



مسئله ۱. *

در طی یک مطالعه روی رفتار غذا خوردن پرندگان، تعداد دفعه‌های اوج گرفتن پرندگان در طول پرواز تعدادی پرنده اندازه‌گیری شده‌است.

۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	hops
۱	۲	۱	۱	۲	۴	۵	۶	۹	۲۰	۳۱	۴۸	Freq.

الف

یک توزیع هندسی به داده‌های بالا اختصاص دهید.

ب

برای p یک بازه اطمینان ۹۵٪ اختصاص دهید.

مسئله ۲. *

توزیع لاپلاس به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, -\infty < x < \infty$$

برای یک نمونه یکنواخت با سایز $n = 2m + 1$ ، نشان دهید تخمین‌گر بیشینه‌ی θ میانه‌ی نمونه می‌باشد.

مسئله ۳. *

فرض کنید Y_1, Y_2, \dots, Y_n داده‌هایی رندوم هستند که از یک توزیع یکنواخت $(0, \theta)$ باشد. دو تخمین‌گر زیر را در نظر بگیرید:

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{Y} \text{ and } \hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}Y_{(n)}$$

طوری که $Y_{(n)} = \max(Y_1, \dots, Y_n)$ باشد.

الف

مقدار $bias$ این دو تخمین‌گر را بدست آورید.

ب

مقدار واریانس این دو تخمین‌گر را بدست آورید.

ج

مقدار MSE را بدست آورده و باهم مقایسه کنید.

مسئله ۴.

سارا یک سکه را ۳ بار پرتاب می‌کند و هیچ بار شیر نمی‌بیند. بعد سکه را به شادی می‌دهد. شادی تا زمانی که اولین شیر را ببیند سکه را پرتاب می‌کند و در کل ۴ بار سکه را پرتاب می‌کند. θ را احتمال شیر آمدن سکه را در نظر بگیرید. بیشینه تخمین‌گر θ را حساب کنید.

مسئله ۵.

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تأیید کنید.

الف

بازه اطمینان ۹۹٪ را برای میانگین (μ) را برای توزیع نرمال با پارامترهای $(-۰/۲, ۳/۰)$ در نظر بگیرید. تست $H_0: \mu = -۳$ در مقابل $H_A: \mu \neq -۳$ با اطمینان ۰/۰۱ رد می‌شود.

ب

اگر یک تست با اطمینان α رد شود، احتمال اینکه فرض صفر درست باشد α می‌باشد.

ج

عده ای معترض به سطح غذای شریف پلاس اعتراض می‌کنند. رئیس دانشگاه می‌تواند با استناد به این گروه از افراد به عنوان یک نمونه از دانشجویان، شریف پلاس رو تعطیل کند.

می‌خوایم تخمینی از میزان تهرانی/شهرستانی بودن دانشجویان دانشگاه داشته باشیم. می‌توانیم برای رفتن نمونه جلوی در انرژی بایستیم و به صورت رندوم عده‌ای رو انتخاب کنیم و از آن‌ها تهرانی بودن یا شهرستانی بودن را بپرسیم.

مسئله‌ی ۶. *

بیماری فلان، بیماری کشنده‌ای است که آزمایشگاه بهمان به تازگی شروع به کار روی آن کرده است. از میان مبتلایان به بیماری فلان، دو نمونه مجزای A و B که هریک شامل ۳۰ نفر میشد در آزمایشگاه بهمان مورد آزمایش قرار گرفت. به گروه A داروی تازه کشف شده در آزمایشگاه بهمان داده شد و به گروه B دارویی داده نشد. بعد از گذشت ۳۰ روز ۲۵ نفر از گروه A و ۱۵ نفر از گروه B از چنگال بیماری فلان رهایی یافتند. اگر μ_A و μ_B به ترتیب نسبت واقعی افرادی که با مصرف داروی فلان و بدون مصرف داروی فلان بهبود میابند باشد و $\hat{\mu}_A$ و $\hat{\mu}_B$ مقدار تخمین زده شده از این دو با استفاده از نمونه‌گیری آزمایشگاه بهمان باشد، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف

همانطور که می‌دانید $\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B$ یک متغیر تصادفی است. حدس می‌زنید $\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B$ از چه توزیعی پیروی کند؟ حدس خود را اثبات کنید.

ب

با استفاده از یافته‌ی خود در بخش الف و با توجه به داده‌های مسئله، بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی برای $\mu_A - \mu_B$ بسازید. آیا $\mu_A = \mu_B$ در این بازه وجود دارد؟

مسئله‌ی ۷.

طول میله‌های آهنی تولید شده در کارخانه فولاد مبارکه اصفهان از توزیع نرمال با واریانس ۳/۲۴ میلی‌متر پیروی میکند. بر اساس اندازه‌گیری ۹ نمونه از این میله‌ها بازه‌ی اطمینان ۹۹ درصدی برای میانگین طول میله‌ها برابر $[194/65mm, 197/75mm]$ است. مدیر کارخانه معتقد است که طول این بازه برای استفاده در محاسبات کارخانه‌اش بسیار زیاد است و نیاز به بازه‌ی اطمینان ۹۹ درصدی دارد که طول بازه بیش‌تر از ۱ میلی‌متر نباشد.

