علی ستاره کوکب / 95100491 / تمرین 3 / مدل سازی پدیده های آماری

1)

الف)

می دانیم معادله حاکم برای سیستم به صورت مقابل می باشد.

$$\frac{dI_H}{dt} = \beta_{HH} S_H I_H + \beta_{HL} S_H I_L - \gamma I_H$$

$$\frac{dI_L}{dt} = \beta_{LH} S_L I_H + \beta_{LL} S_L I_L - \gamma I_L$$

حال اگر تعریف کنیم $n_H = \frac{N_H}{N}$, $n_L = \frac{N_L}{N}$ در معادلات بالا با اعمال حالت بدون بیماری بطور خطی خواهیم داشت: (N کل افراد، N_H افراد پر خطر، N_L افراد کم خطر)

$$\frac{dI_H}{dt} \approx (\beta_{HH} n_H - \gamma_H) I_H + (\beta_{HL} n_H) I_L$$

$$\frac{dI_L}{dt} \approx (\beta_{LH} n_L) I_H + (\beta_{LL} n_L - \gamma_L) I_L$$

$$\xrightarrow{\text{ژاکوبی}} J = \begin{pmatrix} \beta_{HH} n_H - \gamma_H & \beta_{HL} n_H \\ \beta_{LH} n_L & \beta_{LL} n_L - \gamma_L \end{pmatrix} , \quad \beta = \begin{pmatrix} 10 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix} \quad n_H = \frac{2}{10} \quad n_L = \frac{8}{10}$$

حال اگر در نظر بگیریم

$\gamma_H = \frac{1}{1000} a$, $\gamma_L = \frac{1}{1000} b$

که a تعداد پرستاران در بیمارستان پر خطر و b تعداد پرستاران در بیمارستان کم خطر است

$$\longrightarrow J = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{1000} a & \frac{2}{100} \\ \frac{8}{100} & \frac{8}{10} - \frac{1}{1000} b \end{pmatrix}$$

برای آن که بیماری ریشه کن شود باید بزرگترین مقدار ویژه این ماتریس کوچکتر از صفر شود.

$$\xrightarrow{b = 3600 - a} \left(1 - \frac{a}{1000} - \lambda\right)\left(-\frac{2}{10} - \frac{3600 - a}{1000} - \lambda\right) - \frac{16}{10^4} = 0$$

$$\longrightarrow \lambda_{1,2} = 5\times10^{-7}\left(-2.8\times10^{6} \pm \left(2.30464\times10^{13} - 1.92\times10^{10} a + 4\times10^{6} a^2\right)^{1/2}\right)$$

حال واضح است که باید بزرگترین مقدار ویژه J منفی باشد برای آن که کوچکترین مقدار ویژه هم منفی باشد

خواهیم داشت:

$$-2.8\times10^{6}+\left[2.30464\times10^{13}-1.92\times10^{10}a+4\times10^{6}a^{2}\right]<0$$

$$\rightarrow \boxed{1000<a<3600} \rightarrow$$ برای آنکه هزینه بیماری بیشتر نشود حداقل 1000 پرستار باید در بیمارستان بر حفظ کار کنند.

دقت کنید که این درجه مقدار منفی که منفی می‌باشد از درجه مقدار جمله منفی بزرگتر است بنابراین کافیست این عبارت مقدار ناوردایی بیشینه

ب) میانگین مدت بیماری از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$t_{avg}=I_H\times\frac{1}{r_H}+I_L\times\frac{1}{r_L}$$

برای یافتن I_L و I_H باید بردار ویژه مربوط به بزرگترین مقدار ویژه را بیابیم:

$$r_{\lambda_{max}}=\begin{pmatrix}30-0.0125a+6.25\times10^{-6}\left(2.30464\times10^{13}-1.92\times10^{10}a+4\times10^{6}a^{2}\right)\\1\end{pmatrix}$$

