



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

گروه ۴ - سیگنال‌ها و سیستم‌ها - بهار ۱۳۹۷ - ۹۸

تمرین متلب سری اول

موعده تحویل: جمعه ۲۴ اسفند ۱۳۹۷، ساعت ۲۳:۵۵

نحوه ی تحویل:

- گزارش تمرین خود را در قالب یک فایل pdf. تحویل دهید. در گزارش لازم است تمامی خروجی‌ها و نتایج نهایی، پرسش‌های متن تمرین، و توضیح مختصری از فرآیند حل مسأله‌ی خود در هر قسمت را ذکر کنید.
- کد کامل تمرین را در قالب یک فایل m. تحویل دهید. لازم است بخش‌های مختلف تمرین در sectionهای مختلف تفکیک شوند و کد تحویلی منظم و دارای کامنت‌گذاری مناسب باشد. بدیهی است آپلود کردن کدی که به درستی اجرا نشود، به منزله‌ی فاقد اعتبار بودن نتایج گزارش شده نیز می‌باشد.
- توابعی را که (در صورت لزوم) نوشته‌اید، در قالب فایل‌های m. در کنار فایل‌های گزارش و کد اصلی تمرین، ضمیمه کنید.
- مجموعه‌ی تمامی فایل‌ها (گزارش، کد اصلی، توابع، و خروجی‌های دیگر در صورت لزوم) را در قالب یک فایل zip/.rar. ذخیره کرده و از طریق سامانه‌ی CW تحویل دهید.
- نام‌گذاری فایل‌های تحویلی را به صورت HW01_StudentNumber.pdf/.m/.zip/.rar انجام دهید.

معیار نمره دهی:

- ساختار مرتب و حرفه‌ای گزارش
- استفاده از توابع و الگوریتم‌های مناسب
- پاسخ به سؤالات تئوری و توضیح روش‌های مطلوب سوال
- کد و گزارش خروجی کد برای خواسته‌های مسأله

نکات تکمیلی:

- همواره در تمامی تمارین و پروژه‌ها، تا سقف ۱۰٪ نمره اضافه برای قسمت‌های امتیازی و نیز هر گونه روش‌های ابتکاری و فرادرسی در نظر گرفته می‌شود و سقف نمره‌ی قابل کسب معادل با ۱۱۰/۱۰۰ می‌باشد.
- شرافت انسانی ارزشی به مراتب بالاتر از تعلقات دنیوی دارد. رونویسی تمارین، زیر پا گذاشتن شرافت خویشتن است؛ به کسانی که شرافتشان را زیر پا می‌گذارند هیچ نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

۱ آشنایی با متلب

در این بخش، از شما خواسته شده است تا دو تمرین ابتدایی را (مستقل از مباحث درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها) صرفاً به منظور آشنایی با تکنیک‌های ابتدایی کدنویسی در متلب انجام دهید.

۱.۱ رسم نمودار

نمودار شکل ۱ را مشاهده کنید. کدی بنویسید که این شکل را عیناً تولید کند. سعی کنید تمامی جزئیات موجود در این نمودارها را در نمودار خود لحاظ کنید. معادلاتی که برای رسم این نمودارها نیاز دارید در ادامه آمده است:

$$y_1(t) = \sin(t) \quad (۱)$$

$$y_2(t) = \cos(t)u(t) \quad (۲)$$

$$y_3(t) = \sin(t) + 2\cos(2t) \quad (۳)$$

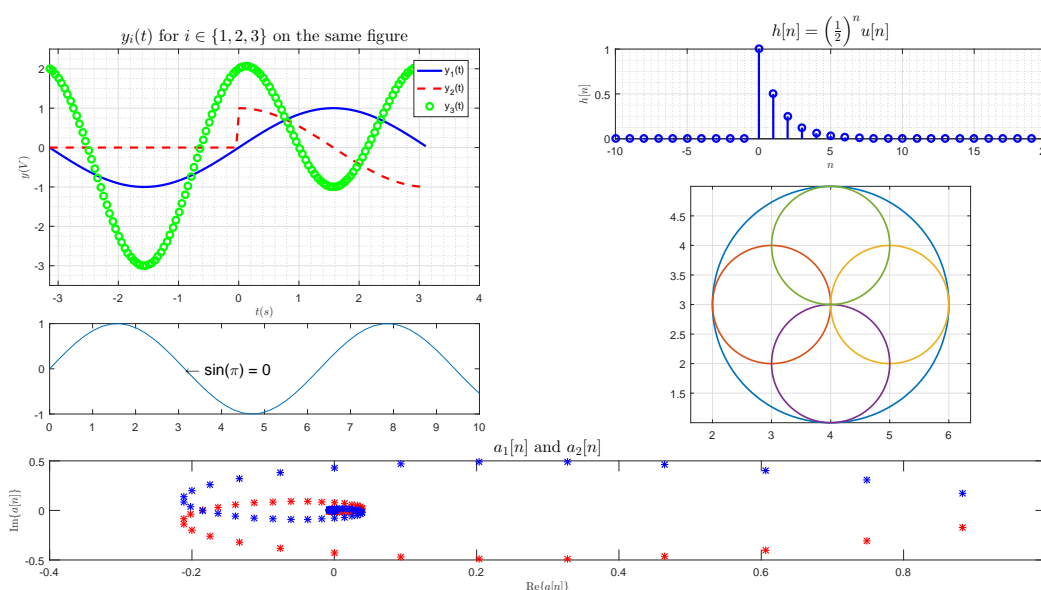
$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (۴)$$

