



## سوالات

امتحان به دو بخش تقسیم می‌شود.  
بخش اول شامل سوالات با پاسخ‌های کوتاه است و بخش دوم شامل ۵ سوال تشریحی.

## وقت امتحان

مدت زمان امتحان ۳ ساعت خواهد بود.

## جداول

جدول‌های  $t$ ،  $z$  در انتها آمده است.

## فراموش نکنید:

- با نام و یاد خدا شروع کنید.
- هر سوال را در یک برگه جداگانه پاسخ دهید. (در صورت نوشتن چند سوال در یک برگه، فقط یک سوال تصحیح خواهد شد)
- بر روی هر برگه اسم و شماره دانشجویی خود را بنویسید.
- در صورت داشتن ابهام سوال کنید.
- امتحان دارای ۷ نمره می‌باشد که ۱.۵ نمره آن امتیازی است. در صورت کسب بیش از ۵.۵ نمره، نمره اضافی شما تقسیم بر ۲ خواهد شد و به نمره کل اضافه می‌شود.

با آرزوی موفقیت.

## کوتاه پاسخ (۴ نمره)

الف) اگر بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی میانگین یک جمعیت  $[۳, ۵]$  باشد، در این صورت درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید؟ دلیل خود را هم در یک یا دو سطر بیان کنید. (۱.۵ نمره)

- میانگین واقعی آن جمعیت به احتمال ۹۵ درصد بین ۳ تا ۵ است.
- احتمال آن که میانگین واقعی جمعیت بزرگ‌تر از صفر باشد حداقل ۹۵ درصد است.
- اگر فرایند یافتن بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی را هزار بار تکرار کنیم حداقل ۹۵۰ بار میانگین واقعی جمعیت در بازه‌ی اطمینان قرار خواهد گرفت.

ب) امید به ریاضی (۱ نمره)

- فرض کنید متغیرهای تصادفی  $X_1, X_2, \dots, X_n$  متغیرهای  $i.i.d$  هستند. مقدار

$$E[X_1 | X_1 + X_2 + \dots + X_n = x]$$

که در آن  $x$  عدد ثابت است را محاسبه کنید.

ج) ضریب هم‌بستگی (۱.۵ نمره)

- درستی یا نادرستی عبارت زیر را با دلیل تعیین کنید.

- صفر بودن هم‌بستگی دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  دلیلی بر نبودن وابستگی خطی بین  $X$  و  $Y$  نیست.

- فرض کنید ۳ متغیر تصادفی  $A$  و  $B$  و  $C$  استاندارد هستند (میانگینشان صفر و واریانسشان یک است). آیا روابط زیر همزمان می‌تواند برقرار باشد؟

$$\text{corr}(A, B) = ۰.۹$$

$$\text{corr}(B, C) = ۰.۸$$

$$\text{corr}(A, C) = ۰.۱$$

### مسئله‌ی ۱. (۵ نمره)

ماشینی با احتمال  $P_1$  عدد ۱، با احتمال  $P_2$  عدد ۲ و با احتمال  $P_3$  عدد ۳ را تولید می‌کند. از این ماشین  $n$  نمونه گرفته‌ایم که حاوی  $x_1$  عدد ۱ است و  $x_2$  عدد ۲ و  $x_3$  عدد ۳ است. می‌دانیم احتمال تولید چنین نمونه‌هایی طبق توزیع چندجمله‌ای برابر است با:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} P_1^{x_1} P_2^{x_2} P_3^{x_3}$$

تخمین درست‌نمایی بیشینه را برای  $P_1$  و  $P_2$  و  $P_3$  بدست آورید.

### مسئله‌ی ۲. اون‌ترنت! (۵ نمره)

همراه ثانی، برای هر کاربر خود عدد تصادفی و مخفی (مثلاً  $\theta_k$  برای کاربر  $k$ ) با توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ تولید می‌کند. این شرکت برای معتاد کردن کاربرانش هر روز به احتمال  $\theta_k$  (برای کاربر  $k$ )، ۲ گیگابایت اینترنت رایگان هدیه می‌دهد. اگر بدانیم در  $n$  روز گذشته متین اینترنت رایگان دریافت کرده است، می‌خواهیم احتمال آنکه فردا نیز اینترنت رایگان دریافت کند را بدست آوریم. (دریافت اینترنت در روز  $n$  ام را با  $X_n$  نشان می‌دهیم.)

(الف) با فرض مجهول بودن  $\theta$ ، احتمال این که متین در  $n$  روز نخست اینترنت دریافت کرده باشد، چقدر است؟ (به عبارت دیگر  $P(X_1 = 1, \dots, X_n = 1)$  را حساب کنید.)

