علی اشکاری ۴۰۰۱۴۷۱۵

سوال ۱) برای اینکه بردارهای رو به رو $v_1 - v_2$ و $v_2 - v_3$ و ... و $v_{n-1} - v_n$ و v_n مستقل خطی باشند.

باید رابطه زیر فقط در حالتی که همه α ها برابر صفر است، برقرار باشد.

$$\alpha_1 (v_1 - v_2) + \alpha_2 (v_2 - v_3) + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\longrightarrow \alpha_1 v_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) v_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_{n-1}) v_n = 0$$

می‌دانیم که بردارهای v_i مستقل خطی اند پس:

$\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 - \alpha_1 = 0 \longrightarrow \alpha_2 = 0$

$\vdots$

$\longrightarrow \alpha_n = 0$

همه α ها صفر اند $\longrightarrow$ بردارهای داده شده مستقل خطی اند!

۴۰۱۰۴۷۱۵ علی آقایاری

سوال ۲) رد قضیه با مثال نقض:

$v_1 = (1,0)$ و $v_2 = (0,1)$

$w_1 = (-1,0)$ و $w_2 = (0,1)$

v_1 و v_2 به وضوح مستقل خطی اند ، w_1 و w_2 هم همینطور:

$$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$\alpha(-1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

اما $v_1 + w_2$ برابر $(0,0)$ خواهد بود

و می دانیم اگر در مجموعه بردارهای ما ، 0_n باشد ⟵ مجموعه بردارها مستقل خطی نخواهند بود

$$\alpha(0,0) + \beta(0,2) = (0,0) \longrightarrow \begin{array}{l} \beta = 0 \\ \alpha = \text{anything} \end{array}$$

علی آقاماری ۹۰۰۱۰۴۷۱۵

سوال ۳) برای اینکه این سه بردار وابسته خطی باشند نیاز داریم که دترمینان ماتریس بردارها برابر صفر شود!

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 4 \\ 0 & 5 & b \end{vmatrix} = ab - 20 - 2b = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 4 \end{matrix}$$

$$\rightarrow b(a-2) = 20 \longrightarrow b = \frac{20}{a-2}$$

پس: $a \in \mathbb{R}$ و $a \neq 2 \longrightarrow b = \frac{20}{a-2}$

۴۰۰۱۰۴۷۱۵ علی آقایاری

سوال ۴) الف)

اگر تابع f را به عنوان نرم یک بردار در نظر بگیریم، خواهیم داشت.

$$f(r) = (a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r)^{1/r}$$

طبق تعریف، a_i قدر مطلق درایه iام بردار است.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که f نزولی است.
اگر همه بردارها ۰ باشند، تمام نرم‌ها برابر صفر می‌شوند و عبارت مورد نظر برقرار می‌شود
مگرنه

$$A = \ln f(r) = \frac{\ln(a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r)}{r}$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{f'(r)}{f(r)} = \underbrace{-\frac{\ln(a_1^r + \dots + a_n^r)}{r^2} + \frac{a_1^r \ln a_1 + \dots + a_n^r \ln a_n}{r \times \sum_{i=1}^{n} a_i^r}}_{B}$$

$$\longrightarrow f'(r) = f(r)\, B$$

میدانیم f همواره مثبت است، پس باید B را تعیین علامت کنیم.

$$B = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i^r \ln a_i^r - (a_1^r + \dots + a_n^r)\ln\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)}^{C}}{\underbrace{r^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)}_{>0}}$$

$$C = a_1^r \ln\left(\frac{a_1^r}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^r\right)}\right) + \dots + a_n^r \ln\left(\frac{a_n^r}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^r\right)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^r \ln\left(\frac{a_i^r}{\sum_{j=1}^{n} a_j^r}\right)$$

می‌دانیم که اگر $0 < \frac{a_i^r}{\sum_{j=1}^n a_j^r} < 1$ پس $\longrightarrow$ $\ln\left(\frac{a_i^r}{\sum_{j=1}^n a_j^r}\right) < 0$

$\longrightarrow$ C به صورت جمع تعدادی عدد نامثبت است $\longrightarrow$ C و B و $f'(r)$ نامثبت است

$f'(r) < 0 \longrightarrow$ پس تابع $f(r)$ نزولی است!

