

# شبیه سازی رایانه ای در فیزیک

## تمرین ۴

علی ستاره کوکب  
شماره دانشجویی: ۹۵۱۰۰۴۹۱

۱۶ آبان ۱۳۹۹

### ۱ مقدمه

در این سری از تمرین ها می خواهیم انواع ولگشت ها<sup>۱</sup> را و خواص آنها را بررسی کنیم.

### ۲ انحراف از معیار

در این تمرین می خواهیم رابطه ۱ را برای ولگشت یک بعدی اثبات کنیم.

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{4l^2}{\tau} pqt \quad (1)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \langle x(t - \tau) + al \rangle \\ &= N \langle al \rangle \\ &= Nl \langle a \rangle \\ &= (p - q)Nl \end{aligned}$$

$$\implies (\langle x \rangle)^2 = (p - q)^2 N^2 l^2 \quad (2)$$

---

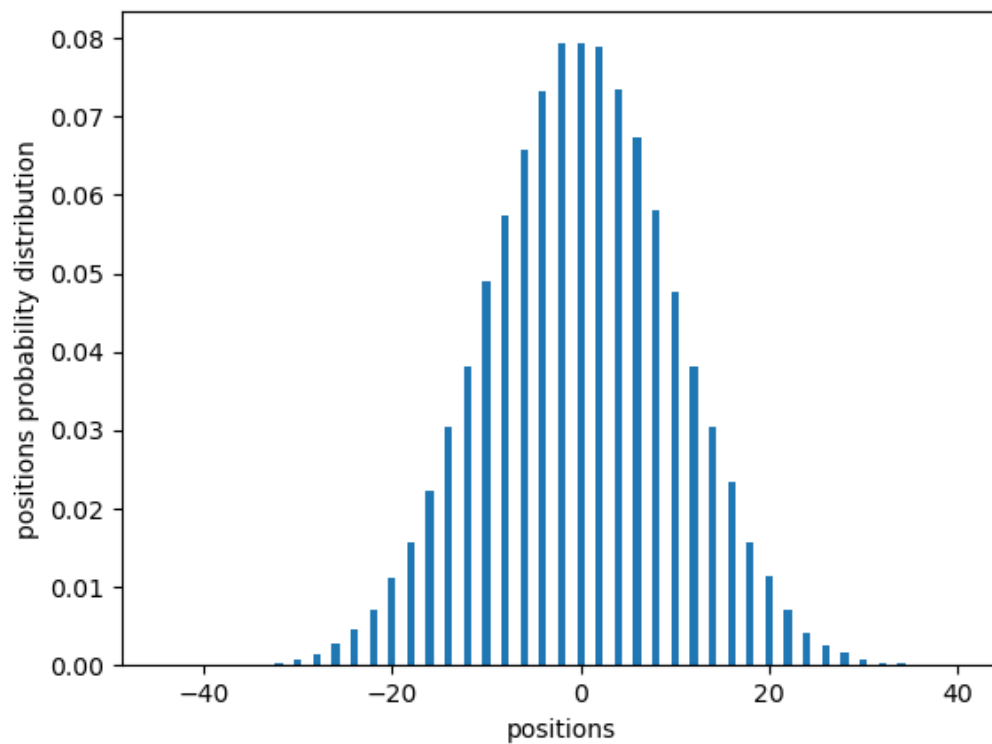
random walk<sup>۱</sup>

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \langle (x(t - \tau) + al)^2 \rangle \\
&= \langle x^2(t - a\tau) \rangle + \langle (a^2 l^2) \rangle + 2l \langle a \rangle \langle x(t - \tau) \rangle \\
&= Nl^2 \langle a^2 \rangle + 2l(p - q) \sum_{i=1}^N \langle x(t - i\tau) \rangle \\
&= Nl^2 + 2l^2(p - q)^2((N - 1) + (N - 2) + \dots) \\
&= Nl^2 + 2l^2(p - q)^2 \frac{N(N - 1)}{2} \\
p + q = 1 &\implies = Nl^2 + l^2(1 - 4pq)(N^2 - N) \\
\langle x^2 \rangle &= N^2 l^2 - 4pq l^2 N^2 + 4pq N l^2 \tag{۳}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2), (3) &\implies \sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\
&= N^2 l^2 - 4pq l^2 N^2 + 4pq N l^2 - (p - q)^2 N^2 l^2 \\
&= N^2 l^2 - 4pq l^2 N^2 + 4pq N l^2 - (1 - 4pq) N^2 l^2 \\
&\implies \sigma^2 = 4pq N l^2 \\
N = \frac{t}{\tau} &\implies = \frac{4l^2}{\tau} pqt \tag{۴}
\end{aligned}$$

### ۳ ولگشت

در این تمرین می خواهیم ولگشت یک بعدی را شبیه سازی کنیم. برای این کار یک متغیر به عنوان مکان متغیر تعریف می کنیم و هر بار بصورت تصادفی عدد یک یا منفی یک را انتخاب می کنیم و با مکان فعلی جمع می کنیم. این کار را برای تعداد قدم های دلخواه انجام می دهیم و در نهایت مکان ولگرد را ذخیره می کنیم. ابا تکرار این فرآیند برای ولگرد های مختلف تابع توزیع مکان ولگرد را بدست می آوریم. در شکل ۱ این تابع توزیع را می بینید. در جداول ۱ تا ۳ متوسط مکان و واریانس را برای p های مختلف و زمان های مختلف می بینید. در شکل ۴ نمودار میانگین مکان و واریانس را بر حسب زمان می بینید. همانطور که از معادلات خطوط پیداست رابطه ی ۱ و ۲ گفته شده در تمرین ها درست می باشند.



شکل ۱: نمودار تابع توزیع احتمال ولگشت یک بعدی برای صد قدم و  $p=0.5$

$\sigma^2$	$\langle x \rangle$	t
9.595332	-2.019700	10
19.106066	-3.996280	20
38.347745	-8.003920	40
57.766073	-12.006820	60
76.625733	-16.005200	80
95.836554	-19.984320	100

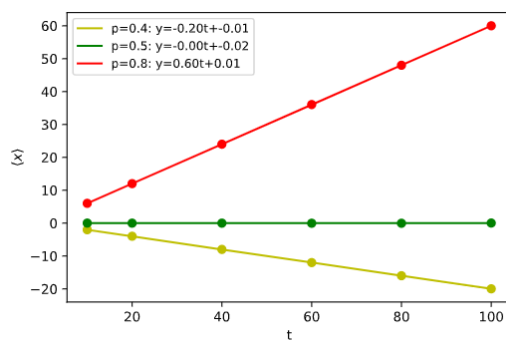
جدول ۱: متوسط مکان و واریانس برای ولگردی با  $p=0.4$

$\sigma^2$	$\langle x \rangle$	t
10.038400	-0.000680	10
19.985781	-0.017280	20
40.191024	-0.013280	40
59.901713	-0.041560	60
80.037341	-0.048780	80
99.662784	0.018320	100

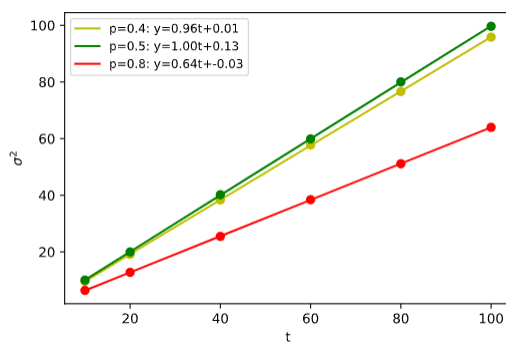
جدول ۲: متوسط مکان و واریانس برای ولگردی با  $p=0.5$

$\sigma^2$	$\langle x \rangle$	t
6.403349	6.009520	10
12.774159	11.999280	20
25.474980	23.995580	40
38.430440	36.046040	60
51.137721	47.993760	80
63.983569	60.008420	100

جدول ۳: متوسط مکان و واریانس برای ولگردی با  $p=0.8$

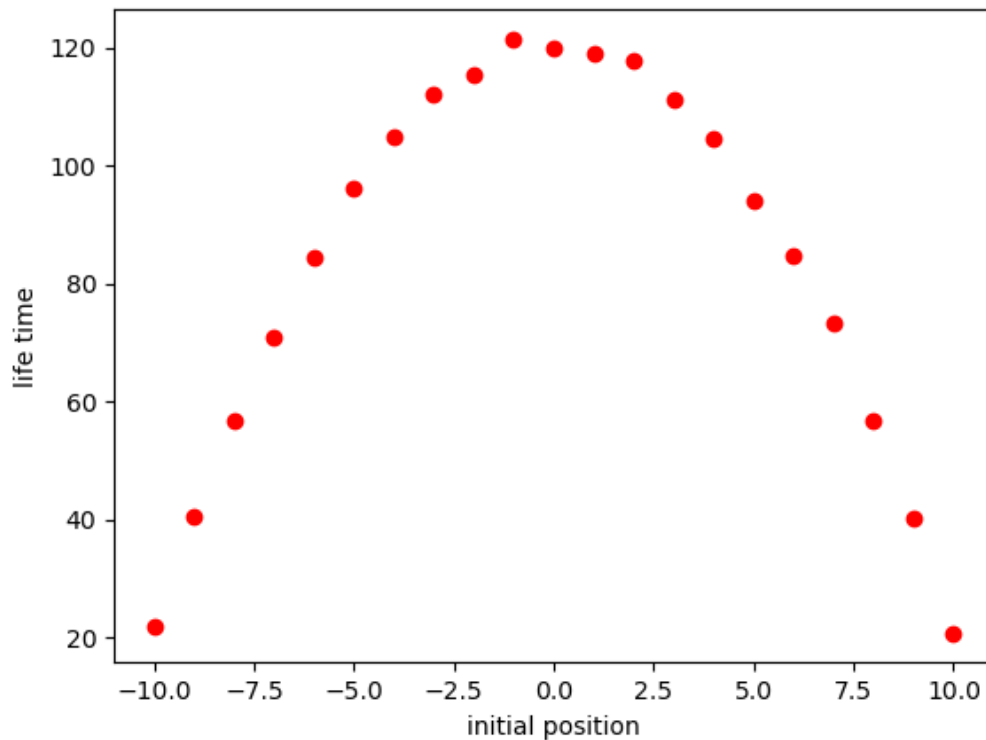


(آ)



(ب)

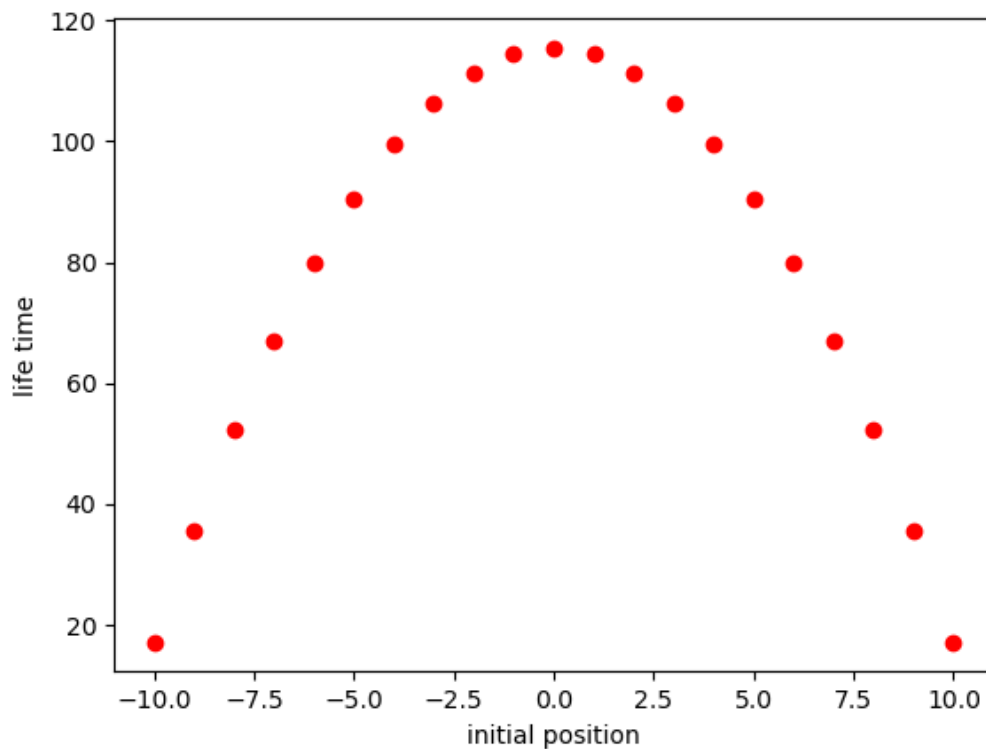
شکل ۲: آ نمودار میانگین مکان بر حسب زمان ب) نمودار واریانس بر حسب زمان



شکل ۳: نمودار طول عمر برحسب مکان اولیه برای شبکه ای به طول ۲۰. هر نقطه حاصل میانگین گیری بر روی ۱۰۰۰۰ نقطه می باشد. معادله ی چند جمله ای مرتبه ی دوم که به این منحنی فیت می شود عبارت است از:  $-0.99x^2 + 120.33$

#### ۴ ولگشت با تله

در این تمرین می خواهیم ولگشت یک بعدی با تله را شبیه سازی کنیم. تله در این جا بدین معناست که اگر ولگرد به هر یک از دو سر شبکه برسد می میرد و فرآیند ولگشت متوقف می شود. کد این قسمت مشابه قسمت قبل می باشد با این تفاوت که در اینجا بررسی می کنیم که آیا مکان ولگرد به دو انتهای شبکه رسیده است یا نه و اگر جواب مثبت بود فرآیند را قطع می کنیم و تعداد گام ها را ذخیره می کنیم. این کار را چندین بار برای مکان اولیه های مختلف انجام و برای هر مکان اولیه میانگین قدم ها را به عنوان عمر ولگرد ثبت می کنیم. در شکل ۲ این نمودار را می بینید.



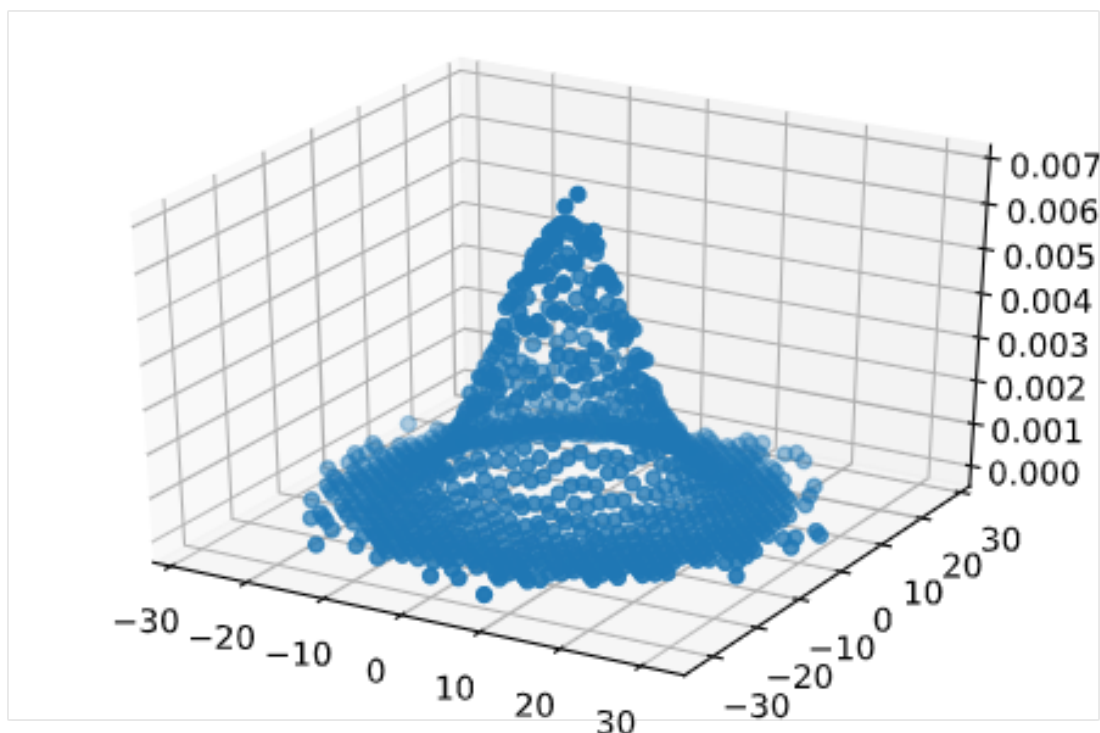
شکل ۴: نمودار طول عمر بر حسب مکان اولیه برای شبکه ای به طول ۲۰ با استفاده از الگوریتم تعینی. معادله ی چندجمله ای مرتبه ی دومی که به این نقاط فیت می شود عبارت از :  $-0.98x^2 + 115.24$

## ۵ ولگشت با تله (الگوریتم تعینی)

در این تمرین می خواهیم ولگشت با تله را با استفاده از الگوریتم تعینی شبیه سازی کنیم. در این الگوریتم احتمال مرگ ولگرد را در هر مرحله بدست می آوریم و و فرآیند را تا آنجا ادامه می دهیم که احتمال مرگ بیشتر از 0.99 شود. در شکل ۴ نمودار بدست آمده حاصل از این الگوریتم را می بینید. همانطور که دیده می شود نتایج بدست آمده از هر دو روش تقریباً یکسان می باشند. این تفاوت به این دلیل است که در روش تصادفی ما نتیجه ی دقیق را بدست نیاورده ایم بلکه با نمونه گیری توانسته ایم تابع توزیع را بصورت تقریبی بدست آوریم.

## ۶ ولگشت دوبعدی

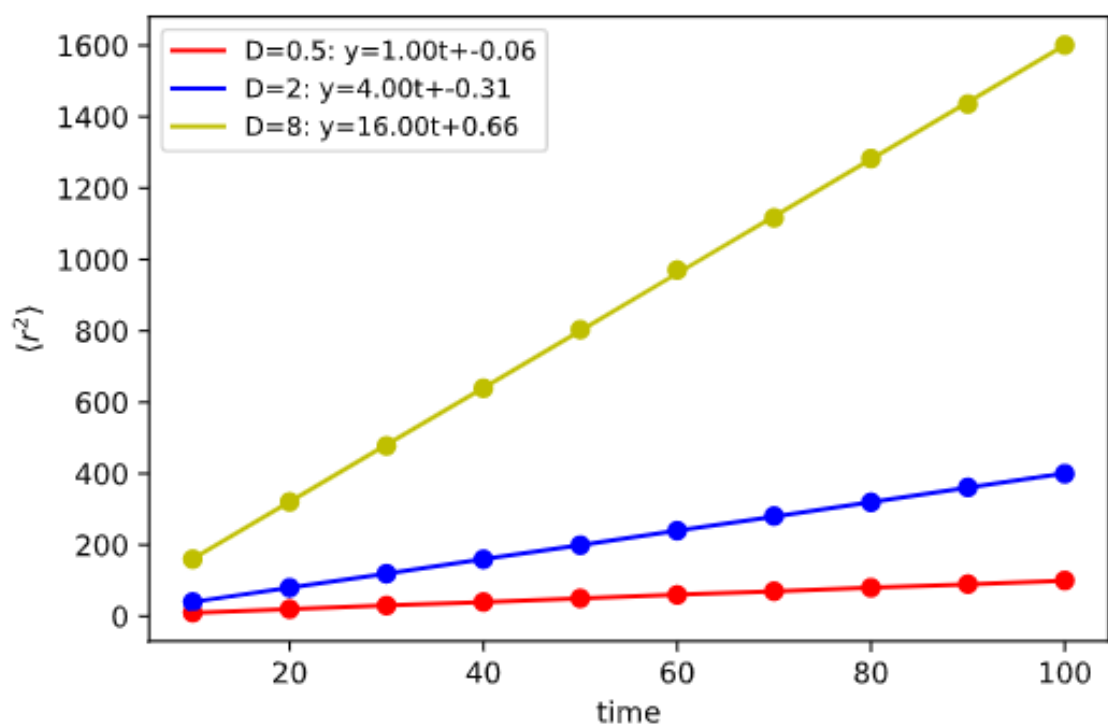
در این تمرین می خواهیم ولگشت دوبعدی را شبیه سازی کنیم. کد این قسمت مانند ولگشت یک بعدی می باشد با این تفاوت که در اینجا دو جهت بالا و پائین را نیز به حرکت ولگرد اضافه می کنیم و با توجه به آنکه احتمال حرکت در تمام جهات یکسان است، این احتمال برابر  $\frac{1}{4}$  می باشد. در شکل ۴، شکل تابع توزیع احتمال حضور در هر مکان را می بینید. در شکل



شکل ۵: نمودار تابع توزیع احتمال برای ولگرد دوبعدی. این شکل از ۱۰۰۰۰۰ ذره بدست آمده است.

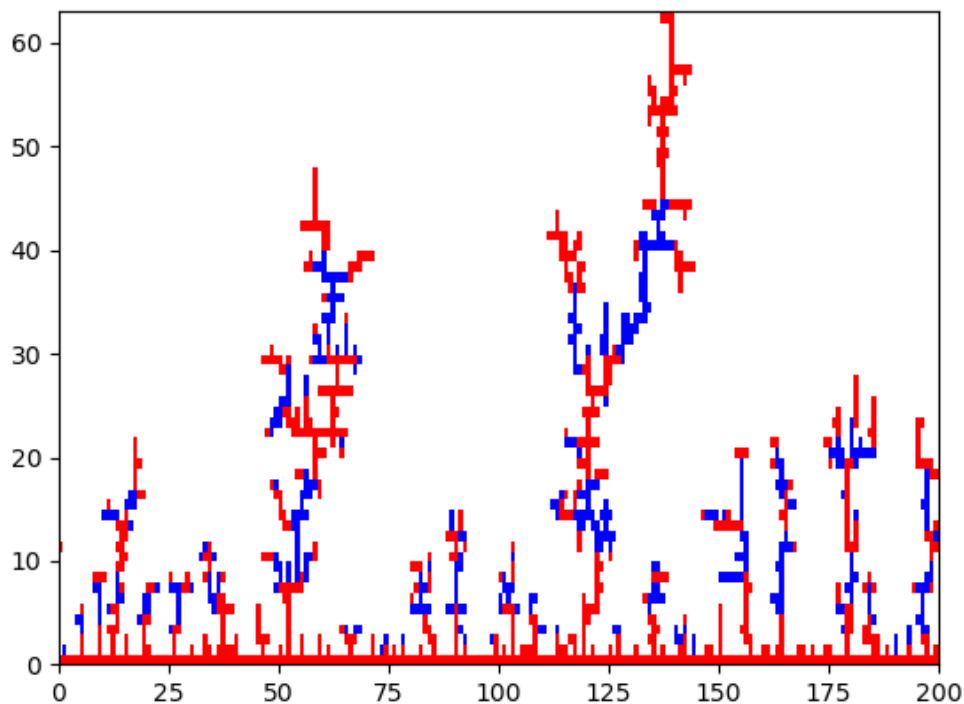
۵ نمودار  $\langle r^2 \rangle$  بر حسب زمان را می بینید. همانطور که می بینید رابطه ۵ درست می باشد. شیب خطوط شکل ۵ بیانگر  $2D$  می باشد.

$$\sigma^2 = 2Dt \quad (۵)$$



شکل ۶: نمودار  $\langle r^2 \rangle$  بر حسب زمان. هر نقطه بر روی ۱۰۰۰۰۰ ذره میانگین گیری شده است.



