آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۹۷ــ۹۸

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پاسخ نامه آزمون میان‌ترم

تاریخ برگزاری: ۱۳ آذر ۱۳۹۷

مسئله‌ی ۱. برای اولین بار *ــ* : متوسط پاسخ (۸ نمره)

به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) با مشخص کردن جایگاه ۴ شیر قبل از ۱۰ امین پرتاب، احتمال رویداد به شکل زیر محاسبه می‌شود:
$\binom{۹}{۴} \times p^{۴} \times (۱ - p)^{۵} \times p = \binom{۹}{۴} \times p^{۵} \times (۱ - p)^{۵}$

ب)

$$P(B|A) > P(B) \Rightarrow P(B,A) > P(B)P(A) \Rightarrow \frac{P(B,A)}{P(B)} > P(A) \Rightarrow P(A|B) > P(A)$$

ج) باید توجه کرد که جمله اول برای متغیرهای تصادفی مستقل صادق است، در حالی که X از خودش مستقل نیست و این استدلال باطل است. جمله دوم عبارت صحیحی است.

د) خیر. (واریانس به معنای میانگین مجذور فاصله از میانگین می باشد)

ه) علی را A و رضا را B و اصغر را C در نظر می‌گیریم. حال ۴ حالت داریم:
- رئیس B را بگوید و A و B آزاد شوند.
- رئیس C را بگوید و A و C آزاد شوند.
- رئیس B را بگوید و C و B آزاد شوند.
- رئیس C را بگوید و A و C آزاد شوند.

حال احتمال رویدادها:

$$P(Event۱) = P(says\ B|A\&B\ be\ released)\ P(A\&B\ be\ released) = ۱ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

به شکل مشابه، احتمال رویداد دوم نیز همین است.

$$P(Event۳) = P(says\ B|B\&C\ be\ released)\ P(B\&C\ be\ released) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

به شکل مشابه، احتمال رویداد چهارم نیز همین است.

حال احتمال اینکه علی و رضا آزاد شوند و رئیس رضا را بگوید:

$$P(Abereleased|says\ B) = \frac{P(A\&B\ be\ released\ and\ says\ B)}{P(says\ B)}$$

$$= \frac{P(A\&B\ be\ released\ and\ says\ B)}{P(A\&B\ be\ released\ and\ says\ B) + P(B\&C\ be\ released\ and\ says\ B)} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶}} = \frac{۲}{۳}$$

مسئله‌ی ۲. لِی لِی در پارک (۵ نمره)

فرض کنیم متغیر تصادفی W بیانگر تعداد افرادی است که میخواهند در جای پارک در بازه‌ی ۵ دقیقه پارک کنند.
ما به دنبال $P(W = ۰)$ هستیم:

$P(W = ۰) = \sum_{x=۰}^{\infty} P(W = ۰|X = x)P(X = x) = \sum_{x=۰}^{\infty} (۱ - p)^x \frac{e^{-۵\lambda}(۵\lambda)^x}{x!} =$
$e^{-۵\lambda} \sum_{x=۰}^{\infty} \frac{[(۱-p)(۵\lambda)]^x}{x!} = e^{-۵\lambda} e^{(۵\lambda)(۱-p)} = e^{-۵\lambda p}$

که عبارت درون سیگمای آخر برابر بسط تیلور $e^{(۵\lambda)(۱-p)}$ حول صفر است و به آن ساده شده است.

مسئله‌ی ۳. افراز بافنده (۵ نمره)

- $P(A \cap B|C_i) = P(A|C_i) * P(B|C_i)$
- $P(B \cap C_i) = P(B)$

$$\to P(A \cap B|C_i) = P(A|C_i) * P(B)$$

$$\to \sum_i P(A \cap B|C_i) = P(A|C_i) * P(B) = P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

پس اثبات شد که A و B از هم مستقل‌اند.

