شبیه سازی رایانه ای در فیزیک
تمرین ۵

علی ستاره کوکب
شماره دانشجویی: ۹۵۱۰۰۴۹۱

۲۳ آبان ۱۳۹۹

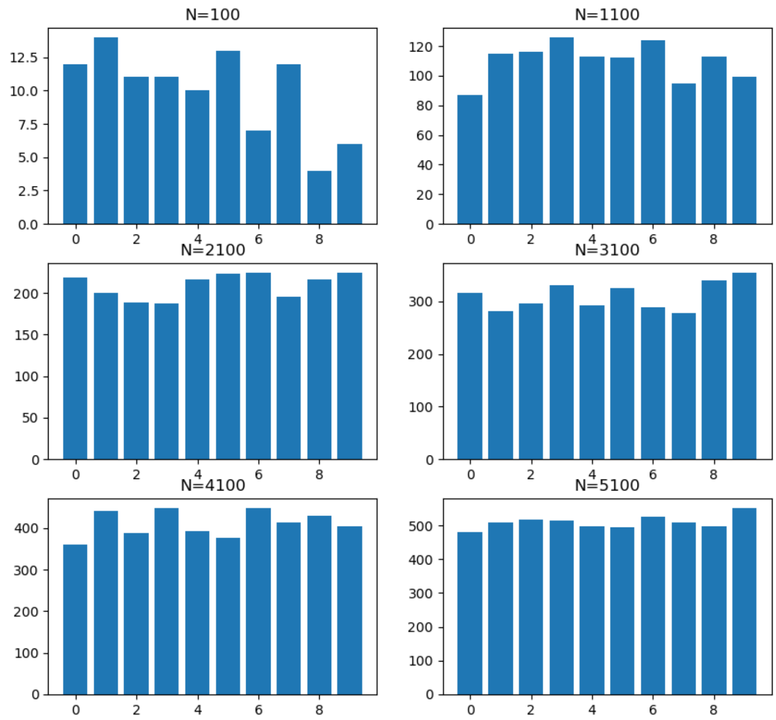
۱ مقدمه

در این سری از تمرین ها می خواهیم به بررسی روش های تولید اعداد تصادفی بپردازیم.