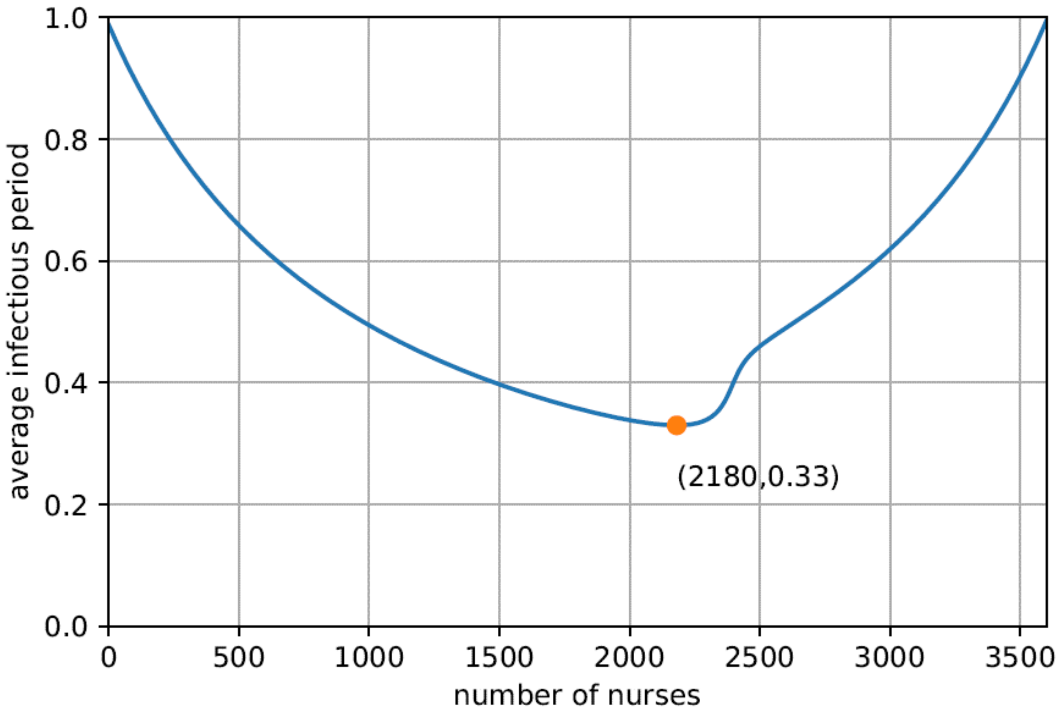
$$=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\xrightarrow[I_H+I_L=1]{\text{نرمال کردن}} r_{\lambda_{max}}=\frac{1}{v_1+v_2}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_H'\\I_L'\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow t_{avg}=\frac{v_1}{v_1+v_2}\frac{1}{r_H}+\frac{v_2}{v_1+v_2}\frac{1}{r_L}$$

$$\rightarrow \min(t_{avg})=\min\left(\frac{v_1}{v_1+v_2}\frac{1}{r_H}+\frac{v_2}{v_1+v_2}\frac{1}{r_L}\right),\quad r_H=\frac{1}{1000}a+1,\quad r_L=\frac{1}{1000}(3600-a)+1$$

$$\rightarrow a_{min}=2180,\quad t_{avg}\simeq0.33\rightarrow$$ پرستاران به نسبت $\frac{2180}{(3600-218)}$ باید در بیمارستان بر حفظ نسبت به بیمارستان عموما کار کنند این نسبت تقریبا 2 به 1 می‌باشد.

در شکل 1 نمودار t_{avg} را برحسب تعداد پرستاران شاغل در بیمارستان بر حفظ می‌بینید



شکل۱. نمودار مدت زمان میانگین بیماری برحسب تعداد پرستاران بیمارستان پرخطر.

از رابطه زیر می‌توان R_0 را بدست آورد:

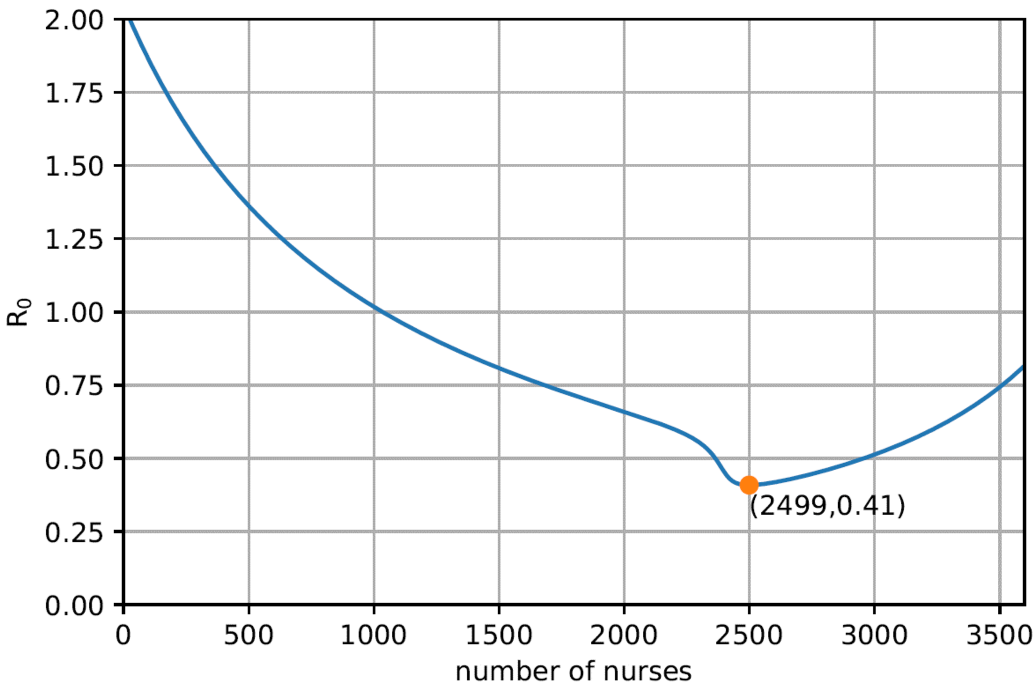
$$R_0 = R_0^H I_H^S + R_0^L I_L^S, \quad R_0^H = (\beta_{HH} n_H + \beta_{LH} n_L)/\gamma_H$$

$$R_0^L = (\beta_{HL} n_H + \beta_{LL} n_L)/\gamma_L$$

$$\longrightarrow R_0 = \frac{2.08}{\gamma_H} I_H^S + \frac{0.82}{\gamma_L} I_L^S$$

$$= \frac{2.08}{\gamma_H} \frac{V_1}{V_1+V_2} + \frac{0.82}{\gamma_L} \frac{V_2}{V_1+V_2}$$

نمودار R_0 را در شکل 2 می‌بینید.



شکل۲. نمودار R_0 برحسب تعداد پرستاران بیمارستان پرخطر.

2)

الف)

در این قسمت هدف مینیمم کردن مقدار افراد واکسینه برای ریشه کن کردن بیماری می‌باشد. اگر درصد افراد گروه پرخطر که واکسینه می‌شوند را با a_H و درصد افراد واکسینه شده گروه کم خطر را با a_L نشان دهیم خواهیم داشت :

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad n_H = 0.2,\quad n_L = 0.8,\quad \gamma = 1$$

$$\rightarrow J = \begin{pmatrix} \beta_{HH} n_H - \gamma_H & \beta_{HL} n_H \\ \beta_{LH} n_L & \beta_{LL} n_L - \gamma_L \end{pmatrix}, \quad n_H = (0.2)(1-a_H),\quad n_L = (0.8)(1-a_L)$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$J = \begin{pmatrix} 2(1-a_H)-1 & (0.2)(1-a_H) \\ 0.8(1-a_L) & (1.6)(1-a_L)-1 \end{pmatrix}, \quad \min(a_H n_H + a_L n_L)$$

حال باید بررسی کنیم که در چه بازه‌ای برای a_H و a_L مقادیر ویژه بزرگتر منفی می‌شود. ابتدا مقادیر ویژه J را پیدا می‌کنیم :

$$\lambda_{1,2} = 0.5\left(1.6 - 2a_H - 1.6a_L \underset{\text{ریشه بزرگتر}}{\pm} \left(0.8 - 2.24a_H + 4a_H^2 + 0.64a_L - 5.76a_H a_L + 2.56a_L^2\right)^{1/2}\right)$$

حال محدوده‌ای که در آن ریشه بزرگتر منفی باشد را پیدا می‌کنیم. این کار را با استفاده از دستور Solve در Mathematica انجام می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت :

$$a_H > \frac{9}{19}, \quad a_L > \frac{26a_H - 11}{4(19a_H - 9)}$$

کمترین مقدار این در مرز ناحیه‌ای که ریشه بزرگتر منفی می‌شود باید باشد، خواهیم داشت :

