شبیه سازی رایانه ای در فیزیک
تمرین ۸

علی ستاره کوکب
شماره دانشجویی: ۹۵۱۰۰۴۹۱

۲ دی ۱۳۹۹

۱ مقدمه

در این سری از تمرین ها می خواهیم به روش های مختلف حل عددی معادله ی دیفرانسیل بپردازیم و در آخر به مساله ی نگاشت لجستیک و خواص آن خواهیم پرداخت.

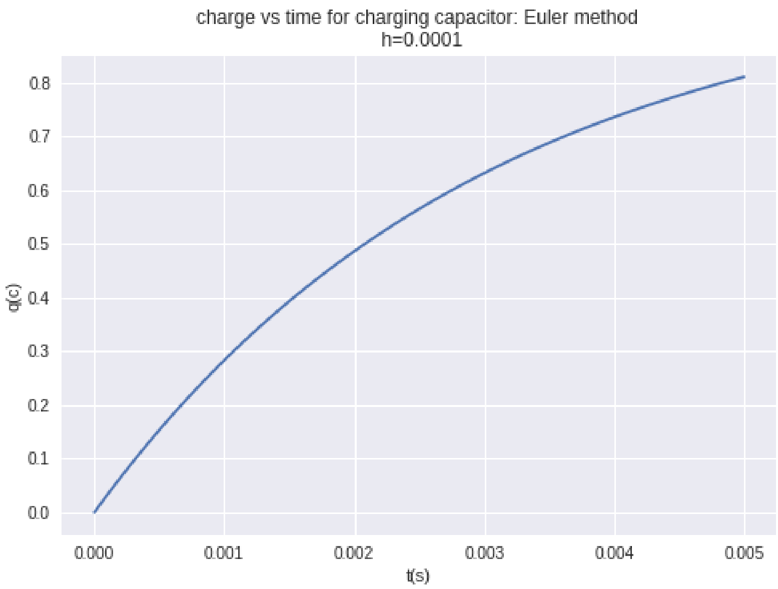
۲ معادله دیفرانسیل مرتبه اول

در این مساله می خواهیم معادله ی دیفرانسیل شارژ خازن را به روش اویلر حل کنیم. در ابتدا کمیت ها را بدون بعد می کنیم. می دانیم زمان مشخصه ی این سیستم RC می باشد؛ بنابراین این کمیت را به عنوان زمان مشخصه ی سیستم می گیریم و زمان بی بعد $\frac{t}{RC}$را τ نام گذاری می کنیم. برای آنکه معادله ساده تر شود نیز $Q - CV$ را به عنوان Q' تعریف می کنیم و در نهایت معادله ای که باید حل کنیم به شکل زیر می باشد.

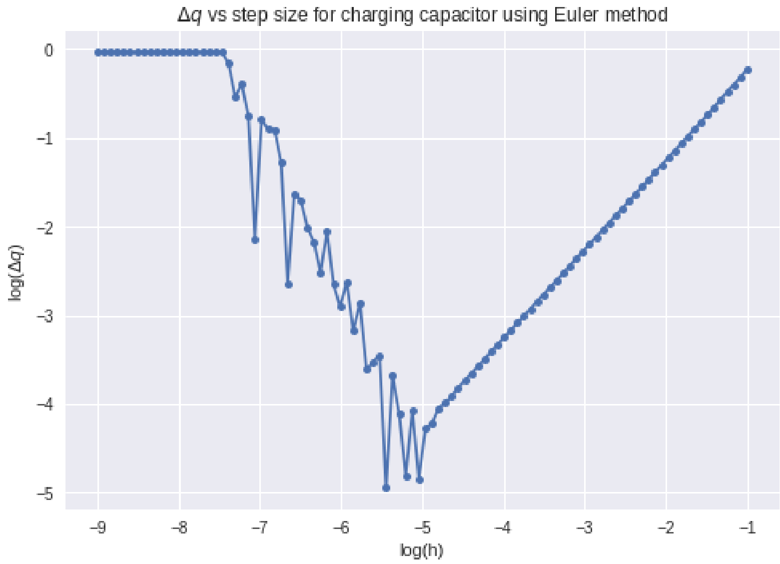
$$\frac{dQ'}{d\tau} = -Q' \qquad (۱)$$

در کد ارائه شده در فایل EX1 ابتدا اکستنشن cython به برنامه اضافه شده است. cython کد های نوشته شده در زبان پایتون را به زبان C تبدیل می کند و کمک می کند تا کد ها با سرعت بیشتری اجرا شوند. در ادامه تابع f تعریف شده که تابعی است که $\frac{dQ}{d\tau}$ را توصیف می کند. بعد از این تابع، تابع g تعریف شده است که برابر با پاسخ تحلیلی این معادله ی دیفرانسیل می باشد. در ادامه تابع firstordereuler تعریف شده که در آن از الگوریتم اویلر برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه ی یک استفاده شده است. این تابع شرایط اولیه، تابع f، اندازه ی گام (h)، زمان شبیه سازی، زمان مشخصه و بازه ی زمانی که در آن ذخیره سازی اعداد صورت می گیرد را می

گیرد. در این تابع داخل حلقه الگوریتم اویلر اجرا می شود در نهایت عدد نهایی با عدد بدست آمده از حل تحلیلی مقایسه می شود و اختلاف این دو به عنوان خطا برگردانده می شود. در متن اصلی برنامه مقادیر مقاومت، خازن و و ولتاژ و زمان شبیه سازی در واحد های SI تعریف شده است. لیست H لیستی از مقادیر مختلف اندازه ی گام می باشد که داخل حلقه ای به ازای این مقادیر مختلف، معادله دیفرانسیل را حل می کنیم و خطا ی آن در مقایسه با حل تحلیلی را در یک نمودار رسم می کنیم که در شکل ۲ آن را می بینید. در این لیست طول گام از 10^{-1} تا 10^{-9} را با 100 عدد جاروب می کنیم. همانطور که انتظار داریم چون مرتبه ی الگوریتم اویلر یک می باشد با کوچکتر کردن گام، خطای الگوریتم کم می شود و از حدود 10^{-5} خطا به علت گرد کردن اعداد دوباره زیاد می شود.



شکل ۱: نمودار بار برحسب زمان برای معادله ی شارژ خازن با استفاده از الگوریتم اویلر



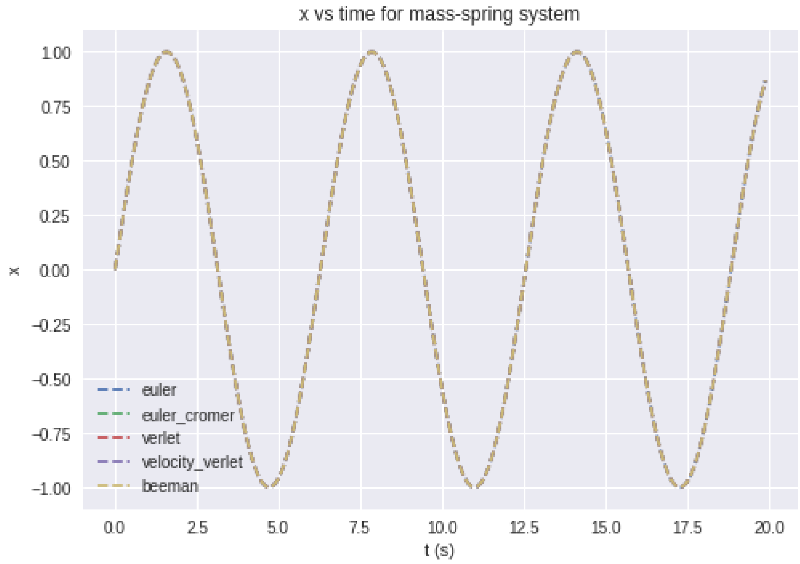
شکل ۲: نمودار خطا برحسب طول گام برای الگوریتم اویلر

۳ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

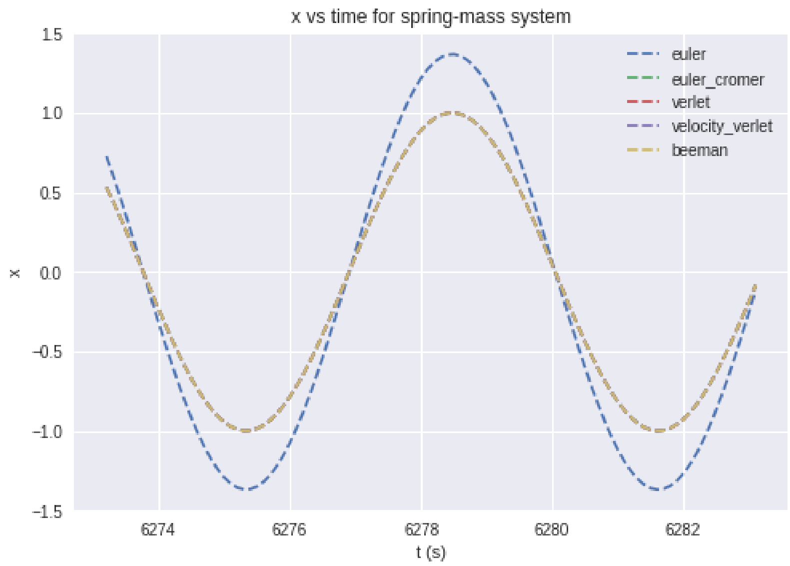
در این تمرین می خواهیم معادله ی دیفرانسیل سیستم جرم و فنر را با الگوریتم های مختلف حل کنیم. هر کدام از الگوریتم های گفته شده در صورت سوال در یک تابع جداگانه در فایل EX2 تعریف شده اند. تمام این توابع، جرم، ثابت فنر، گام زمانی، شرایط اولیه و بازه زمانی نمونه گیری برای رسم نمودار و تابع f را به عنوان ورودی می گیرند و لیستی از مکان ها و سرعت ها را بر می گردانند. نکته ای که باید به آن توجه کنیم آن است که در الگوریتم های ورله[1] و بیمن[2] از آنجا که برای بدست آوردن مکان در هر مرحله به مکان در مرحله ی قبل و دو مرحله ی قبل نیاز است، با داشتن شرایط اولیه نمی توان این دو الگوریتم را شروع کرد و باید در یک زمان بعد هم مکان و سرعت را بدست آورد که این کار با انجام یک مرحله الگوریتم اویلر صورت گرفته است. در قسمت اصلی کد مقادیر کمیت های اصلی تعریف شده است.
در این مساله مشابه تمرین قبل زمان مشخصه ی سیستم به عنوان واحد زمان در نظر گرفته شده است و بدین ترتیب معادله دیفرانسیل بی بعد شده است که در تابع f این امر قابل مشاهده است.
در شکل ۳ نمودار مکان برحسب زمان را برای این الگوریتم ها می بینید. برای آنکه ببینیم آیا ناپایداری در این الگوریتم ها وجود دارد یا نه هر الگوریتم را برای 1000 دوره ی تناوب اجرا می کنیم و در شکل ۴ در چند لحظه ی آخر نمودار مکان-زمان را می بینید. همانطور که می

[1] Verlet
[2] Beeman

ببینید تنها الگوریتم اویلر می باشد که دچار ناپایداری شده است. تمام الگوریتم ها با گام زمانی 10^{-4} انجام شده اند.

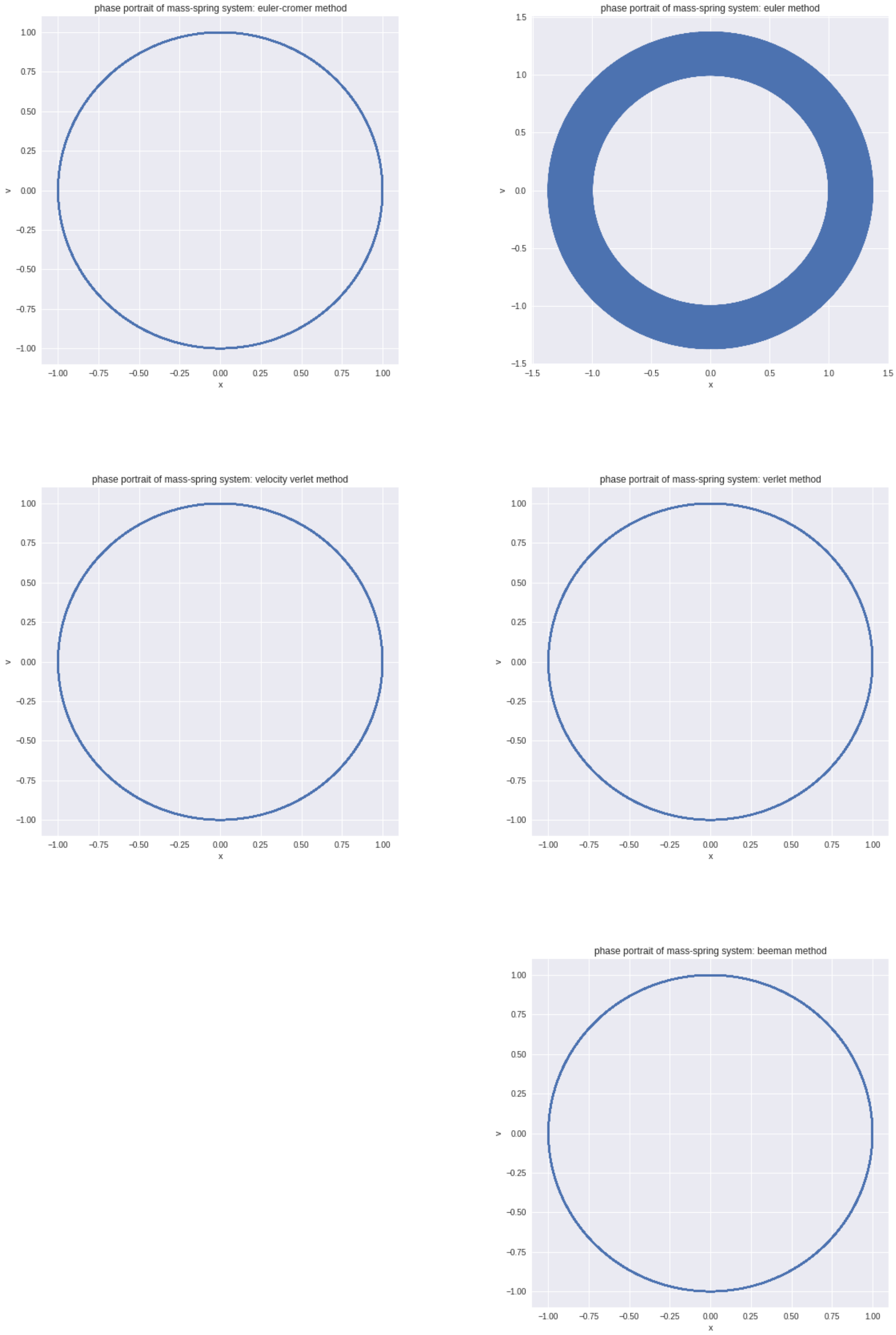


شکل ۳: نمودار مکان برحسب زمان برای سیستم جرم و فنر با استفاده از الگوریتم های مختلف. به علت آنکه الگوریتم ها جواب مشابهی می دهند نمی توان از روی شکل آنها را از یکدیگر تمییز داد.



شکل ۴: نمودار مکان برحسب زمان برای سیستم جرم و فنر پس از ۱۰۰۰ دوره ی تناوب. همانطور که می بینید الگوریتم اویلر پایداری خود را از دست داده است.

برای بررسی برقراری پایستگی انرژی نمودار فاز را برای 1000 دوره ی تناوب این الگوریتم ها رسم می کنیم که در شکل ۶ آن ها را می بینید. همانطور که می بینید تنها در الگوریتم اویلر پایستگی وجود ندارد و بقیه ی الگوریتم ها پایستگی انرژی را نگه می دارند.



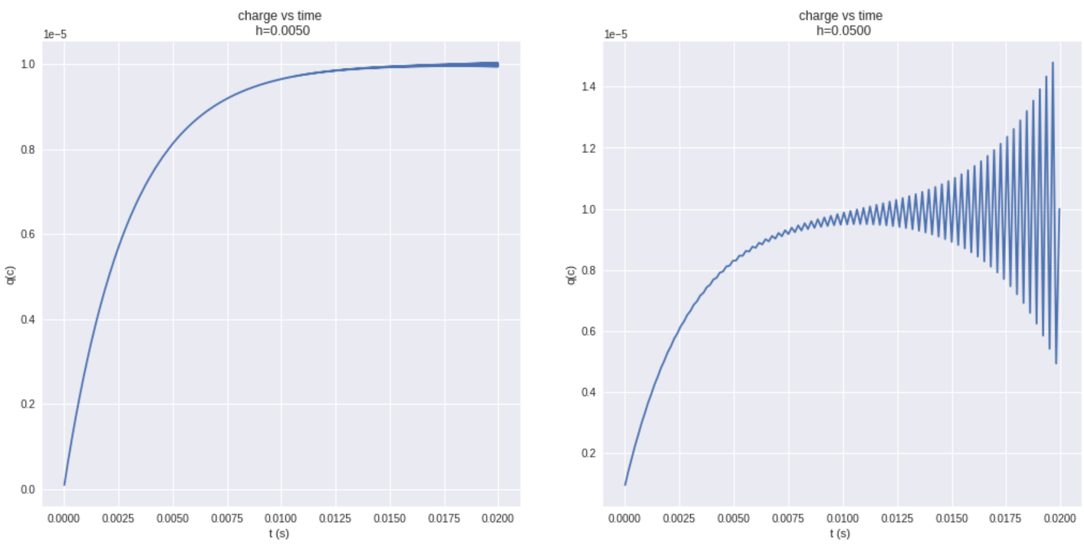
شکل ۵: نمودار فاز سیستم جرم–فنر برای الگوریتم های مختلف

۴ ناپایداری الگوریتم ها

در این تمرین می خواهیم به بررسی پایداری یک الگوریتم ارائه شده برای حل معادله ی دیفرانسیل بپردازیم که در زیر می بینید.

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2\dot{y}_n h \tag{۲}$$

در اینجا نیز مساله ی شارژ خازن را برای حل کردن انتخاب می کنیم. تابع f در کد ارائه شده در فایل EX3 بیانگر تابع تحول می باشد که مشابه تمرین ۱ بدون بعد شده است. در تابع first order ODE الگوریتم گفته شده نوشته است. در این جا نیز برای آنکه این الگوریتم در هر مرحله نیاز به داشتن مقادیر دو مرحله قبل دارد ابتدا یک مرحله الگوریتم اویلر را بر روی شرط اولیه اجرا می کنیم و با داشتن این دو مقدار الگوریتم را شروع می کنیم و در نهایت لیستی از مقادیر بدست آمده را برای رسم نمودار بر می گردانیم. نمودار بار برحسب زمان را در شکل ۷ می بینید. این شکل با گام زمانی 5×10^{-2} بدست آمده است. همانطور که می بینید جواب بدست آمده از این الگوریتم از جایی به بعد دچار ناپایداری می شود و رفتار نمایی از بین می رود و تبدیل به رفتار نوسانی می شود. دیدن این خطا به اندازه ی گام زمانی نیز بستگی دارد و اگر گام زمانی را کوچکتر کنیم این خطا در همان بازه ی زمانی کوچکتر می شود.



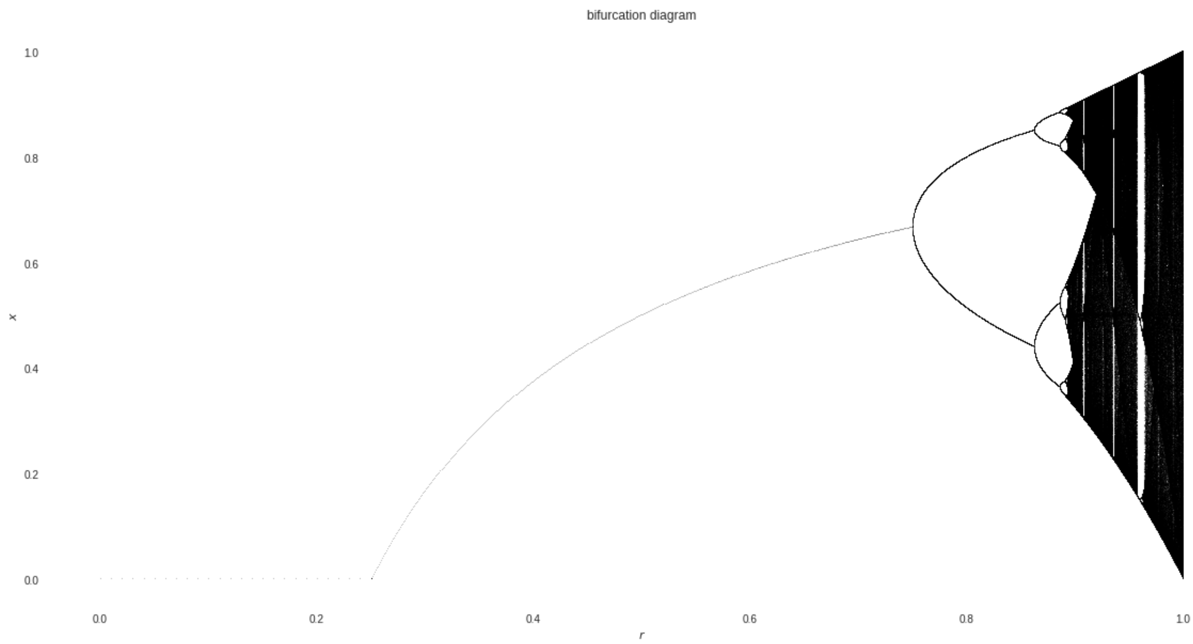
شکل ۶: نمودار بار برحسب زمان با استفاده از الگوریتم ارائه شده برای دو گام زمانی متفاوت

۵ آشوب

در این تمرین می خواهیم نگاشت لجستیک را که در زیر می بینید بررسی کنیم. در فایل EX4 کد این تمرین آمده است. در این کد تابع f نگاشت لجستیک می باشد که در زیر رابطه ی آن را می بینید.

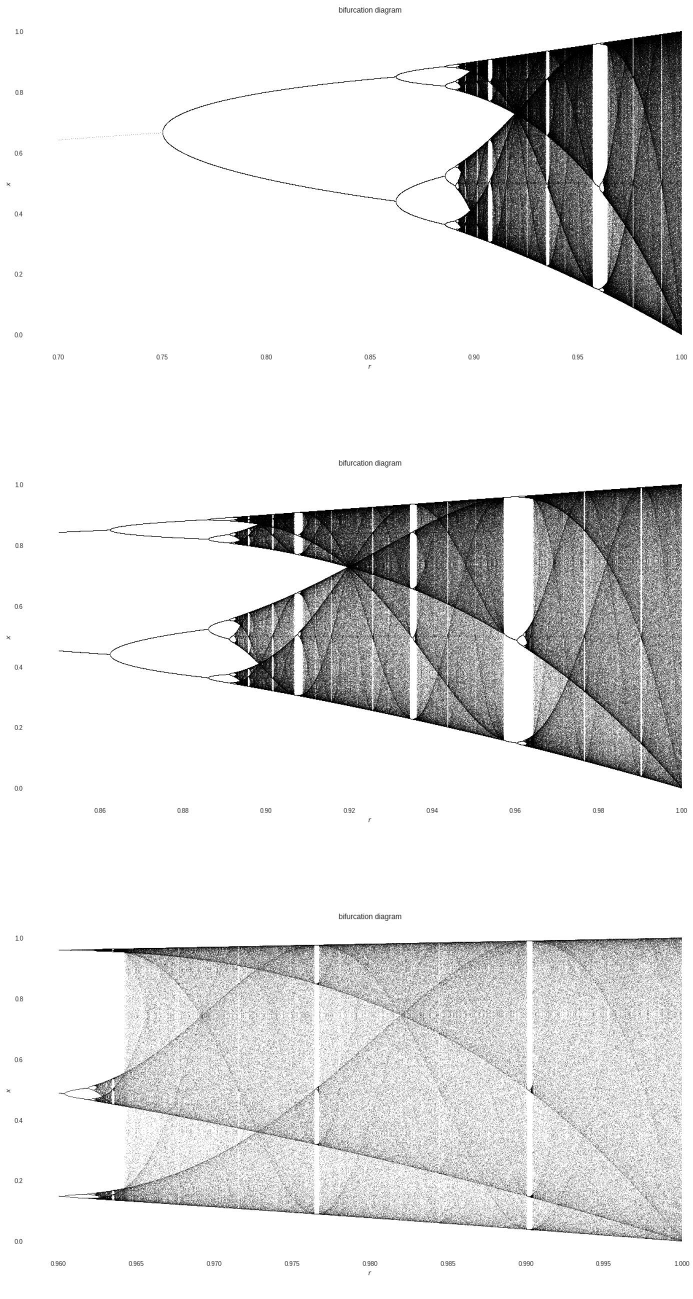
$$x_{n+1} = 4rx_n(1 - x_n) \tag{۳}$$

تابع log تابعی است که این نگشت را به تعداد steps و برای یک r خاص آن را اجرا می کند. برای آنکه نمودار دوشاخگی را بدست آوریم ابتدا باید اجازه دهیم تا سیستم از حالت اولیه خود حرکت کند و به حالت تعادل خود برسد و پس از آنکه به حالت تعادل خود رسید شروع به داده گیری بکنیم. برای آنکه مطمئن شویم که سیستم به حالت تعادل خود رسیده ابتدا تابع log را برای 20000 بار اجرا می کنیم. پس از این تعداد تابع log را با تعداد اجرای 1000 بار صدا می کنیم و داده ها را جمع آوری می کنیم. این کار را برای r های مختلف بین صفر تا یک با قدم های 10^{-5} جاروب می کنیم و تمام داده ها را در یک آرایه ی دوبعدی ذخیره می کنیم. هر ستون از این آرایه مربوط به داده های یک r می باشد. برای رسم نمودار دوشاخگی با توجه به نوع حالت تعادل (نقطه ی ثابت، چرخه دو تایی و غیره) از این 1000 داده ای که برای هر r ذخیره کرده ایم تعدادی داده ی تکراری داریم و برای آنکه نمودار زیباتری داشته باشیم تنها نقاط غیر تکراری را نگه می داریم. برای اینکار داده های هر r را تبدیل به set می کنیم و این داده ها را رسم می کنیم که شکل بدست آمده را در شکل ۷ می بینید.



شکل ۷: نمودار دوشاخگی برای نگاشت لجستیک

برای آنکه درک بهتری از خاصیت فرکتالی این شکل پیدا کنیم در قسمت هایی از این شکل بزرگنمایی می کنیم که حاصل را در شکل ۸ می بینید.



شکل ۸: نمودار دوشاخگی در بازه های مختلف.

برای بدست آوردن نقاط دوشاخگی در یک حلقه بررسی می کنیم. در کدام r اندازه ی این set ها ضریبی از دو می شود و آن r را به عنوان نقطه ی دوشاخگی ذخیره می کنیم. که در

جدول زیر r های بدست آمده را می بینید.

جدول ۱: مقادیری که در آنها دوشاخگی اتفاق می افتد

r	cycle
0.75	2
0.862	4
0.886	8
0.8911	16
0.8921	32

توجه کنید که بدست آوردن این نقاط تا ۵ مرتبه ممکن بود و از آنجا به بعد به علت نزدیک شدن اعداد به یکدیگر عملا تشخیص چرخه ها بسیار سخت می باشد. در همین حلقه شرط می گذاریم که اگر تعداد اعداد متمایز برای یک r از ۱۰۰ تا بیشتر شد این r را به عنوان جایی که آشوب اتفاق می افتد بر گرداند که در زیر عدد بدست آمده را مشاهده می کنید.

$$r_\infty = 0.8925$$

برای یافتن δ نیز طبق رابطه ی ۴ از اعداد بدست آمده در جدول ۱ برای دوشاخگی استفاده می کنیم که مقدار آن را نیز مشاهده می کنید.

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \tag{۴}$$

$$\delta = 4.679$$

برای یافتن مقدار α ابتدا خط $x_m = 0.4895$ را رسم می کنیم و در یک حلقه نقاط تقاطع این خط با نمودار دوشاخگی را بدست می آوریم و از رابطه ی ۵ برای یافتن آلفا استفاده می کنیم:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} \tag{۵}$$

برای یافتن نقاط تلاقی شرط می گذاریم که اگر اختلاف این خط به یک نقطه از نمودار دوشاخگی کمتر از 0.01 شد این نقطه را به عنوان نقطه ی تلاقی در نظر بگیرد. پس از یافتن این نقاط با استفاده از رابطه ی ۵ مقدار α را بدست می آوریم که در زیر می بینید.

$$\alpha = 0.2503$$

دقت کنید که مقادیر بدست آمده برای α و δ تقریبی می باشد با توجه به آنکه برای یافتن مقادیر دقیق باید حد به سمت بینهایت را محاسبه کنیم.