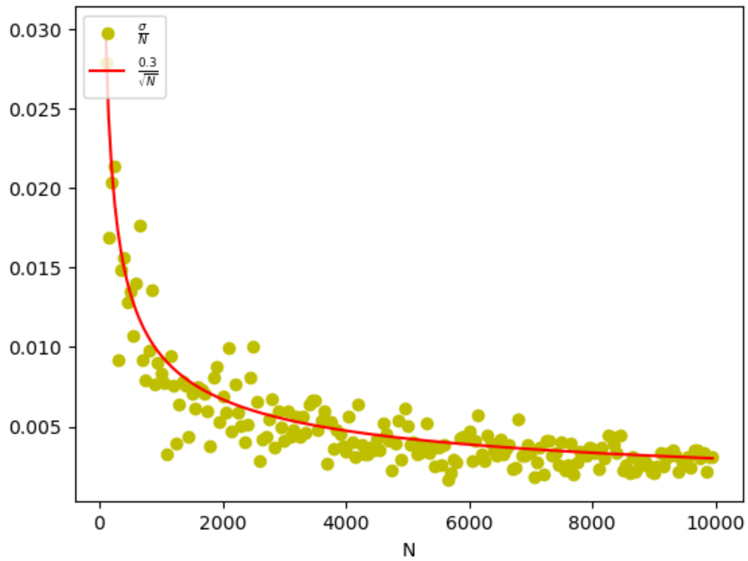
۲ مولد اعداد کاتوره ای

در این تمرین می خواهیم بررسی کنیم که آیا مولد اعداد تصادفی که در زبان برنامه نویسی که از استفاده می کنیم، تا چه میزان قادر است که تابع توزیع یکنواخت تولید کند. برای این کار تابع تولید اعداد تصادفی را داخل یک حلقه به طول N قرار می دهیم و با رسم هیستوگرام اعداد تولید شده می توانیم ببینیم که تا چه میزان این تابع توزیع به تابع توزیع یکنواخت نزدیک است. در شکل ۱ هیستوگرام اعداد تصادفی تولید شده ی بین ۰ تا ۹ را می بینید. همانطور که دیده می شود، با زیاد شدن N تابع توزیع به سمت یکنواخت شدن پیش می رود. در حالت ایده آل انتظار داریم که هر یک از اعداد به تعداد $\frac{N}{10}$ تکرار شده باشند که در عمل تابع توزیع اندکی با این مقدار تفاوت دارد. در شکل ۲ نمودار انحراف معیار اعداد تولید را برحسب تعداد N می بینید. همان طور که دیده می شود، انحراف معیار متناسب با $\frac{1}{\sqrt{N}}$ کاهش می یابد.

شباهتی که میان این تمرین و تمرین ولنشست وجود دارد آن است که در تمرین ولنشست نیز یک عدد تصادفی تولید می کردیم که این عدد مکان فرود ذره ی مورد نظر را تعیین می کرد. در آنجا نیز انحراف معیار ارتفاع خانه ها بصورت $\frac{1}{\sqrt{N}}$ که N بیانگر تعداد ذرات بود کاهش می یافت. علت این شباهت نیز آن است که این دو تمرین عملا نمایانگر یک مفهوم می باشند که همان تابع توزیع اعداد تصادفی تولید شده می باشد.



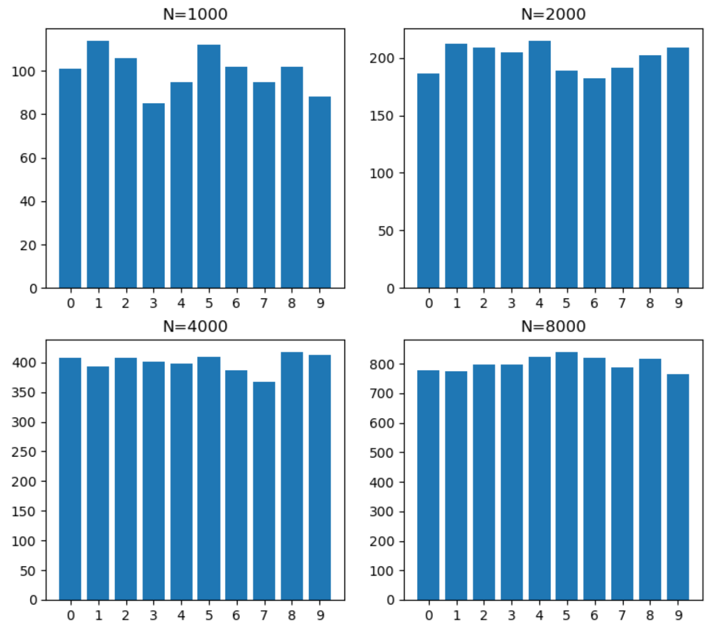
شکل ۱: هیستوگرام اعداد تصادفی تولید شده بین ۰ تا ۹. با زیاد شدن N تابع توزیع به سمت یکنواخت شدن پیش می رود.



شکل ۲: نمودار انحراف معیار اعداد تصادفی تولید شده برحسب N.