مسئله‌ی ۴. نرمال بی‌توان (۶ نمره)

الف

راه حل بخش اول

$1)\ y \leqslant 0 : F_Y(y) = p(Y \leqslant y) = p(e^X \leqslant y) = 0$
$\implies f_Y(y) = 0$
$2) y > 0 : F_Y(y) = p(Y \leqslant y) = p(e^X \leqslant y) = p(X \leqslant ln(y)) = F_X(ln(y))$
$\implies f_Y(y) = F'_Y(y) = (F_X(ln(y))' = F'_X(ln(y)).(ln(y))' = f_X(ln(y)).\frac{1}{y}$
$= \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

ب

راه حل بخش دوم
متغیر تصادفی Y را با X نشان میدهیم.
که در تساوی A از تغییر متغیر زیر استفاده کردیم:

$$t = \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}$$

$$dt = \frac{1}{\sigma x}dx \quad \Rightarrow \quad \sigma x dt = dx \quad \Rightarrow \sigma \exp(\mu + \sigma t)dt = dx$$

$$x \to 0 \Rightarrow t \to -\infty$$

$$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$$

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}[X] \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\
& = \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx \\
\boxed{A} & = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \sigma \exp(\mu + \sigma t) dt \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(t^2 - 2\sigma t + \sigma^2)\right) \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt \\
& = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(t-\sigma)^2\right) dt \\
\boxed{B} & = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)
\end{aligned}$$

و در تساوی B از این نکته استفاده کردیم که

$$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}(t-\sigma)^۲}$$

تابع چگالی احتمال یک توزیع نرمال با میانگین σ ۱۱.

مسئله‌ی ۵. توام بی‌امان (۶ نمره)

A.

$$F(a,b) = P(max(X,Y) <= a, min(X,Y) <= b) = \begin{cases} ۰ & \mathrm{b} < \mathrm{a} \\ P(X <= a, Y <= b, X > Y) + & \\ P(X <= b, Y <= a, Y > X) & \mathrm{a} \leqslant b \end{cases}$$

$$P(X <= a, Y <= b, X > Y) =$$
$$\int_{۰}^{b} \gamma e^{-\gamma y} dy \int_{y}^{a} \lambda e^{-\lambda x} dx$$
$$= \int_{۰}^{b} \gamma(-e^{-\gamma y - \lambda a} + e^{-(\lambda+\gamma)y}) dy = -e^{-\lambda a} + e^{\lambda a - \gamma b} + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma}(۱ - e^{-(\lambda+\gamma)b})$$

$$\Rightarrow P(X <= a, Y <= b, X > Y) + P(X <= b, Y <= a, Y > X) =$$
$$- e^{-\lambda a} - e^{-\gamma a} + e^{-\lambda a - \gamma b} + e^{-\gamma a - \lambda b} + ۱ + e^{-(\lambda+\gamma)b}$$

$$f_{min(X,Y), max(X,Y)}(a, b) = \frac{\partial^۲ F}{\partial a \partial b} = \lambda\gamma(e^{-\lambda a - \gamma b} + e^{-\gamma a - \lambda b})$$

B.

$$F(a, b) = P(X + Y <= a, |X - Y| <= b)$$
$$= \int_{۰}^{a} \gamma e^{-\gamma y} dy \int_{max(y-b,۰)}^{min(y+b,a-y)} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{۰}^{a} \gamma e^{-\gamma y}(e^{-\lambda max(y-b,۰)} - e^{-\lambda min(y+b,a-y)}) dy$$
$$= \int_{۰}^{b} \gamma e^{-\gamma y} dy + \int_{b}^{a} \gamma e^{-(\lambda+\gamma)y + \lambda b} dy - \int_{۰}^{\frac{a-b}{۲}} \gamma e^{-(\lambda+\gamma)y - \lambda b} dy - \int_{\frac{a-b}{۲}}^{a} \gamma e^{(\lambda-\gamma)y - \lambda a} dy$$
$$= (۱ - e^{-\gamma b}) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma}(e^{-\gamma b} - e^{-(\lambda+\gamma)a + \lambda b} + e^{-(\frac{\lambda+\gamma}{۲})a + (\frac{\gamma-\lambda}{۲})b} - e^{-\lambda b}) + \frac{\gamma}{\lambda - \gamma}(e^{-(\frac{\lambda+\gamma}{۲})a + (\frac{\gamma-\lambda}{۲})b} - e^{-\gamma a})$$