ب) با توجه به $1/p + 1/q = 1$ خواهیم داشت:

$$p = \frac{q}{q-1} \qquad \text{I}$$

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{II}$$

$$\text{I} \text{ و } \text{II} \longrightarrow \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^{q/(q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}}$$

$|b_i| \to |x_i|^p$

$|a_i| \to 1$

$q \to q/p$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \le \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|^p)^{q/p}\right)^{p/q} \left(\sum_{i=1}^n 1^{\frac{q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

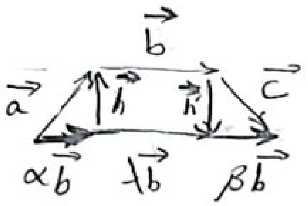
$$= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{p/q} n^{1-p/q}$$

$$\longrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q} n^{1/p-1/q}$$

$$\longrightarrow \|x\|_p \le n^{1/p-1/q} \|x\|_q$$

۴۰۰۱۰۴۷۱۵ علی اقایاول

سوال ۵) خواسته را ثابت :



$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = \alpha\vec{b} + \vec{h} \\ \vec{c} = \vec{h'} + \beta\vec{b}\end{array}\right| \longrightarrow \left| \begin{array}{l}\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \\ \beta = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\end{array}\right.$$

$$\vec{h} = -\vec{h'} \quad \Big| \longrightarrow \quad \|\vec{h}\|^2 = \|\vec{h'}\|^2 \quad \oplus$$

یک طرف مسئله را اثبات می‌کنیم و می‌گوییم که اعمال انجام گرفته‌ها دوطرفه است پس طرف دوم هم اثبات می‌شود!

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{b}+\vec{c}\|^2 \longrightarrow \|(\alpha+1)\vec{b} + \vec{h}\|^2 = \|(\beta+1)\vec{b}+\vec{h'}\|^2$$

$$\longrightarrow (\alpha+1)^2\|\vec{b}\|^2 + \|\vec{h}\|^2 = (\beta+1)^2\|\vec{b}\|^2 + \|\vec{h'}\|^2$$

$$\longrightarrow |\alpha+1| = |\beta+1| \longrightarrow (\alpha+1) = -(\beta+1) \longrightarrow \alpha+\beta = 0$$

طبق صورت سوال

$\xrightarrow{\hspace{3em}}$ ⊗

α و β مثبت هستند

چون ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{c}$ با

$\vec{b}$ مثبت است.

$$\longrightarrow \alpha+1 = \beta+1 \longrightarrow \alpha = \beta \quad \circledast$$

$$\left.\begin{array}{l}\|\vec{a}\|^2 = \alpha^2\|\vec{b}\|^2 + \|\vec{h}\|^2 \\ \|\vec{c}\|^2 = \beta^2\|\vec{b}\|^2 + \|\vec{h'}\|^2\end{array}\right\} \xrightarrow{\circledast,\ \oplus} \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{c}\|^2$$

پس :

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{b}+\vec{c}\|^2 \longleftrightarrow \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{c}\|^2$$

علی آتابازی - ۴۰۰۱۴۷۱۵

۶) الف) نشان می‌دهیم عضوهای هر جفت تابع متعامد اند. "ضرب داخلی برابر ۰"

توابع به شکل $\frac{\cos\alpha x}{\sqrt{\pi}}$ | $\frac{\sin\beta x}{\sqrt{\pi}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ هستند. α, β صحیح مثبت

حال تمامی حالات را در نظر می‌گیریم.

