آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۹۸ـ۹۹

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: محمدرضا احمدخانی، سروش تسلیمی، علیرضا اکبری

پاسخ‌نامه تمرین اول

شمارش،مقدمات احتمال،احتمال شرطی،استقلال

شمارش و مقدمات احتمال

مسئله‌ی ۱. مجموعه بازی

تعداد زیرمجموعه های k عضوی از مجموعه ی $\{۱, ۲, ۳, ..., n\}$ را بیابید که هیچ دو عضوی از آن متوالی نباشند.

حل.

به ازای هر جواب مساله میتوان یک زیرمجموعه ی k عضوی از $\{۱, ۲, ..., n - k + ۱\}$ یافت و برعکس.
بنابراین جواب مساله برابر است با $\binom{n-k+۱}{k}$ ▷

مسئله‌ی ۲. رنگ بازی

در یک جعبه m توپ قرمز و n توپ آبی داریم.در هر مرحله یک توپ را به تصادف از جعبه خارج میکنیم تا زمانی که در مجموع r توپ قرمز دیده باشیم. احتمال این که در مجموع k توپ از جعبه بیرون آورده باشیم چه قدر است؟

حل.

برای این که بعد از دیدن r امین توپ قرمز در کل k توپ دیده باشیم باید در $k - ۱$ انتخاب اول دقیقا $r - ۱$ توپ قرمز و $k - r$ توپ آبی دیده باشیم و انتخاب آخر نیز قرمز باشد. احتمال این که در $k - ۱$ انتخاب اول در مجموع $r - ۱$ توپ قرمز دیده باشیم برابر است با : $\frac{\binom{m}{r-۱}\times\binom{n}{k-r}}{\binom{m+n}{k-۱}}$
حال با شرط این که در $k - ۱$ انتخاب اول دقیقا$r - ۱$ توپ قرمز دیده باشیم ، احتمال اینکه انتخاب آخر قرمز باشد برابر است
با : $\frac{m-r+۱}{m+n-k+۱}$

پس داریم:
احتمال خواسته شده برابر است با ضرب دو عبارت به دست آمده. ▷

مسئله‌ی ۳. جرئت یا حقیقت؟

هفت نفر در یک مهمانی دور یک میز نشسته اند.سه نفر از آن ها به تصادف انتخاب شده و سایرین با این افراد بازی جرئت حقیقت را بازی می کنند (۴ نفر دیگر تنها سوال می‌پرسند). احتمال این که حداقل دو نفر از این سه نفر کنار یکدیگر نشسته باشند، چه قدر است؟

حل.

در حالت کلی برای انتخاب سه نفر از هفت نفر $\binom{۷}{۳}$ راه داریم. حال از این تعداد حالاتی را که حداقل دو نفر از سه نفر انتخاب شده کنار هم باشند را محاسبه می کنیم. برای این کار ابتدا تعداد حالاتی را که هیچ دو نفری کنار هم نیستند را به دست آورده و سپس با بهره گیری از اصل متمم به حل سوال میپردازیم. با کمی دقت درمیابیم که به ازای هر انتخاب برای نفر اول، سه انتخاب برای دو نفر دیگر داریم.از طرفی هر حالت سه بار شمرده می شود.
برای انتخاب سه نفر که هیچ یک کنار یکدیگر نباشند $۷ = \frac{۷\times۳}{۳}$ حالت داریم. پس خواهیم داشت : $۱ - \frac{۷}{\binom{۷}{۳}} = \frac{۴}{۵}$ ▷

مسئله‌ی ۴. جایگشت

فرض کنید $a_{۱},...,a_{۱۰۰}$ یک جایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا ۱۰۰ باشند. چقدر احتمال دارد که هیچ یک از اعداد $S_{۱} = a_{۱}$، $S_{۲} = a_{۱} + a_{۲}$، ....، $S_{۱۰۰} = a_{۱} + ... + a_{۱۰۰}$ بر ۳ بخش پذیر نباشند؟

حل.

۳۳ عدد به پیمانه ی ۳ صفر هستند و ۳۴ عدد به پیمانه ی ۳ یک هستند و ۳۳ تای دیگر دو هستند. $a_{۱}$ که به پیمانه ی ۳ صفر نباید باشد ولی به غیر از آن در حالت هایی که گفته ی مساله بخواهد بر قرار باشد فرقی نمی کند که ۰ ها در کجای دنباله قرار داشته باشند.

پس به غیر از ۰ ها اگر دنباله با یک ۲ شروع شود، بقیه ی دنباله به ترتیب به پیمانه ی ۳ باید ۲، ۱، ۲، ۱، ۲، ... باشد که با توجه به این که تعداد ۱ ها یکی بیشتر است نمی شود.

بنابراین دنباله با ۱ شروع می شود و بعد از آن هم باید ۱، ۲، ۱، ۲، ... بیاید.

