



مسئله‌ی ۱. برای اولین بار * - * : متوسط پاسخ (۴ نمره)

به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) یک دنباله نامتناهی از پرتاب های یک سکه را در نظر بگیرید که با احتمال p شیر می آید. احتمال این که پنجمین شیر در پرتاب دهم رخ دهد را محاسبه کنید.

ب) اگر رخ دادن پیشامد A پیشامد B را محتمل تر کند، آیا رخ دادن پیشامد B نیز پیشامد A را محتمل تر خواهد کرد؟

ج) تناقض دو جمله‌ی زیر را حل کنید:

• می‌دانیم جمع دو متغیر تصادفی مستقل پواسون با پارامترهای λ ، ω برابر با یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda + \omega$ است. پس اگر $X \sim \text{poi}(\lambda)$ و $Y = 2X$ پس $Y = X + X$ در نتیجه $Y \sim \text{poi}(2\lambda)$ و $\text{Var}(Y) = 2\lambda$.

• اگر $X \sim \text{poi}(\lambda)$ و $Y = 2X$ پس $\text{Var}(Y) = 4\text{Var}(X) = 4\lambda$.

د) درست یا غلط؟ پاسخ خود را در یک یا دو جمله توجیه کنید.

متغیر تصادفی X دارای امیدریاضی μ و واریانس ۱ می‌باشد. اگر تعداد زیادی نمونه از این متغیر تصادفی بگیریم، میانگین فاصله‌ی این نقاط از μ ، به ۱ میل میکند.

ه) علی و اصغر و رضا در زندانی زندانی‌اند. هر سه دارای شرایط لازم برای مورد عفو واقع شدن و آزاد شدن هستند اما رئیس زندان میخواهد تنها دو نفر را آزاد کند یعنی هر یک $\frac{2}{3}$ احتمال دارد که آزاد شوند. رئیس تصمیم خود را میگیرد و هر سه زندانیان را به دفتر خود میبرد تا تصمیم خود را به آنها اعلام کند. علی که خیلی نگران نیست از رئیس زندان میخواهد که اول نام فرد دیگری جز علی که میخواهد آزاد کند را بگوید (چه بخواد علی را آزاد کند چه نه). رئیس هم نام رضا را اعلام میکند. در حال حاضر احتمال آزاد شدن علی چقدر است؟ در یک یا دو جمله پاسخ خود را توجیه کنید.

مسئله‌ی ۲. لی لی در پارک (۴ نمره)

تعداد ماشین‌هایی که به طور میانگین در یک دقیقه از جلوی یک جای پارک روبه‌روی در دانشگاه می‌گذرند برابر λ است. احتمال این که هر فردی که از جلوی این جای پارک رد میشود بخواد ماشینش را در آن پارک کند p است. اگر شما ۵ دقیقه با جای پارک فاصله داشته باشید چقدر احتمال دارد که بتوانید ماشینتان را آنجا پارک کنید؟

مسئله‌ی ۳. مسابقه‌ی طرح داستان (۴ نمره)

از آنجایی که طراح این سوال با ۲ امتحان درگیر است، وقت طرح داستان نداشت. بنابراین برای مساله زیر یک داستان در ذهن خود بیافید و به آن پاسخ دهید.

فرض کنید که C_1, C_2, \dots, C_N افزایش‌های Sample Space ما می‌باشند. همچنین فرض کنید A و B دو رخداد هستند. دو داده‌ی زیر به ما داده شده است:

• دو رخداد A ، B به شرط C_i برای همه‌ی $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ مستقل‌اند.

• B از همه‌ی C_i ها مستقل است.

حال ثابت کنید که A و B مستقل‌اند.

مسئله‌ی ۴. نرمال بی‌توان (۶ نمره)

متغیر تصادفی X از توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 پیروی میکند.

الف

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = e^X$ را بدست آورید.

ب

امید ریاضی Y را بدست آورید.

مسئله‌ی ۵. توام بی‌امان (۲ نمره)

دو متغیر تصادفی نمایی X و Y به ترتیب با پارامترهای λ ، γ را در نظر بگیرید. مطلوبست تابع چگالی توام:

$$\min(X, Y) \text{ و } \max(X, Y)$$

$$|X - Y| \text{ و } |X + Y|$$

مسئله‌ی ۶. کاپ طرح داستان (۴ نمره)

طراح این سوال که طراح سوال ۳ هم هست مجدداً وقت طرح داستان نمکین را ندارد. اگر فکر می‌کنید داستان‌های جذابی برای این دو سوال دارید می‌توانید با مراجعه به الف ۰ واقع در ابن‌سینا جایزه‌ی خود را دریافت کنید:

فرض کنید که X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در بازه‌ی (a, b) باشند.

$$X_i \sim \text{Uniform}(a, b) \quad a < b$$

الف) فرض کنید $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ، تابع توزیع چگالی Y را بیابید.

ب) امید ریاضی متغیر تصادفی Y را محاسبه کنید.

برنده باشید