آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۹۸ـ۹۹

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کوییز شماره ۲ خطی بودن امیدریاضی، امید ریاضی شرطی، قضیه‌ی حد مرکزی و اعداد بزرگ

مسئله‌ی ۱. آب هست ولی کم است

یک شرکت هر روز برای کارمندان خود ۹۵ لیتر آب معدنی خریداری می‌کند. این شرکت ۱۰۰ کارمند دارد و مصرف آب هر کارمند در یک روز از یک توزیع نرمال با میانگین ۰/۹ و انحراف معیار ۰/۲۵ پیروی می‌کند.

الف

احتمال اینکه در یک روز آب معدنی تهیه‌شده برای مصرف کارمندان کافی نباشد را حساب کنید.

ب

احتمال اینکه در یک سال (۳۶۵ روز) در بیشتر از ۱۵ روز کمبود آب معدنی داشته باشیم را حساب کنید. (راهنمایی: از توزیع برنولی کمک بگیرید.)

حل.

الف

داده‌های مسئله $n = ۱۰۰$، $\mu = ۰/۹$ و $\sigma = ۰/۲۵$ هستند. طبق قضیه‌ی حد مرکزی مجموع مصرف آب معدنی از یک توزیع نرمال با میانگین $n\mu$ و انحراف معیار $\sigma\sqrt{n}$ پیروی می‌کند و احتمال اینکه ۹۵ لیتر آب معدنی برای مصرف کارمندان کافی نباشد برابر است با:

$$Pr(X > ۹۵) = Pr(\frac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{۹۵ - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) = Pr(z > \frac{۹۵ - ۱۰۰ \times ۰/۹}{۰/۲۵\sqrt{۱۰۰}})$$

$$= Pr(z > ۲) = ۱ - \Phi(۲) = \Phi(-۲)$$

ب

اگر کافی بودن یا نبودن آب معدنی در یک روز را یک متغیر تصادفی برنولی با $p = \Phi(-۲)$ در نظر بگیریم، می‌توانیم با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی احتمال خواسته‌شده را تخمین بزنیم.

$$I_i = \begin{cases} ۱ & p = \Phi(-۲) \\ ۰ & q = ۱ - p \end{cases}$$

در اینجا $n = ۳۶۵$، $\mu = p$ و $\sigma = \sqrt{p(۱-p)}$ است.

$$Pr(\sum_{i=۱}^{۳۶۵} I_i > ۱۵) = Pr\Big(\frac{\sum_{i=۱}^{۳۶۵} I_i - ۳۶۵p}{\sqrt{۳۶۵p(۱-p)}} > \frac{۱۵ - ۳۶۵p}{\sqrt{۳۶۵p(۱-p)}}\Big)$$

$$\xrightarrow{\text{تصحیح پیوستگی}} Pr\Big(z > \frac{۱۵/۵ - ۳۶۵p}{\sqrt{۳۶۵p(۱-p)}}\Big) = \Phi(\frac{۳۶۵p - ۱۵/۵}{\sqrt{۳۶۵p(۱-p)}}) = \Phi(\frac{۳۶۵\Phi(-۲) - ۱۵/۵}{\sqrt{۳۶۵\Phi(-۲)\Phi(۲)}})$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۲. اجبار خطی

دو متغیر تصادفی مستقل X و Y داریم که هر یک از مقادیر طبیعی $۱, ۲, ..., n$ را با احتمال مساوی به خود می‌گیرند. ثابت کنید:

$$E[|X - Y|] = \frac{n^۲ - ۱}{۳n}$$

حل.

$$E[|X-Y|] = \sum_{x=۱}^{n}\sum_{y=۱}^{x} \frac{x-y}{n^۲} + \sum_{x=۱}^{n}\sum_{y=x+۱}^{n} \frac{y-x}{n^۲}$$

$$= \sum_{x=۱}^{n}\sum_{y=۱}^{x} \frac{x-y}{n^۲} + \sum_{x=۱}^{n}\Big(\sum_{y=۱}^{n} \frac{y-x}{n^۲} - \sum_{y=۱}^{x} \frac{y-x}{n^۲}\Big)$$

$$= ۲\sum_{x=۱}^{n}\sum_{y=۱}^{x} \frac{x-y}{n^۲} + \sum_{x=۱}^{n}\sum_{y=۱}^{n} \frac{y-x}{n^۲} = ۲\sum_{x=۱}^{n}\Big(\frac{x^۲}{n^۲} - \frac{x(x+۱)}{۲n^۲}\Big) + \sum_{x=۱}^{n}\Big(\frac{n(n+۱)}{۲n^۲} - \frac{nx}{n^۲}\Big)$$

$$= \sum_{x=۱}^{n} \frac{x^۲ - x}{n^۲} + \sum_{x=۱}^{n} \frac{n^۲ + n - ۲nx}{۲n^۲} = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^۲} - \frac{n(n+۱)}{۲n^۲} + \frac{n+۱}{۲} - \frac{n(n+۱)}{۲n} = \frac{n^۲ - ۱}{۳n}$$

$\triangleright$

شاد باشید :)