۳ همبستگی

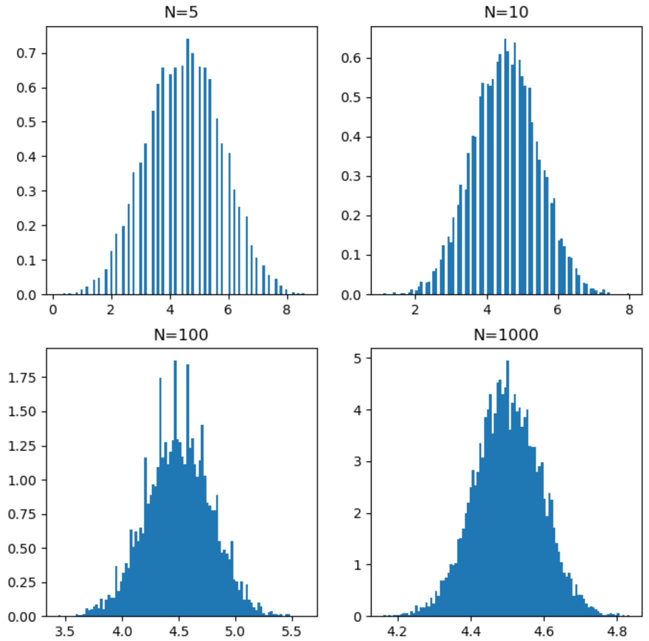
در این تمرین می خواهیم همبستگی میان اعداد تولید تصافی تولید شده توسط کامپیوتر را بررسی کنیم. برای این کار به جای آنکه مانند تمرین قبل فراوانی هر عدد تولید شده را بررسی کنیم، تنها اعدادی را نگاه می کنیم که قبل از آنها عدد ۴ آمده باشد. برای این کار ابتدا بررسی می کنیم که آیا عدد تولید شده توسط تابع تولید اعداد کتره ای ۴ می باشد یا خیر. اگر پاسخ مثبت بود یک عدد تصادفی دیگر تولید می کنیم. در نهایت هیستوگرام اعداد تولید شده را رسم می کنیم که در شکل ۳ می بینید. همان طور که می بینید، تابع توزیع همچنان برای N های بزرگ تقریبا یکنواخت می باشد. این نشان می دهد که اعداد تولید شده فاقد این نوع همبستگی خاص می باشند.



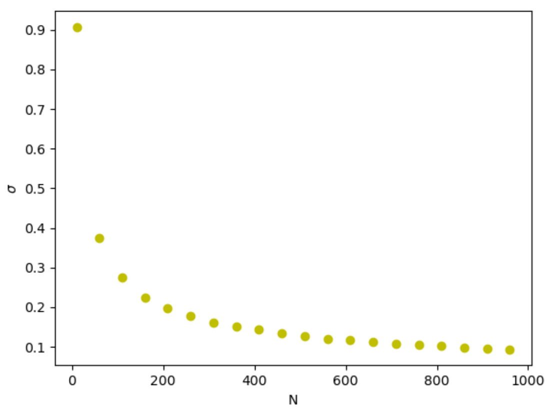
شکل ۳: هیستوگرام اعداد تصادفی تولید شده ای که بعد از عدد ۴ ظاهر شده اند.

۴ قضیه حد مرکزی

در این تمرین می خواهیم درستی قضیه حد مرکزی را بررسی کنیم. برای این کار ابتدا تعدادی عدد تصافی با تابع توزیع یکنواخت تولید می کنیم (تعداد اعدادی که روی آنها میانگین گیری می کنیم را با N نشان می دهیم. سپس میانگین این اعداد را حساب کرده و نگه می داریم. این کار را برای تعداد زیادی تکرار می کنیم و تابع توزیع این میانگین ها را رسم می کنیم. طبق قضیه حد مرکزی برای N های بزرگ، این تابع توزیع به سمت تابع توزیع یکنواخت میل می کند. در شکل ۴ نمودار این تابع توزیع را به ازای N مختلف می بینید. همان طور که دیده می شود با زیاد کردن N شکل تابع توزیع به تابع توزیع گوسی نزدیک می شود. در شکل ۵ نمودار انحراف معیار برحسب N را مشاهده می کنید. همانطور که انتظار داریم شکل این نقاط بصورت $\frac{1}{\sqrt{N}}$ می باشد.



شکل ۴: شکل تابع توزیع بدست آمده برای میانگین اعداد تصادفی تولید شده به ازای N های مختلف.



شکل ۵: نمودار انحراف از معیار برحسب N برای تابع توزیع میانگین اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت.

