

### مدیریت بهینه کمپین های تبلیغاتی با استفاده از مدل های انتشار اطلاعات SIS و SIR.

على ستاره كوكب<sup>١</sup>، حنانه باقرى ٢ و ريحانه قنبرى ٣

ali.setarehkokab@physics.sharif.edu ، دانشجوی کارشناسی فیزیک دانشگاه صنعتی شریف ، hannane.bagheri@yahoo.com مارشناسی فیزیک دانشگاه صنعتی شریف ، rhnghanbari ۹۶@gmail.com تدانشجوی کارشناسی فیزیک دانشگاه صنعتی شریف ، مارشناسی ناسی بازند ، مارشناسی فیزیک دانشگاه صنعتی شریف ، مارشناسی ناسی بازند ، مارشناسی بازند ،

چکیده: انتقال یک پیام در جامعه با در اختیار داشتن منابع مالی و انسانی محدود از جمله مسائل مهمی است که برگزار کنندگان کمپینهای تبلیغاتی با آن روبرو هستند. این مسائل را می توان مشابه پخش بیماری در جامعه مدلسازی کرد. در این گونه مسائل، هدف انتقال حداکثری پیام با حداقل هزینه است. به عبارت دیگر، این مسائل در زمره مسائل کنترل بهینه قرار می گیرند. در درسمقاله پیشرو، برای دو مدل SIR و SIR در دوحالت نرخ انتقال ثابت و وابسته به زمان تابع کنترل بهینه را با استفاده از روشهای عددی می یابیم. همچنین برتری این کنترل بهینه را نسبت به کنترل ثابت، ابتکاری و حالت بدون کنترل نشان می دهیم.

كلمات كليدى: شيوع اطلاعات، مدل هاى همه گيرى، كنترل بهينه، مدل SIR، مدل SIS

#### ۱ مقدمه

استفاده از شبکه های اجتماعی توسط گردانندگان کمپین های سیاسی و تبلیغاتی روز به روز در حال افزایش است. استفاده از این شبکهها به برگزار کنندگان این کمپینها این اجازه را میدهد تا پیام خود را به گوش جمعیت بسیار بزرگی برسانند. انتقال یک پیام در میان افراد بسیار شبیه انتقال یک بیماری در جامعه میباشد. با این تفاوت که در این مساله هدف برگزار کنندگان کمپین، آلودهسازی هر چه بیشتر افراد جامعه در مدت زمانی محدود میباشد. در اینجا منظور از آلودهکردن یه فرد به معنای رساندن پیام مورد نظر به گوش آن فرد می باشد. از طرفی برگزاری یک کمپین تبلیغاتی نیاز به منابع مالی و انسانی دارد. بابراین هدف یک گردانندهی کمپین آن است که با حداقل منابع پیام خود را به گوش افراد جامعه برساند. به عبارتی این مساله یک مساله بهینهسازی می باشد. در این درسمقاله هدف ما بررسی این مساله میباشد. برای این کار جمعیت مورد بررسی را در سرتاسر این متن بصورت همگن در نظر می گیریم. همچنین دو مکانیزم کلی برای اثرگذاری برگزار کننده کمپین بر جامعه در نظر می گیریم. مکانیزم اول بصورت اثرگذاری مستقیم کمپین بر جامعه می باشد. بدین صورت که برگزارکننده کمپین به هر فرد

پیام را بصورت مستقیم میرساند. مشکل این مکانیزم آن است که این کار نیازمند صرف هزینه زیادی است. به همین علت برگزار کنندگان کمپینها از یک مکانیزم دیگر برای انتقال پیام خود استفاده میکنند و آن انتقال دهان به دهان آ است. در این نوع انتقال، افرادی که پیام تبلیغاتی را دریافت کردهاند با احتمالی این پیام را به افراد دیگر جامعه انتقال می دهند.

در این درسمقاله ما دو مدل SIS و SIR را برای این مساله بررسی کردهایم. هر کدام از این مدلها برای مدلسازی کمپینهای مختلفی کارا هستند. مدل SIS برای مدلسازی کمپینهای سیاسی که هدف آنها تشویق مشارکت مردم در یک گفتمان سیاسی میباشد مناسب است. در این مدل هر فرد پس از دریافت پیام مجددا می تواند پیامی دیگری را دریافت کند. از طرف دیگر مدل SIR برای کمپینهایی مناسب است که افراد پس از دریافت پیام، با گذر زمان اشتیاق خود را در رابطه با آن موضوع از دست می دهند. برای مثال کمپینهای تبلیغاتی فیلمها از این نوع می باشند.

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که انتقال اطلاعات تفاوتهایی

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>word of mouth

با انتقال بیماری دارد. یکی از این تفاوتها در نرخ انتقال اطلاعات (بیماری) است. در بسیاری از مدلهای انتقال بیماری فرض ثابت بودن نرخ انتقال در طول شیوع بیماری فرض نسبتا درستی است اما در مدلسازی انتقال اطلاعات این فرض، فرض چندان معقولی نیست چرا که علاقه افراد به موضوع مورد تبلغ در طول برگزاری یک کمپین دستخوش تغییر می شود. ما این تغییر را با وابسته کردن نرخ اطلاعات به زمان در این در سمقاله بررسی کردهایم.

ترتیب مطالب در این درمسقاله بدین صورت است: در بخش  $\Upsilon$  و  $\Upsilon$  به فرمول بندی ریاضی دو مدل گفته شده پرداخته ایم. بخش  $\Upsilon$  درباره مساله بهینه سازی است. در بخش  $\Gamma$  به بیان نتایج بدست آمده با استفاده از حل عدد اختصاص داده شده است و بخش  $\Gamma$  نتیجه گیری نهایی می باشد.

