آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۹۸ ــ ۹۹

گردآورندگان: نام افراد

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

شماره‌ی سری

موضوعات تمرین

عنوان بخش

مسئله‌ی ۱. سوانح هوایی

بررسی های نشان می دهد که تعداد سوانح هوایی در بازه زمانی یک ساله یک کشور از توزیع پوآسون با میانگین ۵ پیروی می کند.

الف

احتمال اینکه در یک سال حداقل ۴ سانحه رخ دهد؟

ب

احتمال اینکه فاصله بین دو سانحه بیش از ۶ ماه باشد چقدر است؟

ج

یک روز صبح مسئول خسته برج مراقبت برای سرگرم کردن خودش تصمیم گیرد که احتمال اینکه ۵ امین سانحه از آن موقع به بعد قبل از ۹ ماه دیگر رخ دهد را محاسبه کند.به او در سرگرم کردن خودش کمک کنید!

حل.

الف

$$1 - \left(\frac{5^0 e^{-5}}{0!} + \frac{5^1 e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 e^{-5}}{2!} + \frac{5^3 e^{-5}}{3!}\right)$$

ب

$$1 - (1 - e^{-5\times 0/5}) = e^{-2/5} = 0/082$$

ج

با توجه به بی حافظه بودن توزیع نمایی ، زمان پنجمین سانحه از لحظه فعلی از توزیع جمع ۵ متغیر تصادفی با توزیع نمایی پیروی می کند. بنابراین از توزیع $Gamma(5,5)$ پیروی می کند.کافیست مساحت زیر نمودار توزیع احتمال گفته شده را تا قبل از ۷۵.۰ بیابیم که برابر است با:

$$5/585808 \times 10^{-7}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۲. توزیع بتا

یک توزیع بتا با پارامتر های a و b در نظر بگیرید. نشان دهید

الف

اگر $a > 1$ باشد و $b > 1$ آنگاه pdf آن Unimodal است(یعنی مد یکتایی دارد) و مد آن برابر با $\frac{a-1}{a+b-2}$ می باشد.

ب

اگر $a \leqslant 1$ و $b \leqslant 1$ و هم چنین $a + b < 2$ آنگاه pdf آن یا Unimodal است با مد برابر ۰ یا ۱ و یا U-shaped با مد برابر ۰ و ۱.

ج

اگر $a = b = 1$ آنگاه تمام نقاط در بازه بسته ۰ تا ۱ مد هستند.

حل.

تابع توزیع بتا با پارامتر های a و b از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

و هم چنین توجه کنید که مود های تابع در نقاط ماکسیم محلی رخ میدهد.در نتیجه باید از تابع توزیع مشتق بگیریم.

الف

اگر $a > ۱$ و $b > ۱$ آنگاه:

$$f'(x) = \frac{۱}{B(a,b)}((a-۱)x^{a-۲}(۱-x)^{b-۱} - (b-۱)x^{a-۱}(۱-x)^{b-۲})$$

$$= \frac{۱}{B(a,b)}x^{a-۲}(۱-x)^{b-۲}((a-۱)-(a+b-۲)x) = ۰$$

با بررسی عملکرد مشتق می توان فهمید که ماکسیمم در نقطه $x = \frac{a-۱}{a+b-۲}$ رخ می دهد

ب

اگر $a = ۱$ آنگاه:

$$f(x) = \frac{۱}{B(۱,b)}(۱-x)^{b-۱} \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱$$

در نتیجه مشتق آن برابر می شود با:

$$f(x) = \frac{۱}{B(۱,b)}(۱-b)(۱-x)^{b-۲} \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱$$

و این مقدار همیشه مثبت است در نتیجه تابع صعودی است.(در بازه ۰ تا ۱)
اگر $b = ۱$ آنگاه:

$$f(x) = \frac{۱}{B(a,۱)}x^{a-۱} \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱$$

در نتیجه مشتق آن برابر می شود با:

$$f(x) = \frac{۱}{B(a,۱)}(a-۱)x^{a-۲} \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱$$

و این مقدار همیشه منفی است و در نتیجه تابع نزولی است.(در بازه ۰ تا ۱))
اگر a و b هر دو کمتر از یک باشند با بررسی دوباره رفتار مشتق ، به این نتیجه می رسیم که $f(x)$ در صورتی که x کمتر از $\frac{a-۱}{a+b۲}$ باشد نزولی و اگر x بیشتر از مقدار گفته شده باشد صعودی است در مقدار گفته شده مشتق صفر است.پس دو حالت پیش می آید.اگر $f(۱) = f(۰)$ آنگاه $f(x)$ به صورت $U-shaped$ است با مود در مقادیر ۰ و ۱. اگر هم مقدار $f(۰)$ با $f(۱)$ برابر نباشد، مود یا در ۰ به وجود میاید یا در ۱.

