آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۹۸ـــ۹۹

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: نام افراد

شماره‌ی سری

موضوعات تمرین

عنوان بخش

مسئله‌ی ۱. سوانح هوایی

بررسی های نشان می دهد که تعداد سوانح هوایی در بازه زمانی یک ساله یک کشور از توزیع پوآسون با میانگین ۵ پیروی می کند.

الف

احتمال اینکه در یک سال حداقل ۴ سانحه رخ دهد؟

ب

احتمال اینکه فاصله بین دو سانحه بیش از ۶ ماه باشد چقدر است؟

ج

یک روز صبح مسئول خسته برج مراقبت برای سرگرم کردن خودش تصمیم گیرد که احتمال اینکه ۵ امین سانحه از آن موقع به بعد قبل از ۹ ماه دیگر رخ دهد را محاسبه کند.به او در سرگرم کردن خودش کمک کنید!

مسئله‌ی ۲. توزیع بتا

یک توزیع بتا با پارامتر های a و b در نظر بگیرید. نشان دهید

الف

اگر $a > ۱$ باشد و $b > ۱$ آنگاه pdf آن Unimodal است(یعنی مد یکتایی دارد) و مد آن برابر با $\frac{a-۱}{a+b-۲}$ می باشد.

ب

اگر $a \leqslant 1$ و $b \leqslant 1$ و هم چنین $a + b < 2$ آنگاه pdf آن یا Unimodal است با مد برابر ۰ یا ۱ و یا U-shaped با مد برابر ۰ و ۱.

ج

اگر $a = b = 1$ آنگاه تمام نقاط در بازه بسته ۰ تا ۱ مد هستند.

مسئله‌ی ۳. چرخ بادوام

عمر چرخ یک ماشین مشخصی از یک توزیع نرمال با میانگین ۳۴۰۰۰ کیلومتر و انحراف از معیار ۴۰۰۰ کیلومتر پیروی می کند.

الف

احتمال اینکه چرخ این ماشین بیش از ۴۰۰۰۰ کیلومتر عمر کند چقدر است؟

ب

احتمال اینکه چرخ این ماشین بین ۳۰۰۰۰ تا ۳۵۰۰۰ کیلومتر عمر کند چقدر است؟

ج

فرض کنید به ما گفته شده است که چرخ این ماشین تا الان ۳۰۰۰۰ کیلومتر عمر کرده است.احتمال اینکه ۱۰۰۰۰ کیلومتر دیگر عمر کند چقدر است.

عنوان بخش

مسئله‌ی ۴. نقاط عجیب

فرض کنید $f(x) = 0$ تابع توزیع یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد.نشان دهید که $f''(x) = 0$ وقتی که x برابر با مقادیر $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$ باشد.

مسئله‌ی ۵. نقطه ثابت

X را تغداد نقاط ثابت برای یک جایگشت تصادفی از ۱ تا n در نظر بگیرید. (نقطه ثابت: $\pi(i) = i$) میخواهیم نشان دهیم x غیر ممکن است خیلی بیشتر از یک شود. برای این کار امید ریاضی و واریانس X را به دست آورده و استدلال کنید

مسئله‌ی ۶. کشف توزیع ها

در هر مورد تابع توزیع خواسته شده را به دست آورید و سپس تحقیق کنید متغیر تصادفی مورد نظر از چه خانواده ای از توزیع هاست. و با استفاده از آن امید ریاضی و واریانس توزیع را به دست آورید.

الف

فرض کنید متغیر تصادفی X از توزیع پارتو با متغیر $\theta > ۰$ پیروی می کند که تابع توزیع آن به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+۱}} \quad x > ۱$$