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos\alpha x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\alpha x}{\pi\sqrt{2}}\,dx = \frac{1}{\pi\alpha\sqrt{2}} \sin\alpha x \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi\alpha\sqrt{2}}\left(\sin\pi\alpha - \sin(-\pi\alpha)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi\alpha} \cancel{\sin(\pi\alpha)}^{0} = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin\beta x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\beta x}{\pi\sqrt{2}}\,dx = \frac{-1}{\pi\beta\sqrt{2}} \cos\beta x \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{\pi\beta\sqrt{2}}\left(\cancel{\cos(\pi\beta) - \cos(-\pi\beta)}^{0}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\sin\beta x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos\alpha x}{\sqrt{\pi}} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\alpha x \cdot \sin\beta x}{\pi}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha+\beta)x - \sin(\alpha-\beta)x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-\cos(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta} + \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta} \right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\cancel{\frac{\cos(\alpha+\beta)\pi - \cos(\alpha+\beta)\pi}{\alpha+\beta}}^{0} + \cancel{\quad}^{0} \right)$$

$$= 0$$

$$\left(\frac{\cos\alpha x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos\beta x}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\cos\beta x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta} + \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cancel{\sin(\alpha+\beta)\pi}^{0} + \cancel{\sin(\alpha+\beta)\pi}^{0}}{\alpha+\beta} + \cancel{\quad}^{0}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin\beta x}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\alpha x\sin\beta x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta} + \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cancel{\sin(\alpha-\beta)\pi}^{0} + \cancel{\sin(\alpha-\beta)\pi}^{0}}{\alpha-\beta} - \cancel{\quad}^{0}\right) = 0$$

---

* تبدیل‌های بالا با استفاده از تبدیل‌های مثلثی زیر انجام شده اند!

① $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ ② $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

$$\xrightarrow{(1,2)} 2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

③ $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ ④ $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

$$\xrightarrow{(3,4)} 2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$$

حال یکه بودن را هم نمایش می‌دهیم.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{x}{2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 1$$

$$\longrightarrow \left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\| = 1$$

$$\left(\frac{\cos\alpha x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos\alpha x}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2\alpha x}{\pi}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2\alpha x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(x + \frac{\sin 2\alpha x}{2\alpha}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi-(-\pi)+\frac{\sin 2\alpha\pi + \sin 2\alpha\pi}{2\alpha}\right) = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$\longrightarrow \left\|\frac{\cos\alpha x}{\sqrt{\pi}}\right\| = 1$$

$$\left(\frac{\sin\beta x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin\beta x}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\beta x}{\pi}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(x - \frac{\sin 2\alpha x}{2\alpha}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi-(-\pi) - \frac{\sin 2\alpha\pi - \sin 2\alpha\pi}{2\alpha}\right) = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$\longrightarrow \left\|\frac{\sin\beta x}{\sqrt{\pi}}\right\| = 1$$

CamScanner

ب) باید a_0 | a_n | b_n را حساب کنیم. در ابتدا نرم $\|1\|$ $\|\cos n\omega_0 t\|$ $\|\sin n\omega_0 t\|$ را حساب کنیم.

$$\|1\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} 1\,dt = \boxed{T}$$

$$\|\cos n\omega_0 t\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 n\omega_0 t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} (1 + \cos 2n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2n\omega_0 t}{2n\omega_0}\right)\Bigg|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= T/2 + \cancel{\frac{2\sin 2n\pi}{4n\omega_0}}^{\,0} = \boxed{T/2}$$

$$\|\sin n\omega_0 t\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 n\omega_0 t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} (1 - \cos 2n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2n\omega_0 t}{2n\omega_0}\right)\Bigg|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= T/2 - \cancel{\frac{2\sin 2n\pi}{4n\omega_0}}^{\,0} = \boxed{T/2}$$

$$\longrightarrow \quad a_0 = \frac{(f(t), 1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{T_p A}{T}$$

مساحت زیر نمودار

$$\longrightarrow \quad a_n = \frac{(f(t), \cos n\omega_0 t)}{\|\cos n\omega_0 t\|^2} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} A\cos n\omega_0 t\,dt = \frac{2A}{Tn\omega_0}\sin n\omega_0 t\Bigg|_{-T_p/2}^{T_p/2}$$

$$= \frac{4A}{Tn\omega_0}\sin\frac{n\omega_0 T_p}{2} = \frac{2A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi T_p}{T}\right)$$

$$\longrightarrow b_n = \frac{(f(t), \sin n\omega_0 t)}{\| \sin n\omega_0 t \|^2} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{2A}{T}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} \sin n\omega_0 t\, dt = \frac{-2A}{n\omega_0 t} \cos n\omega_0 t \Big|_{-T_p/2}^{T_p/2}$$

$$= \frac{-2A}{n\omega_0 t}\left(\cancel{\cos\left(\frac{n\omega T_p}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\omega T_p}{2}\right)} \right) = 0$$

$$\longrightarrow f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\longrightarrow \boxed{f(t) = \frac{T_p A}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi T_p}{T}\right)\cos n\omega_0 T}$$