ج

وقتی که $a = ۱ = b$ آنگاه $B(۱,۱) = ۱$ در نتیجه تابع توزیع برابر می شود با :

$$f(x) = \frac{۱}{B(۱,۱)} = ۱ \quad ۰ < x < ۱$$

در نتیجه همه نقاط در این بازه ، مد هستند. $\triangleright$

مسئله‌ی ۳. چرخ بادوام

عمر چرخ یک ماشین مشخصی از یک توزیع نرمال با میانگین ۳۴۰۰۰ کیلومتر و انحراف از معیار ۴۰۰۰ کیلومتر پیروی می کند.

الف

احتمال اینکه چرخ این ماشین بیش از ۴۰۰۰۰ کیلومتر عمر کند چقدر است؟

ب

احتمال اینکه چرخ این ماشین بین ۳۰۰۰۰ تا ۳۵۰۰۰ کیلومتر عمر کند چقدر است؟

ج

فرض کنید به ما گفته شده است که چرخ این ماشین تا الان ۳۰۰۰۰ کیلومتر عمر کرده است.احتمال اینکه ۱۰۰۰۰ کیلومتر دیگر عمر کند چقدر است.

حل.

متغیر تصادفی X را متناظر با عمر چرخ در نظر بگیرید. در نتیجه $X \sim N(۳۴۰۰۰, ۴۰۰۰^۲)$

الف

$$P(X > ۴۰۰۰۰) = ۱ - P(X \leqslant ۴۰۰۰۰) = ۱ - P(\frac{X - ۳۴۰۰۰}{۴۰۰۰} \leqslant \frac{۴۰۰۰۰ - ۳۴۰۰۰}{۴۰۰۰})$$

$$= ۱ - \phi(۱/۵) = ۱ - ۰/۹۳۳۱۹ = ۰/۰۶۶۸۱$$

ب

$$P(۳۰۰۰۰ \leqslant X \leqslant ۳۵۰۰۰) = P(\frac{۳۰۰۰۰ - ۳۴۰۰۰}{۴۰۰۰} \leqslant \frac{X - ۳۴۰۰۰}{۴۰۰۰} \leqslant \frac{۳۵۰۰۰ - ۳۴۰۰۰}{۴۰۰۰})$$

$$= P(-۱ \leqslant \frac{X - ۳۴۰۰۰۰}{۴۰۰۰} \leqslant ۰/۲۵) = \phi(۰/۲۵) - \phi(-۱) = ۰/۵۹۸۷۱ - ۰/۱۵۸۶۶ = ۰/۴۴$$

ج

$$P(X \geqslant ۴۰۰۰۰ \mid X \geqslant ۳۰۰۰۰) = \frac{P(X \geqslant ۴۰۰۰۰, X \geqslant ۳۰۰۰۰)}{P(X \geqslant ۳۰۰۰۰)} = \frac{P(X \geqslant ۴۰۰۰۰)}{P(X \geqslant ۳۰۰۰۰)}$$

$$= \frac{۱ - P(\frac{X-۳۴۰۰۰}{۴۰۰۰} \leqslant \frac{۴۰۰۰۰-۳۴۰۰۰}{۴۰۰۰})}{۱ - P(\frac{X-۳۴۰۰۰}{۴۰۰۰} \leqslant \frac{۳۰۰۰۰-۳۴۰۰۰}{۴۰۰۰})} = \frac{۱ - \phi(۱/۵)}{۱ - \phi(-۱)}$$

$$= \frac{۱ - ۰/۹۳۳۱۹}{۱ - ۰/۱۵۸۶۶} = ۰/۰۷۹۴$$

$\triangleright$

عنوان بخش

مسئله‌ی ۴. نقاط عجیب

فرض کنید $f(x) = ۰$ تابع توزیع یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد.نشان دهید که $f''(x) = ۰$ وقتی که x برابر با مقادیر $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$ باشد.

حل.

کافی است از pdf توزیع نرمال دوبار مشتق بگیریم.