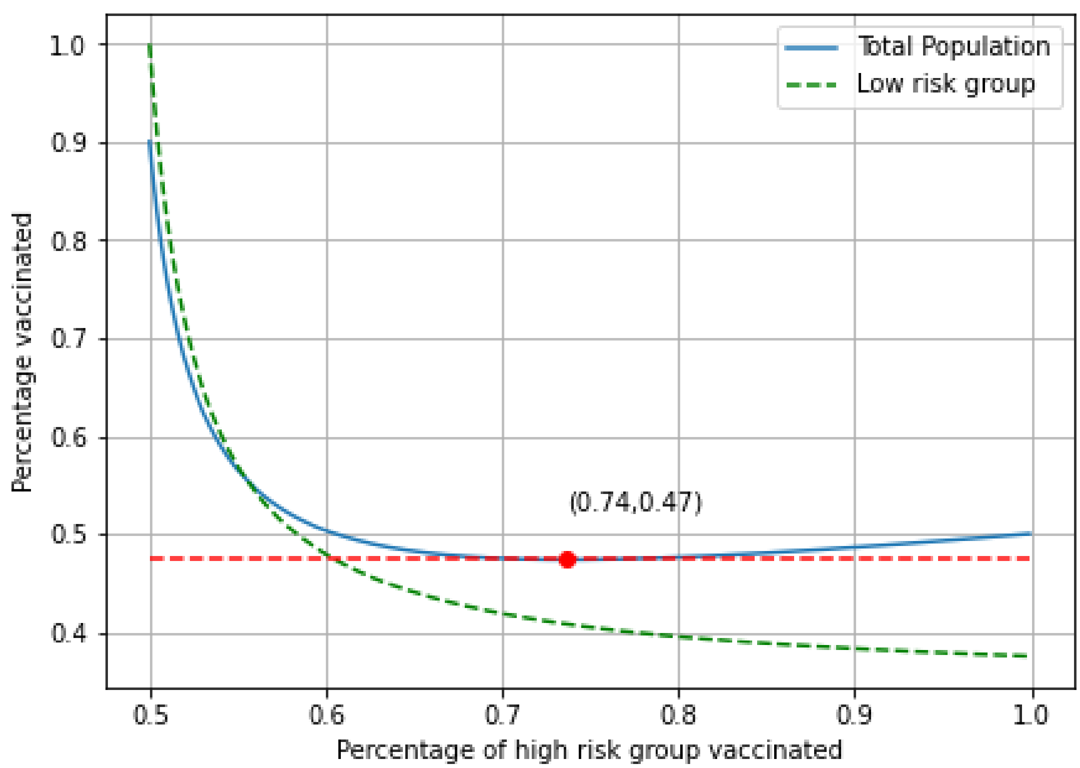
$$a_H > \frac{9}{19}, \quad a_L = \frac{26a_H - 11}{4(19a_H - 9)}$$

حال با داشتن این دو مقدار باید مقدار $a_H n_H + a_L n_L$ را مینیمم کنیم.

$$Z = a_H n_H + a_L n_L$$
$$= 0.2 a_H + 0.8 a_L \qquad a_H > \frac{9}{19} \quad , \quad a_L = \frac{26 a_H - 11}{4(19 a_H - 9)}$$

$$\longrightarrow Z = 0.2 a_H + 0.8 \left(\frac{26 a_H - 11}{4(19 a_H - 9)} \right) \qquad a_H > \frac{9}{19}$$

در شکل 3 نمودارهای مربوطه را می بینید. همان طور که مشاهده می شود دولت باید 47٪ از کل جمعیت را واکسینه کند و 74٪ باید از میان گروه پرخطر را واکسینه کند.



شکل۳. نمودار نسبت افراد مورد نیاز برای واکسینه شدن برای ریشه کن کردن بیماری. خط آبی بیانگر نسبت افراد واکسینه شده به کل جمعیت می باشد و خط چین سبز نسبت افراد واکسینه شده در گروه کم خطر می باشد.