بنابراین جواب که می شود تعداد حالات مطلوب به کل حالات بدین شکل می شود:

$\frac{\binom{۹۹}{۳۳}\times ۳۳!\times ۳۳!\times ۳۴!}{۱۰۰!}$ ▷

احتمال شرطی ، استقلال

مسئله‌ی ۵. بچه چیه؟

می دانیم خانواده ای یک فرزند پنج ساله و یک فرزند سه ساله دارد. فرض کنید احتمال دختر یا پسر بودن هر نوزاد، فارغ از جنسیت سایر فرزندان یکسان است.

الف

احتمال این که این خانواده حداقل یک فرزند دختر داشته باشد را حساب کنید.

ب

اگر بدانیم فرزند اول دختر است احتمال این که فرزند دیگر نیز دختر باشد را حساب کنید.

ج

اگر بدانیم این خانواده یک فرزند دختر دارد احتمال این که فرزند دیگر نیز دختر باشد را حساب کنید.

حل.

جنسیت فرزند اول و دوم را با S۱ و S۲ نمایش میدهیم.

الف

$1 - P\{S_1 = B \ \cap \ S_2 = B\} = \frac{3}{4}$

ب

$P\{S = G | S_1 = G\} = \frac{1}{2}$

ج

$P\{S_1 = G \ \cap \ S_2 = G \mid S_1 = G \ \cup \ S_2 = G\} = \frac{1}{3}$

چه تفاوتی میان دو قسمت ب و ج وجود دارد؟ اطلاعاتی که در این دو قسمت داریم چه تفاوتی با یکدیگر دارند؟ .

چرا در قسمت ج نمی‌توانیم بگوییم که می‌دانیم یکی از فرزندان دختر است. پس فرزند دیگر یا دختر است یا پسر. پس جواب مسئله یک دوم خواهد بود؟ $\triangleright$

مسئله‌ی ۶. فروشگاه قطعات ماشین

۱۰۰ نفر آدم در فروشگاه قطعات خودرو حضور دارند. از این میان ۴۰ نفر هستند که لاستیک خریداری کرده اند، ۳۰ نفر هستند که روغن موتور خریداری کرده اند و ۲۰ نفر هستند که هم لاستیک خریده اند هم روغن موتور.

یک نفر را به صورت شانسی انتخاب کردیم و او گفته است که لاستیک خریداری کرده است. چقدر احتمال دارد که این شخص روغن موتور خریده باشد؟

حل.

واقعه ی خرید روغن موتور را A و خرید لاستیک را B در نظر بگیرید.

در این صورت مقدار $P(A|B)$ را می خواهیم که از رابطه ی زیر بدست میاید:

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{\frac{۲۰}{۱۰۰}}{\frac{۴۰}{۱۰۰}} = ۰/۵ \qquad \triangleright$$

مسئله‌ی ۷. توپ بازی

در کیسه ای ۴ توپ قرمز و ۵ توپ آبی قرار دارد. اگر از این کیسه ۴ توپ را به صورت تصادفی در بیاوریم چقدر احتمال دارد ۲ تای اولی قرمز و ۲ تای بعدی آبی باشند؟

حل.

واقعه ی قرمز بودن ۲ توپ اول را A و واقعه ی آبی بودن ۲ توپ دوم را B در نظر بگیرید.

در این صورت داریم:

$$P(A,B) = P(A) \times P(B|A) = (\frac{۴}{۹} \times \frac{۳}{۸}) \times (\frac{۵}{۷} \times \frac{۴}{۶}) = \frac{۵}{۶۳} \qquad \triangleright$$

مسئله‌ی ۸. بادکنک بازی

۵۰ بادکنک در جعبه ای قرار دارند که می دانیم ۵ تای آنها سوراخ دارند. احتمال این که ۳ بادکنک برداریم و همگی سالم باشند چقدر است؟

حل.

وقایع A, B, C را به ترتیب سالم بودن اولی دومی و سومی در نظر میگیریم.

در این صورت طبق قاعده ی زنجیره ای داریم:

$$P(A,B,C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A,B) = \frac{۴۵}{۵۰} \times \frac{۴۴}{۴۹} \times \frac{۴۳}{۴۸} = ۰/۷۲۴ \qquad \triangleright$$

مسئله‌ی ۹. سکه بازی

دو سکه داریم که با پرتاب اولی به احتمال ۰/۵ شیر و به احتمال ۰/۵ خط میاید و با پرتاب دومی به احتمال ۰/۶ شیر ظاهر می شود و به احتمال ۰/۴ خط.

یک سکه را شانسی برداشته ایم و پس از ۳ بار پرتاب کردن آن، به ترتیب به نتایج خط ــ شیر ــ شیر دست یافته ایم.

