آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۹۸ــ۹۹

لیلی گلی، ثنا آیرملو

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری ششم

تخمین ، بازه اطمینان ، آزمون فرض

مسئله‌ی ۱. *

در طی یک مطالعه روی رفتار غذا خوردن پرندگان, تعداد دفعه‌های اوج گرفتن پرندگان در طول پرواز تعدادی پرنده اندازه‌گیری شده‌است.

hops	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
Freq.	۴۸	۳۱	۲۰	۹	۶	۵	۴	۲	۱	۱	۲	۱

الف

یک توزیع هندسی به داده‌های بالا اختصاص دهید.

ب

برای p یک بازه اطمینان ۹۵٪ اختصاص دهید.

حل.

الف

برای بدست آوردن توزیه هندسی باید در نظر داشته‌باشیم که اگر X دارای توزیع هندسی باشد, $E(X) = \frac{۱}{p}$ می‌باشد.پس برای تخمین p داریم:

$\hat{p} = \frac{۱}{\bar{X}}$

$\bar{X} = \frac{۳۶۳}{۱۳۰} = ۲/۷۹$ می‌باشد.پس داریم:

$\hat{p} = ۰/۳۶$

ب

برای بدست آوردن بازه اطمینان ٪۹۵ برای p بایداطلاعاتی در مورد واریانس تخمین خود برای p داشته‌باشیم.اگر بتوانیم ارور تخمین‌گر خودرا حساب کنیم می‌توانیم با استفاده از قانون اعداد بزرگ واریانس را بدست آوریم . راحت‌ترین راه برای این کار بدست آوردن تخمین‌گر بیشینه است و بدست آوردن واریانس از مشتق تابع تخمین‌گر بیشینه می‌باشد.

$$like(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i-1}$$

$$log(like(p)) =$$

$$l(p) = \sum_{i=1}^{n} [log(p) + (x_i - 1)log(1-p)] = nlog(p) - nlog(1-p) + log(1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$l'(p) = \frac{n}{p} + \frac{n}{1-p} - \frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{p(1-p)} - \frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$$

$$l''(p) = -\frac{n}{p^2} + \frac{n}{(1-p)^2} - \frac{1}{(1-p)^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{p^2(1-p)^2}[-(1-p)^2 + p^2 - \bar{x}p^2]$$

برای بدست آوردن ارور mle باید مقدار مشتق دوم آن را وقتی $\bar{x} = \frac{1}{\hat{p}}$ محاسبه کنیم.

$$l''(\hat{p}) = \frac{n}{\hat{p}^2(1-\hat{p})^2}[-(1-\hat{p})^2 + \hat{p}^2 - \hat{p}] = \frac{n}{\hat{p}^2(1-\hat{p})^2}[-1 + 2\hat{p} - \hat{p}^2 + \hat{p}^2 - \hat{p}] = -\frac{n}{\hat{p}^2(1-\hat{p})}$$

واریانس mle برابر منفی معکوس مقدار بدست آمده می‌باشد:

$$Var(\hat{p}) = \frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{n}$$

$$95\%\ Cl(p) = \hat{p} \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{n}} = 0.36 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.36^2(0.64)}{130}} = (0.31, 0.41)$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۲ . *

توزیع لاپلاس به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2}e^{|x-\theta|}, -\infty < x < \infty$$

برای یک نمونه یکنواخت با سایز $n = 2m + 1$, نشان دهید تخمین‌گر بیشینه‌ی θ میانه‌ی نمونه می‌باشد.

حل.

$$like(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)=\prod_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}e^{-|x_i-\theta|}]=(\frac{1}{2})^n e^{-\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|}$$

این عبارت زمانی بیشینه می‌شود که عبارت زیر کمینه شود:

$g(\theta)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|$

$g'(\theta)=\frac{d}{d\theta}g(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[-1\times 1(x_i>\theta)+(+1)\times 1(x_i<\theta)]$
$=(-1)\times[\sum_{i=1}^{n}[1(x_i>\theta)]+(+1)\times[\sum_{i=1}^{n}[1(x_i<\theta)]$
$=\begin{cases} positive, & if\theta>\text{median}(x_i) \\ negative, & if\theta<\text{median}(x_i) \end{cases}$

عبارت بالا نشان می‌دهد که در میانه $g(\theta)$ کمینه می‌شود. ▷

مسئله‌ی ۳. *

فرض کنید $Y_1, Y_2, ..., Y_2$ داده‌هایی رندوم هستند که از یک توزیع یکنواخت $(0,\theta)$ باشد.دو تخمین‌گر زیر را در نظر بگیرید:

$\hat{\theta_2}=\frac{n+1}{n}Y_{(n)}$ and $\hat{\theta_1}=2\bar{Y}$

طوری که $Y_{(n)}=max(Y_1,...,Y_n)$ باشد.