$$f_{|X+Y|,|X-Y|} = \frac{\partial^۲ F}{\partial a \partial b} = \gamma\lambda e^{-(\lambda+\gamma)a + \lambda b} + \frac{\lambda\gamma - \gamma^۲}{۴} e^{-(\frac{\lambda+\gamma}{۲})a + (\frac{\gamma-\lambda}{۲})b} + \frac{\lambda\gamma + \gamma^۲}{۴} e^{-(\frac{\lambda+\gamma}{۲})a + (\frac{\gamma-\lambda}{۲})b}$$
$$= \lambda\gamma(e^{-(\lambda+\gamma)a + \lambda b} + \frac{۱}{۲} e^{-(\frac{\lambda+\gamma}{۲})a + (\frac{\gamma-\lambda}{۲})b}$$

مسئله‌ی ۶. کاپ طرح داستان (۶ نمره)

الف)

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = ۱ - \mathbb{P}(Y > y) = ۱ - \mathbb{P}(\min(X_۱, X_۲, \cdots, X_n) > y)$$

رخداد $\min(X_۱, X_۲, \cdots, X_n) > y$ زمانی اتفاق می‌افتد که برای هر X_i داشته باشیم $X_i > y$. با توجه به اینکه متغیرهای تصادفی X_i از هم مستقل‌اند، خواهیم داشت:

$$F_Y(y) = ۱ - \mathbb{P}(\min(X_۱, X_۲, \cdots, X_n) > y) = ۱ - \mathbb{P}(X_۱ > y)\mathbb{P}(X_۲ > y) \cdots \mathbb{P}(X_n > y)$$

$$= ۱ - (\mathbb{P}(X_i > y))^n$$

حال کافی است احتمال $\mathbb{P}(X_i > y)$ را محاسبه کنیم.

$$\mathbb{P}(X_i \leqslant y) = F_{X_i}(y) = \begin{cases} ۰ & y \leqslant a \\ \frac{y-a}{b-a} & a < y < b \\ ۱ & y \geqslant b \end{cases} \implies \mathbb{P}(X_i > y) = \begin{cases} ۱ & y \leqslant a \\ ۱ - \frac{y-a}{b-a} & a < y < b \\ ۰ & y \geqslant b \end{cases}$$

در نتیجه :

$$F_Y(y) = \begin{cases} ۰ & y \leqslant a \\ ۱ - (\frac{b-y}{b-a})^n & a < y < b \\ ۱ & y \geqslant b \end{cases} \implies f_Y(y) = \begin{cases} \frac{n}{b-a}(\frac{b-y}{b-a})^{n-۱} & a < y < b \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

ب)

$$\mathbb{E}(Y) = \int y f_Y(y) dy = \int_a^b y \frac{n}{b-a}(\frac{b-y}{b-a})^{n-۱} dy = \frac{n}{(b-a)^n} \int_a^b y(b-y)^{n-۱} dy$$

انتگرال جزء به جزء می‌گیریم:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{(b-a)^n}\Big(\frac{-y}{b}(b-y)^n + \int \frac{۱}{n}(b-y)^n dy\Big) = \frac{n}{(b-a)^n}\Big[\frac{-(b-y)^n(ny+b)}{n(n+۱)}\Big]_a^b$$

$$= \frac{n}{(b-a)^n}[۰ + \frac{(b-a)^n(na+b)}{n(n+۱)}] = \frac{na+b}{n+۱}$$