$$a_1[n] = p_1^n u[n] \quad (۵)$$

$$a_2[n] = p_2^n u[n] \quad (۶)$$

که p_1 و p_2 در معادلات ۵ و ۶، ریشه‌های معادله‌ی ۷ می‌باشند.

$$z^2 - 1.8 \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)z + 0.81 = 0 \quad (۷)$$



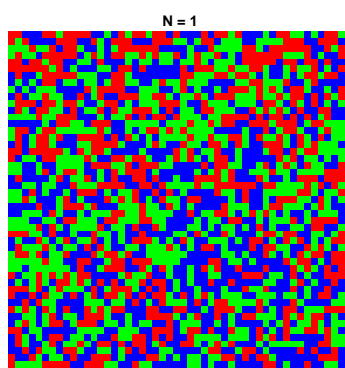
شکل ۱: نمودارهای سؤال ۱.۱

۲.۱ مسأله‌ی رأی‌دهندگان

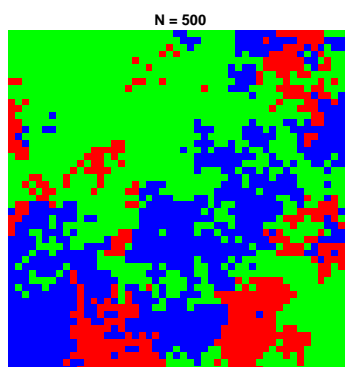
می‌خواهیم مدلی از برهم‌کنش افراد در رابطه با فرآیند رأی‌گیری در یک انتخابات بسازیم. فرض کنید هر کس، رأی خود را از بین سه گزینه انتخاب می‌کند. همچنین افراد در برخوردهایی که با یک‌دیگر دارند، می‌توانند به تبادل نظر بپردازند، به گونه‌ای نهایتاً یک نفر موفق می‌شود رأی نفر دیگر را عوض کند؛ با این حال این تبادل نظرها تنها بین افرادی که در مجاورت یک‌دیگر قرار دارند صورت می‌گیرد.

برای انجام این شبیه‌سازی، فرض کنید تعداد افراد n^2 باشد. این مجموعه افراد را با یک جدول $n \times n$ مدل می‌کنیم. هر یک از افراد با ۸ نفر مجاور است (به جز افرادی که در مرزها قرار دارند که با ۵ یا ۳ نفر مجاور هستند). در هر مرحله، $\frac{1}{k}$ افراد به تصادف انتخاب می‌شوند و با احتمال یکنواخت، رأی خود را عوض کرده و رأی یکی از همسایگان خود را می‌پذیرند. (یعنی فرد انتخابی حتماً رأی خود را عوض خواهد کرد و رأی یکی از همسایگانش را جایگزین رأی خود می‌کند، و این همسایه به تصادف و با احتمال یکسان از بین افراد مجاور انتخاب می‌شود.) اگر رأی‌ها را با سه رنگ قرمز، آبی، و سبز مدل کنیم؛ به بیان دیگر می‌توان گفت که در هر مرحله به تصادف $\frac{1}{k}$ از خانه‌های جدول انتخاب می‌شوند و با احتمال یکنواخت، رنگ یکی از ۸ (یا ۵ یا ۳) همسایه‌ی خود را جایگزین رنگ خود می‌کنند. همچنین فرض کنید توزیع اولیه‌ی رنگ‌ها تصادفی است. برنامه‌ای بنویسید که فرآیند فوق را پیاده‌سازی کند و در حین اجرا، تغییرات شرایط جدول را نیز نشان دهد؛ یعنی جدول $n \times n$ مربوطه را رسم کند و در هر لحظه و با جلو رفتن مراحل، وضعیت رنگ‌ها در آن به‌روزرسانی شود. همچنین در بالای جدول نیز شماره مرحله نوشته شده و به صورت لحظه‌ای به‌روزرسانی گردد.