ج) با شیوه قبل عمل کنیم.

$$\longrightarrow a_0 = \frac{(f(t), 1)}{\|1\|^2} = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt = 0$$

مساحت زیر نمودار

$$\longrightarrow a_n = \frac{(f(t), \cos n\omega_0 t)}{\| \cos n\omega_0 t \|^2} = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t\, dt$$

$$= 2A/T \left(\underbrace{\int_{-T/2}^{0} \left(1 + \frac{4t}{T}\right) \cos n\omega_0 t\, dt}_{X} + \underbrace{\int_{0}^{T/2} (1 - 4t/T) \cos n\omega_0 t\, dt}_{Y} \right)$$

$$X = \frac{4}{T}\left(\overset{0}{\cancel{\frac{t\sin n\omega_0 t}{n\omega_0}}} - \int_{-T/2}^{0} \frac{\sin n\omega_0 t}{n\omega_0}\right) =$$

$$\frac{4}{n^2\omega_0^2 T}\cos n\omega_0 t\,\Big|_{-T/2}^{0} = \frac{T}{\pi^2 n^2}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$

حاصل Y هم مانند X :

$$Y = \frac{-4}{n\omega_0^2 T^2}\cos n\omega_0 t\,\Big|_{0}^{T/2} = \frac{T}{\pi^2 n^2}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$

$$\longrightarrow \quad a_n = \frac{2A}{T}\times\frac{2T}{\pi^2 n^2}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$

$$= \frac{8A}{n^2\pi^2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\longrightarrow \quad b_n = \frac{(f(t),\sin n\omega_0 t)}{\|\sin n\omega_0 t\|^2} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{2A}{T}\Big(\underbrace{\int_{-T/2}^{0}\left(1+\frac{4t}{T}\right)\sin n\omega_0 t\,dt}_{X} + \underbrace{\int_{0}^{T/2}\left(1-\frac{4t}{T}\right)\sin n\omega_0 t\,dt}_{Y}\Big)$$

$$X = \int_{-T/2}^{0}\sin n\omega_0 t\,dt + \underbrace{\frac{4}{T}\int_{-T/2}^{0} t\sin n\omega_0 t\,dt}_{A} = \frac{-\cos n\omega_0 t}{n\omega_0}\Big|_{-T/2}^{0} + A$$

$$A = \frac{4}{T}\left(\frac{-t\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} + \int_{-T/2}^{0}\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\,dt\right)$$

$$\xrightarrow{A} X = \frac{\cos(n\pi)}{n\omega_0} - 1 + \frac{4}{T}\left(\frac{-T\cos(n\pi)}{2n\omega_0} + \left(\cancel{\frac{\sin n\omega_0 t}{n^2\omega_0^2}} \right)\Bigg|_{-T/2}^{0} \right)$$

$$= -1 - \frac{\cos(n\pi)}{n\omega_0}$$

$$Y = \int_0^{T/2} \sin n\omega_0 t \, dt - \underbrace{\frac{4}{T}\int_0^{T/2} t \sin n\omega_0 t \, dt}_{B}$$

$$= \frac{-\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\Bigg|_0^{T/2} - B$$

$$B = +\frac{4}{T}\left(\frac{-t\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} + \int_0^{T/2} \cancel{\frac{\cos n\omega_0 t}{n\omega_0}}\, dt \right)$$

$$\xrightarrow{,B} Y = 1 - \frac{\cos n\pi}{n\omega_0} + \frac{2\cos n\pi}{n\omega_0}$$

$$\longrightarrow Y = 1 + \frac{\cos n\pi}{n\omega_0}$$

$$\longrightarrow b_n = 0$$

$$\longrightarrow f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\longrightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8A}{n^2\pi^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos n\omega_0 t$$

$$= \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{8A}{n^2\pi^2} \cos n\omega_0 t$$