احتمال این که پرتاب چهارم خط بیاید چقدر است؟

حل.

واقعه ی پرتاب ۴ام خط شود را T۴ در نظر میگیریم. داده های مشاهده شده یعنی ۳ پرتاب اول را D در نظر میگیریم. پیشامد A هم این که سکه ی اولی دستمان است یا سکه ی دوم مینامیم

بنابراین داریم:

$$P(T۴|D) = P(T۴, A = ۱|D) + P(T۴, A = ۲|D) = P(T۴|A = ۱, D) \times P(A = ۱|D) + P(T۴|A = ۲, D) \times P(A = ۲|D) = ۰/۵ \times P(A = ۱|D) + ۰/۴ \times P(A = ۲|D)$$

برای محاسبه ی $P(A = ۱|D)$ به این گونه عمل میکنیم:

$$P(A = ۱|D) = \frac{P(D|A=۱)\times P(A=۱)}{P(D)} = \frac{P(D|A=۱)\times P(A=۱)}{P(D|A=۱)\times P(A=۱)+P(D|A=۲)\times P(A=۲)} = \frac{\frac{۱}{۸}\times ۰/۵}{\frac{۱}{۸}\times ۰/۵+۰/۱۴۴\times ۰/۵} = \frac{۰/۱۲۵}{۰/۲۶۹} = ۰/۴۶$$

بنابراین $P(A = ۲|D) = ۰/۵۴$ و در نتیجه داریم:

$$P(T۴|D) = ۰/۵ \times ۰/۴۶ + ۰/۴ \times ۰/۵۴ = ۰/۴۴۶$$ ▷

مسئله‌ی ۱۰. این کارا آخر عاقبت نداره! [۱] (*برای علاقه‌مندان)

الکسی ایوانوویچ، قهرمان داستان قمارباز، نوشته فئودور داستایوفسکی، در مقابل فرد بسیار ثروتمندی در حال انجام عمل تقبیح‌شده قمار است و در هر گام یا با احتمال p برنده ی یک واحد و یا با احتمال p ـ ۱ بازنده ی یک واحد میشود. نشان دهید احتمال این که الکسی در نهایت ورشکست شود به ازای $p <= ۰/۵$ برابر با یک و به ازای $p > ۰/۵$ برابر است با : $(q/p)^i$

* $q = ۱ - p$ و i برابر با سرمایه ی اولیه‌ی الکسی است.
همچنین در بازی مجموع سرمایه دو فرد عدد ثابت N است. یعنی اگر سرمایه الکسی i باشد، سرمایه فرد ثروتمند N−i است.

حل.

در این راه‌حل سعی می‌کنیم روند کلی حل این مسئله را توضیح دهیم. برای جزئیات دقیق‌تر به منابع مراجعه کنید. اگر به بازی خوب نگاه کنیم، می‌توانیم یک خاصیت بازگشتی در آن مشاهده کنیم. قدم اول را در نظر بگیرید. اگر الکسی ببازد ، انگار با همان مسئله روبروییم در حالی که سرمایه الکسی یک واحد کمتر باشد و در نتیجه سرمایه رقیب او یک واحد بیشتر. به همین ترتیب برای برد الکسی نیز می‌توان چنین حرفی زد. (به‌طور کلی این فرآیند یک Random Walk نام دارد که در درس فرآیندهای تصادفی بررسی می‌شود.).
حال P_i را بدین صورت تعریف می‌کنیم: احتمال اینکه الکسی بازی را ببرد اگر با i واحد سرمایه بازی را شروع کند. سپس با توجه به قانون جمع کل و دید بازگشتی توضیح داده‌شده می‌توان نوشت::

[۱] **Gambler's Ruin**

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \text{ ،} \qquad 1 < i < N-1$$
$$P_0 = 0$$
$$P_N = 1$$

معادله‌ی بدست آمده، یک‌جور معادله دیفرانسیل اما در حالت گسسته است. با حل این معادله به جواب زیر برای P_i خواهیم رسید.

$$P_i = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} & \text{if } p \neq q \\ \frac{i}{N} & \text{if } p = q \end{cases}$$

حال با توجه به رابطه بدست‌آمده برای P_i می‌توان گزاره‌های موجود در صورت سوال را نتیجه گرفت. به عنوان مثال اگر $p = ۰/۴۹$ باشد، یعنی بازی خیلی کم غیرعادلانه باشد و حتی سرمایه دو فرد در ابتدا با هم برابر باشد ($i = N - i$ و فرض کنید $N = ۲۰۰$) ، احتمال برنده‌شدن الکسی ۰/۰۲ است!
کنجکاوی : آیا می‌توان نشان داد که این بازی حتما خاتمه می‌یابد و تا ابد ادامه پیدا نمی‌کند؟
▷

موفق باشید :)