آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۹۸ـ۹۹

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کوییز شماره ۱

مسئله‌ی ۱. صف

شش پسر و نه دختر میخواهند که در یک صف کنار یکدیگر قرار بگیرند. فرض کنید متغیر S برابر با تعداد مکانهایی باشد که یک پسر و یک دختر کنار هم قرار گرفته باشند(به طور مثال در صف GBGGBBGBBGGGBGG متغیر S برابر با ۸ است.) مقدار میانگین S (اگر تمامی ترتیب های قرار گیری این پانزده نفر را در نظر بگیریم) برابر با چه مقداری است ؟

حل. توضیح کلی راه حل

الف

راه حل بخش اول

ب

راه حل بخش دوم

ج

راه حل بخش سوم ▷

مسئله‌ی ۲. گزاره

اگر رخدادهای A و B مستقل از هم باشند، صحت گزاره‌ی زیر را بررسی کنید. (در صورتی که درست است، آن را اثبات نمایید و در صورتی که درست نیست، برای آن مثال نقض بیاورید)

$P(A \cap B|C) = P(A|C) \times P(B|C)$

حل.

درست نیست ،به عنوان مثال در صورتی که:

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

$$A = \{۱, ۲\}, B = \{۳, ۴\}, C = \{۱, ۳\}$$

داریم:

$$P(A \cap B) = ۰ = P(A)P(B) \Rightarrow P(A \cap B|C) = ۰$$

$$P(A|C)P(B|C) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow P(A \cap B|C) \neq P(A|C) \times P(B|C)$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۳. تصادف با پواسون

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع پواسون باشند که پارامترهای آنان به ترتیب μ و λ است.

الف

میانگین X را محاسبه کنید.

ب

واریانس X را محاسبه کنید.

ج

نشان دهید که $X + Y$ یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\mu + \lambda$ است.

حل.

الف

راه حل بخش اول

$P_x(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$
$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$
$= \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\mu}\mu^x}{(x-1)!}$
$= \mu e^{-\mu}\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}$
$\implies \mu e^{-\mu}\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\mu^y}{y!}$
$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\mu^y}{y!} = e^{\mu}$
$\implies E[X] = \mu e^{-\mu}e^{\mu} = \mu$

ب

راه حل بخش دوم

$$
\begin{aligned}
&var(X) = E[X^2] - E[X]^2 \\
&E[X^2] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = \mu e^{-\mu} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\mu^{(x-1)}}{(x-1)!} \\
&= \mu e^{-\mu}(\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)\frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty}\frac{\mu^{(x-1)}}{(x-1)!}) \\
&= \mu e^{-\mu}(\mu \sum_{x=2}^{\infty}\frac{\mu^{x-2}}{(x-2)!} + \sum_{x=1}^{\infty}\frac{\mu^{(x-1)}}{(x-1)!}) \\
&= \mu e^{-\mu}(\mu \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu^{i}}{i!} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mu^{j}}{j!}) \\
&= \mu e^{-\mu}(\mu e^{\mu} + e^{\mu}) = \mu^2 + \mu \\
&\implies var(X) = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu
\end{aligned}
$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۴. بازی (امتیازی)

دو نفر به نام‌های A و B مشغول یک بازی هستند که شرح آن در ادامه می‌آید. ابتدا A عدد ۱ یا ۲ را روی یک کاغذ می‌نویسد و آن را پنهان می‌کند. B باید حدس بزند عددی که A نوشته، چه بوده است. اگر عددی که A نوشته i باشد و حدس B هم درست باشد، در آن صورت A باید i تومن به B بدهد. اما اگر حدس B نادرست باشد، B باید $\frac{۳}{۴}$ تومن به A بدهد.
اگر B به صورت رندوم حدس بزند به طوری که با احتمال p حدس بزند ۱ و با احتمال $۱ - p$ حدس بزند ۲ ، امید ریاضی پول دریافتی توسط B را در دو حالت زیر محاسبه کنید.

الف

اگر A عدد ۱ را روی کاغذ نوشته باشد.

ب

اگر A عدد ۲ را روی کاغذ نوشته باشد.

ج

محاسبه کنید که به ازای چه مقداری از p، مینیموم امید ریاضی محاسبه شده در دو حالت بالا، ماکسیموم می‌شود.

حل.

الف

اگر A عدد ۱ را بنویسد و B به با احتمال p به درستی عدد A را حدس بزند و با احتمال $۱ - p$ اشتباه حدس بزند، می‌توان امید ریاضی پول دریافتی توسط B را به شکل زیر محاسبه کرد:

$$E(X_۱) = ۱ \times p - ۰/۷۵(۱ - p) = \frac{۷}{۴}p - \frac{۳}{۴}$$

ب

اگر A عدد ۲ را بنویسد و B با احتمال $۱ - p$ درست حدس بزند و با احتمال p اشتباه کند، می‌توان امید ریاضی پول دریافتی توسط B را به شکل زیر محاسبه کرد:

$$E(X_۲) = ۲(۱ - p) - ۰/۷۵p = ۲ - \frac{۱۱}{۴}p$$

ج

در این قسمت باید تابع $min(E(X_۱), E(X_۲)) = min(\frac{۷}{۴}p - \frac{۳}{۴}, ۲ - \frac{۱۱}{۴}p)$ را بررسی کنیم. اگر نمودار $E(X_۱)$ و $E(X_۲)$ که دو تابع خطی از p هستند را رسم کنیم، می‌بینیم که مینیموم زمانی اتفاق می‌افتد که

$$\frac{۷}{۴}p - \frac{۳}{۴} = ۲ - \frac{۱۱}{۴}p \Rightarrow p = \frac{۱۱}{۱۸} \Rightarrow \mathrm{maximied\,pool} = \frac{۲۳}{۷۲}$$

▷

موفق باشید :)