## ۲ مدل سیستم و فرمول بندی مسئله:همه گیری SIS

در این قسمت به مدلسازی مساله با استفاده از مدل SIS می پردازیم. همانطور که میدانیم در این مدل جمعیت به دو دسته S و I تقسیم می شود که S بیانگر افرادی است که پیام تبلیغاتی به آنها هنوز نرسیده است و I بیانگر افرادی است که پیام تبلیغاتی را دریافت کردهاند. همچنین در این مدل، افراد پس از دریافت پیام می توانند مجددا به گروه S بازگردنند و پیامی دیگر درباره همین موضوع دریافت کنند. این نوع مدلسازی به ویژه برای کمپینهای انتخاباتی که در یک بازهمشخص به فعالیت می پردازند، می توانند مفید واقع شود. آنچه در این مساله برای ما مهت، تعداد نهایی افرادی است که در بازه ی زمانی  $t\leqslant T$  پیام تبلیغاتی را دریافت کرده اند که دراین رابطه T بیانگر کل زمان کمپین می باشد. اگر تعریف کنیم  $s(t)=rac{S(t)}{N}$  و  $s(t)=rac{S(t)}{N}$  که N برابر کل افراد می باشد، آنگاه خواهیم داشت: 1 = s(t) + i(t) = s(t) احتمال انتقال اطلاعات در زمان t را با eta'(t) نشان می دهیم. ما در این مدل از t تقریب میدان متوسط استفاده می کنیم. بدین صورت که در هر زمان هر نفر بطور میانگین با  $k_m$  نفر که بصورت تصادفی انتخاب شده اند در ارتباط است. در نتیجه در هر گام زمانی هر نفر با  $k_m i(t)$  نفر که پیام را دریافت کرده اند در ارتباط است و در نتیجه می تواند پیام تبلیغاتی را با احتمال  $\beta'(t)k_mi(t)dt$  در بازه زمانی dt در بازه زمانی نرخ انتقال اطلاعات برای هر نفر برابر  $\beta'(t)k_m$  است که ما این کمیت را با را دسته S به دسته I را نشان می دهیم. همچنین نرخ انتقال افراد از دسته S به دسته B(t)نیز با  $\gamma$  نشان می دهیم. با این تفاسیر، مدل  $\operatorname{SIS}$  در حد N های بزرگ و با تقریب میدان میانگین بصورت زیر میباشد.

$$\dot{s}(t) = -\beta(t)s(t)i(t) + \gamma i(t)$$

$$\dot{i}(t) = \beta(t)s(t)i(t) - \gamma i(t)$$

j=-i(T)+1تابعی که به دنبال کمینه کردن آن هستیم نیز بصورت کمینه کردن آن میباشد. جمله اول این تابع بیانگر تعداد نهایی دریافت کنندگان پیام میباشد. علامت منفی این جمله بدان خاطر است که

ما مساله را بطورت کمینه سازی تعریف کرده ایم. جمله دوم نیز بیانگر کل هزینه صرف شده برای اداره کمپین تا زمان T است. u نیز یک تابع انتگرال پذیر لبگ می باشد که بیانگر میزان منابع در دسترس در زمان t برای اداره کمپین است. به زبان ریاضی u را بصورت زیر تعریف می کنیم:

#### تعریف ۱.

 $u \in U \triangleq \{u :$  يک تابع انتگرال پذير لبگ است ي <br/>u 0  $\leqslant u(t) \leqslant u_{max}\}$ 

در این تعریف  $u_{max}$  حد بالای توابع موجود در U می باشد. این حد بالا از آن جهت و جود دارد که u عملا میزان منابع در دسترس اداره کنندگان کمپین را مشخص می کند و در دنیای واقعی این منابع محدود هستند. بنابراین مساله ما کمینه کردن j با توجه به معادلات SIS با کنترل می باشد (رابطه u ، u ).

$$min \ j = -i(T) + \int_0^T bu^2(t)dt \tag{Y}$$

$$\begin{split} \dot{s}(t) &= -\beta(t)s(t)i(t) + \gamma i(t) - u(t)s(t) \\ \dot{i}(t) &= \beta(t)s(t)i(t) - \gamma i(t) + u(t)s(t) \\ i(t) &\geqslant 0, s(t) \geqslant 0 \\ i(t) + s(t) &= 1 \\ i(0) &= i_0, s(0) = 1 - i_0 \end{split} \tag{\ref{eq:posteroid}}$$

در این رابطه  $i_0$  بیانگر کسری از جمعیت میباشد که از ابتدا پیام را دریافت کردهاند. دقت کنید که در این مدل، صرفا کنترل مستقیم اداره کنندگان کمپین در نظر گرفته شدهاست که در جمله سوم معادلات  $\pi$ مشاهده می کنید.

# ۳ مدل سیستم و فرمول بندی مسئله:همه گیری SIR

همان طور که میدانیم در مدل SIR یک کلاس R به معنای بهبود یافتگان به مدل اضافه خواهد شد. باتوجه به موضوع مورد نظر ما که بررسی کمپینهای تبلیغاتی است، باید دید که استفاده از مدل SIR در چه شرایطی مناسب است؟

دسته ی R در مدلهایی که بیانگر تبلیغات مربوط به یک کالا یا فیلم هستند خود را نشان می دهد. در این موارد، بخشی از جامعه در مدتی مشخص و به شکل گسترده درگیر تبلیغات می شوند و بعد از مدتی این درگیری یا علاقه نسبت به کالا یا فیلم مورد نظر کاهش یافته و از بین می رود در چنین شرایطی این افراد را در دسته ی R قرار خواهیم داد زیرا نقشی در تبلیغ بیشتر نداشته و از طرفی در مدل فعلی جامعه ی هدف ما نیز نخواهند بود. با توجه به این توضیحات دسته بندی افراد در مدل SIR به شکل زیر است:

S: افرادی که هنوز تبلیغ مورد نظر را ندیدهاند و جامعه هدف ما هستند. I: افرادی که تبلیغ مورد نظر را دیدهاند و نقش موثری در تبلیغ بیشتر نیز

دارند.

R: افرادی که قبلا تبلیغ را دیدهاند و درحال حاضر علاقهشان را نسبت به محصول مورد نظر از دست دادهاند.

همان طور که می دانیم، معادلات مربوط به مدل SIR به شکل زیر است:

$$\begin{split} \dot{s}(t) &= -\beta(t)s(t)i(t) \\ \dot{i}(t) &= \beta(t)s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ \dot{r}(t) &= \gamma i(t) \end{split} \tag{\$}$$

در این مدل صاحبان کمپینها دو روش را برای تبلیغ محصول خود خواهند داشت:

- ۱. در نظر گرفتن افرادی مشخص در جامعه که وظیفه ی تبلیغ را برعهده خواهند داشت  $^{7}$  این افراد با نرخ  $u_1(t)$  تبلیغ را انجام می دهند. این روش همان روش کنترل مستقیم می باشد.
- 7. افرادی که خوشان از کالا استفاده کرده یا فیلم را دیدهاند و اطرافیانشان را به دیدن فیلم یا استفاده از کالا دعوت میکنند. در این صورت درواقع این افراد نرخ انتقال را افزایش میدهند که در معادلات میتوان این پارامتر را به شکل  $\beta(t) + u_2(t)$  اضافه کرد.

 $u_1,u_2$  تواعی پیوسته و انتگرال پذیر هستند که می توانند مقادیر  $u_1,u_2$  تواعی پیوسته و انتگرال پذیر هستند که  $0 < u_1 < u_{1max}$  باتوجه به بیشینه مقداری که کمپین میتواند هزینه کند درنظر گرفته می شود. با در نظر گرفتن پارامترهای جدید، معادلات به شکل زیر خواهند بود:

$$\dot{s}(t) = -(\beta(t) + u_2(t))s(t)i(t) - u_1(t)s(t)$$

$$\dot{i}(t) = (\beta(t) + u_2(t))s(t)i(t) + u_1(t)s(t) - \gamma i(t)$$

$$\dot{r}(t) = \gamma i(t)$$

$$i(t) \ge 0, s(t) \ge 0, r(t) \ge 0$$

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

$$i(0) = i_0, s(0) = 1 - i_0, r(0) = 0$$

مشابه حالت قبل، آنچه که در این مسئله برای ما دارای اهمیت است، پخش حدااکثری پیام با کمترین هزینه میباشد. به همین جهت باید مقدار کمینه زکه به شکل زیر تعریف میشود را به دست آوریم.

$$j = -(r(T) + i(T)) + \int_0^T (bu_1^2(t) + cu_2^2(t))dt \qquad \textbf{(9)}$$

در این رابطه نیز جمله اول بیانگر کسری از کل افراد است که تا در زمان T پیام را دریافت کردهاند. همانطور که دیده می شود، این عبارات هم شامل نفراتی است که در گروه T قرار دارند و هم شامل نفراتی است

# ۴ بررسی مقدار بهینه در همهگیری کنترل شده SIS و SIR

SIR و SIS و مدلهای با مدلهای SIS و اینجا متوجه شدیم که کمپین های تبلیغاتی با مدلهای SIS و SIR و به چه شکل بیان می شوند. اما همانطور که در ابتدا اشاره شد در این درسمقاله، قسمتی از مسئله به بهینه کردن مقدار هزینهای که صاحبان کمپینها برای پیش برد اهداف تبلیغاتی خود می پردازند اختصاص دارد. در بخش  $\Upsilon$ و $\Upsilon$  به دو رابطهی زیر برای مقدار هزینه رسیدیم. هدف ما یافتن کمینه  $\Upsilon$  به ترتیب در رابطهی  $\Upsilon$  برای مدل SIS در رابطهی  $\Upsilon$  برای مدل SIR است.

$$j = -i(t) + \int_0^T bu_1^2(t)dt$$
 (Y)

$$j = -1 + s(t) + \int_0^T (bu_1^2(t) + cu_2^2(t))dt$$
 (A)

می توان نشان داد که مقدار بهینه ای برای این دو رابطه و جود داشته و  $u^*(t)$  این مقدار یکتاست. تابع u(t) که این توابع را کمینه می کند را با  $u^*(t)$  نشان می دهیم. اثبات این ادعا در مقاله اصلی آورده شده است [۱] اما باتوجه به آنکه هدف ما در این پروژه بررسی کمپینها از نگاه همه گیری است، از بیان این اثباتها عبور می کنیم. آنچه که در ادامه برای ما اهمیت دارد یافتن مقدار بهینه باتوجه به مدل مورد نظر است و بررسی تغییرات جمعیت و تغییرات دو پارامتر کنترل  $u_1(t), u_2(t)$  در طول زمان.

با استفاده از روشهای تحلیلی بهینهسازی و استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین  $^*$  [۲] می توان نشان داد که مقدار بهینه  $u_1, u_2$  در شروط زیر صدق می کنند.

SIS:

$$u^{*}(t) = \begin{cases} 0 & if \frac{\lambda^{*}(1-I^{*}(t))}{2b} < 0\\ \frac{\lambda^{*}(1-I^{*}(t))}{2b} & if \ 0 \geqslant \frac{\lambda^{*}(1-I^{*}(t))}{2b} \geqslant u_{max} \end{cases}$$

$$u_{max} & if \frac{\lambda^{*}(1-I^{*}(t))}{2b} > u_{max}$$

$$(9)$$

$$\Rightarrow u^*(t) = \{\min\{\max\{\frac{\lambda^*(t)S^*(t)}{-2b}, 0\}, u_{1max}\}$$

SIR:

که در گروه I قرار دارند. جمله دوم نیز بیانگر کل هزینه صرف شده در مدت زمان T است.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Pontryagin

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>spreader

$$u_1^*(t) = \{\min\{\max\{\frac{\lambda^*(t)S^*(t)}{-2b}, 0\}, u_{1max}\}$$

$$u_2^*(t) = \{\min\{\max\{\frac{\lambda^*(t)S^*(t)(1 - 2S^*(t) - R^*(t))}{-2c}, 0\}, u_{2max}\}$$
(10)

در این روابط  $\lambda$  متغیر الحاقی در مساله بهینهسازی است که مشتق گیری نسبت به آن انجام می شود. در واقع  $\lambda$  همان ضریب نامعین در معادلات اویلر است که در هامیلتونی مورد نظر برای این مساله به شکل متغیر با زمان در نظر گرفته شده است. برای حل عددی این بهینه سازی از کتابخانه Gekko و پایتون استفاده می کنیم. این کتابخانه اختصاصا برای حل عددی مسائل کنترل بهینه است. در این کتابخانه توابعی برای یافتن کنترل بهینه وجود دارند که با دریافت مقادیر بیشینه پارامتر کنترل u و همچنین معادلات دینامیک حاکم بر سیستم، کنترل بهینه را در هر زمان می یابد.