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma} e^{\frac{(s-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}$$

از این معادله مشتق میگیریم(c در اینجا ثابت است).

$$c \times (x - \mu) e^{\frac{(s-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}$$

حالا یک بار دیگر مشتق میگیریم.

$$e^{\frac{(s-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}} - \frac{(x - \mu)^۲}{\sigma^۲} e^{\frac{(s-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}$$

حالا کافی است دقت کنیم که مقدار مشتق دوم تابع تنها در دو نقطه ی گفته شده برابر با صفر می شود. $\triangleright$

مسئله‌ی ۵. نقطه ثابت

X را تغداد نقاط ثابت برای یک جایگشت تصادفی از ۱ تا n در نظر بگیرید. (نقطه ثابت: $\pi(i) = i$) میخواهیم نشان دهیم x غیر ممکن است خیلی بیشتر از یک شود. برای این کار امید ریاضی و واریانس X را به دست آورده و استدلال کنید

حل.

X_i را متناظر با ثابت بودن i در نظر میگیریم داریم

$$X_i = \begin{cases} ۱ & \pi(i) = i \\ ۰ & o.w \end{cases} \implies p(X_i = ۱) = \frac{۱}{n}$$

$$X = \sum_{i=۱}^{n} X_i \to E[x] = \sum_{i=۱}^{n} E[X_i] = n * \frac{۱}{n} = ۱$$

$$E[X^۲] = E[\sum X_i^۲ + ۲\sum_{i<j} X_i X_j]$$

$$E[\sum X_i^۲] = E[\sum X_i] = ۱$$

$$E[\sum_{i<j} X_i X_j] = \frac{n(n-۱)}{۲} * (\frac{۱}{n} * \frac{۱}{n-۱}) = ۱ \to E[x^۲] = ۱ + ۲ = ۳$$

$$Var(x) = E[x^۲] - E[x]^۲ = ۳ - ۱ = ۲$$

همان گونه که میبینید امید ریاضی ۱ و با توجه به کوچک بودن واریانس احتمال وقوع اعداد بسیار بزرگتر از یک بسیار کم است. $\triangleright$

مسئله‌ی ۶. کشف توزیع ها

در هر مورد تابع توزیع خواسته شده را به دست آورید و سپس تحقیق کنید متغیر تصادفی مورد نظر از چه خانواده ای از توزیع هاست. و با استفاده از آن امید ریاضی و واریانس توزیع را به دست آورید.

الف

فرض کنید متغیر تصادفی X از توزیع پارتو با متغیر $\theta > ۰$ پیروی می کند که تابع توزیع آن به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+۱}} \quad x > ۱$$

حال اگر متغیر تصادفی Y به صورت زیر به دست بیاید، Y از چه توزیعی پیروی می کند؟

$$Y = \ln X$$

ب

فرض کنید Y متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد. یعنی $Y \sim exponential(\lambda)$. حال اگر متغیر تصادفی W به صورت زیر به دست بیاید، تابع توزیع آن را به دست بیاورید.W از چه توزیعی پیروی می کند؟

$$W = \sqrt{Y}$$

ج

فرض کنید Z متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد یعنی $Z \sim N(۰,۱)$. حال اگر متغیر تصادفی Y به صورت زیر به دست بیاید، تابع توزیع آن را به دست بیاورید.Y از چه توزیعی پیروی می کند؟

$$Z = e^Z$$

د

فرض کنید Z متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد یعنی $Z \sim N(۰,۱)$. حال اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر به دست بیاید، تابع توزیع آن را به دست بیاورید.X از چه توزیعی پیروی می کند؟

$$X = Z^۲$$

حل.

می دانیم اگر $Y = g(X)$ و ریشه های معادله $y = g(x)$ به صورت $x_۱, x_۲, ...$ باشند، داریم:

$$f_Y(y) = \sum \frac{f_X(x_i)}{|g'(x)|}$$

الف

$$Y = \ln(X) \implies X = e^Y$$

$$f_Y(y) = \frac{\frac{\theta}{x^{\theta+1}}}{\frac{1}{x}} = \theta x^{-\theta} \implies f_Y(y) = \theta e^{-y\theta}$$

پس Y از توزیع نمایی با پارامتر θ است و در نتیجه :

$$E[y] = \frac{1}{\theta}, Var(y) = \frac{1}{\theta^2}$$

ب

$$f_W(w) = \frac{\lambda e^{-\lambda y}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}}, y = w^2 \implies 2w\lambda e^{-\lambda w^2} \sim weibull(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{\lambda})$$

$$E[W] = \sqrt{\beta} \times \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Gamma(\frac{3}{2})$$

$$Var[W] = \beta[\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - (\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}))^2] = \frac{1}{\lambda}[\Gamma(2) - (\Gamma(\frac{3}{2}))^2]$$