ب) این قسمت مشابه قسمت الف می باشد با این تفاوت که در این جا هدف مینیمم کردن تابع هزینه (Z) که در زیر تعریف شده است می باشد:

$$Z = n_H a_H P_H + n_L a_L P_L$$

$P_H =$ هزینه واکسن گروه پرخطر ،

$P_L =$ هزینه واکسن گروه کم خطر

اگر فرض کنیم $P_H = 1.5 P_L$ در این صورت خواهیم داشت:

$$Z = n_H a_H 1.5 P_L + n_L a_L \times P_L$$

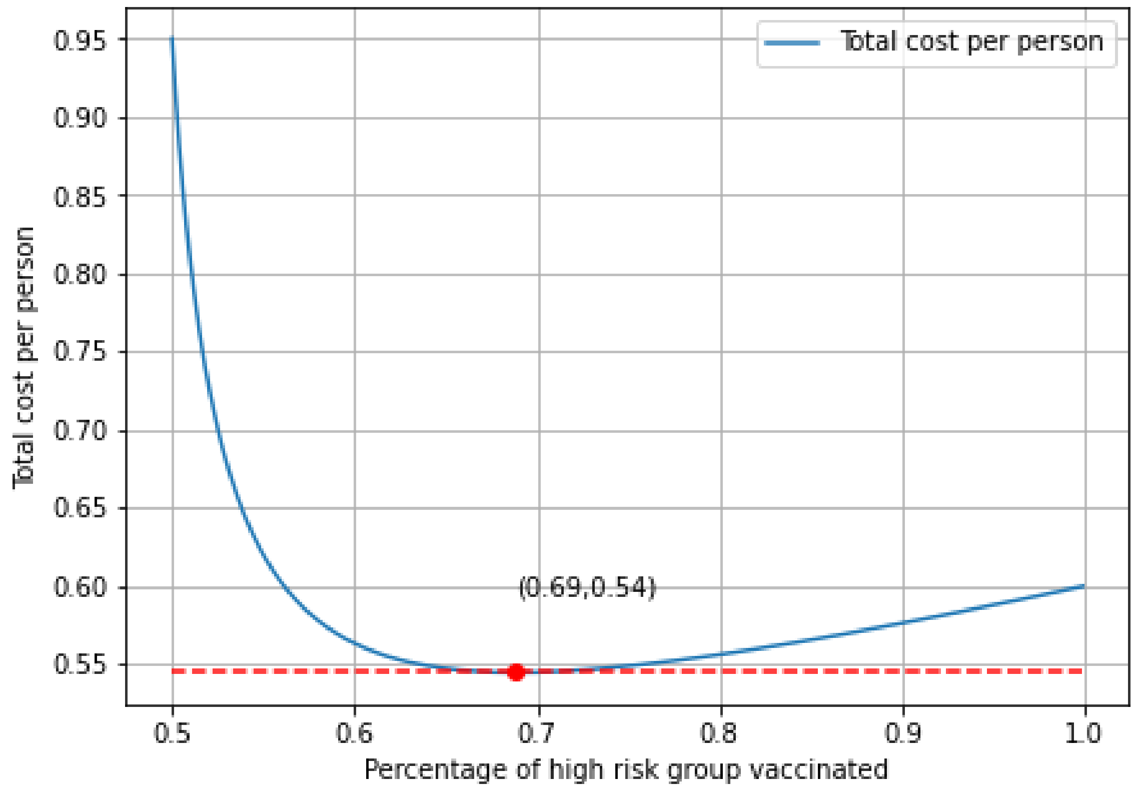
$$= P_L (n_H a_H \times 1.5 + n_L a_L)$$

$$\xrightarrow{\text{هدف}} \min(Z) \longrightarrow \min(n_H a_H \times 1.5 + n_L a_L) \quad , \quad a_H > \frac{9}{19} \quad , \quad a_L = \frac{26a_H - 11}{4(19a_H - 9)}$$

$$n_H = 0.2 \qquad = \min(0.3 a_H + 0.8 a_L)$$

$$\xrightarrow[a_L]{\text{جایگذاری}} \min\left(0.3 a_H + 0.8 \times \frac{26a_H - 11}{4(19a_H - 9)}\right)$$

به شکل ۹ نمودار هزینه را نظر را می بینید. با توجه به این شکل دولت برای مینیمم کردن هزینه های خود باید 69٪ از کل جمعیت را واکسینه کند و 54٪ از گروه کم خطر را واکسینه کند



شکل۴. نمودار هزینه نسبی برای ریشه کن کردن بیماری در صورتی که هزینه واکسیناسیون گروه پرخطر ۱,۵ برابر گروه کم خطر باشد.

اگر داشته باشیم $P_H = P_L$ خواهیم داشت :

$$z = P_L (n_H a_H + n_L a_L)$$

$$\min z = \min\left(0.2\, a_H + 0.8\, \frac{26 a_H - 4}{4(19 a_H - 9)}\right)$$

حال محاسبات را دوباره تکرار می کنیم بدلیل مشابه خواهیم داشت که دولت باید ۶۱٪ از کل جمعیت را واکسینه کند و 73٪ باید از میان گروه پرخطر را واکسینه کند

هم چنین اگر هزینه واکسینه کردن گروه پرخطر دو برابر گروه کم خطر باشد بدلیل مشابه دولت باید 61 ٪ از کل جمعیت را واکسینه کند و 65٪ باید از میان گروه پرخطر را واکسینه

فرض کنید افراد super spreader را با S_1، افراد super shedder را با S_2 و افراد عادی را با S_3 نشان دهیم بنابراین خواهیم داشت:

$$
\beta = \beta \begin{array}{c|ccc} & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline s_1 & f^2 & f^2 & f \\ s_2 & f & f & 1 \\ s_3 & f & f & 1 \end{array}
$$

$$
\longrightarrow \beta = \beta \begin{pmatrix} f^2 & f^2 & f \\ f & f & 1 \\ f & f & 1 \end{pmatrix}
$$

حال دیفرانسیل را می‌نویسیم:

$$
H := \beta \begin{pmatrix} S_1 f^2 & S_1 f^2 & S_1 f \\ S_2 f & S_2 f & S_2 \\ S_3 f & S_3 f & S_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 I_1 \\ \gamma_2 I_2 \\ \gamma_3 I_3 \end{pmatrix}
$$

$$
I := \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\dot{\vec{I}} = \hat{H}\vec{I} - \vec{\gamma}\cdot\vec{I}}
$$

فرض کنید $f = 1.5$، $\beta = 1.5$، $\gamma = 1$ هم چنین می‌دانیم که: $n_1 = 0.2$، $n_2 = 0.1$، $n_3 = 0.7$

$$
R_0^{s_j} = \sum_{i=1}^{3} \beta_{ij} \, n_i / \gamma_j \longrightarrow \begin{cases} R_0^{s_1} = \beta(f^2 \times 0.2 + f \times 0.1 + 0.7f) = \beta(f^2 + 0.8f) = 2.475 \\ R_0^{s_2} = \beta(f^2 \times 0.2 + f \times 0.1 + 0.7) = \beta(0.2f + 0.8) = 1.65 \\ R_0^{s_1} = \beta(f \times 0.2 + 0.1 + 0.7) \end{cases}
$$

$$
\longrightarrow R_0 = R_0^{s_1} I^{s_1} + R_0^{s_2} I^{s_2} + R_0^{s_3} I^{s_3} *
$$

که $(I^{s_1}, I^{s_2}, I^{s_3})$ میزان افراد مبتلا به بیماری در هر مقدار نزدیک به صفر می‌باشد

J این سیستم برابر است با:

$$J = \begin{pmatrix} \beta n_1 f^2 - 1 & \beta n_1 f^2 & \beta n_1 f \\ \beta n_2 f & \beta n_2 f - 1 & \beta n_2 \\ \beta n_3 f & \beta n_3 f & \beta n_3 - 1 \end{pmatrix}$$

با جایگذاری f , βn

$$= \begin{pmatrix} 0.2 \times 1.5^3 - 1 & 0.2 \times 1.5^3 & 0.2 \times 1.5^2 \\ 0.1 \times 1.5^2 & 0.1 \times 1.5^2 - 1 & 0.1 \\ 0.7 \times 1.5^2 & 0.7 \times 1.5^2 & 0.7 - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.55 & 0.45 & 0.3 \\ 0.15 & -0.85 & 0.1 \\ 1.05 & 1.05 & -0.3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \ , \ \boxed{\lambda_3 = 0.95}$$

$$\lambda_3 \text{ بردار ویژه مربوط به } \longrightarrow I' = \begin{pmatrix} 0.27 \\ 0.09 \\ 0.64 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_0 = 2.47 \times 0.27 + 2.47 \times 0.09 + 1.65 \times 0.64 = 1.94$$

حال فرض کنید a_1 درصد افراد واکسینه شده گروه 1 ، a_2 درصد واکسینه شده گروه 2 ، و a_3 درصد واکسینه شده گروه 3 باشند در این صورت خواهیم داشت:

$$J = \begin{pmatrix} \beta(1-a_1) n_1 f^2 - 1 & \beta(1-a_1) f n_1^2 & \beta(1-a_1) n_1 f \\ \beta(1-a_2) n_2 f & \beta(1-a_2) n_2 f - 1 & \beta(1-a_2) n_2 \\ \beta(1-a_3) n_3 f & \beta(1-a_3) n_3 f & \beta(1-a_3) n_3 - 1 \end{pmatrix}$$

۱. از طرفی طبق رابطه کتاب در صورتیکه واکسیناسیون بصورت رندم انجام شود حداقل تعداد موردنیاز برای از بین بردن بیماری از رابطه زیر بدست می آید:

$$P_c = 1 - \frac{1}{R_0}$$

$$= 1 - \frac{1}{1.94} \simeq 0.48 \rightarrow$$

بنابراین ۴۸ درصد از کل جمعیت باید واکسینه شوند تا بیماری ریشه کن شود

۱) معادلات دیفرانسیل حاکم بر این سیستم SIR بصورت زیر می باشد:

$$\frac{dS_C}{dt} = \nu - S_C(\beta_{CC} I_C + \beta_{CA} I_A) - \mu_C S_C - l_C S_C$$

$$\frac{dI_C}{dt} = S_C(\beta_{CC} I_C + \beta_{CA} I_A) - \gamma I_C - \mu_C I_C - l_C I_C$$

$$\frac{dS_A}{dt} = l_C S_C - S_A(\beta_{AC} I_C + \beta_{AA} I_A) - \mu_A S_A$$

$$\frac{dI_A}{dt} = l_C I_C + S_A(\beta_{AC} I_C + \beta_{AA} I_A) - \gamma I_A - \mu_A I_A$$

در این مدل، A و C به ترتیب بیانگر افراد بالغ و کودک هستند. ν نرخ تولد و μ بیانگر نرخ مرگ طبیعی می باشد، هم چنین معادلات حاکم بر R_C و R_A بصورت زیر می باشد:

$$\frac{dR_C}{dt} = \gamma I_C - \mu_C R_C - l_C R_C$$

$$\frac{dR_A}{dt} = \gamma I_A + l_C R_C - \mu_A R_A$$

این دسته معادلات را با استفاده از کتابخانه scipy حل می کنیم و نمودارهای آن را رسم می کنیم. در شکل 5 نمودارهای S، I و R را برحسب زمان می بینید. ثوابت این معادله عبارت اند از: $\beta = \begin{pmatrix} 100 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$ ، $\mu_C = 0$ ، $\mu_A = 0.0167$ ، $l_C = 0.0667$. برای یافتن ν معادلات هر دسته را با یکدیگر جمع می زنیم و فرض می کنیم نسبت جمعیت کودکان و بزرگسالان به زمان ثابت اند به عبارت شده:

$$\frac{dS_c}{dt}+\frac{dI_c}{dt}+\frac{dR_c}{dt}=0$$

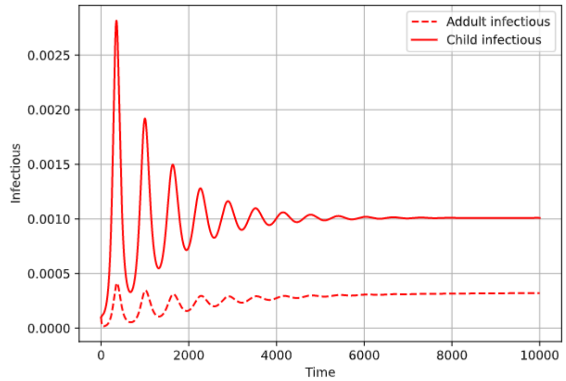
$$\rightarrow \nu-\cancel{\overset{0}{\mu_c}}S_c-l_c S_c-\cancel{\gamma I_c}-\cancel{\overset{0}{\mu_c}}I_c-l_c I_c+\cancel{\gamma I_c}-\cancel{\overset{0}{\mu_c}}R_c-l_c R_c$$