الف

مقدار $bias$ این دو تخمین‌گر را بدست آورید.

ب

مقدار واریانس این دو تخمین‌گر را بدست آورید.

ج

مقدار MSE را بدست آورده و باهم مقایسه کنید.

حل.

چون Y_i توزیع یکنواخت می‌باشد, می‌توان گفت:

$\mu=E(Y_i)=\theta/2$ و $\sigma^2=Var(Y_i)=\theta^2/12$.

الف

$E(\hat{\theta_1}) = E(2\bar{Y}) = 2E(\bar{Y}) = 2\mu = \theta$

پس مقدار بایس $\hat{\theta_1}$ صفر می‌باشد.
تابع چگالی $Y_(n)$ به صورت زیر هست:

$$g_{(n)}(y) = n[F_Y(y)]^{n-1} f_Y(y) = \begin{cases} n(\frac{y}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}, & 0 \leqslant y \leqslant \theta. \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$E(Y_{(n)}) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^n dy = \frac{n}{n+1}\theta$

$E(\hat{\theta_2}) = E([(n+1)/n]Y_{(n)}) = 2E(\bar{Y}) = 2\mu = \theta$

پس مقدار بایس $\hat{\theta_2}$ صفر می‌باشد.

ب

$Var(\hat{\theta_1}) = Var(2\bar{Y}) = 4Var(\bar{Y}) = 4\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\theta^2}{3n}$

$E(Y_{(n)}^2) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^{n+1} dy = \frac{n}{n+2}\theta^2$
$Var(Y_{(n)}) = E(Y_{(n)}^2) - E(Y_{(n)})^2 = \frac{n}{n+2}\theta^2 - (\frac{n}{n+1}\theta)^2 = \frac{n}{n+2}\theta^2$

$Var(\hat{\theta_2}) = Var(\frac{n+1}{n}Y_{(n)}) = (\frac{n+1}{n})^2[\frac{n}{n+2}\theta^2 - (\frac{n}{n+1}\theta)^2] = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$

ج

$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + bias^2(\hat{\theta})$

مطابق رابطه بالا محاسبه می‌کنیم. $\triangleright$

مسئله‌ی ۴.

سارا یک سکه را ۳ بار پرتاب می‌کند و هیچ بار شیر نمی‌بیند. بعد سکه را به شادی می‌دهد. شادی تا زمانی که اولین شیر را ببیند سکه را پرتاب می‌کند و در کل ۴ بار سکه را پرتاب می‌کند. θ را احتمال شیر آمدن سکه را در نظر بگیرید. بیشینه تخمین‌گر θ را حساب کنید.

حل.

اگر $X_۱$, $X_۲$, $X_۳$ حاصل ۳ بار پرتاب سکه سارا باشد (شیر ۰ =و خط ۱ =) و Y تعداد دفعه‌های پرتاب سکه توسط شادی باشد:

۱ـ $X_۱$ و $X_۲$ و $X_۳$ دارای توزیع برنولی(θ)می‌باشند.

۲ـ Y مستقل از $X_۱$و $X_۲$و $X_۳$می‌باشد و از توزیع هندسی با پارامتر $p = \theta$ می‌باشد.

$$like(\theta) = f(x_۱, x_۲, x_۳, y|\theta) = f(x_۱|\theta)f(x_۲|\theta)f(x_۳|\theta)f(y|\theta) =$$

$$= [\prod_{i=۱}^{۳} \theta^{x_i}(۱-\theta)^{۱-x_i}] \times [\theta(۱-\theta)^{y-۱}] = \theta^۴(۱-\theta)^۴$$

$$۰ = l'(\theta) = \frac{d}{d\theta}log[like(\theta)] = \frac{d}{d\theta}(۴ln[\theta] + ۴ln[۱-\theta]) = \frac{۴}{\theta} + \frac{۴}{۱-\theta} \times -۱$$

$$۴\theta = ۴(۱-\theta)$$

$$\theta = \frac{۱}{۲}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۵.

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تأیین کنید.

الف

بازه‌ی اطمینان ٪۹۹ را برای میانگین (μ) را برای توزیع نرمال با پارامترهای (۰/۲,۳/۰−) در نظر بگیرید.تست $H_۰ : \mu = -۳$ در مقابل $H_A : \mu \neq -۳$ با اطمینان ۰/۰۱رد می‌شود.

ب

اگر یک تست با اطمینان α رد شود, احتمال اینکه فرض صفر درست باشد α می‌باشد.

ج

عده ای معترض به سطح غذای شریف پلاس اعتراض می کنند.رئیس دانشگاه می تواند با استناد به این گروه از افراد به عنوان یک نمونه از دانشجویان، شریف پلاس رو تعطیل کند.

د

می خوایم تخمینی از میزان تهرانی/شهرستانی بودن دانشجویان دانشگاه داشته باشیم. می‌توانیم برای رفتن نمونه جلوی در انرژی بایستیم و به صورت رندوم عده ای رو انتخاب کنیم و از آن‌ها تهرانی بودن یا شهرستانی بودن را بپرسیم.

حل.

الف

درست است.

ب

نادرست است. در یک آزمون آماره هیچ احتمالی در مورد درستی فرض صفر وجود ندارد. بازه اطمینان احتمال رد شدن فرض صفر, با اینکه فرض صفر درست باشد, می‌باشد.

ج

نادرست است. جمعیت معترض بایس می‌باشد, چون طبیعتا افرادی که راضی هستند, نظر خود را اعلام نمی‌کنند.

د

نادرست است. چون افرادی که از در انرژی رفت‌وآمد می‌کنند اکثرا خوابگاهی می‌باشند پس نمونه‌ای که در نظر گرفتیم بایس می‌باشد. ◁

مسئله‌ی ۶. *

بیماری فلان، بیماری کشنده‌ای است که آزمایشگاه بهمان به تازگی شروع به کار روی آن کرده است. از میان مبتلایان به بیماری فلان، دو نمونه مجزای A و B که هریک شامل ۳۰ نفر میشد در آزمایشگاه بهمان مورد آزمایش قرار گرفت. به گروه A داروی تازه کشف شده در آزمایشگاه بهمان داده شد و به گروه B دارویی داده نشد. بعد از گذشت ۳۰ روز ۲۵ نفر از گروه A و ۱۵ نفر از گروه B از چنگال بیماری فلان رهایی یافتند. اگر μ_A و μ_B به ترتیب نسبت واقعی افرادی که با مصرف داروی فلان و بدون مصرف داروی فلان بهبود میابند باشد و $\hat{\mu_B}$ و $\hat{\mu_A}$ مقدار تخمین‌زده‌شده از این دو با استفاده از نمونه‌گیری آزمایشگاه بهمان باشد، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف

همانطور که می‌دانید $\hat{\mu_A} - \hat{\mu_B}$ یک متغیر تصادفی است. حدس میزنید $\hat{\mu_A} - \hat{\mu_B}$ از چه توزیعی پیروی کند؟ حدس خود را اثبات کنید.

ب

با استفاده از یافته‌ی خود در بخش الف و با توجه به داده‌های مسئله، بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی برای $\mu_A - \mu_B$ بسازید. آیا $\mu_A = \mu_B$ در این بازه وجود دارد؟

حل.

مسئله به دنبال یافتن بازه‌ی اطمینان برای $\hat{\mu_A} - \hat{\mu_B}$ است. برای این کار باید ابتدا توزیع این متغیر را مشخص کنیم و سپس با توجه به آن بازه۹۵ درصدی را مشخص کنیم.

الف

اگر I_A را متغیر نشانگر بهبود یافتن یکی از افراد گروه A و I_B را متغیر نشانگر بهبود یکی از افراد گروه B در نظر بگیریم، داریم:

$$I_A = \begin{cases} ۱ & p_A \\ ۰ & ۱ - p_A \end{cases} \qquad I_B = \begin{cases} ۱ & p_B \\ ۰ & ۱ - p_B \end{cases}$$

باید توجه کنیم که p_A و p_B همان μ_A و μ_B یعنی نسبت‌های واقعی تعریف شده در مسئله هستند. و با توجه به نمونه‌گیری داریم:

$$\hat{p_A} = \hat{\mu_A} = ۲۵/۳۰$$
$$\hat{p_B} = \hat{\mu_B} = ۱۵/۳۰$$

طبق قضیه حد مرکزی داریم:

$$\text{CLT:} \sum_{i=۱}^{۳۰} I_{A,i} \sim N(۳۰p_A, ۳۰\sigma_A^۲)$$
$$\hat{\mu_A} = \frac{\sum_{i=۱}^{۳۰} I_{A,i}}{۳۰} \sim N(p_A, \frac{\sigma_A^۲}{۳۰})$$

که:

$$\sigma_A^۲ = p_A(۱ - p_A)$$

به طور مشابه این روابط برای گروه B هم صادق است. حال حدس میزنیم که $\hat{\mu_A} - \hat{\mu_B}$ نرمال است یعنی باید بررسی کنیم که تفاضل دو متغیر نرمال، خود نرمال هست یا خیر.

اثبات:

اگر X وY دومتغیر نرمال باشند و $Z = X - Y$ باشد داریم:

$$f_X(x) = \mathcal{N}\left(x; \mu_X, \sigma_X^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-(x-\mu_X)^2/\left(2\sigma_X^2\right)} \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) f_X(x) dx$$
$$f_Y(y) = \mathcal{N}\left(y; \mu_Y, \sigma_Y^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-(y-\mu_Y)^2/\left(2\sigma_Y^2\right)}$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left[-\frac{(x-z-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}\sigma_X\sigma_Y} \exp\left[-\frac{\sigma_X^2 (x-z-\mu_Y)^2 + \sigma_Y^2 (x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}\sigma_X\sigma_Y} \exp\left[-\frac{\sigma_X^2 \left(z^2 + x^2 + \mu_Y^2 - 2xz + 2z\mu_Y - 2x\mu_Y\right) + \sigma_Y^2 \left(x^2 + \mu_X^2 - 2x\mu_X\right)}{2\sigma_Y^2\sigma_X^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}\sigma_X\sigma_Y} \exp\left[-\frac{x^2\left(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right) - 2x\left(\sigma_X^2 (z+\mu_Y) + \sigma_Y^2\mu_X\right) + \sigma_X^2\left(z^2 + \mu_Y^2 + 2z\mu_Y\right) + \sigma_Y^2\mu_X^2}{2\sigma_Y^2\sigma_X^2}\right] dx
\end{aligned}$$

اگر $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$ قرار دهیم :

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_Y}{\sigma_Z}}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2x\frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_Z^2} + \frac{\sigma_X^2\left(z^2+\mu_Y^2+2\mu Yz\right)+\sigma_Y^2\mu_X^2}{\sigma_Z^2}]}{2\left(\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Z}\right)^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_X\sigma_V}{\sigma_Z}} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_Z^2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_Z^2}\right)^2 + \frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)^2+\sigma_Y^2\mu_X^2}{\sigma_Z^2}}{2\left(\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Z}\right)^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left[-\frac{\sigma_Z^2\left(\sigma_X^2(z+\mu_Y)^2 + \sigma_Y^2\mu_X^2\right) - \left(\sigma_X^2(z+\mu_Y) + \sigma_Y^2\mu_X\right)^2}{2\sigma_Z^2(\sigma_X\sigma_Y)^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Z}} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_Z^2}\right)^2}{2\left(\frac{\sigma_X\sigma_V}{\sigma_Z}\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left[-\frac{(z-(\mu_X-\mu_Y))^2}{2\sigma_Z^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_Y\sigma_Y}{\sigma_Z}} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_Z^2}\right)^2}{2\left(\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Z}\right)^2}\right] dx
\end{aligned}$$

تابع درون انتگرال یک تابع چگالی احتمال توزیع نرمال است پس انتگرال آن برابر یک است. در نتیجه:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left[-\frac{(z-(\mu_X-\mu_Y))^2}{2\sigma_Z^2}\right]$$

که نشان میدهد Z نرمال است با میانگینی برابر تفاضل میانگین‌هایY وX.

حال اگر به جایX قرار دهیم $\hat{\mu_A}$ و بجای Y قرار دهیم $\hat{\mu_B}$ داریم:

$$\hat{\mu_A} - \hat{\mu_B} \sim N\left(p_A - p_B, \sigma_{\hat{\mu_A}}^2 + \sigma_{\hat{\mu_B}}^2\right)$$

ب

حال با توجه به این که $\hat{\mu_A} - \hat{\mu_B}$ نرمال است و مقدار واقعی واریانس آن ($\sigma^{۲}_{\hat{\mu_B}}$) را نداریم و تنها با تخمین p_A و p_B از روی نمونه‌های گرفته شده میتوانیم مقدار واریانس را تخمین بزنیم میتوانیم ادعا کنیم که:

$$\frac{(\hat{\mu_A}-\hat{\mu_B})-(p_A-p_B)}{\sqrt{\sigma\hat{\mu}_B+\sigma\hat{\mu}_A}} = \frac{(\hat{\mu_A}-\hat{\mu_B})-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_A(۱-\hat{p}_A)}{۳۰}+\frac{\hat{p}_B(۱-\hat{p}_B)}{۳۰}}} \sim Student\ Distribution$$

با مراجعه به چارت توزیع Student مقدار برای بازه‌ی ۹۵ درصد را برابر ۲.۰۴۵ بدست میآوریم:

$$-۲/۰۴۵ < \frac{\frac{۲۵}{۳۰}-\frac{۱۵}{۳۰}-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\frac{۲۵}{۳۰}(\frac{۵}{۳۰})+\frac{۱۵}{۳۰}(\frac{۱۵}{۳۰})}{۳۰}}} < ۲/۰۴۵ \quad -۲/۰۴۵ < \frac{(\hat{\mu_A}-\hat{\mu_B})-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_A(۱-\hat{p}_A)}{۳۰}+\frac{\hat{p}_B(۱-\hat{p}_B)}{۳۰}}} < ۲/۰۴۵$$

$$۰/۳۰۶ < \mu_A - \mu_B < ۰/۵۹۸$$

پس بازه‌ی مورد نظر برابر [۰.۰،۳۰۶.۵۹۸ است.]

$\triangleright$

مسئله‌ی ۷.

طول میله‌های آهنی تولید شده در کارخانه فولاد مبارکه اصفهان از توزیع نرمال با واریانس ۳/۲۴ میلی‌متر پیروی میکند. بر اساس اندازه‌گیری ۹ نمونه از این میله‌ها بازه‌ی اطمینان ۹۹ درصدی برای میانگین طول میله‌ها برابر [$۱۹۷/۷۵mm$ ، $۱۹۴/۶۵mm$] است. مدیر کارخانه معتقد است که طول این بازه برای استفاده در محاسبات کارخانه‌اش بسیار زیاد است و نیاز به بازه‌ی اطمینان ۹۹ درصدی دارد که طول بازه بیش‌تر از ۱ میلی‌متر نباشد.

الف

چه تعداد نمونه لازم است تا طول بازه اطمینان ۹۹ درصدی بیش از ۱ میلی‌متر نشود؟

ب

بار دیگر سوال قسمت الف را با استفاده از نامساوی چبیشف حل کنید.

ج

آیا اعداد بدست آمده در قسمت الف و ب یکسان‌اند؟ حدس میزنید دلیل آن چیست؟

حل.

باید اندازه‌ی لازم برای نمونه را یکبار از طریق بازه‌ی اطمینان و بار دیگر از طریق نامساوی چبیشف پیدا کنیم.

الف

بازه‌ی اطمینان:

$$I_{1-\alpha} = [\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}]$$

در نتیجه طول بازه‌ی اطمینان برابر است با:

$$2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

پس:

$$2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leqslant 1$$
$$\frac{2\times 2/58\times 1/8}{\sqrt{n}} \leqslant 1$$
$$86/26 \leqslant n$$
$$87 \leqslant n$$

ب

طبق نامساوی چبیشف داریم:

$$P(|\hat{X} - \mu| \geqslant E) \leqslant \frac{Var(\hat{X})}{E^2}$$

اگر قرار دهیم:

$$\frac{Var(\hat{X})}{E^2} \leqslant \alpha$$

داریم:

$$Var(\hat{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{\sigma^2}{nE^2} \leqslant \alpha \Rightarrow n \geqslant \frac{1}{\alpha}\frac{\sigma^2}{E^2}$$
$$n \geqslant \frac{1}{0/01}\frac{1/8^2}{1^2} \Rightarrow n \geqslant 324$$

ج

خیر اعداد بدست آمده یکسان نیستند زیرا که بازه‌ی اطمینان فرض قوی تری مبنی بر نرمال بودن متغیر میکند درصورتی که فرض نامساوی چبیشف ضعیف‌تراست و برای هر متغیر با واریانس محدود صحیح است. ▷

مسئله‌ی ۸. *

یکی از محصولات کارخانه تولید لوازم الکتریکی یزد، ترموستات یا دماپا است. این کارخانه این محصول را به گونه‌ای تولید میکند که واریانس بالاترین دمایی که این دماپاها کنترل میکنند ۴ درجه است. همچنین برای استاندارد بودن محصول لازم است که میانگین بالاترین دمایی که دماپاها کنترل میکنند کمتر از ۵۰ درجه نباشد. مدیر کارخانه قصد دارد آزمون آماری انجام دهد تا استاندارد بودن محصول خود را نشان دهد. او یک نمونه ۲۰ تایی از دماپاهای ساخت کارخانه‌اش را مورد آزمایش قرار میدهد و میانگین بالا ترین دمای قابل کنترل آنها را برابر۴۸/۳۴ محاسبه میکند.

الف

فرض صفر و فرض جایگزین را بیان کنید. آیا نیاز به انجام آزمون یک‌طرفه است یا دوطرفه؟ چرا؟

ب

آزمون مناسب را با سطح اهمیت ۹۵ درصد انجام دهید. ادعای مدیر کارخانه رد میشود یا خیر؟

ج

میزان خطای نوع دوم در این آزمایش را با فرض این که میانگین واقعی حداکثر دمای قابل کنترل دماپاهای شرکت یزد برابر ۴۸ درجه است بدست آورید.

د

آیا میتوانید میزان خطای نوع دوم را بدون فرضی درمورد مقدار واقعی میانگین بدست آورید؟ (نیازی به انجام کامل محاسبات نیست.)

حل.

الف

فرض صفر: میانگین بالاترین دمای قابل کنترل توسط دماپاها کمتر از ۵۰ درجه نیست. فرض جایگزین: میانگین بالاترین دمای قابل کنترل توسط دماپاها کمتر از ۵۰ درجه است. با توجه به نحوه‌ی طرح فرض صفر و جایگزین نیاز است آزمون یک طرفه باشد زیرا که فقط یک طرف حد مشخص شده (یعنی ۵۰) ناحیه رد محسوب میشود.

ب

از آن جا که طبق قضیه حد مرکزی میانگین نمونه یک متغیر نرمال است و واریانس واقعی متغیر را میدانیم میتوان از آزمون Z استفاده کرد.

$\frac{\hat{\mu}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(۰, ۱)$

اگر فرض کنیم فرض صفر درست است میانگین واقعی را ۵۰ در نظر میگیریم و داریم:

$\frac{\hat{\mu}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{۴۸/۳۴-۵۰}{\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}} = ۳/۷۱$

با مقایسه مقدار بدست آمده با مقدار متناظر ۵ درصد یکطرفه در جدول نرمال (۱/۶۴) چون مقدار بدست آمده بیشتر است میتوانیم فرض صفر را رد کنیم.

ج

خطای نوع دوم در شرایطی رخ میدهد که درصورت نادرست بودن فرض صفر نتوانیم آن را رد کنیم. یعنی به شرط غلط بودن فرض صفر، فرض صفر را بپذیریم. علاوه بر این در این بند مسئله شرط اضافی درمورد مقدار واقعی میانگین را داریم پس احتمال خواسته شده در مسئله برابر است با:

$Error\ II = p(accepting\ H۰|H۱, \mu = ۴۸)$

که اشتراک شروط احتمال بالا برابرشرط $\mu = ۴۸$ است. با داشتن این شرط میدانیم که در واقعیت:

$\hat{\mu} \sim (۴۸, \frac{\sigma^۲}{n})$

اما ما آزمون فرض را با فرض این که میانگین واقعی برابر ۵۰ است انجام میدهیم. پس خطای نوع دوم را میتوان به شکل یر نوشت:

$p(\frac{\hat{\mu}-۵۰}{\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}} < ۱/۶۴|\mu = ۴۸)$

$$p(\hat{\mu} < ۵۰/۷۳ | \mu = ۴۸)$$
$$p(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}} < \frac{۵۰/۳۷-\mu}{\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}} | \mu = ۴۸)$$
$$p(\frac{\hat{\mu}-۴۸}{\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}} < \frac{۵۰/۳۷-۴۸}{\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}}) = p(\frac{\hat{\mu}-۴۸}{\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}} < ۵/۲۹۹) \xrightarrow{\frac{\hat{\mu}-۴۸}{\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}} \textit{ is standard normal}} \Phi(۵/۲۹۹)$$

د

اگر فرض $\mu = ۴۸$ را نداشتیم میتوانیم خودمان این تقسیم بندی را انجام داده و انتگرال بگیریم هرچند به فرم بسته و قابل محاسبه‌ای نمیرسیم:

$$\int \Phi(\frac{۵۰/۳۷-\mu_۱}{\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}}) d\mu_۱ = \int p(\frac{\hat{\mu}-\mu_۱}{\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}} < \frac{۵۰/۳۷-\mu_۱}{\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}} | \mu = \mu_۱) d\mu_۱$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۹. *

یکی از اجزای دستگاهی که سامان ساخته است خیلی سریع گرم میشود برای همین سامان میخواهد تراشه‌ای جدید به دستگاهش اضافه کند تا مانع گرم شدن بیش از حد دستگاه شود. برای بررسی چگونگی عملکرد تراشه‌ی جدید سامان ۶ عدد از دستگاه‌هایی که ساخته است و برای هر یک مدت زمانی که طول میکشد تا دستگاه به دلیل گرمای زیاد خاموش شود را قبل و بعد از اضافه کردن تراشه اندازه گرفته است. فرض کنید مدت زمان روشن بودن دستگاه از توزیع نرمال پیروی میکند. در جدول زیر مقادیر آزمایش سامان درج شده است.

بدون تراشه (دقیقه)	با تراشه (دقیقه)
۳۹	۵۹
۴۵	۶۴
۴۷	۷۱
۶۱	۵۶
۴۸	۶۱
۵۵	۶۴

الف

آزمون آماری مناسب را برای تعیین اینکه وجود این تراشه باعث ایجاد تفاوت در مدت زمان روشن بودن دستگاه شده است یا نه، با سطح اهمیت ۹۰ درصد بدست آورید.

ب

بازه‌ی اطمینان ۹۰ درصدی برای میانگین واقعیِ میزان افزایش یا کاهش در زمان روشن بودن دستکاه به سبب وجود این تراشه را بدست آورید. معنی بازه‌ی بدست آمده را با توجه به مسئله به صورت خلاصه شرح دهید.

ج

هدف سامان از ساخت این تراشه افزایش مدت زمان روشن بودن دستگاه به اندازه‌ی ۲۰ دقیقه بود. آیا میتوانید با استفاده از داده‌های مسئله با سطح اهمیت حداقل ۹۰ درصد مشخص کنید که سامان به هدف خود رسیده است یا خیر؟آیا یافته‌های شما در قسمت الف یا ب برای پاسخ به این سوال کافی است؟

حل.

داده‌های موجود به شکل متناظر داده شده اند و میتوان از paired t-test استفاده کرد.

الف

آماره مورد استفاده در این آزمون برابر است با:

$$t = \frac{\bar{X}_D - \mu}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}}$$

که در آن $\bar{X}_D$ برابر میانگین اختلاف‌ها در هر ردیف داده است و $s_D^۲$ واریانس آن است. با جایگذاری داریم:

$$t = \frac{\frac{۸۰}{۶} - ۰}{\frac{۹/۵۳۳}{\sqrt{۶}}} = ۳/۴۲$$

که با مقایسه این مقدار با مقدار متناظر ۹۰ درصد در جدول توزیع تی (۲/۵۷) فرض تاثیرگذار نبودن تراشه رد میشود.

ب

رابطه بازه اطمینان را مینویسیم:

$$-۲/۵۷ < t = \frac{\frac{۸۰}{۶} - \mu}{\frac{۹/۵۳۳}{\sqrt{۶}}} < ۲/۵۷$$

$$-۳/۳۲۹ < \mu < ۲۳/۳۳۷$$

پس بازه اطمینان مورد نظر برابر است با $[-۳/۳۲۹, ۲۳/۳۳۷]$. این بازه به این معنی است که به احتمال ۹۰ درصد بازه‌ی بدست آمده شامل مقدار واقعی میانگین اختلاف بین طول عمر دستگاه قبل و بعد از اضافه کردن تراشه است.

ج

اینبار فرض این است که $\mu = ۲۰$ است. با این فرض t را حساب کرده و با مقدار متناظر ۹۰ درصد در توزیع تی مقایسه میکنیم:

$$t = \frac{\frac{۸۰}{۶} - ۲۰}{\frac{۹/۵۳۳}{\sqrt{۶}}} = -۳/۷۳۹$$

این مقدار از ۲/۵۷ـ کمتر است پس ادعای افزایش میانگین طول عمر با اندازه ۲۰ دقیقه رد میشود. هیچ یک از یافته‌های قسمت الف یا ب برای رسیدن با این نتیجه کافی نیست زیرا در الف تنها صفر بودن میانگین را بررسی میکنیم و اطلاعات اضافه تری کسب نمیکنیم و در قسمت ب بازه‌ای شامل ۲۰ بدس می‌آوریم ولی ۲۰ تنها یک نقطه در این بازه است و مقدار ۲۰ را به تنهایی بررسی نمیکند. $\triangleright$

مسئله‌ی ۱۰.

به بیمارستانی شکایت شده است که کیفیت درمان در دو بخش از آن به شدت متفاوت است و آمار گزارش شده مبنی بر این است که میانگین زمان حضور بیماردر بیمارستان تا بهبودی اش برای ۱۰ بیمار بررسی شده در بخش اول برابر ۱۲ روز است و واریانس این متغیر در نمونه بررسی شده برابر ۱ است و میانگین این مقدار برای یک نمونه ۲۰ تایی از بیماران بخش دوم برابر ۳.۱۳ روز با واریانس ۳ است. مدیر بیمارستان، قلی خان، قصد ندارد این شکایت را بپذیرد. شکایت کننده از قلی‌خان را در فرایند شکایت یاری کنید.

الف

مدیر برای نشان دادن یکسان بودن عملکرد دو بخش باید از چه آزمونی استفاده کند؟ این آزمون یکطرفه است یا دوطرفه؟ چرا؟

ب

شاکی قلی‌خان را یاری کنید که با سطح اهمیت ۹۵ درصد فرض خود را بیازماید.

ج

شکایت کننده از بیمارستان قلی خان حداکثر با چه دقتی میتواند ادعا کند که کیفیت در درمان دو بخش یکسان نیست؟

حل.

میخواهیم دو نمونه مستقل را مقایسه کنیم پس از independent t-test استفاده میکنیم

الف

از آزمون تی برای دو نمونه مستقل میتوان استفاده کرد و برای نشان دادن متفاوت بودن یا نبودن باید از آزمون دوطرفه استفاده کرد زیرا فرض‌های آزمون به این صورت است: $H_۰ : \bar{X}_۱ = \bar{X}_۲$ $H_۱ : \bar{X}_۱ \neq \bar{X}_۲$

ب

آماره مورد استفاده در این آزمون برابر است با:

$$t = \frac{\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲}{s_d}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{s_۱^۲}{n_۱} + \frac{s_۲^۲}{n_۲}}$$

با جایگذاری داریم:

$$t = \frac{۱۲ - ۱۳/۳}{\sqrt{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۳}{۲۰}}} = -۲/۶$$

که با مقایسه این مقدار با مقدار متناظر ۹۵ درصد (با محاسبه درجه آزادی مناسب) در جدول توزیع تی (۲/۰۴۸) فرض تاثیرگذار نبودن تراشه رد میشود.

ج

با توجه به جدول توزیع تی شاکی قلی خان حداکثر تا ۹۸ درصد سطح اهمیت میتواند فرض یکسان بودن را رد کند (البته ابن مقدار دقیقی نیست ولی میدانیم با سطح اهمیت ۹۹ درصد نمیتوان فرض را رد کرد با توجه به جدول. مقدار دقیق را میتوان با محاسبه p-value بدست آورد) $\triangleright$

موفق باشید :)