ج

$$f_X(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}}{e^z} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} \sim lognormal(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$$

$$E[x] = exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}) = e^{\frac{1}{2}}$$

$$Var[x] = [exp(\sigma^2) - 1]exp(2\mu + \sigma^2) = e^2 - e$$

د

$$x = z^2 \implies z_1 = \sqrt{x}, z_2 = -\sqrt{x}$$

$$f_X(x) = \sum \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z_i^2}{2}}}{2|z_i|} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{-x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sim gamma(k = \frac{1}{2}, \theta = 2)$$

$$E[X] = k\theta = ۱$$

$$Var[X] = k\theta^{۲} = ۲$$

دقت کنید که به طور کلی نیازی به در نظر گرفتن ضرایب ثابت در توزیع ها وجود ندازد ، چرا که نهایتا جمع(انتگرال) تابع توزیع چگالی برابر یک خواهد بود. $\triangleright$

مسئله‌ی ۷. روابط

موارد زیر را ثابت کنید

الف

برای متغیر تصادفی گسسته X که فقط مقادیر طبیعی می تواند بگیرد نشان دهید

$$E[x] = \sum_{i=۱}^{\infty} P(x \geqslant i)$$

ب

برای متغیر تصادفی پیوسته و همواره مثبت X ثابت کنید

$$E[x] = \int_{۰}^{\infty} (۱ - F(x))dx$$

حل.

الف

$$E[X] = \sum_{i=۱}^{\infty} iP(X = i)$$

$$= P(X = ۱)$$

$$+P(X = ۲) + P(X = ۱)$$

$$+P(X = ۳) + P(X = ۲) + P(X = ۱)$$

$$\ldots$$

حالا اگر به صورت ستونی جمع بزنیم(یعنی حاصل جمع ستون ها را در نظر بگیریم) ، تساوی بالا به دست می آید.

ب

می دانیم که

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) \implies ۱ - F_X(x) = P(X > x)$$

در نتیجه:

$$\int_{۰}^{\infty} (۱ - F_X(x))\, dx = \int_{۰}^{\infty} P(X > x) dx = \int_{۰}^{\infty} \int_{x}^{\infty} f_X(y) dy dx$$

$$= \int_{۰<x<y<\infty} f_X(y) d(x, y) = \int_{۰}^{\infty} \int_{۰}^{y} f_X(y) dx dy$$

از طرفی می دانیم:

$$\int_{۰}^{y} f_X(y)\, \mathrm{d}\, x = f_X(y) \int_{۰}^{y} ۱\, \mathrm{d}\, x = y\ f_X(y)$$

بنابراین:

$$\int_{۰}^{\infty} P(X > x) dx = \int_{۰}^{\infty} y f_X(y) dy = E(X \mid X \geqslant ۰) P(X \geqslant ۰) = E[X]$$

در صورتی که X همواره مثبت باشد.

$\triangleright$

مسئله‌ی ۸. ظرف گوی

در ظرفی تعدادی گوی از m نوع مختلف وجود دارد و هربار که یکی از گوی ها را انتخاب می کنیم، به احتمال مساوی ممکن است هر یک از این m نوع انتخاب شده باشد.امید ریاضی ”تعداد گوی های متمایز” را در یک مجموعه n تایی از گوی های انتخاب شده بیابید.

حل.

متغیر تصادفی X_k را تعداد توپ های متمایز پس از بزداشتن k توپ از ظرف در نظر میگیریم. با دانستن X_k احتمال برداشتن توپ جدید در مرتبه $k + ۱$ام برابر با $\frac{n-X_k}{n}$ میباشد پس داریم

$$E(N_{k+۱} \mid N_k) = N_k + \frac{n-N_k}{n}$$

بنابراین با توجه به این که $E(N_۰) = ۰$

$$\mathrm{E}(N_{k+۱}) = \mathrm{E}(N_k) + \frac{n-\mathrm{E}(N_k)}{n} = ۱ + a_n \mathrm{E}(N_k)$$