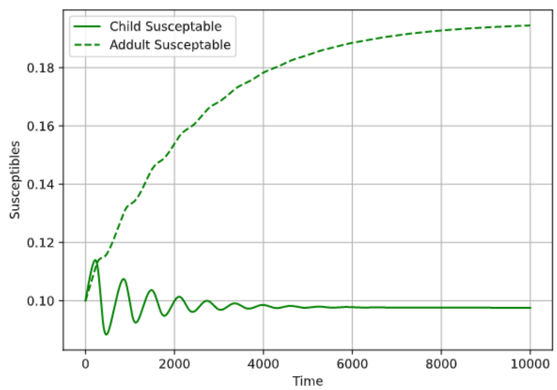
$$=0$$

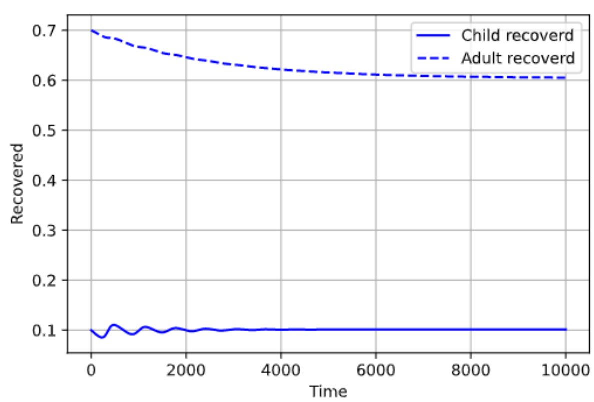
$$\rightarrow \nu-l_c S_c-l_c I_c-l_c R_c=0$$

$$\rightarrow \nu-l_c(\underbrace{S_c+I_c+R_c}_{n_c})=0$$

$$\rightarrow \nu=\underset{\substack{b\\0.2}}{n_c}\times 0.0667 \rightarrow \boxed{\nu=0.01334}$$







شکل۵. نمودار گروه مستعد و بیمار و بهبود یافته برحسب زمان برای معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدل SIR با دو گروه بالغ و کودک. همانطور که دیده می شود در ابتدا شاهد نوسان هایی هستیم اما به مرور این نوسان ها کم شده و به حالت پایدار می رسیم. شرایط اولیه را برای هر دو گروه بصورت ۰,۱ مستعد و ۰,۰۰۰۱ بیمار قرار داده ایم و معادلات را با solve_ivp در کتابخانه scipy حل کرده ایم.

معادلات SEIR بصورت زیر میباشد:

$$\frac{dS_c}{dt} = \nu - (\beta_{cc} S_c I_c + \beta_{cA} S_c I_A) - \mu_c S_c - l_c S_c$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \beta_{cc} S_c I_c + \beta_{cA} S_c I_A + \sigma_c E_c - \mu_c E_c - l_c E_c$$

$$\frac{dI_c}{dt} = \sigma E_c - \mu_c I_c - \gamma I_c - l_c I_c$$

$$\frac{dR_c}{dt} = \gamma I_c - \mu_c R_c - l_c R_c$$

$$\frac{dS_A}{dt} = l_c S_c - (\beta_{AA} S_A I_A + \beta_{Ac} S_A I_c) - \mu_A S_A$$

$$\frac{dE_A}{dt} = l_c E_c + (\beta_{AA} S_A I_A + \beta_{Ac} S_A I_c) - \mu_A E_A - \sigma_A E_A$$

$$\frac{dI_A}{dt} = l_c I_c + \sigma E_A - \mu_A I_A - \gamma I_A$$

$$\frac{dR_A}{dt} = l_c R_c + \gamma I_A - \mu_A R_A$$