#### ۵ نتایج

با توجه به اینکه تا این مرحله موفق به بررسی شیوع اطلاعات با مدل SIR و SIS و بهینه سازی آن با محاسبه ی تابع هزینه شده ایم، حال فرصت مناسبی است تا بتوانیم به صورت کیفی حالت های مختلف را با یکدیگر مقایسه کرده و نتایج را ارزیابی کنیم. به همین دلیل، این بخش را به سه زیر بخش تقسیم میکنیم. در قسمت اول، به بررسی تاثیر اعمال کنترل با فرض ثابت بودن نرخ انتقال اطلاعات مساله را بررسی می کنیم. در قسمت سوم نیز ابتدا برای کنترل، حالت های مختلفی را در نظر گرفتیم و نتایج را بررسی کردیم و سپس تغییرات تابع هزینه را به ازی تغییرات تابع هزینه را به ازی تغییرات یارامتر های مختلفی ارزیابی کردیم.

## ۱-۵ بررسی شیوع با فرض ثابت بودن نرخ انتقال اطلاعات

می دانیم نرخ انتقال اطلاعات با (t) داده می شود . حال که آن را ثابت در نظر گرفتیم،  $(t) \in [0,T]$  و  $(t) \in [0,T]$ . می دانیم در بررسی مسائل شیوع ، برای یک بازه زمانی مشخص ضریب بازتولید پایه همدر تعیین وضعیت شیوع موثر است. در واقع این ضریب تعداد افرادی رانشان می دهند که توسط فردی مطلع ، اطلاعاتی کسب کرده اند. و در مواردی که هیچ کنترلی به جامعه اعمال نشود ، این ضریب از رابطه (t) = (t) داده میشود . با توجه به این تعریف، می توانیم دریابیم که اگر این ضریب بزرگتر از یک باشد، همه گیری رخ می دهد و اگر کوچکتر از یک باشد، شیوع خاتمه پیدا می کند. بنابراین این دو حالت را به طور جداگانه بررسی می کنیم.

• در قدم اول نموداری را رسم می کنیم که وضعیت شیوع اطلاعات مدل های SIS و SIS را به ازای 1 > 1 در دوحالت با کنترل و بدون کنترل نشان دهد. نتایج حاصل از این مدلسازی را در شکل ۱ و دو نمودار بالایی شکل ۲ نشان داده شده است. از اولین

• در قدم دوم وضعیت شیوع اطلاعات به ازای  $R_0 < 1$  بررسی می کنیم. نتایج حاصل در مدل SIR تنها با اعمال کنترل، اطلاعات کمی شیوع پیدا می کند و در غیر این صورت شاهد شیوع اطلاعات نخواهیم بود. اما در نمودار پایین سمت چپ شکل Y، کمی شاهد تناقض هستیم. ما از حالت قبل به این نتیجه رسیدیم که کنترل دهان به دهان زمانی اعمال میشود که تعداد افراد مستعد و مطلع به حد کافی در محیط حضور داشته باشند، اما نتایج نمودار حاکی از افزایش روند اعمال کنترل دهان به دهان فارغ از میزان افراد مطلع است.

نتایج قابل استنباط از این نمودارها(۱ و ۲) این است که کمپین هایی که هنوز اطلاعات شان همه گیر نشده است، مانند فیلمی که توسط کارگردانی تازه وارد منتشر شده است یا فروشگاهی که تازه شروع به کار کرده است، می توانند به کمک کنترل بهینه، سود کنند و روند انتقال اطلاعاتشان را بالا ببرند. اما اگر کمپین مورد نظر به مقدار خوبی اطلاعاتشان پخش شده باشد ، مانند آثار نویسنده ای مشهور ،این روش از لحاظ هزینه به صرفه نخواهد بود چرا که اعمال کنترل با اعمال نکردن آن نتایج مشابهی دارند

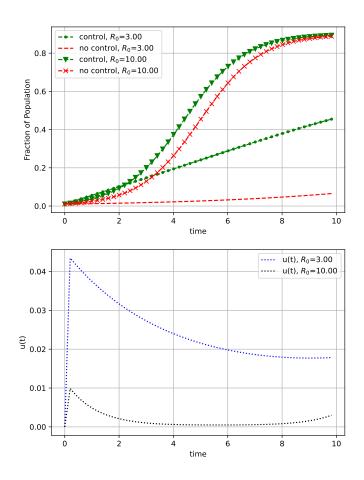
## ۲-۵ بررسی شیوع با فرض متغیر بودن نرخ انتقال اطلاعات

اگر نرخ انتقال اطلاعات را معیاری برای علاقه مردم به دریافت اطلاعات تلقی کنیم، برای واقعی تر شدن مسئله بهتر است نرخ اطلاعات را نسبت به زمان متغیر در نظر بگیریم و همچنین برای نشان دادن تنوع در دریافت

