



مسئله ۱. توزیع Pareto

توزیع Pareto با دو پارامتر α و x_m مشخص می شود. می دانیم که x_1, x_2, \dots و x_n داده هایی رندوم از توزیع Pareto با $\alpha > 2$ هستند. خصوصیات توزیع Pareto داده هایمان در ادامه آورده شده است:

$$PDF: \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \alpha > 2, x_m > 0, x \geq x_m$$

$$CDF: 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha$$

$$Mean: \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1}$$

$$Variance: \frac{\alpha x_m^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$$

الف

با استفاده از تخمین گر MLE پارامترهای α و x_m را تخمین بزنید.

ب

وضعیت unbiased بودن و consistent بودن تخمین گر MLE برای x_m را مشخص کنید. (راهنمایی: اگر n متغیر تصادفی iid از توزیعی با F باشد، مینیموم این متغیرها متغیر تصادفی ای با $CDF: 1 - (1 - F)^n$ است)

مسئله ۲.

جدول t در ادامه آمده است.

اداره هواشناسی یک شهر، ۴ دستگاه سنجش آلودگی هوا را در یک منطقه قرار داده است. فرض کنید شاخص آلودگی هوا در این منطقه ثابت است اما این دستگاه ها دقیق نیستند و شاخص را با کمی نویز گزارش می دهند. در یک روز نسبتاً آلوده، مقادیر گزارش شده توسط این ۴ دستگاه به شرح زیر است.

۱۵۲، ۱۴۸، ۱۵۳، ۱۵۳

الف

با کمک داده‌های جمع آوری شده، یک بازه اطمینان ۹۵ درصد برای شاخص آلودگی هوا در آن ایستگاه ارائه دهید.

ب

در صورتی که شاخص آلودگی هوا از ۱۵۰ بیشتر باشد، هوا در شرایط ناسالم برای تمامی گروه‌ها قرار می‌گیرد. عده‌ای از دانشمندان معتقدند که میانگین شاخص آلودگی ۱۵۰ بوده بنابراین هوای این منطقه ناسالم نیست، در حالی که عده‌ی دیگری معتقدند میانگین شاخص آلودگی به طور معنی‌داری از ۱۵۰ بیشتر بوده و هوا ناسالم است. برای بررسی این افراد یک آزمون فرض طراحی کنید. فرض صفر و فرض دیگر این آزمون را بیان کرده و سپس مشخص کنید آیا با سطح اهمیت ۰/۰۵ می‌توان فرض صفر را رد کرد یا خیر.

پ

برای کاهش خطای نوع اول، باید سطح اهمیت را افزایش دهیم یا کاهش؟ برای کاهش خطای نوع دوم چه طور؟

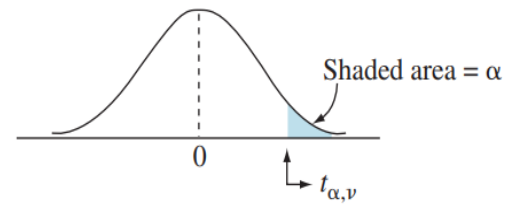


TABLE 2

Percentage points of Student's t distribution

$df/\alpha =$.40	.25	.10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073

موفق باشید