الف

چه تعداد نمونه لازم است تا طول بازه اطمینان ۹۹ درصدی بیش از ۱ میلی‌متر نشود؟

ب

بار دیگر سوال قسمت الف را با استفاده از نامساوی چبیشف حل کنید.

ج

آیا اعداد بدست آمده در قسمت الف و ب یکسان‌اند؟ حدس می‌زنید دلیل آن چیست؟

مسئله‌ی ۸. *

یکی از محصولات کارخانه تولید لوازم الکتریکی یزد، ترموستات یا دماپا است. این کارخانه این محصول را به گونه‌ای تولید میکند که واریانس بالاترین دمایی که این دماپاها کنترل میکنند ۴ درجه است. همچنین برای استاندارد بودن محصول لازم است که میانگین بالاترین دمایی که دماپاها کنترل میکنند کمتر از ۵۰ درجه نباشد. مدیر کارخانه قصد دارد آزمون آماری انجام دهد تا استاندارد بودن محصول خود را نشان دهد. او یک نمونه ۲۰ تایی از دماپاهای ساخت کارخانه‌اش را مورد آزمایش قرار میدهد و میانگین بالا ترین دمای قابل کنترل آنها را برابر $48/34$ محاسبه میکند.

الف

فرض صفر و فرض جایگزین را بیان کنید. آیا نیاز به انجام آزمون یک طرفه است یا دوطرفه؟ چرا؟

ب

آزمون مناسب را با سطح اهمیت ۹۵ درصد انجام دهید. ادعای مدیر کارخانه رد میشود یا خیر؟

ج

میزان خطای نوع دوم در این آزمایش را با فرض این که میانگین واقعی حداکثر دمای قابل کنترل دماپاهای شرکت یزد برابر ۴۸ درجه است بدست آورید.

د

آیا میتوانید میزان خطای نوع دوم را بدون فرضی درمورد مقدار واقعی میانگین بدست آورید؟ (نیازی به انجام کامل محاسبات نیست.)

مسئله ۹. *

یکی از اجزای دستگاهی که سامان ساخته است خیلی سریع گرم میشود برای همین سامان میخواهد تراشه‌ای جدید به دستگاهش اضافه کند تا مانع گرم شدن بیش از حد دستگاه شود. برای بررسی چگونگی عملکرد تراشه‌ی جدید سامان ۶ عدد از دستگاه‌هایی که ساخته است و برای هر یک مدت زمانی که طول میکشد تا دستگاه به دلیل گرمای زیاد خاموش شود را قبل و بعد از اضافه کردن تراشه اندازه گرفته است. فرض کنید مدت زمان روشن بودن دستگاه از توزیع نرمال پیروی میکند. در جدول زیر مقادیر آزمایش سامان درج شده است.

بدون تراشه (دقیقه)	با تراشه (دقیقه)
۳۹	۵۹
۴۵	۶۴
۴۷	۷۱
۶۱	۵۶
۴۸	۶۱
۵۵	۶۴

الف

آزمون آماری مناسب را برای تعیین اینکه وجود این تراشه باعث ایجاد تفاوت در مدت زمان روشن بودن دستگاه شده است یا نه، با سطح اهمیت ۹۰ درصد بدست آورید.

ب

بازهی اطمینان ۹۰ درصدی برای میانگین واقعی میزان افزایش یا کاهش در زمان روشن بودن دستگاه به سبب وجود این تراشه را بدست آورید. معنی بازهی بدست آمده را با توجه به مسئله به صورت خلاصه شرح دهید.

ج

هدف سامان از ساخت این تراشه افزایش مدت زمان روشن بودن دستگاه به اندازه‌ی ۲۰ دقیقه بود. آیا میتوانید با استفاده از داده‌های مسئله با سطح اهمیت حداقل ۹۰ درصد مشخص کنید که سامان به هدف خود رسیده است یا خیر؟ آیا یافته‌های شما در قسمت الف یا ب برای پاسخ به این سوال کافی است؟

مسئله ۱۰.

به بیمارستانی شکایت شده است که کیفیت درمان در دو بخش از آن به شدت متفاوت است و

آمار گزارش شده مبنی بر این است که میانگین زمان حضور بیمار در بیمارستان تا بهبودی اش برای ۱۰ بیمار بررسی شده در بخش اول برابر ۱۲ روز است و واریانس این متغیر در نمونه بررسی شده برابر ۱ است و میانگین این مقدار برای یک نمونه ۲۰ تایی از بیماران بخش دوم برابر ۳۰۱۳ روز با واریانس ۳ است. مدیر بیمارستان، قلی خان، قصد ندارد این شکایت را بپذیرد. شکایت کننده از قلی خان را در فرایند شکایت یاری کنید.

الف

مدیر برای نشان دادن یکسان بودن عملکرد دو بخش باید از چه آزمونی استفاده کند؟ این آزمون یکطرفه است یا دوطرفه؟ چرا؟

ب

شاکی قلی خان را یاری کنید که با سطح اهمیت ۹۵ درصد فرض خود را بیازماید.

ج

شکایت کننده از بیمارستان قلی خان حداکثر با چه دقتی میتواند ادعا کند که کیفیت در درمان دو بخش یکسان نیست؟

(موفق باشید :)