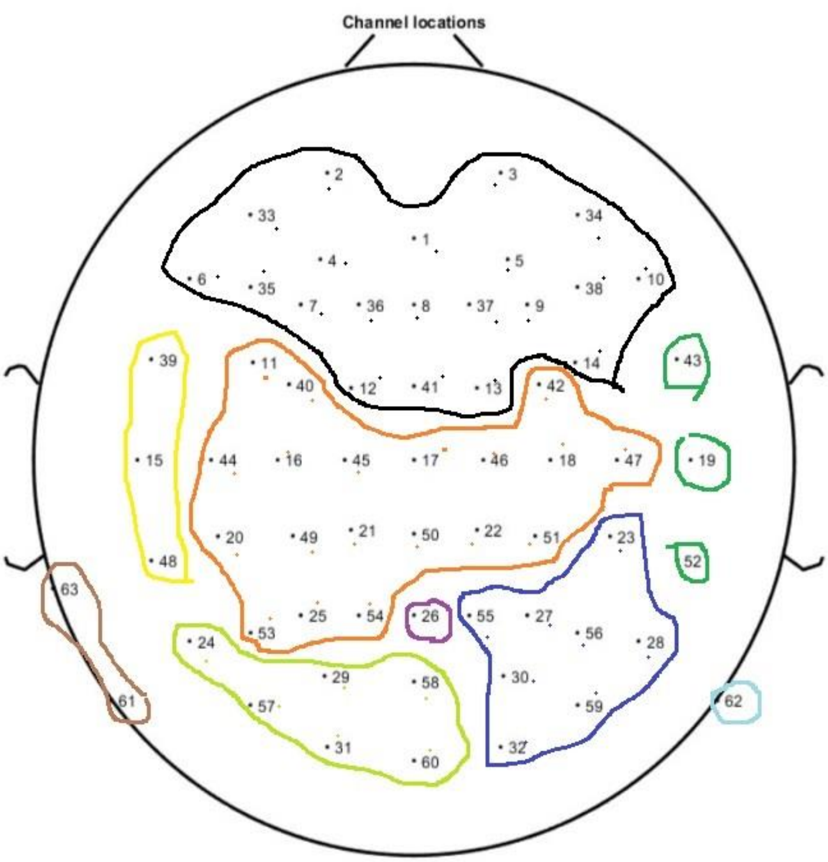
Epoch

4



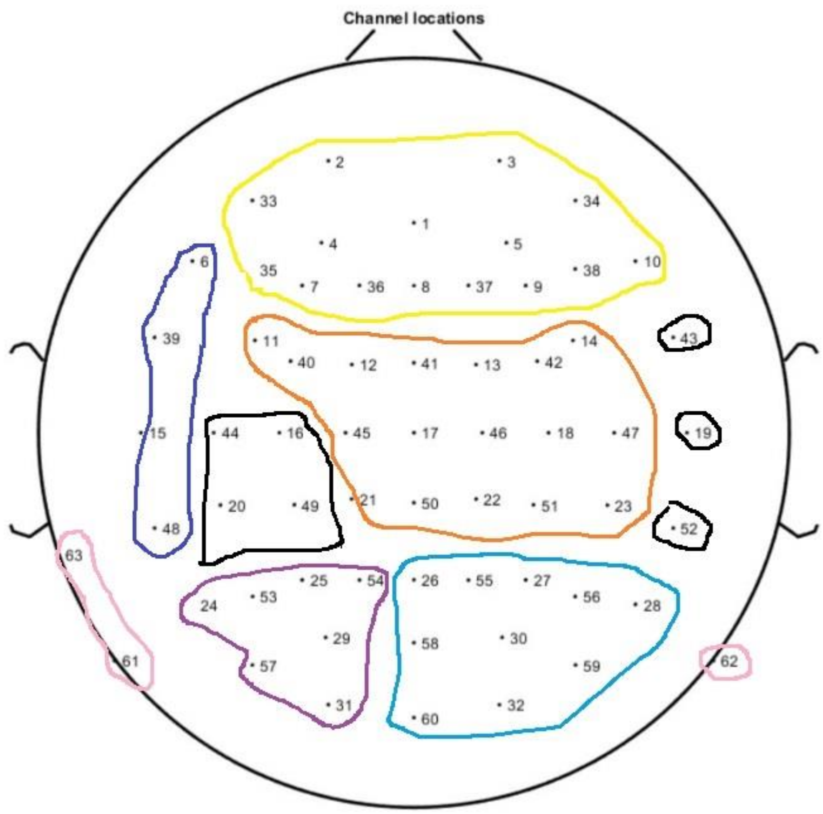
Epoch

9



Epoch 10

اما خوشه بندی غالب به صورت زیر است.



همان طور که می دانیم،این دیتاست مربوط به تشخیص حرکت است،پس طبق انتظار،قسمت جلوی مغز باید فعال ترین قسمت باشد و وظایف متفاوتی دارند اما بعضی از قسمت ها مانند بینایی،در حال استراحت هستند.

طبق پیش بینی،الکترود های چپ و راست تقریبا همبستگی ندارند و مشابهت ها بیشتر در همسایگی ها هستند.

همان طور که در قسمت قبل دیده شد،الکترود های نزدیک به هم فعالیت مشابهی دارند.

در این قسمت از Epoch ها میانگین گرفته و هر 300 Epoch را با یک عدد جایگزین کردیم.برای این قسمت از الگوریتم UPGMA و Value=0.25 بهره گرفتیم.

با بررسی 9 Epoch موجود،به طور میانگین به این نتیجه می توانیم برسیم که نقاط زرد رنگ مربوط به کانال های (1,2) و نقاط سبزرنگ مربوط به (3,4,5,6,7,8) هستند.

Cluster1(3).Cluster1

	1
1	[3,7,4,8,5]
2	6
3	[1,2]