به ازای هر $k \geqslant ۰$

$$\mathrm{E}(N_k) = \frac{۱-a_n^k}{۱-a_n} \Leftarrow a_n = ۱ - \frac{۱}{n}$$

و یا به طور معادل

$$\mathrm{E}(N_k) = n\, \frac{n^k-(n-۱)^k}{n^k} = \sum_{i=۰}^{k-۱} (-۱)^i \binom{k}{i+۱} \frac{۱}{n^i}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۹. فلامینگو توانا

فرض کنید یک فلامینگو قابیلت راه رفتن روی اعداد صحیح را دارد.ابتدا روی صفر ایستاده است و در مرحله اول به صورت کاملا تصادفی به سمت راست یا چپ گامی به طول بر می دارد(با احتمال مساوی) و در مراحل بعدی نیز همین طور عمل می کند. حالت فلامینگو را در مرحله n ام با S_n نشان می دهیم.

الف

کمترین تعداد مراحل برای اولین ورود به نقطه a را با $T_a = min(n \geqslant ۱ : S_n = a)$ نشان می دهیم.نشان دهید برابر هر a, c عضو اعداد طبیعی رابطه زیر درست است.

$$P(S_n = a - c, T_a \leqslant n) = P(S_n = a + c)$$

ب

احتمال $P(T_0 = 2k)$ به ازای هر k را به دست آورید.

حل.

الف

$T_a \leqslant n$ به این معناست که فلامینگو در طی مسیر حداقل یک بار از a رد شده است. زمانی که وی به نقطه a میرسد دقیقن بین نقطه $a + c$ و $a - c$ قرار دارد و احتمال ورود به هر یک از این دو نقطه در قدم های باقیمانده برابر است بنابراین $P(S_n = a - c, T_a \leqslant n) = P(S_n = a + c)$

ب

فلامینگو در ابتدا به احتمال مساوی به چپ یا راست میرود و با توجه به تقارن احتمال بازگشت از منفی یک به صفر با احتمال بازگشت از یک به صفر برابر و همان $P(T_۱ = ۲k - ۱)$ میباشد و طبق رابطه گفته شده داریم

$$P(T_۱ = ۲k - ۱) = \frac{۱}{۲k - ۱} P(S_{۲k-۱} = ۱)$$

$$P(S_n = x) = \binom{n}{\frac{n+x}{۲}} * \frac{۱}{۲^n}$$

$$\implies P(T_۰ = ۲k) = ۲ * \frac{۱}{۲} P(T_۱ = ۲k - ۱) = \frac{\binom{۲k}{k}}{(۲k - ۱)۲^{۲k}}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۱۰. پرواز خطرناک

فرض کنید در یک پرواز، موتور های هواپیما به احتمال $۱ - p$ خراب می شوند و احتمال خرابی هر موتور از موتور های دیگر مستقل است.اگر یک هواپیما برای پرواز نیاز داشته باشد تا بیشتر از نصف موتور هایش سالم باشند،به ازای چه مقادیری از p یک هواپیما با ۵ موتور را به یک هواپیما با ۳ موتور ترجیح می دهید؟

حل.
احتمال سالم ماندن یک هواپیمای ۵ موتوره برابر مقدار زیر است:

$$\binom{۵}{۰} \times p^{۴} + \binom{۵}{۱} \times p^{۳}(۱ - p) + \binom{۵}{۲} \times p^{۳}(۱ - p)^{۲}$$

همچنین احتمال سالم ماندن یک هواپیمای ۳ موتوره برابر مقدار زیر است:

$$\binom{۳}{۰} \times p^{۳} + \binom{۳}{۱} \times p^{۲}(۱ - p)$$

پس p باید مقداری باشد که احتمال سالم ماندن هواپیمای ۵ موتوره بیشتر از هواپیما ۳ موتوره باشد در نتیجه با حل نامساوی بالا مقدار p به دست می آید:

$$p > ۰/۲۷۰۶$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۱۱. استاد حواس پرت

استاد حواس پرتی را در نظر بگیرید که برای دو دانشجو در زمان یکسان قرار ملاقات می گذارد.اما متاسفانه استاد در هر زمان فقط می تواند با یک دانشجو ملاقات کند.مدت زمان ملاقات دو دانشجو مستقل از یکدیگر و دارای توزیع نمایی با میانگین ۳۰ دقیقه است.امید ریاضی فاصله زمانی بین ورود دانشجوی اول و خروج دانشجوی دوم را در دو حالت زیر بیابید.