شکل‌های ۲ و ۳ دو فریم از این شبیه‌سازی را در مراحل اول ($N = 1$) و پانصدم ($N = 500$) نشان می‌دهند. شبیه‌سازی را به ازای مقادیر $n = 50$ و $k = 4$ اجرا کنید و با گزارش چند تصویر از مراحل مختلف، فرآیند طی شده توسط این سیستم را در گزارش خود ذکر کنید.



شکل ۲: حاصل شبیه‌سازی مسأله‌ی رأی‌دهندگان در مرحله‌ی اول



شکل ۳: حاصل شبیه‌سازی مسأله‌ی رأی‌دهندگان در مرحله‌ی پانصدم

۲ تحلیل سیستم‌ها با استفاده از تبدیل z

۱.۲ بررسی تأثیر مکان قطب بر روی رفتار سیستم

۱. تابع تبدیل دو سیستم علی، به شکل زیر است:

$$\bullet X_1(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}} \quad \bullet X_2(z) = \frac{1}{1 - 0.2z^{-1}}$$

به کمک متلب، نمودار صفر-قطب و همچنین پاسخ ضربه‌ی هر دو سیستم را ترسیم کنید. کدام سیستم سریع‌تر به پاسخ نهایی خود همگرا می‌شود؟ چگونه می‌توان این موضوع را بر اساس نمودار صفر-قطب توجیه کرد؟ (راهنمایی: به تأثیر مکان قطب‌ها بر روی تبدیل وارون توجه کنید).

۲. اکنون، نمودار صفر-قطب و پاسخ ضربه‌ی دو سیستم علی زیر را رسم کنید:

$$\bullet X_3(z) = \frac{1}{1 - 1.2z^{-1}} \quad \bullet X_4(z) = \frac{1}{1 - 4.8z^{-1}}$$

آیا پاسخ ضربه‌ی این سیستم‌ها پایدار است؟ چه تفاوتی میان پاسخ ضربه‌ی دو سیستم مشاهده می‌شود؟ چه تفاوت مهمی میان سیستم‌های این بخش و سیستم‌های بخش قبل وجود دارد؟ با توجه به مطالبی که از درس آموختید، این تفاوت‌ها را توجیه کنید.

۳. حال دو سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\bullet X_5(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \bullet X_6(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2}$$

مشابه قسمت قبل، نمودار صفر-قطب و پاسخ ضربه‌ی هر دو سیستم را ترسیم کنید. چه تفاوتی میان پاسخ ضربه‌ی این دو سیستم مشاهده می‌شود؟ این موضوع را چگونه توجیه می‌کنید؟

۴. سیستم‌هایی که در بخش ۱ تا ۳ بررسی کردیم، دارای قطب‌هایی روی محور حقیقی بودند. اکنون می‌خواهیم تأثیر وجود قطب‌های مزدوج مختلط را بر روی سیگنال بررسی کنیم؛ بدین منظور، نمودار صفر-قطب و پاسخ ضربه‌ی سیستم‌های زیر را ترسیم نمایید:

$$\bullet X_7(z) = \frac{0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} \quad \bullet X_8(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}}$$

چه تفاوتی میان پاسخ ضربه‌ی این دو سیستم و سیستم‌هایی که در بخش ۱ تا ۳ بررسی کردید مشاهده می‌شود؟ کدام یک از دو سیستم این بخش پایدار است؟ پایداری این سیستم را چگونه به کمک نمودار صفر-قطب توجیه می‌کنید؟

۲.۲ خواص تبدیل z

۱. ضابطه‌ی سیگنال گسسته‌ی $x[n]$ به صورت زیر داده شده است:

$$x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)u[n] \quad (A)$$

این دنباله را به صورت نمادین^۱ در متلب تعریف کنید و به کمک دستور `ztrans`، تبدیل z آن را محاسبه کنید. همچنین نمودار صفر-قطب آن را نیز رسم نموده و به کمک آن (و مطالبی که از درس آموخته‌اید)، ناحیه‌ی همگرایی (ROC) تبدیل z این سیگنال را مشخص کنید.

^۱symbolic

۲. به کمک دنباله ی بخش قبل، سیگنال زیر را بسازید:

$$x_1[n] = nx[n] \quad (9)$$

تبدیل z این سیگنال را حساب کنید و نتیجه را با ویژگی‌های تبدیل z که در درس آموخته‌اید، مقایسه و توجیه کنید.