(ب) توزیع  $\theta$  را با فرض این که وی در  $n$  روز نخست اینترنت دریافت کرده باشد، بیابید. (به عبارت دیگر  $f(\theta = \tau | X_1 = 1, \dots, X_n = 1)$  را حساب کنید.)

(ج) ثابت کنید  $P(X_{n+1} = 1 | X_1 = 1, \dots, X_n = 1)$  برابر است با:

$$\int_0^1 P(X_{n+1} = 1 | \theta = \tau) f(\theta = \tau | X_1 = 1, \dots, X_n = 1) d\tau$$

راهنمایی: با توجه به این که با داشتن  $\theta$ ، دریافت اینترنت در هر روز مستقل خواهد بود داریم:

$$P(X_{n+1} = 1 | \theta = \tau) = P(X_{n+1} = 1 | \theta = \tau, X_1 = 1, \dots, X_n = 1)$$

(د) احتمال دریافت اینترنت در روز  $n + 1$  را با فرض دریافت اینترنت در  $n$  روز قبلی حساب کنید.

### مسئله‌ی ۳. شکارچی (۴ نمره)

۱۰ شکارچی منتظر پرواز ۱۰ اردک هستند. اردک‌ها در یک لحظه شروع به پرواز می‌کنند، در آن هنگام هر شکارچی مستقل از دیگران یک اردک را به عنوان هدف انتخاب و به سوی آن شلیک می‌کند. اگر هر شکارچی با احتمال  $p$  به هدفش بزند، امید ریاضی تعداد اردک‌هایی که سالم عبور خواهند کرد را بیابید.

#### مسئله ۴. کاوه آهنگر (۵ نمره)

کاوه، آهنگر سرشناس اصفهان، با معادن استخراج آهن زیادی سر و کله می‌زند. شرط کاوه برای قرار داد بستن با یک معدن، این است که ناخالصی موجود در قطعه آهن عرضه شده، برابر با ۷۵ گرم در هر کیلوگرم باشد. او اخیراً شک کرده است که یکی از معادنی که قبلاً با آن قرار داد بسته بود، به جای ناخالصی ۷۵ گرم، آهن با ناخالصی ۸۰ گرم به او می‌فروشد. برای آزمایش این فرضیه، به یکی از زیردستانش دستور داده که ناخالصی ۱۰ قطعه آهن یک کیلوگرمی را به عنوان نمونه بررسی کند. اعداد زیر حاصل از بررسی‌های این زیردست هستند:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ۷۶ | ۷۸ | ۷۴ | ۷۳ | ۷۵ | ۸۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۷۸ | ۷۶ |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

الف) برای بررسی فرضیه‌ی کاوه، آزمون فرضی بنویسید. سپس در سطح خطای  $\alpha = 5\%$  و با محاسبه‌ی  $p - value$  این فرضیه را بیازمایید.

ب) برای آزمونی که در مرحله‌ی قبل طراحی کردید، خطای نوع دو را محاسبه کنید.

#### مسئله ۵. یک پایان تلخ ... (۵ نمره)

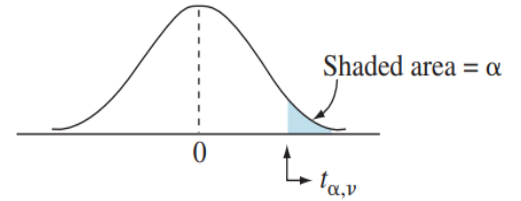
در زیر نمرات یک نمونه تصادفی ۱۰ نفره از دانشجویان به عملکرد متین را می‌بینید. عملکرد بسیار بد وی در این ترم به عنوان دستیار آموزشی، باعث شده تا دکتر شریفی نخواهد او را برای دستیاری درس‌های دیگر انتخاب کند اما به دلیل روحیه حساس وی نمی‌خواهد این موضوع را به طور مستقیم به او بگوید. به همین دلیل دکتر این سوال را طرح کرده است تا متین با تصحیح ورقه‌های امتحان، خود به عملکرد پایینش پی‌برد.

|             |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| نمره عملکرد | ۵۹ | ۶۲ | ۵۹ | ۷۴ | ۷۰ | ۶۱ | ۶۲ | ۶۶ | ۶۲ | ۷۵ |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

الف) یک بازه اطمینان ۹۵ درصدی از میانگین کل نمره عملکرد او بسازید.

ب) حال فرض کنید متوجه شده‌ایم که واریانس نمرات داده شده ۲۵ است. مجدد بازه اطمینان ۹۵ درصدی بسازید و نتیجه را با قسمت قبل مقایسه کنید.

