شبیه سازی رایانه ای در فیزیک
تمرین ۲

علی ستاره کوکب
شماره دانشجویی:۹۵۱۰۰۴۹۱

۲۶ مهر ۱۳۹۹

۱ مقدمه

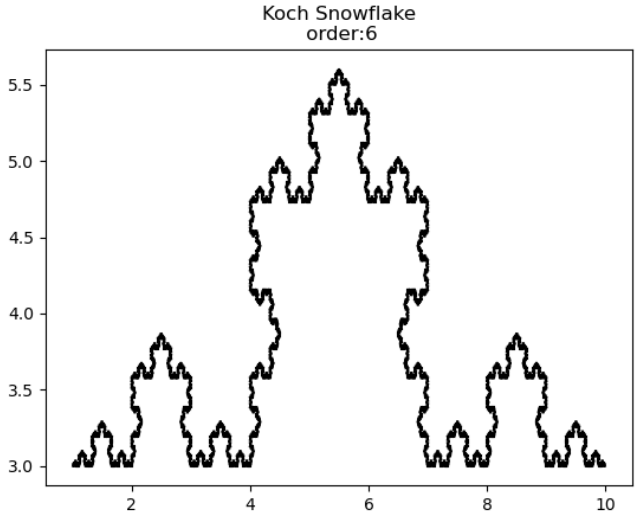
در این سری از تمرین ها می خواهیم به بررسی فرکتال ها و تولید دو فرکتال معروف برف دانه کخ[۱] و مثلث سرپینسکی[۲] بپردازیم. در ادامه نیز مدل های مختلف لایه نشانی را بررسی خواهیم کرد.

۲ مجموعه کخ

هدف از این برنامه تولید مجموعه کخ و نشان دادن مراحل مختلف آن می باشد. الگوریتمی که برای اجرای این برنامه بکار برده شده است استفاده از روش بازگشتی می باشد. در این روش با صدا زدن یک تابع در خودش مراحل مختلف انجام می شود. تابع fractal در کد ارائه شده وظیفه ی اصلی انجام مراحل را دارد. ورودی های این تابع شامل نقطه ی آغاز، پایان و مرتبه ای است که می خواهیم این فرکتال را ببینیم. داخل این تابع چهار بار این تابع را در خود صدا می زنیم. این چهار مرتبه از آن جهت است که کشیدن این شکل از چهار مرحله تشکیل شده است. در مرحله ی اول نقطه ی پایانی را به اندازه ۲/۳ طول پاره خط به سمت نقطه ی ابتدایی حرکت می دهیم. در مرحله ی دوم، نقطه ی ابتدایی را به اندازه ی ۲/۳ طول پاره خط به سمت نقطه ی پایانی حرکت می دهیم. در مرحله ی سوم نقطه ی ابتدایی را به اندازه ی ۱/۳ طول پاره خط به سمت نقطه ی پایانی حرکت می دهیم و نقطه ی انتهایی را به اندازه ی ۶۰ درجه پادساعتگرد دوران می دهیم. در مرحله چهارم و آخر نیز همین کار را این بار برای دوران ساعتگرد انجام می دهیم. در هر مرحله که این تابع را در خود صدا می زنیم یک واحد از مرتبه ی فرکتال کم

[۱] Koch snowflake
[۲] Sierpiński triangle

می کنیم و این کار را تا آنجا ادامه می دهیم که مرتبه صفر شود و در نهایت دو نقطه ی بدست آمده را به یک دیگر وصل می کنیم. شکل نهایی را در شکل ۱ می بینید. لازم بذکر است که



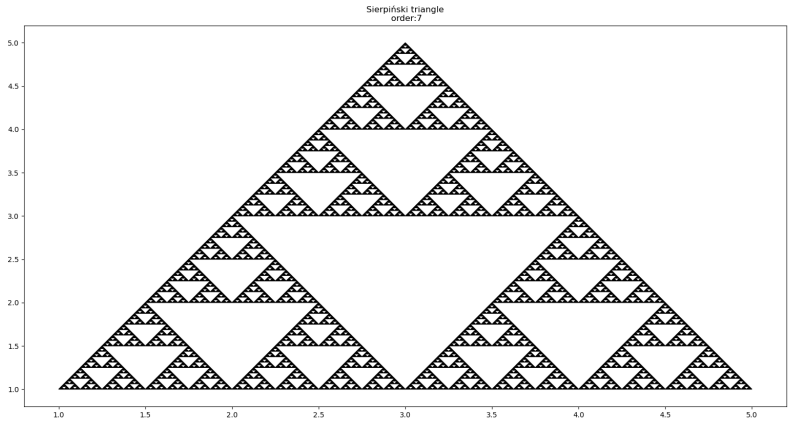
شکل ۱: مجموعه کخ مرتبه ۶

در کد اصلی تمام مراحل شکل گیری بصورت پیوسته نمایش داده می شوند. همچنین می توان با تغییر متغیر order مراتب مختلف مجموعه کخ را بدست آورد.

۳ مثلث سرپینسکی

در این تمرین می خواهیم فرکتال مثلث سرپینسکی را بدست آوریم. الگوریتم استفاده شده در اینجا نیز مشابه تمرین قبل، الگوریتم بازگشتی می باشد. ابتدا تابع draw triangle را تعریف می کنیم. این تابع سه نقطه می گیرد و یک مثلث تو پر رسم می کند. تابع اصلی که در اینجا وظیفه ی بدست آوردن فرکتال را دارد تابع fractal می باشد. این تابع سه نقطه به عنوان رئوس مثلث و همچنین مرتبه فرکتال را می گیرد. درون این تابع سه مرتبه خودش را صدا می زنیم. در مرحله ی اول راس بالایی مثلث را به اندازه ی نصف طول ضلع در جهت راس سمت چپ جابجا می کنیم. همچنین راس سمت راست را به اندازه ی نصف طول ضلع به سمت راس سمت چپ جابجا می کنیم. در مرحله ی دوم راس سمت چپ را به اندازه ی نصف طول ضلع به سمت راس بالایی مثلث جابجا می کنیم و راس سمت چپ را نیز به اندازه ی نصف طول ضلع به سمت راس بالایی جابجا می کنیم. در مرحله ی آخر نیز راس سمت چپ را به اندازه ی نصف طول ضلع به سمت راس راست می بریم و راس بالایی را به همین اندازه به سمت راس سمت راست حرکت می دهیم. در هر بار صدا زدن تابع به اندازه ی یک واحد از مرتبه می کاهیم و این کار