حال اگر متغیر تصادفی Y به صورت زیر به دست بیاید، Y از چه توزیعی پیروی می کند؟

$$Y = \ln X$$

ب

فرض کنید Y متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد. یعنی $Y \sim exponential(\lambda)$. حال اگر متغیر تصادفی W به صورت زیر به دست بیاید، تابع توزیع آن را به دست بیاورید.W از چه توزیعی پیروی می کند؟

$$W = \sqrt{Y}$$

ج

فرض کنید Z متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد یعنی $Z \sim N(۰, ۱)$. حال اگر متغیر تصادفی Y به صورت زیر به دست بیاید، تابع توزیع آن را به دست بیاورید.Y از چه توزیعی پیروی می کند؟

$$Z = e^Z$$

د

فرض کنید Z متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد یعنی $Z \sim N(۰,۱)$. حال اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر به دست بیاید، تابع توزیع آن را به دست بیاورید.X از چه توزیعی پیروی می کند؟

$$X = Z^۲$$

مسئله‌ی ۷. روابط

موارد زیر را ثابت کنید

الف

برای متغیر تصادفی گسسته X که فقط مقادیر طبیعی می تواند بگیرد نشان دهید

$$E[x] = \sum_{i=۱}^{\infty} P(x \geqslant i)$$

ب

برای متغیر تصادفی پیوسته و همواره مثبت X ثابت کنید

$$E[x] = \int_{۰}^{\infty} (۱ - F(x))dx$$

مسئله‌ی ۸. ظرف گوی

در ظرفی تعدادی گوی از m نوع مختلف وجود دارد و هربار که یکی از گوی ها را انتخاب می کنیم، به اختمال مساوی ممکن است هر یک از این m نوع انتخاب شده باشد.امید ریاضی "تعداد گوی های متمایز" را در یک مجموعه n تایی از گوی های انتخاب شده بیابید.

مسئله‌ی ۹. فلامینگو توانا

فرض کنید یک فلامینگو قابیلت راه رفتن روی اعداد صحیح را دارد.ابتدا روی صفر ایستاده است و در مرحله اول به صورت کاملا تصادفی به سمت راست یا چپ گامی به طول بر می دارد(با احتمال مساوی) و در مراحل بعدی نیز همین طور عمل می کند. حالت فلامینگو را در مرحله n ام با S_n نشان می دهیم.

الف

کمترین تعداد مراحل برای اولین ورود به نقطه a را با $T_a = min(n \geqslant ۱ : S_n = a)$ نشان می دهیم.نشان دهید برابر هر a,c عضو اعداد طبیعی رابطه زیر درست است.

$$P(S_n = a - c, T_a \leqslant n) = P(S_n = a + c)$$

ب

احتمال $P(T_0 = 2k)$ به ازای هر k را به دست آورید.

مسئله‌ی ۱۰. پرواز خطرناک

فرض کنید در یک پرواز، موتور های هواپیما به احتمال $۱ - p$ خراب می شوند و احتمال خرابی هر موتور از موتور های دیگر مستقل است.اگر یک هواپیما برای پرواز نیاز داشته باشد تا بیشتر از نصف موتور هایش سالم باشند،به ازای چه مقادیری از p یک هواپیما با ۵ موتور را به یک هواپیما با ۳ موتور ترجیح می دهید؟

مسئله‌ی ۱۱. استاد حواس پرت

استاد حواس پرتی را در نظر بگیرید که برای دو دانشجو در زمان یکسان قرار ملاقات می گذارد.اما متاسفانه استاد در هر زمان فقط می تواند با یک دانشجو ملاقات کند.مدت زمان ملاقات دو دانشجو مستقل از یکدیگر و دارای توزیع نمایی با میانگین ۳۰ دقیقه است.امید ریاضی فاصله زمانی بین ورود دانشجوی اول و خروج دانشجوی دوم را در دو حالت زیر بیابید.

الف

دانشجوی اول سر وقت حاضر می شود ولی دانشجوی دوم ۵ دقیقه دیر میرسد.(تذکر:جواب ۶۰ دقیقه یا ۶۵ دقیقه نیست)

ب

دانشجوی اول سر وقت حاضر می شود ولی دانشجوی دوم X دقیقه دیر میرسد که X دارای توزیع نمایی با میانگین ۵ دقیقه است.

مسئله‌ی ۱۲. مغازه خالی

فرض کنید زمان بین آمدن دو مشتری در یک مغازه از توزیع نمایی با پارامتر λ و میانگین ۲ دقیقه پیروی می کند.فرض کنید شما از جلوی مغازه رد می شوید و میبیند که مغازه خالی است.به چه احتمالی تا ۵ دقیقه دیگر این مغازه خالی می ماند؟

موفق باشید :)