جدول  $t$



**TABLE 2**

Percentage points of Student's  $t$  distribution

| $df/\alpha =$ | .40   | .25   | .10   | .05   | .025   | .01    | .005   | .001    | .0005   |
|---------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|---------|
| 1             | 0.325 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 318.309 | 636.619 |
| 2             | 0.289 | 0.816 | 1.886 | 2.920 | 4.303  | 6.965  | 9.925  | 22.327  | 31.599  |
| 3             | 0.277 | 0.765 | 1.638 | 2.353 | 3.182  | 4.541  | 5.841  | 10.215  | 12.924  |
| 4             | 0.271 | 0.741 | 1.533 | 2.132 | 2.776  | 3.747  | 4.604  | 7.173   | 8.610   |
| 5             | 0.267 | 0.727 | 1.476 | 2.015 | 2.571  | 3.365  | 4.032  | 5.893   | 6.869   |
| 6             | 0.265 | 0.718 | 1.440 | 1.943 | 2.447  | 3.143  | 3.707  | 5.208   | 5.959   |
| 7             | 0.263 | 0.711 | 1.415 | 1.895 | 2.365  | 2.998  | 3.499  | 4.785   | 5.408   |
| 8             | 0.262 | 0.706 | 1.397 | 1.860 | 2.306  | 2.896  | 3.355  | 4.501   | 5.041   |
| 9             | 0.261 | 0.703 | 1.383 | 1.833 | 2.262  | 2.821  | 3.250  | 4.297   | 4.781   |
| 10            | 0.260 | 0.700 | 1.372 | 1.812 | 2.228  | 2.764  | 3.169  | 4.144   | 4.587   |
| 11            | 0.260 | 0.697 | 1.363 | 1.796 | 2.201  | 2.718  | 3.106  | 4.025   | 4.437   |
| 12            | 0.259 | 0.695 | 1.356 | 1.782 | 2.179  | 2.681  | 3.055  | 3.930   | 4.318   |
| 13            | 0.259 | 0.694 | 1.350 | 1.771 | 2.160  | 2.650  | 3.012  | 3.852   | 4.221   |
| 14            | 0.258 | 0.692 | 1.345 | 1.761 | 2.145  | 2.624  | 2.977  | 3.787   | 4.140   |
| 15            | 0.258 | 0.691 | 1.341 | 1.753 | 2.131  | 2.602  | 2.947  | 3.733   | 4.073   |

## جدول $z$

### Standard Normal Probabilities



Table entry for  $z$  is the area under the standard normal curve to the left of  $z$ .

| $z$  | .00   | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| -3.4 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0002 |
| -3.3 | .0005 | .0005 | .0005 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0003 |
| -3.2 | .0007 | .0007 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0005 | .0005 | .0005 |
| -3.1 | .0010 | .0009 | .0009 | .0009 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 | .0007 | .0007 |
| -3.0 | .0013 | .0013 | .0013 | .0012 | .0012 | .0011 | .0011 | .0011 | .0010 | .0010 |
| -2.9 | .0019 | .0018 | .0018 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 |
| -2.8 | .0026 | .0025 | .0024 | .0023 | .0023 | .0022 | .0021 | .0021 | .0020 | .0019 |
| -2.7 | .0035 | .0034 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 |
| -2.6 | .0047 | .0045 | .0044 | .0043 | .0041 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 |
| -2.5 | .0062 | .0060 | .0059 | .0057 | .0055 | .0054 | .0052 | .0051 | .0049 | .0048 |
| -2.4 | .0082 | .0080 | .0078 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0068 | .0066 | .0064 |
| -2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .0099 | .0096 | .0094 | .0091 | .0089 | .0087 | .0084 |
| -2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0125 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| -2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| -2.0 | .0228 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| -1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0239 | .0233 |
| -1.8 | .0359 | .0351 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0301 | .0294 |
| -1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| -1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| -1.5 | .0668 | .0655 | .0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0571 | .0559 |
| -1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |
| -1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| -1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1093 | .1075 | .1056 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| -1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| -1.0 | .1587 | .1562 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| -0.9 | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| -0.8 | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| -0.7 | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2296 | .2266 | .2236 | .2206 | .2177 | .2148 |
| -0.6 | .2743 | .2709 | .2676 | .2643 | .2611 | .2578 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| -0.5 | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| -0.4 | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| -0.3 | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| -0.2 | .4207 | .4168 | .4129 | .4090 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| -0.1 | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| -0.0 | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4840 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |