دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۹۸ـ۹۹

گردآورندگان: امیرحسین کریمی، آرمین مرادی

تمرین شماره‌ی ۵ کوورایانس و هم‌بستگی، ویژگی‌های امیدریاضی، قضیه‌ی حد مرکزی و اعداد بزرگ

کوواریانس و هم‌بستگی

مسئله‌ی ۱. مناسب برای ۴ تا ۹۹ سال

روز تولد ۱۰۰ نفر را در نظر بگیرید. فرض کنید روزهای تولد این افراد از هم مستقل هستند و با احتمال یکسانی می‌توانند هر یک از ۳۶۵ روز سال باشند.

الف

کوواریانس تعداد افرادی که در ۱ فروردین به دنیا آمده‌اند و تعداد افرادی که در ۲ فروردین به دنیا آمده‌اند را به دست آورید.

ب

از حاصل کوواریانس به‌دست‌آمده چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

مسئله‌ی ۲. * لاک‌پشت و بچه‌هایش

یک لاک‌پشت دریایی به تعداد $N \sim Pois(\lambda)$ در شن‌های ساحل تخم می‌گذارد. از هر تخم لاک‌پشت، به طور مستقل، با احتمال p بچه‌لاک‌پشتی متولد می‌شود. تعداد بچه‌لاک‌پشت‌هایی که متولد می‌شوند را X در نظر بگیرید، پس $X|N \sim Bin(N,p)$ (این یعنی به شرط دانستن مقدار N، متغیر تصادفی X از توزیع برنولی با پارامتری برابر با مقدار N پیروی می‌کند).
همین‌طور وقتی یک بچه‌لاک‌پشت سر از تخم بیرون می‌آورد، به طور غریزی شیب سرازیری ساحل و انعکاس نور ماه و ستارگان بر روی آب را دنبال می‌کند تا به دریا برسد. مدت زمانی که طول می‌کشد تا یک بچه‌لاک‌پشت حرکت کند تا به دریا برسد را $T \sim Exp(\mu)$ در نظر بگیرید.

الف

هم‌بستگی بین X و N را بیابید. (پاسخ شما باید تابعی از p باشد و λ حذف خواهد شد)

ب

اگر دو بچه‌لاک‌پشت به طور هم‌زمان سر از تخم بیرون بیاورند، زمان رسیدن آنها به ساحل را $T_۱$ و $T_۲$ در نظر بگیرید. حاصل $Cov(min(T_۱, T_۲), max(T_۱, T_۲))$ را به دست آورید. آیا درست است بگوییم $Cov(min(T_۱, T_۲), max(T_۱, T_۲)) = Cov(T_۱, T_۲)$؟

مسئله‌ی ۳. سفر به اعماق کنگو

متین در سفرش به کنگو، اطلاعاتی از گوریل‌های آن منطقه جمع‌آوری کرد. این اطلاعات شامل دسته‌بندی ۷۰۰ گوریل از نظر قد و وزن آنهاست که در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

قد/وزن	سبک	متوسط	سنگین
کوتاه	۱۷۰	۷۰	۳۰
بلند	۸۵	۱۹۰	۱۵۵

به جای وزن گوریل‌ها، متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید که می‌تواند سه مقدار ۰، ۱ و ۲ داشته باشد. به جای قد گوریل‌ها نیز متغیر تصادفی Y را در نظر بگیرید که می‌تواند دو مقدار ۰ و ۱ داشته باشد.

الف

با استفاده از از توزیع توأم و توزیع حاشیه‌ای بررسی کنید که آیا وزن و قد گوریل‌ها از هم مستقل هستند یا نه؟

ب

حاصل $Corr(X, Y)$ را به دست آورید و نتیجه را با قسمت الف مقایسه کنید.

خطی‌بودن امید ریاضی

مسئله‌ی ۴. * ساقی

آقای توالی شکسته‌بند محل است ک به دلیل مهارتش در بهبود شکستگی ساق پا به او ساقی می‌گویند. اما موفقیت اتفاقی نیست! او برای بهبود کامل شکستگی ساق پا یک فرمول بسیار پیچیده دارد.
آقای توالی برای اینکه بتواند کار خود را به خوبی انجام دهد باید زرده‌ی تخم ۵ گونه پرنده را با

قیر آسفالت قاطی کند و به خورد مریض بدهد. اگر حتی یکی از ۵ نوع تخم پرنده در معجون وجود نداشته باشد، مریض دچار دل‌شکستگی می‌شود.
تخم ۵ گونه پرنده را نمی‌توان از روی ظاهر تشخیص داد و خریدن هر تخم پرنده و تشخیص نوع آن یک ساعت طول می‌کشد.

الف

اگر آقای ساقی هربار مجبور باشد بطور اتفاقی یکی از ۵ نوع تخم پرنده را خریداری کند، به او کمک کنید تا امیدریاضی زمان لازم برای جمع آوری هر ۵ نوع را به‌دست آورد. .

ب

اگر آقای توالی بخواهد ۲۴ ساعت تمام نخوابد و هر ساعت یک تخم پرنده را امتحان کند، به طور میانگین چند نوع متمایز تخم پرنده به دست خواهد آورد؟

مسئله‌ی ۵. * در جنگل مِیمانم

به دلیل آتش‌سوزی‌های بی‌سابقه در جنگل آمازون، میمون‌ها قصد مهاجرت هرچه سریع‌تر به سوی آفریقا را دارند... اما مشکل آنجاست که فقط یک قایق دارند. برای اینکه حق هیچ میمونی ضایع نشود، رئیس قبیله تصمیم می‌گیرد همه را به صف بایستاند. او اسم هر میمون را درون نارگیلی می‌نویسد و سپس همه‌ی نارگیل‌ها را پشت یک وانت می‌اندازد. میمون‌ها به ترتیب از اول صف یکی یکی نارگیل برمی‌دارند و نام داخل آن را می‌خوانند. میمونی که نامش خوانده شود سوار قایق شده و از شر آتش رهایی می‌یابد!

الف

به طور میانگین انتظار می‌رود اگر ۱۰۰ میمون داشته باشیم، چند میمون اسم خودشان را درون نارگیلی که برمی‌دارند ببینند؟ این رابطه را برای n میمون نیز بدست آورید.

ب

برای n میمون امید ریاضی جفت میمون‌هایی که هرکدام اسم دیگری را برمی‌دارد محاسبه کنید.

ج

میمون‌ها را در صف به ترتیب با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم و حاصل نارگیل‌برداری میمون iم را a_i می‌نامیم. اگر b_i را $max\{a_۱, \cdots, a_i\}$ تعریف کنیم، امید ریاضی تعداد اعضای منحصربه‌فرد $\{b_۱, b_۲, \cdots, b_n\}$ را به‌دست آورید.

شرطی‌بودن امید ریاضی

مسئله‌ی ۶. * کامپیوت.

توزیع توأم متغیر X و Y به صورت زیر است:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} a(۳x + y), & ۰ < x, y < ۱ \\ ۰, & \text{o.w.} \end{cases} \quad (۱)$$

الف

ثابت a را بدست آورید.

ب

احتمال $P(X < ۰/۵ | Y > ۰/۵)$ را محاسبه کنید.

ج

$E[X|Y > ۰/۵]$ و $Var(X|Y = ۰/۵)$ را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۷. * نمایی‌شون

سه متغیر تصادفی $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ از توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda_i}$ پیروی می‌کنند.

الف

$E[X_۱ + X_۲ + X_۳ | X_۱ > ۱, X_۲ > ۲, X_۳ > ۳]$ را بر حسب λ_iها بیابید.

ب

ثابت کنید $Pr(X_۱ < X_۲) = \frac{\lambda_۱}{\lambda_۱+\lambda_۲}$.

ج

$Pr(X_۱ = min(X_۱, X_۲, X_۳))$ را بیابید.

راهنمایی: سعی کنید احتمال خواسته‌شده را با استفاده از $X_۱$ و $min(X_۲, X_۳)$ بیان کنید. توزیع کمینه‌ی چند متغیر نمایی را به یاد بیاورید و از نتایج قسمت ب استفاده کنید.

قضیه‌ی حد مرکزی و اعداد بزرگ

مسئله‌ی ۸. * رضا و مارمولک‌ها

در شهر بنگلنگ هندوستان ۱۰۰۰ خانه وجود دارد. در این شهر به احتمال $\frac{۱}{۲}$ در خانه‌ای که درآن حضور دارید هیچ مارمولک سمی‌ای وجود نخواهد داشت. رضا جون[یور] ۱۱ ساله ، شاگرد آقای هفت‌لنگ است. آقای هفت‌لنگ برای پیدا کردن هر ۱۰ مارمولک ۰/۲۵ نمره اختصاص داده است. به رضا کمک کنید تا بتواند تعدادی مارمولک سمی جمع کند و نمره‌ی امتیازی دریافت کند.

الف

احتمال اینکه رضا با یک‌بار گشتن همه‌ی هزار خانه بتواند بیشتر از نیم نمره بگیرد چقدر است؟

ب

باید حداقل چند خانه را بگردد تا احتمال اینکه در هر خانه به طور میانگین بیشتر از ۰/۳ و کمتر از ۰/۷ مارمولک پیدا کرده‌باشد بیشتر از ۰/۹ بشود؟

مسئله‌ی ۹. رفراندوم مرکزی

رفراندومی برگزار شده و می‌دانیم رای هر فرد به احتمال p آری است.

الف

اگر فرض کنیم $p = ۰/۵$، با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی تخمین بزنید از بین ۲۵ نفر، با چه احتمالی حداقل ۱۴ نفر رای آری می‌دهند؟

ب

اگر p مجهول و n تعداد افراد رای‌دهنده باشد، $\bar{X}_n$ را نسبت افراد موافق به کل افراد در نظر بگیرید. کمترین تعداد n چقدر باشد تا %۹۰ اطمینان داشته باشیم که اختلاف $\bar{X}_n$ از مقدار واقعی p به اندازه‌ی ۰/۰۱ است؟

مسئله‌ی ۱۰. کران‌های دوردست

متغیر تصادفی های $X_۱, X_۲, ..., X_{۲۵}$ i.i.d. هستند و به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$X_i = \begin{cases} ۱ & p = ۰/۶ \\ -۱ & q = ۰/۴ \end{cases}$$

تصحیح پیوستگی، تغییر کران‌ها برای یک متغیر تصادفی گسسته به کران‌ها برای یک متغیر تصادفی پیوسته است. برای مثال فرض کنید Z یک متغیر تصادفی گسسته باشد و بخواهیم $Pr(Z = ۵)$ را با توزیع پیوسته‌ای مثل نرمال تخمین بزنیم. برای این کار باید کرانی برای آن در نظر بگیریم، یعنی باید $Pr(۵-c \leqslant N \leqslant ۵+c)$ را محاسبه کنیم زیرا $Pr(N = ۵)$ برابر صفر است. قرار دهید $Y = X_۱ + X_۲ + ... + X_{۲۵}$. با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی و تصحیح پیوستگی، $Pr(۴ \leqslant Y \leqslant ۶)$ را تخمین بزنید.

شاد باشید :)