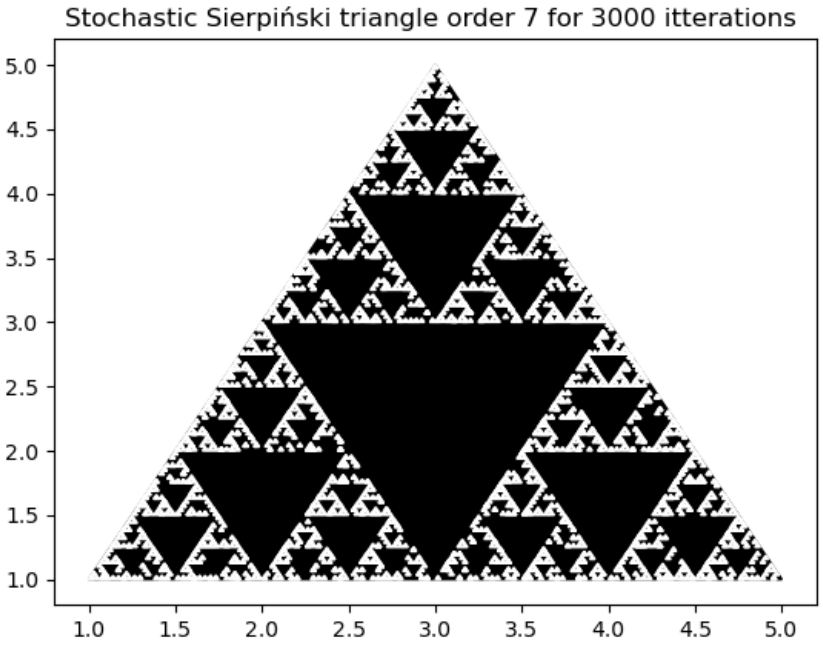
را تا جایی ادامه می دهیم که مرتبه صفر شود و در نهایت با استفاده از تابع draw triangle و سه نقطه ی بدست آمده یک مثلث رسم می کنیم. در شکل ۲ تصویر مثلث سرپینسکی را می بینید.



شکل ۲: مثلث سرپینسکی مرتبه ۷

۴ مثلث سرپینسکی (الگوریتم تصادفی)

در این تمرین می خواهیم مثلث سرپینسکی را این بار با استفاده از الگوریتم تصادفی بدست آوریم. همان طور که می دانیم، در طبیعت ساختار های خودشبیه بسیاری می توان یافت اما این ساختار ها بر خلاف فرکتال هایی که در دو تمرین قبل و سایر فرکتال هایی که بصورت ریاضی تعریف می شوند، هر قسمت دقیقا مشابه سایر قسمت ها نیست بلکه ویژگی های آماری در مقیاس های متفاوت یکسان است. انگیزه ی اصلی نیز در تولید فرکتال ها با استفاده از الگوریتم تصادفی (برخلاف الگوریتم تعینی مثال قبل) آن است که فرکتال هایی را بسازیم که به سیستم های طبیعی شبیه تر می باشند.
کلیت کدی که برای این قسمت بکار برده شده است مشابه تمرین قبل می باشد با این تفاوت که یک عدد تصادفی در هر مرحله تعیین می کند که کدام یک از سه مرحله ی گفته شده در تمرین قبل باید صورت بگیرد. بدین ترتیب توالی انجام این سه عمل بصورت تصادفی می باشد و این باعث می شود که نظم کاملی که در شکل ۲ توسط الگوریتم تعینی بدست آمده است را در اینجا نبینیم. البته اگر به مقدار کافی به برنامه اجازه دهیم تا اجرا شود، شکل نهایی بسیار شبیه شکل بدست آمده توسط الگوریتم تعینی خواهد بود. در شکل ۳ حاصل این الگوریتم را می بینید.

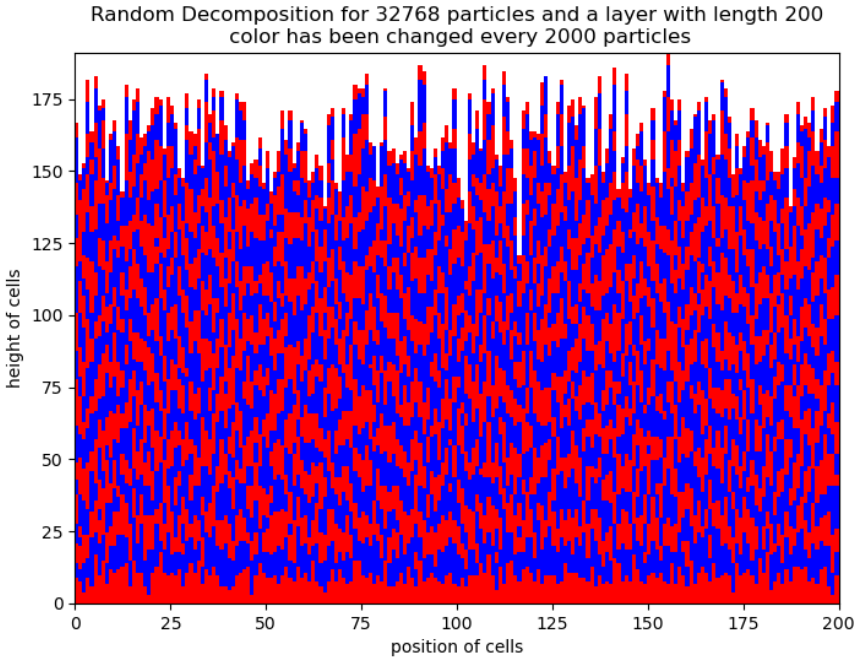


شکل ۳: مثلث سرپینسکی مرتبه ۷ با استفاده از الگوریتم تصادفی پس از ۳۰۰۰ مرتبه اجرا

همان طور که دیده می شود قسمت هایی از شکل با الگوریتم تعینی تفاوت دارد. اگر به ازای تعداد مراتب بالاتر برنامه را اجرا کنیم، شکل بدست آمده به شکل الگوریتم تعینی نزدیک تر می شود.

