



مسئله‌ی ۱. صف

شش پسر و نه دختر می‌خواهند که در یک صف کنار یکدیگر قرار بگیرند. فرض کنید متغیر S برابر با تعداد مکانهایی باشد که یک پسر و یک دختر کنار هم قرار گرفته باشند (به طور مثال در صف GBGGBBGBBGGGGBGG متغیر S برابر با ۸ است). مقدار میانگین S (اگر تمامی ترتیب‌های قرارگیری این پانزده نفر را در نظر بگیریم) برابر با چه مقداری است؟

حل.

دختر i و پسر j را در نظر می‌گیریم. این دو نفر خود دو حالت قرارگیری در کنار هم دارند و ۱۴ جا برای کنار هم قرار بگیرند و بقیه افراد چیده می‌شوند. به ازای تمامی i و j ‌ها:

$$\frac{14 * (2 * 6 * 9 * 13!)}{15!} = 7/2$$

▷

مسئله‌ی ۲. گزاره

اگر رخ داده‌های A و B مستقل از هم باشند، صحت گزاره‌ی زیر را بررسی کنید. (در صورتی که درست است، آن را اثبات نمایید و در صورتی که درست نیست، برای آن مثال نقض بیاورید)

$$P(A \cap B|C) = P(A|C) \times P(B|C)$$

حل.

درست نیست، به عنوان مثال در صورتی که:

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}, C = \{1, 3\}$$

داریم:

$$P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B) \Rightarrow P(A \cap B|C) = 0$$

$$P(A|C)P(B|C) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B|C) \neq P(A|C) \times P(B|C)$$

▷

مسئله‌ی ۳. بازی

دو نفر به نام‌های A و B مشغول یک بازی هستند که شرح آن در ادامه می‌آید. ابتدا A عدد ۱ یا ۲ را روی یک کاغذ می‌نویسد و آن را پنهان می‌کند. B باید حدس بزند عددی که A نوشته، چه بوده است. اگر عددی که A نوشته i باشد و حدس B هم درست باشد، در آن صورت A باید i تومن به B بدهد. اما اگر حدس B نادرست باشد، B باید $\frac{3}{4}$ تومن به A بدهد. اگر B به صورت رندوم حدس بزند به طوری که با احتمال p حدس بزند ۱ و با احتمال $1 - p$ حدس بزند ۲، امید ریاضی پول دریافتی توسط B را در دو حالت زیر محاسبه کنید.

الف

اگر A عدد ۱ را روی کاغذ نوشته باشد.

ب

اگر A عدد ۲ را روی کاغذ نوشته باشد.

حل.

الف

اگر A عدد ۱ را بنویسد و B به با احتمال p به درستی عدد A را حدس بزند و با احتمال $1 - p$ اشتباه حدس بزند، می‌توان امید ریاضی پول دریافتی توسط B را به شکل زیر محاسبه کرد:

$$E(X_1) = 1 \times p - 0.75(1 - p) = \frac{7}{4}p - \frac{3}{4}$$

ب

اگر A عدد ۲ را بنویسد و B با احتمال $1 - p$ درست حدس بزند و با احتمال p اشتباه کند، می‌توان امید ریاضی پول دریافتی توسط B را به شکل زیر محاسبه کرد:

$$E(X_2) = 2(1 - p) - 0.75p = 2 - \frac{11}{4}p$$

▷

(موفق باشید :)