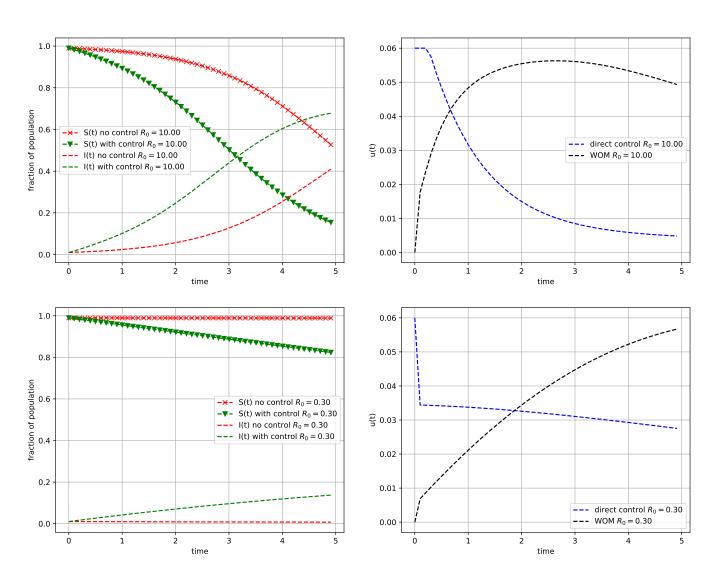
نمودار شکل۱ در می یابیم که همه گیری رخ داده است و به ازای  $R_0 > 1$  تغییرات افراد مطلع در زمان، در حالت با کنترل و بدون كنترل تقريبا يك رفتار از خود نشان مي دهد .مي توان اینطور برداشت کرد که بزرگ بودن  $R_0$  که بزرگ بودن نرخ انتقال را نتیجه میدهد ، تاثیر اعمال کنترل به طور مستقیم را کم میکند، اما در Rکوچکتر با اعمال کنترل، شیوع اطلاعات سریعتر رخ مىدهد. در نمودار بالا سمت چپ ۲ هم شاهد افزایش شیوع اطلاعات با اعمال كنترل هستيم.در نمودار دوم ١ تغييرات ميزان اعمال کنترل مستقیم در زمان ،برای مدل SIS رسم شده است که نشان می دهد با افزایش شیوع اطلاعات، نیاز به اعمال کنترل کمتر می شود. اما در حالت SIR با توجه به اینکه دو پارامتر کنترل اعمال شده است ، كنترل مستقيم و دهان به دهان، نتايج كمي متفاوت است.در نمودار بالا سمت راست شکل ۲،در ابتدای شيوع، اعمال كنترل دهان به دهان كمينه و كنترل مستقيم بيشينه است. و هرچه اطلاعات در محیط گسترده تر میشود، نحوه اعمال این دو کنترل عکس میشود. به عبارتی زمانی کنترل دهان به دهان شروع میشود که تعداد افراد مطلع و مستعد در جامعه به اندازه

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>basic Reproductive ratio

اصطلاحا viral نشدهاند



 $R_0=3(eta=0.3)$  در دو حالت اعمال کنترل و بدون اعمال کنترل به ازای (SIS در دو حالت اعمال کنترل به ازای ( $R_0=3(eta=0.3)$  نشان می دهد. ثوابت عبارت اند و  $R_0=10(eta=10)$  نشان می دهد. ثوابت عبارت اند از  $R_0=10(eta=10)$  نشان می دهد. ثوابت عبارت اند  $\gamma=0.1, T=10, b=15, u_{max}=1, i_0=0.01$ :



شکل ۲: دو نمودار بالایی برای مدل SIR با  $R_0 = 10$  با  $R_0 = 10$  است. نمودار سمت چپ آن تغییرات گروهای مستعد و مطلع در جامعه بر حسب زمان به ازای اعمال کنترل و بدون کنترل است. نمودار سمت چپ نیز تغییرات دو پارامتر کنترل بر حسب زمان را نشان می دهد. دو نمودار پایین نیز برای مدل SIS با  $R_0 = 0.03$  است. نمودار سمت راست آن تغییرات گروه های مطلع و گروه های مستعد در زمان را به ازای دو حالت اعمال کنترل و بدون کنترل نشان می دهد. نمودار سمت چپ نیز تغییرات پارامتر های کنترل را بربر حسب زمان رسم می کند. ثوابت این نمودارها عبارت اند از: 0.00 0.0

اطلاعات سه تابع مختلف برای توصیف نرخ انتقال اطلاعات فرض کردیم.

$$\beta_1(t) = \beta_m + \frac{\beta_M - \beta_m}{1 + e^{-a_1(t - c_1)}}$$
 (11)

$$\beta_2(t) = (\beta_M - \beta_m)(1 - \frac{1}{1 + e^{-a_2(t - c_2)}})^{\Lambda}$$
 (1Y)

$$\beta_3(t) = c_m + c_a cos2\pi t/T^{\mathsf{q}} \tag{14}$$

نده نرخ انتقال اطلاعاتی است که به مرور زمان  $eta_1(x)$  افزایش می یابد.مانند انتخابات

زمان نرخ انتقال اطلاعاتی است که به مرور زمان کاهش می یابد. مانند اخبار خوشایند یا ناخوشایندی که در زمانی کوتاه حاشیه سازی میکنند و به مرور زمان فراموش میشوند.

نوسان نوسان توصیف کننده انتقال اطلاعاتی است که در گذر زمان نوسان دارد، مانند فیلم های روی پرده سینما که در آخر هفته، نسبت به وسط هفته بیشتر استقبال میشوند . ثوابت شکل های ۱۳،۱۲،۱۱ عبارت اند از  $\beta_m=0.01, \beta_M=2, T=5, a_1=2, c_1=3, c_2=2, a_2=:$  از  $2, c_m=1, c_a=1, \gamma=0.1$ 

با توجه به نمودار های سمت چپ شکل ۲ که مربوط به مدل SIS است و تنها پارامتر کنترل، کنترل مستقیم است، در می یابیم که با توجه به اینکه نرخ انتقال اطلاعات صعودی است، در ابتدای شیوع نیاز داریم تا کنترل بیشینه را اعمال کنیم ،اما به مرور زمان که نرخ انتقال اطلاعات افزایش می یابد، اعمال کنترل نزولی خواهد بود. در نمودارهای وسط اما، برعکس عمل می کنیم .به این طریق که در ابتدای شیوع که نرخ انتقال زیاد است، نیاز به اعمال بیشینه کنترل نداریم،اما روند اعمالمان در زمان صعودی خواهد بود. در نمودارهای سمت راست نیز رفتار نوسانی اعمال کنترل مشهود است که البته با گذر زمان رفتار نزولی پیدا می کند. به این دلیل که با اینکه نرخ انتقال نوسانی است ، نرخ مطلع شدن در ابتدا نوسانی اما سپس صعودی می شود.

#### ۳-۵ مقایسه بین کنترل بهینه ،ثابت و ابتکاری

تا این مرحله تلاش کردیم حالت های مختلف از نرخهای انتقال را برای کنترل بهینه استفاده کنیم. در این مرحله قصد داریم نرخ انتقال

را ثابت گرفته و حالت های مختلفی را برای نحوه اعمال کنترل متصور شویم. در واقع هدف این بخش، تعیین کمیت تأثیر استراتژی کنترل بهینه بر استراتژی های کنترل ساده و شهودی است که هیچگونه بهینه سازی را شامل نمی شود. حال نیاز است تا کنترل های ساده مان را تعریف کنیم. برای کنترل ابتکاری .فرض میکنیم  $s_{nc}(t),i_{nc}(t),r_{nc}(t)$  به ترتیب کسری از افراد مستعد، مطلع و افرادی که یک بار مطلع شده و دیگران را مطلع نمی کنند در حالتی که هیچ کنترلی به جامعه اعمال نمی شود، باشند. می دانیم در کنترل مستقیم، تعداد افراد مستعد است که در شیوع اطلاعات موثر است بنابراین ،یک کنترل ابتکاری ،باید شامل  $(u_{1max}.s_{nc}(t))$  باشد که  $u_{1max}$  بیشینه مقدار مجاز کنترل مستقیم در یک مدل است. از طرفی می دانیم در کنترل دهان به دهان علاوه بر تعداد افراد مستعد، افراد مطلع هم هستند که در انتقال موثرند وباید به تعداد کافی در جامعه حضور داشته باشند. بنابراین برای یک  $u_{2max}$  کنترل ابتکاری دهان به دهان داریم  $u_{2max}.s_{nc}(t).i_{nc}(t)$  کنترل ابتکاری دهان به دهان داریم بیشینه امکان کنترل دهان به دهان است. مدل ابتکاری برای SIR را و برای مدل SIS و برای مدل  $follows'_{nc}(t), s_{nc}(t)i_{nc}t'$ كنترل ثابت هم تنها با اعمال كردن نصف بيشينه مقدار مجاز كنترل است بنابراین در مدل SIS ، کنترل ثابت برابر با  $\frac{1}{2}u_{max}$  و در مدل SIR، کنترل ثابت  $\frac{1}{2}u_{1max}$  برای کنترل مستقیم و  $\frac{1}{2}u_{2max}$  برای کنترل دهان به دهان خواهد بود. حال در ۶ تغییرات نحوه اعمال هر کنترل در گذر زمان و همچنین تغییرات افراد مطلع در واحد زمان را را برای مدل SIR مشاهده می کنیم .طبق نتایج حاصل از این نمودارها، برای  $R_0 = 10$  می توان دريافت رفتار كلي اعمال كنترل ها ،نسبت به بدون اعمال كنترل، موثرتر است. اما اگر بخواهیم دقیق تر بررسی کنیم ، به ترتیب تاثیر کنترل ابتكارى ،بهينه، ثابت و نهايتا بدون كنترل بيشتر است. نحوه اعمال كنترل مستقيم هم يه اين صورت است كه اعمال كنترل بهينه و ابتكاري با گذر زمان کمتر می شود و کنترل بهینه با سرعت بیشتری کم می شود. در کنترل دهان به دهان، کنترل بهینه در ابتدا به سرعت افزایش می یابد و با گذر زمان روند ثابتی به خود می گیرد، در حالی که کنترل ابتکاری در ابتدا به آرامی افزایش می یابد، سپس روند صعودی به خود می گیرد و نهایتا به روند ثابتی می رسد.

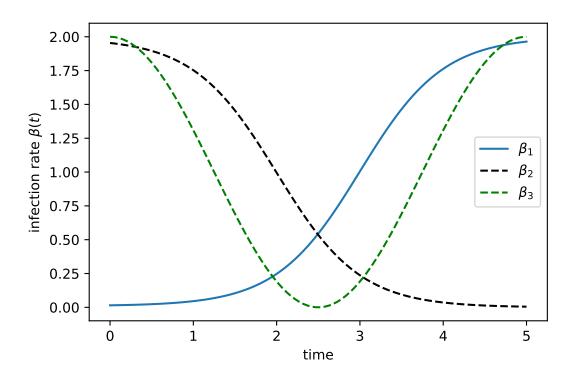
حال که به طور مفصل به جزئیات کنترلها و مدلسازی شیوع اطلاعات پرداخته شد، برای کامل شدن تحقیقات ، به بررسی تابع هزینه در شرایط مختلف می پردازیم. تابع هزینه شامل جمع وزن دار از تمام کنترل های اعمال شده و البته تعداد افراد مطلع در پایان زمان مورد نظر کمپین است. می دانیم شرایط مختلف را در مدلسازی، تغییر پارامترهای آن ایجاد می کنند. پس تابع هزینه را برای کنترلهای مختلف با تغییر پارامترها  $\beta, \gamma, b, T$ 

۱. درتمام شکلهای ۷-۱۰ نتیجه قالب توجه این است که کنترل بهینه تابع هزینه کوچکتری نسبت به کنترلهای دیگر و حالت بدون کنترل دارد و حالت بدون کنترل نسبت به کنترلهای دیگر تابع هزینه بزرگتری دارد که این همان نتیجه مطلوب ما است و به اهمیت کنترل بهینه اشاره می کند.

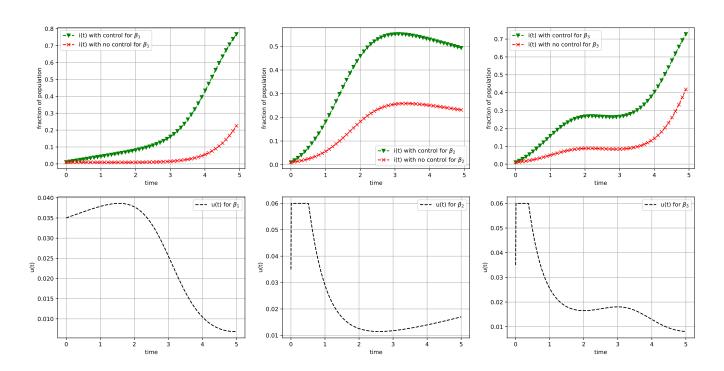
<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>increasing sigmoid

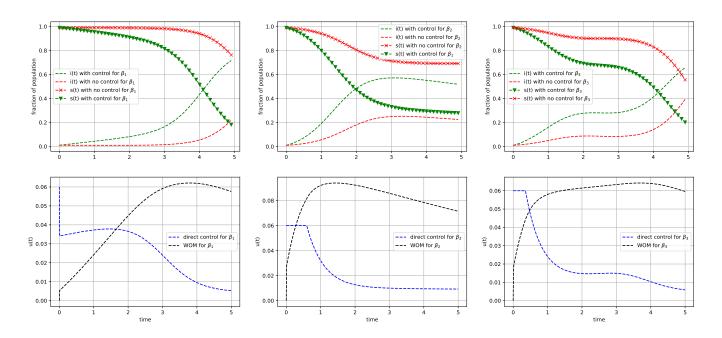
<sup>8</sup>decreasing sigmoid

<sup>9</sup>cosine



 $eta_m = 0.01, eta_M = 2, T = 5, a_1 = 3, c_2 = 2, a_2 = 2, c_m = 1, c_a = 1, r = 0.01$  شکل ۳: نمودار تغییرات (17, 17, 3) بر حسب زمان که در (17, 17, 17) تعریف شده اند به ازای ثوابت  $(2, c_1 = 3, c_2 = 2, a_2 = 2, c_m = 1, c_a = 1, r = 0.01)$ 





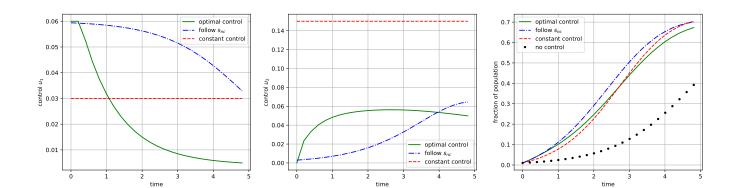
شکل ۵: کنترل بهینه.در نمودار های بالا تغییرات افراد مطلع در مدل SIR بر حسب زمان برای دو حالت با کنترل و بدون کنترل به ازای SIR بر حسب زمان بهینه.در نمودار های بالا تغییرات افراد مطلع در مدل SIR بر حسب زمان به دهان اعمال شده متناسب با نمودارهای بالا رسم شده اند، ودر سه نمودار پایین ، تغییرات کنترل مستقیم و کنترل دهان به دهان اعمال شده متناسب با نمودارهای بالا رسم شده است.  $\gamma = 0.1, T = 5, b = 15, c = 1, u_{1max} = 0.06, u_{2max} = 0.3i_0 = 0.01, s_0 = 0.99$ 

- ۲. با توجه به شکلهای V و ۹ می توان ایگونه نتیجه گرفت که به ازای  $\beta$  زیاد یا  $\Gamma$ های بلند (به این معنی که دد لاین کمپین دیر تر است) هزینه کنترل بهینه و حالت بدون کنترل یکی می شود. ،این نتیجه را ما زمانی که تغییرات افراد مطلع در واحد زمان را برای  $\beta$  های بزرگ در این دو حالت کشیده بودیم نیز بدست آوردیم، در آن حالت نیز رفتار دو نمودار یکی بود.
- ۳. با توجه به شکلهای ۷ و ۸ می توانیم نتیجه بگیریم با توجه به تعریف  $R_0=\frac{\beta}{\gamma}$  و با توجه به این نکته که هر چه  $R_0$  بیشتر باشد، شیوع اطلاعات بالاتر است، پس در می یابیم با کم شدن  $\gamma$  یا زیاد شدن  $\beta$  که زیاد شدن  $R_0$  را نتیجه می دهد، تابع هزینه کمتر می شود.
- ۴. از ۱۰ هم نتیجه می شود، تغییرات ط یا c به تنهایی بر کنترل ابتکاری اثر چشمگیر می گذارد و تاثیر چندانی به حالت های دیگر کنترل نمی گذارد و به طور دقیق تر می توان این نتیجه را گرفت که تغییرات ط یا c بر روی کنترل بهینه نسبت به کنترل های دیگر بسیار کمرنگ تر است.

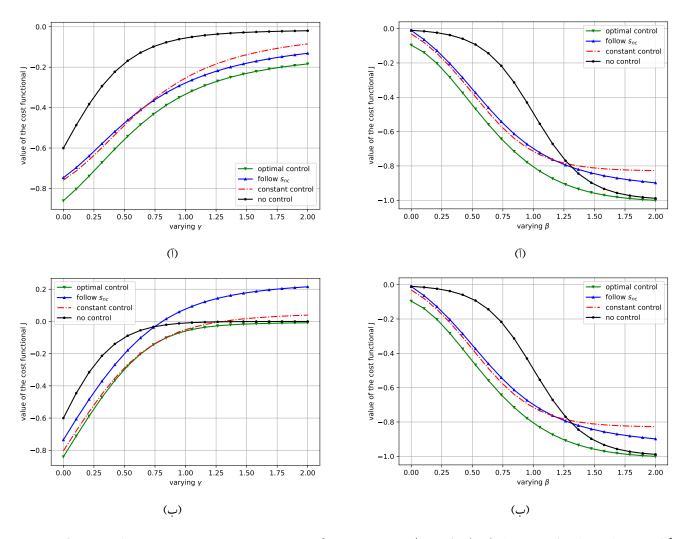
اطلاعات را دریافت کردند دیگر قادر به دریافت اطلاعات نیستند و برای این مدل دو پارامتر کنترل، کنترل مستقیم به این معنی که اعضای کمپین به طور مستقیم به اطلاع رسانی بپردازند و کنترل دهان به دهان به این معنی که اعضای کمپین افرادی را با دادن حقوق یا هدایایی دیگر تشویق کنند تا به افراد دیگر اطلاع رسانی کنند، در نظر گرفتیم. دومین مدل SIS است که در آن فرض شده افراد بعد از دریافت اطلاعات ،می توانند اطلاعات جدیدی را پذیرا باشند. و تنها پارامتر کنترل را در این مدل کنترل مستقیم در نظر گرفتیم. سپس در شرایط مختلف با فرض متغیر بودن نرخ شیوع اطلاعات، به بررسی رفتار کنترل بهینه پرداختیم و اثر بلند بودن زمان پایان کمپین و بالا بودن نرخ شیوع اطلاعات ، در شیوع اطلاعات و تابع هزینه را دیدیم. همچنین دریافتیم متفاوت بودن نرخ شیوع اطلاعات ، کنترل های شیوع اطلاعات، کنترل های میدهد. سپس با فرض ثابت بودن نرخ شیوع اطلاعات، کنترل های مختلف اعم از کنترل بهینه، کنترل ابتکاری و کنترل ثابت را باهم مقایسه مختلف اعم از کنترل بهینه، کنترل ابتکاری و کنترل ثابت را باهم مقایسه

