گردآورندگان: امیررضا کاظمی، روزبه مشکین، پدرام خرسندی، آیدا رمضانی

توزیع توام، توزیع شرطی و حاشیه‌ای، نامساوی های احتمالاتی

مسئله‌ی ۱. دست گرمی*

سه متغیر تصادفی $Y_۱$، $Y_۲$ و $Y_۳$ از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ پیروی می‌کنند. اگر این سه متغیر هر کدام طول یک چوپ را نشان دهند، احتمال ساخت مثلث با این سه قطعه چوب را بیابید.

مسئله‌ی ۲. دست گرمی ۲

سه متغیر تصادفی $U_۱$، $U_۲$ و $U_۳$ از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ پیروی می‌کنند. متغیرهای L و M به ترتیب مقادیر مینیمم و ماکزیمم این سه متغیر هستند.

الف

تابع توزیع تجمعی و چگالی احتمال L را بیابید.

ب

تابع توزیع تجمعی توام و چگالی احتمال توام L و M را بیابید.

مسئله‌ی ۳. متغیر تصادفی های مستقل*

الف

فرض کنید در حال تست کردن ۳ لامپ از شرکت های مختلف هستیم. تاریخ انقضای هر کدام از لامپ های $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ متغیر تصادفی های نمایی با امید ریاضی به ترتیب $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۸}$ می‌باشد (بر حسب سال). با فرض اینکه تاریخ انقضای لامپ ها مستقل از هم باشند، اگر T متغیر تصادفی مدت زمانی باشد که هر ۳ لامپ روشن هستند تابع چگالی احتمال آن را بیابید.

ب

متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ می‌باشد. c را به گونه ای بیابید که $E_X[\| X-c \|]$ کمینه شود.

مسئله‌ی ۴. توزیع توام*

الف

متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید به طوریکه $f_X(x) = kx^۲$ و $۳ \leqslant x \leqslant ۰$ و همچنین متغیر تصادفی Y به این صورت تعریف شده است $Y = X^۳$. حال مقادیر k ، $var(Y)$ را بیابید

ب

اگر برای متغیر تصادفی های مستقل X و Y داشته باشیم: $f_X(x) = Exp(x, ۱)$ و $f_Y(y) = Exp(y, ۱)$ تابع چگالی احتمال $\frac{U}{V}$ را محاسبه کنید به طوریکه $U = min(X, Y)$ و $V = max(X, Y)$
راهنمایی : $\int_x e^{-ax}\, dx = -\frac{(ax+۱)e^{-ax}}{a^۲}$

مسئله‌ی ۵. شمارش تخم مرغی

متغیر تصادفی N تعداد تخم مرغ های یک مزرعه است که از توزیع پوآسون با متغیر λ پیروی می‌کند. هر تخم مرغ با احتمال p به جوجه تبدیل می‌شود و شکستن تخم مرغ ها از هم مستقل است . متغیر تصادفی X تعداد تخم مرغ هایی هستند که به جوجه تبدیل می‌شوند و متغیر تصادفی Y تعداد آنهایی است که تبدیل نمی‌شوند . توزیع توام را برای دو متغیر تصادفی X و Y بدست آورید.

مسئله‌ی ۶. جمع متغیرهای تصادفی*

فرض کنید x یک متغیر تصادفی uniform باشد به طوری که

$$f_X(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

و y یک متغیر تصادفی exponential و مستقل از x باشد که

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geqslant ۰ \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

همچنین فرض کنید

$$Z = X + Y$$

الف

تابع توزیع Z را محاسبه کنید.

ب

تابع توزیع تجمعی Z را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۷. جمع متغیرهای تصادفی گسسته

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته و $R_x = \{۰, ۱, ۲\}$. تابع توزیع X را اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$P_X(x) = \begin{cases} ۱/۳ & x \in R_X \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

همچنین فرض کنید Y متغیر تصادفی گسسته‌ای باشد که مستقل از X است و $R_Y = \{۱, ۲\}$ تابع توزیع Y را اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}y & y \in R_Y \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

تابع توزیعِ $Z = X + Y$ را بیابید.

مسئله‌ی ۸. تابع توزیع متغیرهای تصادفی مستقل

ثابت کنید متغیرهای $X_۱$ ، ... ، X_n مستقلند اگر و تنها اگر تابع توزیع توام آن‌ها به شکل زیر قابل بیان باشد.

$$f(x_۱, x_۲, ..., x_n) = \prod_{i=۱}^{n} g_i(x_i)$$

g_i تابعی مثبت است.

مسئله‌ی ۹. نامساوی مارکوف

فرض کنید متغیر تصادفی X از یک توزیع $Binomial(n, p)$ می‌آید.

الف

اگر $p < \alpha < ۱$ ، با استفاده از نابرابری مارکوف، یک کران بالا برای $P(X \geqslant \alpha n)$ بیابید.

ب

مقدار عددی این کران را برای $p = \frac{۱}{۲}$ و $\alpha = \frac{۳}{۴}$ بیابید.

مسئله‌ی ۱۰. نامساوی چبیشف*

فرض کنید متغیر تصادفی X از یک توزیع $Binomial(n, p)$ می‌آید.

الف

با فرض اینکه $p < \alpha < ۱$ و استفاده از نابرابری چبیشف، یک کران بالا برای $P(X \geqslant \alpha n)$ بیابید.

ب

مقدار کران بالا را برای $p = \frac{۱}{۲}$ و $\alpha = \frac{۳}{۴}$ تعیین کنید.

مسئله‌ی ۱۱. تراشه ها*

حدود ۲ درصد از تراشه‌های RAM تولید شده در یک کارخانه خراب است. علی به ۵۰ عدد RAM سالم برای آزمایشگاهش نیاز دارد. علی باید چه تعداد تراشه RAM خریداری کند تا مطمئن باشد با احتمال حداقل ۹۹ درصد، حداقل ۴۹ تراشه سالم RAM دارد؟

موفق باشید