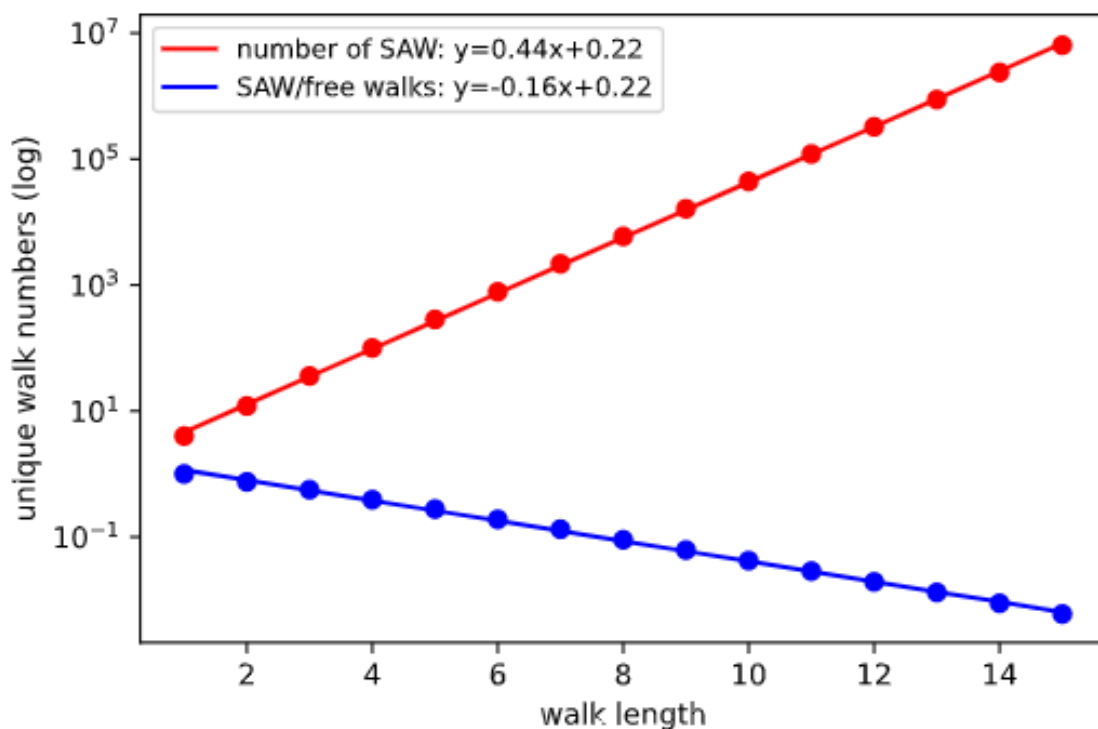


شکل ۷: مدل پخش فرآیند محدود برای لایه ای به طول ۲۰۰ و ۱۰۰۰ ذره. رنگ ذرات هر ۲۰۰ ذره تغییر کرده است. شرایط مرزی نیز تناوبی می باشد.

## ۷ پخش تجمع محدود

در این تمرین می خواهیم مدل پخش تجمع محدود<sup>۲</sup> را بررسی کنیم. برای این کار از برنامه ی ولگشت دوبعدی استفاده می کنیم و ذراتی را که مختصات  $x$  آنها بصورت تصادفی می باشند را رها می کنیم و اجازه می دهیم ولگشت دوبعدی انجام دهند. برای آنکه سرعت برنامه بیشتر شود خوشه ی با بیشترین ارتفاع را در هر مرحله پیدا می کنیم و ذره ها را با فاصله ی ۳ از این خوشه رها می کنیم. همچنین یک مرز بالایی با فاصله ی ۵ از مرز پایینی قرار می دهیم که اگر ذره از آنجا فراتر رفت آن ذره را در نظر نمی گیریم و ذره ای جدید را رها می کنیم. شکل ۶ خوشه ی تشکیل شده را برای ۱۰۰۰ ذره نشان می دهد.

<sup>۲</sup>Aggregation limited Diffusion



شکل ۸: نمودار تعداد گشت ها بر حسب طول گشت. مقیاس محور عمودی لگاریتمی می باشد. خط آبی بیانگر نسبت تعداد گشت های خودپرهیز به کل گشت های ممکن می باشد.

## ۸ ولگشت خودپرهیز

در این تمرین می خواهیم ولگشت خود پرهیز را شبیه سازی کنیم و تعداد این ولگشت ها را به ازای طول های مختلف قدم ها بدست آوریم. برای این کار از الگوریتم بازگشتی استفاده می کنیم. در این الگوریتم یک تابع تعریف می کنیم که ورودی های آن مختصه ی خانه ای است که در آن قرار داریم و تعداد قدم های باقی مانده. ابتدا تعداد قدم های باقی مانده را بررسی می کنیم اگر این مقدار صفر بود بدان معناست که توانسته ایم یک ولگشت خودپرهیز با تعداد قدم های مورد نظر پیدا کنیم و اگر این مقدار غیر صفر بود بدان معناست که هنوز تعدادی قدم وجود دارد که باید برداریم. برای بررسی تمام حالت های ممکن، این تابع را چهار بار برای چهار همسایه ی خانه ی مورد نظر صدا می زنیم. اگر این همسایه مقدارش صفر بود آن را یک می کنیم و این کار را ادامه می دهیم تا تمام گشت های ممکن را بیابیم. در شکل ۷ نمودار تعداد گشت ها بر حسب طول گشت را می بینید.