شباهتی که بین این تمرین و تمرین ولنشست و ولگشت وجود دارد آن است که در تمرین ولنشست تابع توزیع میانگین ارتفاع خانه ها به یک تابع گوسی میل می کرد و در تمرین ولگشت نیز تابع توزیع میانگین مکان ولگرد نیز داراری یک تابع توزیع گوسی بود. علت این شباهت ها آن است که در ولنشست مکان هر خانه از یک تابع توزیع یکنواخت می آمد و وقتی میانگین ارتفاع خانه ها را بررسی می کردیم عملا همین کاری را انجام می دادیم که در این انجام دادیم. در تمرین ولگشت نیز مکان ولگرد در هر لحظه وابسته به یک متغیر تصادفی با تابع توزیع یکنواخت بود و هنگامی که میانگین مکان را حساب می کردیو دوباره مشابه کاری که در این تمرین کرده ایم را انجام می دادیم و بنابراین تابع توزیع مکان ولگرد دارای به شکل گوسی بدست می آمد.

۵ تغییر تابع توزیع

در این تمرینمی خواهیم با استفاده از تابع تبدیل ، یک تابع توزیع یکنواخت را به یک تابع توزیع گوسی تبدیل کنیم. برای این کار دو عدد تصادفی با توزیع یکنواخت تولید می کنیم. سپس این دو عدد را با استفاده از رابطه ی ۱ و ۲ به دو عدد با تابع توزیع گوسی می بریم. در رابطه ی ۱، x_1 و x_2 دو عدد تصادفی در بازه ی صفر تا یک می باشند که دارای تابع توزیع یکنواخت می باشند. σ نیز انحراف از معیار تابع توزیع گوسی دلخواه می باشد. با استفاده از تابع تبدیل این دو عدد را به دو عدد r و θ که دارای تابع توزیع گوسی می باشند تبدیل می کنیم.

$$\theta = 2\pi x_1 \quad (۱)$$

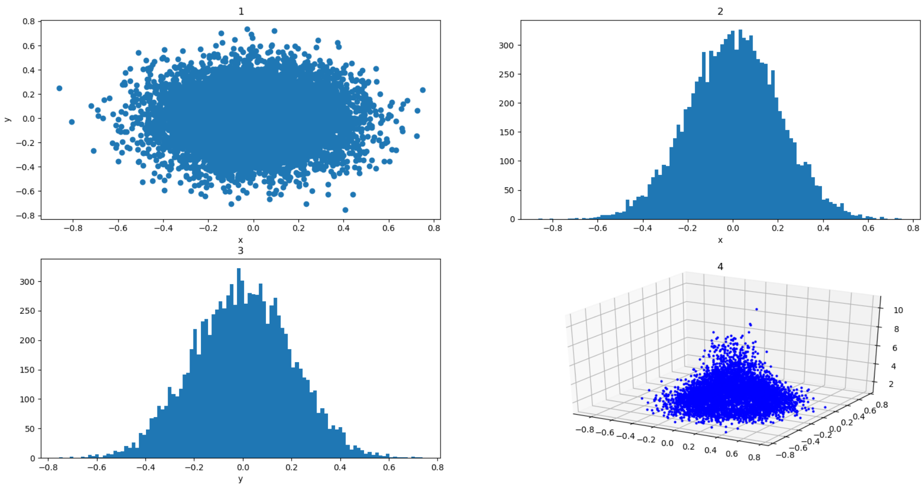
$$r = \sqrt{-2\sigma 2 log(x_2)} \quad (۲)$$

از رابطه ی ۱ و ۲ با توجه به مختصات قطبی می توان به رابطه ی ۳ و ۴ رسید.

$$x = rcos(\theta) \quad (۳)$$

$$y = rsin(\theta) \quad (۴)$$

در شکل ۶ نمودار توزیع x و y و همچنین توزیع نقاط در صفحه ی xy را می بینید. همچنین شکل سه بعدی توزیع نقاط به تصویر کشیده شده است. همانطور که دیده می شود شکل این نمودار ها بصورت گوسی می باشد.



شکل ۶: شکل ۱ توزیع نقاط در صفحه ی $x - y$. شکل ۲ و۳ توزیع نقاط x و y. شکل ۴ توزیع نقاط در سه بعد؛ در این شکل محور عمودی بیانگر تعداد می باشد.