#### ۶ ىسگفتار

در این پروژه تلاش شد تا با مدل سازی نحوه شیوع اطلاعات و بررسی کنترلهایی که می توان به جامعه اعمال کرد، راهی مناسب برای مدیریت یک کمپین و موفقیت در اطلاع رسانی آن با هزینه بهینه با فرض یکنواخت بودن افراد جامعه یافت. به این دلیل دو نوع انتقال اطلاعات را متصور شدیم، اولی مدل SIR ست با این مفهوم که افرادی که یکبار

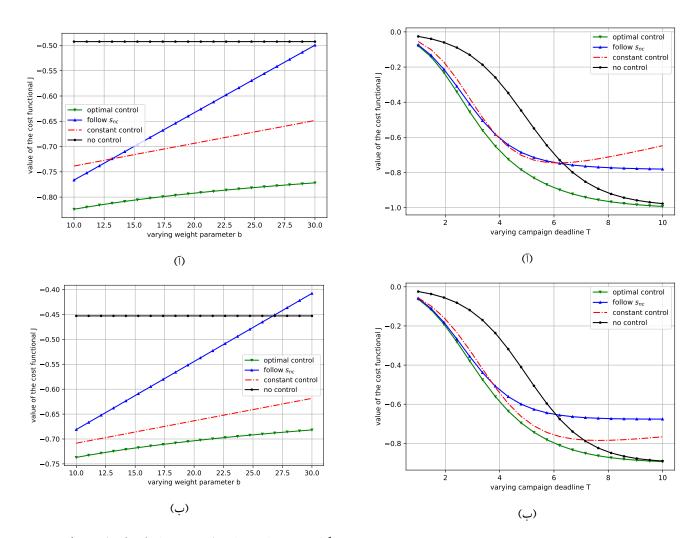


شکل ۶: نمودار چپ تغییرات پارامتر کنترل مستقیم برای کنترلهای ثابت، ابتکاری و بهینه را نشان می دهد، نمودار وسط تغییرات پارامتر کنترل در این به ازای اعمال دهان برای سه پارامتر کنترل ثابت و ابتکاری و بهینه را نشان می دهد و نمودار سمت راست تغییرات افراد مطلع بر حسب زمان به ازای اعمال  $\beta=1, \gamma=0.1, u_{1max}=0.06, u_{2max}=0.3, b=1, \tau=0.1, u_{1max}=0.06, u_{2max}=0.3, b=1, \tau=0.1, u_{1max}=0.06, u_{2max}=0.00, u_{2$ 



شکل ۸: نمودار تغییرات تابع هزینه برای کنترل های مختلف بر حسب  $\beta=1$  نمودار تغییرات نرخ بازیابی. SIR ثغییرات نرخ بازیابی. (1) برای مدل SIR ثوابت عبارت اند از:  $1,T=5,u_{1max}=0.06,u_{2max}=0.3,b=15,c=1,i_0=6$   $\beta=1$  برای مدل SIS ثوابت عبارت اند از (-1) برای مدل (-1)

شکل ۷: نمودار تغییرات تابع هزینه برای کنترل های مختلف بر حسب تغییرات پارامتر انتقال اطلاعات. $(\tilde{\mathbf{I}})$ ۷ برای مدل SIR . ثوابت عبارت باند از  $\gamma=0.1, T=5, u_{1max}=0.06, u_{2max}=0.3, b=15, c$  اند از  $\gamma=0.1, T=5, u_{1max}=0.06, u_{2max}=0.01, s_0=0.99$  برای مدل SIS . ثوابت عبارت اند از  $\gamma=0.1, T=5, u_{max}=0.06, b=15, i_0=0.01$ 



شکل ۱۰: نمودار تغییرات تابع هزینه برای کنترل های مختلف برحسب  $\beta=:$  نمودار تغییرات پارامتر (0,0) برای مدل SIR . ثوابت عبارت اند از:  $1,\gamma=0.1,T=5,u_{1max}=0.06,u_{2max}=0.3,i_0=3$   $\beta=:$  برای مدل SIS . ثوابت عبارت اند از:  $\beta=0.1,T=5,u_{max}=0.06,i_0=0.01$ 

شکل ۹: نمودار تغییرات تابع هزینه برای کنترل های مختلف بر حسب تغییرات پایات زمان کمپین. ۹ (آ)برای مدلSIR. ثوابت عبارت اند از:  $\beta=1, \gamma=0.1, b=15, c=1, i_0=0.01.s_0=0.99$  مدل  $\beta=1, \gamma=0.1, u_{max}=0.06, b=1$  مدل  $\beta=1, \gamma=0.1, u_{max}=0.06$ 

- [1] K. Kandhway and J. Kuri, "How to run a campaign: Optimal control of sis and sir information epidemics," *Applied Mathematics and Computation*, vol.231, p.79–92, Mar 2014.
- [2] N. L. S. Morton I. Kamien, "Dynamic optimization the calculus of variations and optimal control in economics and management," vol.31.
- [3] L. Beal, D. Hill, R. Martin, and J. Hedengren, "Gekko optimization suite," *Processes*, vol.6, no.8, p.106, 2018.