الف

دانشجوی اول سر وقت حاضر می شود ولی دانشجوی دوم ۵ دقیقه دیر میرسد.(تذکر:جواب ۶۰ دقیقه یا ۶۵ دقیقه نیست)

ب

دانشجوی اول سر وقت حاضر می شود ولی دانشجوی دوم X دقیقه دیر میرسد که X دارای توزیع نمایی با میانگین ۵ دقیقه است.

حل.

الف

T_1 و T_2 را به ترتیب زمان ملاقات دانشجوی اول و دوم در نظر میگیریم و زمان بین ورود دانشجوی اول و خروج دانشجوی دوم از رابطه $T = max(T_1, 5) + T_2$ به دست می آید. مسئله را به دو حالت $T_1 < 5$ و $T_2 \geqslant 5$ تقسیم کرده و امید ریاضی T به صورت $E[T] = pr(T_1 < 5)E[T|T_1 < 5] + pr(T_1 \geqslant 5)E[T|T_1 \geqslant 5]$ محاسبه میشود.

$$pr(T_1 < 5) = F(5) = 1 - e^{-\frac{5}{30}}$$

$$pr(T_1 \geqslant 5) = 1 - F(5) = e^{-\frac{5}{30}}$$

$$E[T|T_1 < 5] = E[T_2 + 5] = E[T_2] + 5 = 35$$

$$E[T|T_1 \geqslant 5] = E[T_2 + T_1|T_1 \geqslant 5] = E[T_2] + E[T_1|T_1 \geqslant 5]$$

از آنجا که توزیع نمایی یک توزیع بی حافظه است این دانش اولیه که $T_1 \geqslant 5$ میباشد تاثیری بر مدت زمان باقیمانده از ملاقات ندارد و مدت زمان باقی مانده از همان توزیع نمایی امید ریاضی ۳۰ پیروی میکند. بنابراین $E[T_1|T_1 \geqslant 5] = 30 + 5 = 35$ و بنابراین

$$E[T|T_1 \geqslant 5] = 30 + 35 = 65$$

و با استفاده از رابطه $E[T]$ داریم

$$E[T] = (1 - e^{-\frac{5}{30}}) * 35 + (e^{-\frac{5}{30}}) * 65 \approx 60.4$$

ب

متغیر تصادفی X را زمان تاخیر دانشجوی دوم در نظر میگیریم. مانند قسمت قبل به ازای یک x مشخص $E[T] = pr(T_1 < x)E[T|T_1 < x] + pr(T_1 \geqslant x)E[T|T_1 \geqslant x]$ و

$$pr(T_1 < x) = F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{30}}$$

$$pr(T_1 \geqslant x) = 1 - F(x) = e^{-\frac{x}{30}}$$

$$E[T|T_1 < x] = E[T_2 + x] = E[T_2] + x = 30 + x$$

$$E[T|T_1 \geqslant 5] = E[T_2 + T_1|T_1 \geqslant 5] = E[T_2] + E[T_1] + x = 60 + x$$

$$\to E[T] = (1 - e^{-\frac{x}{30}}) * (30 + x) + (e^{-\frac{x}{30}}) * (60 + x) = 30e^{-\frac{x}{30}} + 30 + x$$

با محاسبه این مقدار برای تمامی xها به ازای احتمال آن ها امید ریاضی خواسته شده به دست می آید

$$\int_0^{+\infty} (30e^{-\frac{x}{30}} + 30 + x)\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx \approx 60/7$$

▷

مسئله‌ی ۱۲. مغازه خالی

فرض کنید زمان بین آمدن دو مشتری در یک مغازه از توزیع نمایی با پارامتر λ و میانگین ۲ دقیقه پیروی می کند.فرض کنید شما از جلوی مغازه رد می شوید و میبیند که مغازه خالی است.به چه احتمالی تا ۵ دقیقه دیگر این مغازه خالی می ماند؟

حل.

می دانیم که $E[x] = \frac{1}{\lambda}$ چون نوزیع X توانی با پارامتر λ است و از طرفی گفته شده است که میانگین ۲ دقیقه است پس $\lambda = 0/5min$ می باشد.فرض کنید در لحظه t از جلوی مغازه می گذریم و میبینم که خالی است.مسئله از ما میخواد تا مقدار زیر را محاسبه کنیم:

$$P(X > t + 5|X > t)$$

اما می دانیم که توزیع X نمایی است و این توزیع بی حافظه است در نتیحه مقدار بالا برابر است با :

$$P(X > 5) = e^{-\lambda 5} = e^{-\frac{5}{2}}$$

▷

موفق باشید :)