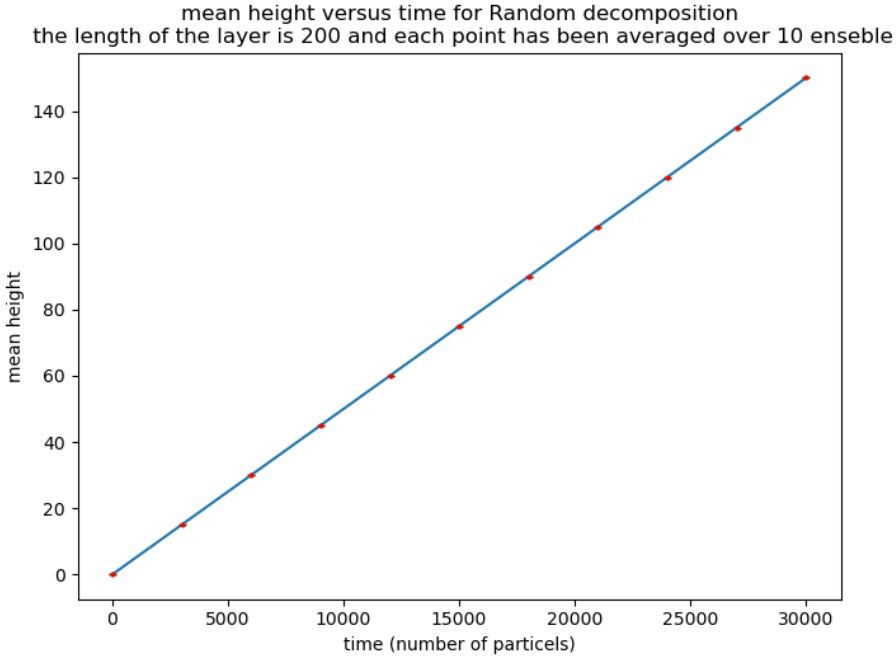
۵ ول نشست[۳]

در این تمرین می خواهیم مدل ولنشست را شبیه سازی کنیم. این مدل بدین صورت است که تعدادی ذره بصورت تصادفی بر روی پاره خطی به طول l می نشینند. برای شبیه سازی این مدل ابتدا یک آرایه به طول l تعریف می کنیم. مقدار اولیه ی تمام خانه ها را در ابتدا صفر قرار می دهیم. سپس در داخل یک حلقه با استفاده از عدد تصادفی تولید شده توسط کامپیوتر یک خانه از این آرایه را انتخاب می کنیم و مقدار آن را به اندازه یک واحد زیاد می کنیم. این حلقه را به تعداد ذرات تکرار می کنیم. برای کشیدن شکل از pcolormesh استفاده می کنیم. برای استفاده از این تابع، صفحه ی مربعی که قرار است شکل در آن ترسیم شود را با یک ماتریس متناظر می کنیم. کد این تمرین از دو تابع تشکیل شده است. یک تابع تنها برای خروجی گرافیکی و مطمئن شدن از اینکه الگوریتم بکار برده شده به درستی کار می کند و یک تابع دیگر برای گرفتن خروجی های عددی. لازم بذکر است که هنگام گرفتن خروجی های عددی برای بالا رفتن سرعت برنامه، تابع گرافیکی فراخوانده نمی شود. در شکل ۴ حاصل نهایی این کار را می بینید. برای آنکه فرآیند کار بهتر نمایان باشد هر 10*l رنگ ذرات را تغییر می دهیم. یکی



شکل ۴: ولنشست برای لایه ای به طول ۲۰۰ و تعداد ذرات ۳۲۷۶۸. هر ۲۰۰۰ ذره رنگ تغییر کرده است.

[۳] Random decomposition



شکل ۵: نمودار میانگین ارتفاع برحسب زمان برای مدل ولگشت. هر نقطه حاصل میانگین گیری رو ی ده آنسامبل می باشد.

از خواص آماری این سیستم میانگین ارتفاع و ناهمواری می باشد. در شکل ۵ نمودار میانگین ارتفاع نسبت به زمان را می بینید. همان طور که انتظار داریم میانگین ارتفاع با زمان بصورت خطی افزایش می یابد. بصورت تحلیلی برای یافتن میانگین ارتفاع خواهیم داشت:

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} h_{it} = \frac{t}{L} \sim t \qquad (۱)$$

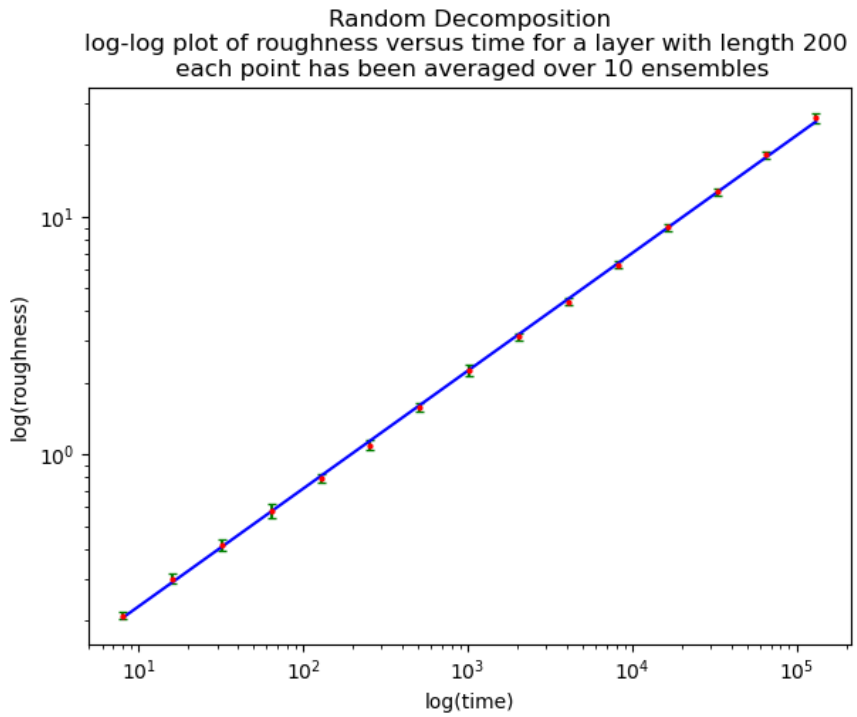
تساوی آخر از آن جهت است که در این جا فرض براین است که در هر واحد زمان یک ذره بر روی پاره خط می نشیند. به عبارت دیگر، تعداد ذرات با زمان برابر است.
پارامتر دیگری که باید بررسی کنیم، ناهمواری می باشد. بنابر تعریف، ناهمواری عبارت است از انحراف معیار استاندارد[۴] ارتفاع. برای محاسبه ی این کمیت از تابع numpy.std استفاده می کنیم. می توان نشان داد که ناهمواری با زمان به شکل زیر با رابطه دارد:

$$w(t) \sim t^{\beta} \qquad (۲)$$

[۴] standard deviation

به پارامتر β نمای رشد دینامیکی می گویند. برای آنکه این نما را بدست بیاوریم لازم است که از دو طرف رابطه ی ۲ لگاریتم بگیریم و شیب خط را یه عنوان مقدار β گزارش دهیم. در شکل ۶ نمودار لگاریتمی ناهمواری برحسب زمان را می بینید. برای آنکه خطای این عدد را بدست بیاوریم، لازم است که برنامه را چند بار اجرا کرده و انحراف از میانگین β های بدست آمده را به عنوان خطا گزارش کنیم. عددی که برای β و خطای آن بدست میاوریم بصورت زیر است.

$$\beta_{RD} = 0.4957 \pm 0.0020$$



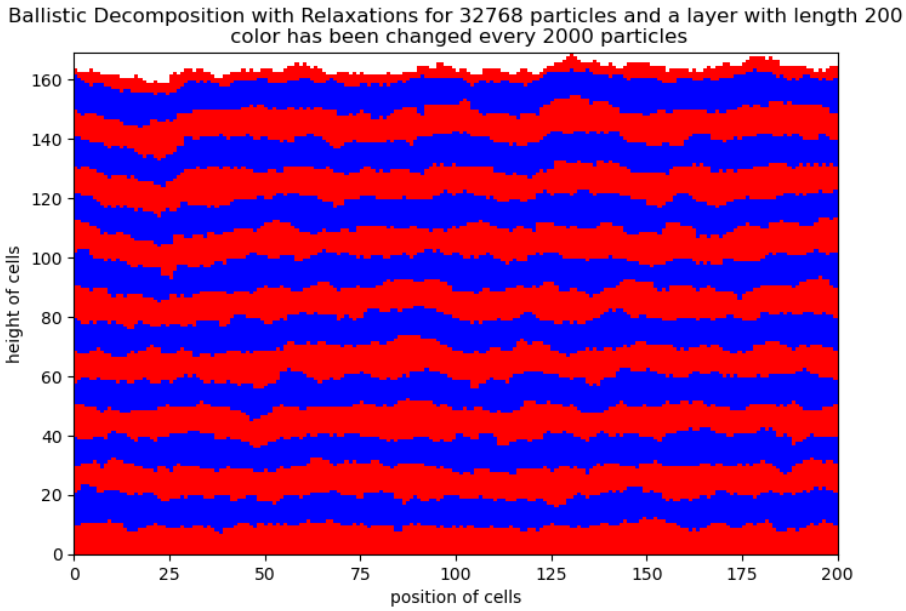
شکل ۶: نمودار ناهمواری برحسب زمان برای مدل ول گشت

۶ پائین نشست[۵]

در این تمرین می خواهیم مدل پائین نشست را شبیه سازی کنیم. تفاوت این مدل با ول نشست در این است که در اینجا هر ذره هنگامی که می خواهد بر نقطه ای روی پاره خط فرود بیاید، به دو همسایه سمت چپ و راست خود نگاه می کند و همسایه ای که ارتفاع آن کمتر است را

[۵] Ballistic Deposition with Relaxation

انتخاب می کند و در آنجا می نشیند. شرایط مرزی که در اینجا می گذاریم، بصورت دوری[۶] می باشد. کلیت کد این تمرین مشابه تمرین پیش می باشد با این تفاوت که برای انتخاب اینکه کدام خانه از آرایه باید به ارتفاعش افزوده شود، از سه شرط در تابع analytical، که وظیفه محاسبات عددی را دارد، استفاده می کنیم. مشابه تمرین قبل، در اینجا نیز یک تابع به نام graphic تعریف می کنیم که وظیفه ی آن دادن خروجی گرافیکی می باشد. هنگامی که از صحت کارکرد الگوریتم اطمینان حاصل کردیم خروجی گرافیکی را خاموش می کنیم. در شکل ۷ خروجی گرافیکی مدل پائین نشست را می بینید. نمودار میانگین ارتفاع برحسب زمان را برای مدل پائین

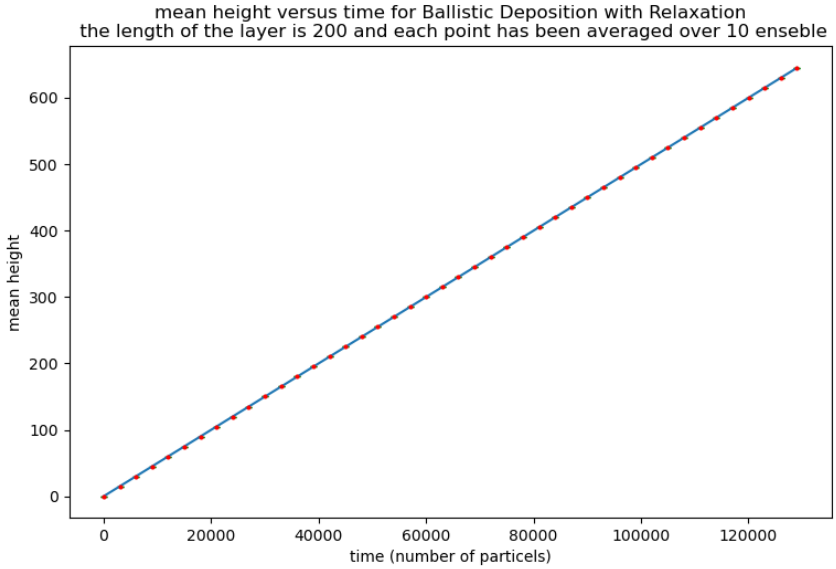


شکل ۷: پائین نشست برای لایه ای به طول ۲۰۰ و ۳۲۷۶۸ ذره. هر ۲۰۰۰ ذره رنگ تغییر کرده است.

نشست را در شکل ۸ می بینید. در گام بعدی پارامتر β را با روش یافتن شیب بهترین خط بدست می آوریم. نکته ای که در اینجا باید به آن توجه کنیم آن است که در این مدل بر خلاف مدل ول نشست ناهمواری تا یک مقدار اشباع پیش می رود و پس از آن دیگر رشد نمی کند و تنها شاهد نوسان ها کوچک در شکل ۸ نمودار تمام لگاریتمی ناهمواری بر حسب زمان را می بینید. خواهیم بود نمای رشد دینامیکی برای این مدل برابر عدد زیر می باشد:

$$\beta_{BDWR} = 0.2606 \pm 0.0088$$

[۶] periodic



شکل ۸: نمودار میانگین ارتفاع برحسب زمان برای مدل پائین نشست

پارامتر z بیان کننده ی رابطه ی بین زمان اشباع و طول زیرلایه می باشد. این رابطه بصورت زیر است:

$$t_s \sim L^z \tag{۳}$$

با توجه به این رابطه برای یافتن z کافی است برای طول زیر لایه های مختلف زمان اشباع را بیابیم و نمودار لگاریتمی زمان اشباع بر حسب طول زیر لایه را رسم کرده و شیب خط را به عنوان مقدار z گزارش دهیم. در شکل ۹ این نمودار را می بینید.

برای بدست آوردن مقدار خطای این عبارت برنامه را چندین مرتبه اجرا کرده و میانگین نتایج را به عنوان مقدار z و انحراف از معیار را به عنوان خطا معرفی می کنیم:

$$z_{BDWR} = 2.8890 \pm 0.01$$

می دانیم α، β و z بصورت زیر با یکدیگر رابطه دارند:

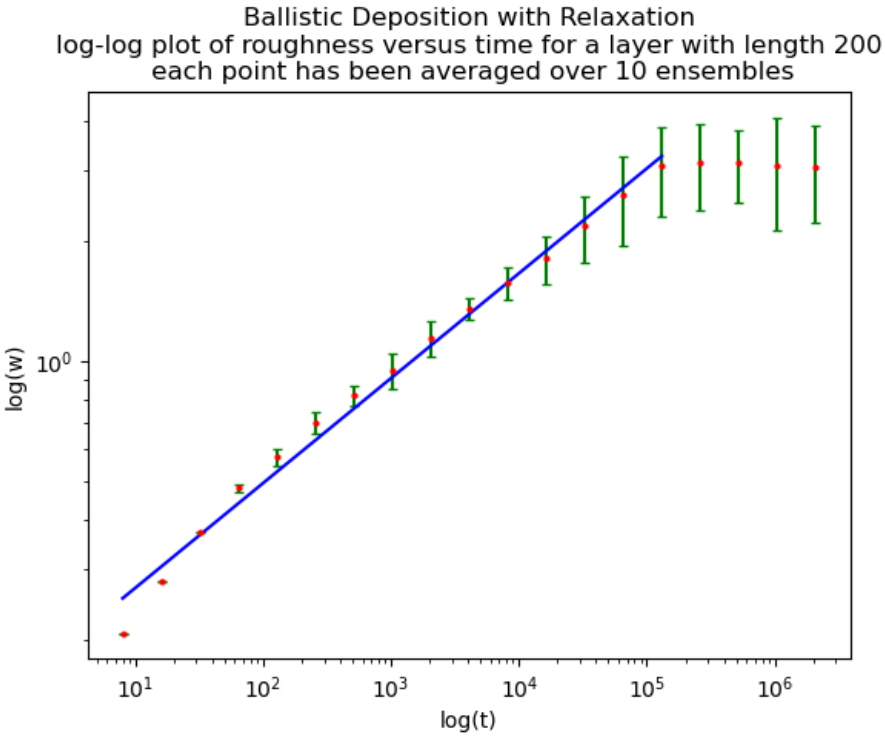
$$\alpha = z\beta \tag{۴}$$

بنابراین خواهیم داشت:

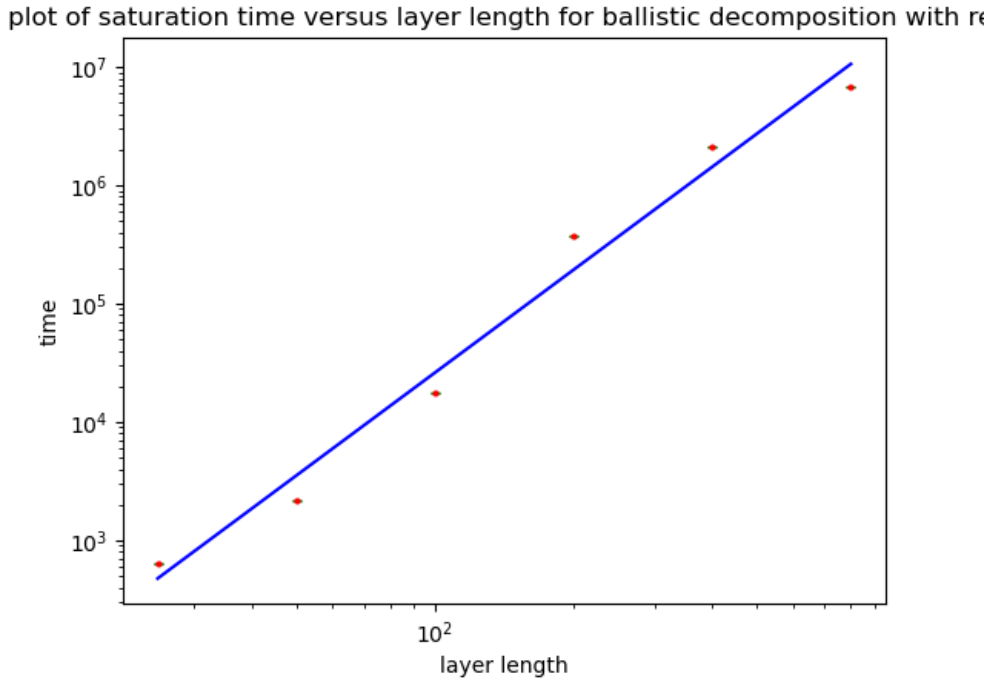
$$\alpha_{BDWR} = 0.7528 \pm 0.028$$

۷ کنار نشست

در این تمرین می خواهیم مدل کنار نشست را شبیه سازی کنیم. تفاوت این مدل با ول نشست در این است که در اینجا هر ذره هنگامی که می خواهد بر نقطه ای روی پاره خط فرود بیاید،

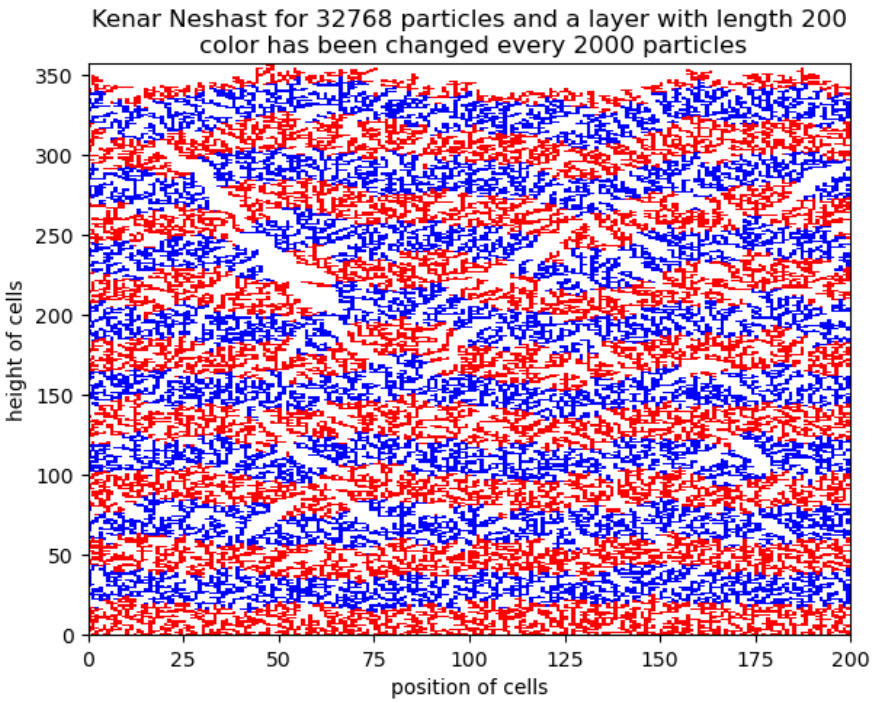


شکل ۹: نمودار لگاریتمی ناهمواری برحسب زمان برای مدل ول نشست. معادله ی خط $0.2632x - 0.8333$ می باشد. زمان اشباع برابر 65536 می باشد.



شکل ۱۰: نمودار زمان اشباع برحسب طول زیر لایه برای پائین نشست. معادله ی خط برابر $2.983x - 1.558$ می باشد. هر نقطه حاصل میانگین گیری روی ده آنسامبل می باشد.

به دو همسایه سمت چپ و راست خود نگاه می کند و همسایه ای که ارتفاع آن بیشتر است را انتخاب می کند و از کنار به آن می چسبد و اگر ارتفاع خود آن خانه از همسایه ها بیشتر بود یا به همان اندازه بود، روی همان خانه فرود می آید. شرایط مرزی که در اینجا می گذاریم، بصورت دوری می باشد. برای انتخاب اینکه کدام خانه از آرایه باید به ارتفاعش افزوده شود، از سه شرط در تابع analytical، که وظیفه محاسبات عددی را دارد، استفاده می کنیم. مشابه تمرین قبل، در اینجا نیز یک تابع به نام graphic تعریف می کنیم که وظیفه ی آن دادن خروجی گرافیکی می باشد. هنگامی که از صحت کارکرد الگوریتم اطمینان حاصل کردیم خروجی گرافیکی را خاموش می کنیم. در شکل ۱۰خروجی گرافیکی مدل کنارنشست را می بینید.
در شکل ۱۲ تمودار میانگین ارتفاع برحسب زمان را می بینید. در گام بعدی پارامتر β را با

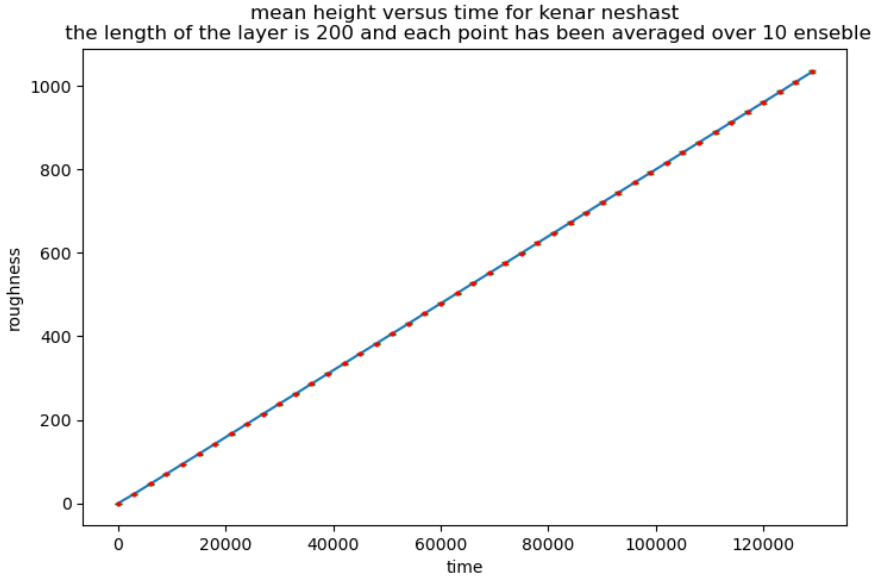


شکل ۱۱: کنار نشست برای لایه ای به طول ۲۰۰ و ۳۲۷۶۸ ذره. هر ۲۰۰۰ ذره رنگ تغییر کرده است.

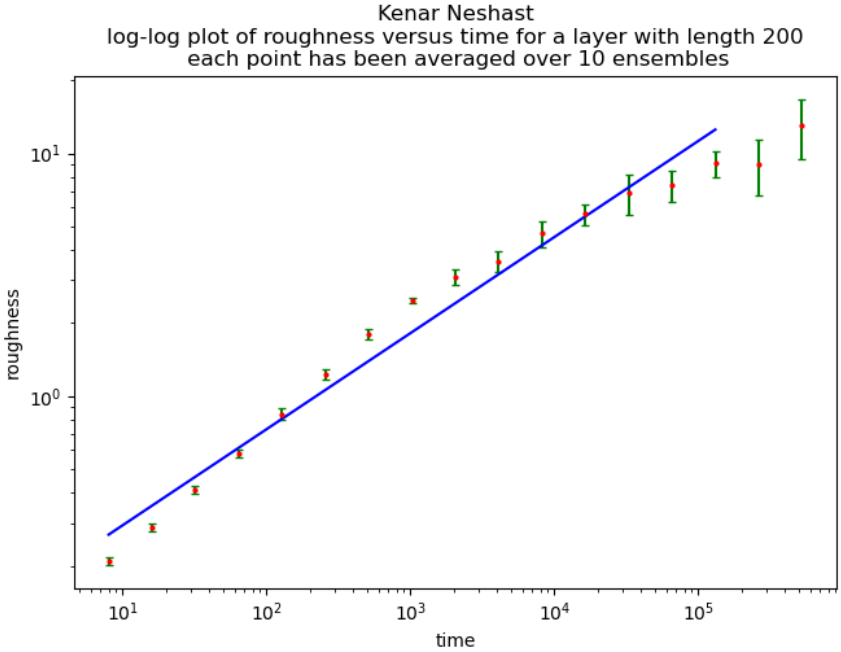
روش یافتن شیب بهترین خط بدست می آوریم. در شکل ۱۱ نمودار تمام لگاریتمی ناهمواری بر حسب زمان را می بینید. نمای رشد دینامیکی برای این مدل برابر عدد زیر می باشد:

$$\beta_{kenar} = 0.3961 \pm 0.0071$$

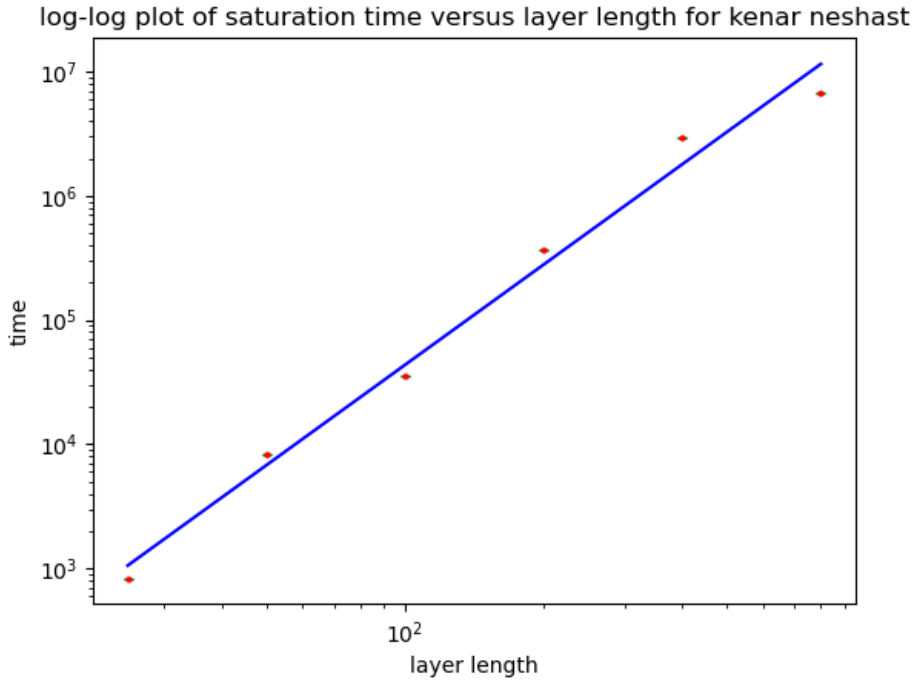
برای مدل کنار نشست مقدار z برابر است با:



شکل ۱۲: نمودار میانگین ارتفاع برحسب زمان برای مدل کنارنشست



شکل ۱۳: نمودار ناهمواری برحسب زمان برای مدل کنار نشست. معادله ی خط برابر $0.3954x - 0.9263$ می باشد. در این نمودار هر نقطه حاصل میانگین گیری بر روی ده آنسامبل می باشد.



شکل ۱۴: نمودار زمان اشباع برحسب طول زیرلایه برای مدل کنار نشست. معادله خط برابر $2.683x - 0.7273$ می باشد. هر نقطه بر روی ده آنسامبل میانگین گیری شده است.

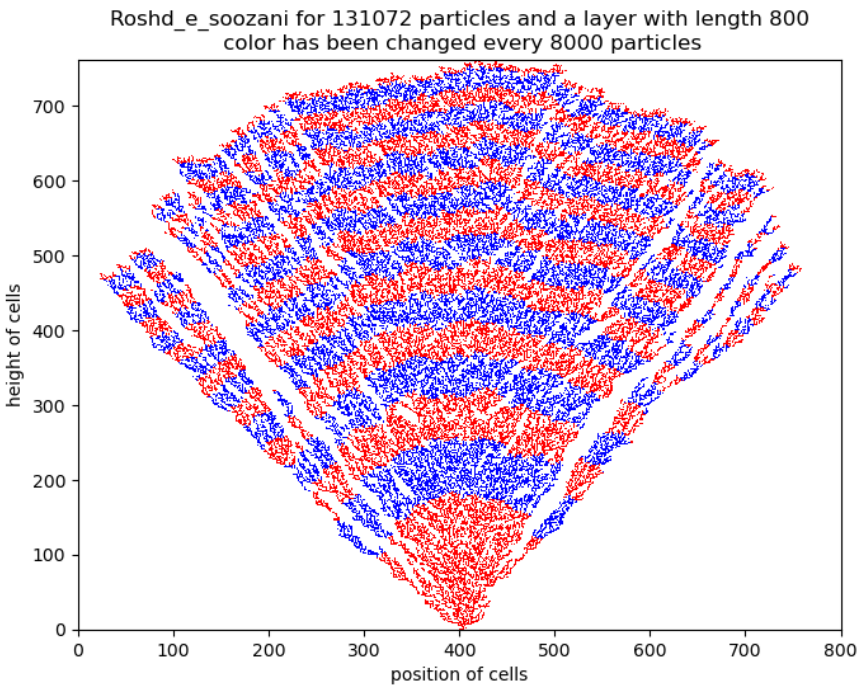
$$z_{kenar} = 2.591 \pm 0.002$$

با توجه به این مقدار و با استفاده از رابطه ی ۴ خواهیم داشت:

$$\alpha = 1.026 \pm 0.019$$

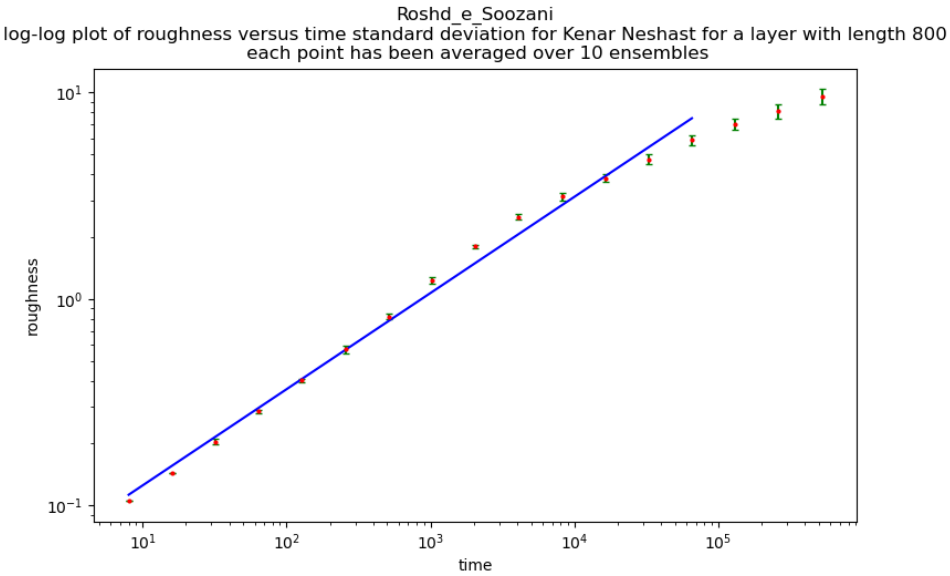
۸ ول نشست رقابتی (رشد سوزنی)

در این تمرین می خواهیم رشد سوزنی را بررسی کنیم. رشد سوزنی حالت خاصی از کنار نشست می باشد که در آن حالت اولیه بدین شکل است که در ابتدا تنها نقطه ی میانی آرایه مقدار دارد و همجنین در این مدل، ذراتی که در مجاورت آنها خانه ی روشن قرار نداشته باشد از برنامه حذف می شود. کلیت کد این قسمت مشابه کنار نشست می باشد بجز آنکه در اینجا حالت اولیه را مطابق آنچه گفته شد قرار می دهیم و همچنین یه شرط می کذاریم که اگر عدد تصادفی تولید شده مربوط به خانه ای بود که در همسایگی آن هنوز دانه ای قرار نگرفته است، آن ذره را نادیده بگیر. در شکل ۱۳ خروجی گرافیکی این مدل را می بینید. در شکل ۱۴ نمودار



شکل ۱۵: شکل گرافیکی رشد سوزنی برای لایه ای به طول ۸۰۰

ناهمواری برحسب زمان را می بینید. هر نقطه بر روی ده آنسامبل میانگین گیری شده است. نمای رشد دینامیکی برای این مدل پس چندین بار اجرای برنامه و بدست آوردن شیب خط و

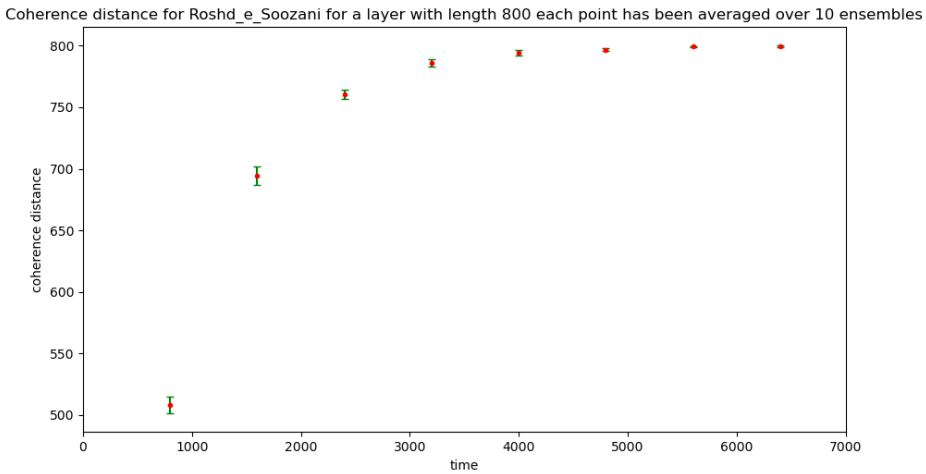


شکل ۱۶: نمودار ناهمواری بر حسب زمان برای مدل رشد سوزنی. معادله خط $0.462x - 1.361$ می باشد.

میانگین گیری برابر مقدار زیر می باشد.

$$\beta_{soozani} = 0.470 \pm 0.001$$

همانطور که دیده می شود این عدد بسیار نزدیک به نمای رشد دینامیکی حالت ول نشست می باشد. در شکل ۱۵ نمودار فاصله دور ترین نقاطی که در سمت چپ و راست بر روی شاخه قرار دارند برحسب زمان را می بینید. به این فاصله، فاصله ی هم بستگی می گویند. همان طور که انتظار داشتیم و در شکل ۱۵ نیز مشخص است، طول هم بستگی طی زمان تا اندازه ی زیر لایه افزایش می یابد و در نهایت متوقف می شود.



شکل ۱۷: نمودار فاصله هم بستگی بر حسب زمان برای رشد سوزنی