۳. تبدیل z سیگنال $x[n]$ را (که در بخش ۱ محاسبه کردید) $X(z)$ بنامید و تعریف کنید $X_2(z) = X(z^2)$. نمودار صفر-قطب $X_2(z)$ را رسم کنید و آن را با نمودار صفر-قطب $X(z)$ مقایسه نمایید. همچنین فرم زمانی سیگنال جدید، $x_2[n]$ ، را نیز بیابید و ارتباط آن با $x[n]$ را بیان کنید.

۳.۲ وارون تبدیل z

۱. تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$H(z) = \frac{1 + 0.4\sqrt{2}z^{-1}}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}} \quad (10)$$

نمودار صفر-قطب این تابع تبدیل را رسم کنید با فرض علی بودن سیستم، ROC آن را مشخص کنید. همچنین در مورد وضعیت پایداری این سیستم نیز استدلال کنید.

۲. یکی از روش‌های متداول برای محاسبه ی وارون تبدیل z ، تجزیه ی تابع تبدیل به کسرهای جزئی است. در این روش، تابع تبدیل را به فرم زیر در می‌آوریم:

$$H(z) = \sum_i \frac{r_i}{1 - p_i z^{-1}} + \sum_j k_j z^{-j} \quad (11)$$

در متلب به کمک دستور `residuez`، می‌توانیم یک تابع تبدیل را به فرم معادله ۱۱ در بیاوریم. به کمک این دستور، $H(z)$ را به کسرهای جزئی تجزیه کنید و با توجه به دانسته‌های خود از مباحث تئوری درس، فرم زمانی $h[n]$ را بیابید.

۳. به کمک دستور `iztrans`، وارون تبدیل z را برای $H(z)$ حساب کنید و صحت نتیجه‌ای را که در بخش ۲ به دست آوردید، بررسی نمایید.

۴. حال فرض کنید سیستم فوق، یک سیستم ضدعلی^۲ است. (سیستم ضدعلی سیستمی است که پاسخ ضربه‌ی آن تنها به ازای $n < 0$ مقادیر غیر صفر دارد.)

به کمک روش تجزیه به کسرهای جزئی، وارون تبدیل z را برای این سیستم به دست آورید. آیا به کمک دستور `iztrans` می‌توان به این جواب رسید؟ علت این موضوع چیست؟

۴.۲ تحلیل سیستم‌های توصیف‌شده با معادله ی تفاضلی

در این بخش می‌خواهیم پاسخ ضربه‌ی یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان و گسسته را با استفاده از روش‌های گوناگون محاسبه کنیم. رابطه‌ی ورودی-خروجی این سیستم در معادله ۱۲ توصیف شده است:

$$y[n] - 1.8 \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)y[n-1] + 0.81y[n-2] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] \quad (12)$$

۱. از دو طرف رابطه ۱۲ تبدیل z بگیرید و تابع تبدیل سیستم را به دست آورید. با تجزیه‌ای این تابع تبدیل به کسرهای جزئی و با فرض علی بودن سیستم، پاسخ ضربه‌ی آن را به دست آورید و رسم کنید. همچنین فرم زمانی پاسخ ضربه را در گزارش ذکر کنید. (هر مقدار از محاسبات را که مقدور است، با متلب انجام دهید. سایر موارد را به صورت تحلیلی محاسبه کرده و در گزارش مکتوب کنید.)

²anti-causal

۲. اگر p_1 و p_2 قطب‌های سیستم باشند، پاسخ ضربه به فرم کلی معادله

$$h[n] = (\alpha p_1^n + \beta p_2^n)u[n] \quad (۱۳)$$

قابل بیان است که در آن ضرایب α و β مجهول هستند. واضح است که اگر این دو ضریب مجهول را تعیین کنیم، پاسخ ضربه به صورت کامل تعیین شده است. برای این کار دو شرط اولیه نیاز داریم. این دو شرط اولیه را بیابید و با جای‌گذاری در معادله ۱۳ و حل دستگاه دو معادله-دو مجهول حاصل، فرم زمانی پاسخ ضربه را بیابید و ترسیم کنید. حاصل را با قسمت قبل مقایسه کنید و صحت نتایج را تأیید کنید.

۳. (امتیازی) با انتخاب درست a ، b ، و x ، می‌توانید تعداد جملات دلخواه از پاسخ ضربه‌ی سیستم را با استفاده از دستور $h = \text{filter}(b, a, x)$ در بردار h به دست آورید. در مورد چگونگی عملکرد این تابع و انتخاب ورودی‌های آن و علت آن که این روش، می‌تواند پاسخ مطلوب را ارائه کند توضیح دهید. همچنین پاسخ ضربه را از این روش محاسبه کنید و با نتایج قسمت‌های قبلی مقایسه کنید.