علی آقابابائی ۴۰۰۱۴۷۱۵

۱) الف) عنصر همانی در V وجود ندارد ، یعنی عنصری وجود ندارد که $a \oplus v = v$ پس فضای برداری نداریم

ب) $c \odot v_2 = v_1$ $\xrightarrow{(\forall c \,:\, c \odot v_2 \neq v_2)}$ unitary law نقض می‌شود و فضای برداری نداریم

ج)

$(a+b) \odot (x_1, y_1) = ((a+b)x_1, |a+b|y_1)$

$(a \odot (x_1, y_1)) \oplus (b \odot (x_1, y_1)) = ((a+b)x_1, (|a|+|b|)y_1)$

$\xrightarrow[b=1]{a=-1 \quad \text{(مثال نقض)}} (0x_1, 0y_1) \neq (0x_1, 2y_1)$

distributive law نقض می‌شود ← فضای برداری نداریم.

علی آقایاری ۴۰۰۱۰۴۷۱۵

۲) الف) ⊕ یک چندجمله‌ای درجه n، حداکثر n ریشه حقیقی دارد

۱) برهان خلف: $\sin(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n است اما بی‌شمار ریشه حقیقی دارد

با توجه به ⊕ تناقض دارد! ← پس $f(x) = \sin(x)$ در $span(S)$ نیست!

ب) f, g را از V و C را از R در نظر بگیریم!

$$(f+g)'(x) + 2(f+g)(x) = f'(x) + g'(x) + 2f(x) + 2g(x)$$

$$= 0 \longrightarrow (f+g)(x) \in V$$

$$(cf)'(x) + 2(cf(x)) = cf'(x) + 2cf(x) = c(f'(x) + 2f(x)) = 0$$

$$\longrightarrow cf(x) \in V$$

و می‌دانیم که $f(x) = 0$ در عبارت صدق می‌کند ← $f(x) = 0 \in V$ پس این توابع سه

شرط زیرفضا بودن را دارند!

ج)

$$q_1(x) = ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 4a + 3b + 5c = -15 \\ a - b + 2c = -7 \\ 2a + 3b + 3c = -9 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & -9 \\ 4 & 3 & 5 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 -= 2R_1]{R_3 -= 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 += R_1]{R_3 -= 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases} \longrightarrow g_1(x) = -2p_1(x) + p_2(x) - 2p_3(x)$$

$$g_2(x) = a\,p_1(x) + b\,p_2(x) + c\,p_3(x)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 4a + 3b + 5c = 0 \\ a - b + 2c = 0 \\ 2a + b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{قبل}]{\text{مانند}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left\{ a = b = c = 0 \right. \longrightarrow g_2(x) = 0p_1(x) + 0p_2(x) + 0p_3(x)$$

$$\text{Span}(f,g) = a\sin^2(x) + b\cos^2(x)$$ ب)

$a = b = 0 \longrightarrow 0 \in \text{span}(f,g)$ ✓

$a = b = 1 \longrightarrow 1 \in \text{span}$ ✓

$-a = b = 1 \longrightarrow \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x) \in \text{span}(f,g)$ ✓

$\longrightarrow a\sin^2(x) + b\cos^2(x) \neq 3 + x^2 \longrightarrow 3 + x^2 \notin \text{span}(f,g)$

تعداد ریشه‌های دو طرف یکسان نیست « همان ایده بخش الف »

علی آقایاری ۴۰۰۱۰۲۷۱۵

۳) الف) باید ۳ شرط زیرفضا بودن را بررسی کنیم.

* U_i ها زیرفضا هستند به همین دلیل zero vec در آنها وجود دارد ⟵ zero vec در $\cap\phi$ وجود دارد

* دو عضو a و b از اشتراک U_i ها را می‌گیریم، U_i زیرفضا است پس $a+b \in U_i$

⟵ $a+b$ در اشتراک U_i ها قرار دارد ⟵ $\cap\phi$ نسبت به جمع بسته

* عضو a از R و عضو b از اشتراک U_i ها را به طور دلخواه در نظر می‌گیریم، U_i زیرفضا است،

پس $ab \in U_i$ ⟵ ab در اشتراک U_i ها قرار دارد ⟵ $\cap\phi$ نسبت به ضرب اسکالر بسته است!

هر ۳ ویژگی مورد نیاز وجود دارد ⟵ $\cap\phi$ یک زیرفضا است.

ب) ما نشان دادن $\cap\phi \subseteq \sum_{i=1}^{n} W_i$ و $\sum_{i=1}^{n} W_i \subseteq \cap\phi$ می‌گوییم که $\cap\phi = \sum_{i=1}^{n} W_i$

* $\cap\phi \subseteq \sum_{i=1}^{n} W_i$: عضو a را در $\cap\phi$ در نظر می‌گیریم پس این عضو در همه U ها قرار دارد.

واضح است که $\forall (1\leq i\leq n) : W_i \subseteq \sum_{j=1}^{n} W_j$ || w_i از خود W_i می‌آید و zero vec از سایر زیرفضاها ||

پس $w_i \in \sum_{j=1}^{n} W_j$ ⟵ پس $\sum_{i=1}^{n} W_i$ عضو ϕ است.

⟵ پس $a \in \sum_{i=1}^{n} W_i$ یا همان $\boxed{\cap\phi \subseteq \sum_{i=1}^{n} W_i}$

* $\sum_{i=1}^{n} w_i \subseteq \cap\phi$: از بخش قبل خواهیم داشت $\sum_{i=1}^{n} w_i \in \sum_{i=1}^{n} W_i$. حال هر w_i از W_i را

در نظر می‌گیریم و طبق تعریف ϕ که به ازای همه U ها $W_i \subseteq U$ نتیجه می‌شود که $w_i \in U$ پس $w_i \in \cap\phi$

و چون $\cap\phi$ نسبت به جمع بسته است ⟵ $\sum_{i=1}^{n} w_i \in \cap\phi$ یا همان $\boxed{\sum_{i=1}^{n} W_i \subseteq \cap\phi}$

از اثبات $\sum_{i=1}^{n} W_i \subseteq 1\phi$ و $1\phi \subseteq \sum_{i=1}^{n} W_i$ نتیجه می‌شود که

$$1\phi = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

علی آقایاری ۴۰۱۰۴۷۱۵

۴) W یک زیرفضا از V است، $w_1, w_2, \dots, w_k$ را پایه W در نظر می‌گیریم (یعنی wها مستقل خطی‌اند). واضح است که $k \le n$ (n برابر است با $\dim(V)$)

(۱) W برابر است با V $\xrightarrow{\text{پس}}$ $W' = \{0\}$

$$\longrightarrow W \cap W' = \{0\} \quad \text{و} \quad W + W' = V$$

در شرایط صدق می‌کند.

(۲) W نابرابر V است. روی اعضای V عملیات روبه‌رو را انجام می‌دهیم: اگر آن عضو در $\mathrm{span}(w_1, \dots, w_k, w_{k+1}')$ بود که هیچ، نبود آن را اضافه می‌کنیم. در آخر برای V یک پایه پیدا کرده‌ایم که به صورت $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}', \dots, w_n'$ است. پس W' برابر $\mathrm{span}(w_{k+1}', \dots, w_n')$ است.

اثبات مطلوب بودن جواب:
هر عضو از V را می‌توان به شکل $w + w'$ نوشت که $w \in W$ و $w' \in W'$

$$v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_k w_k + a_{k+1} w_{k+1}' + \dots + a_n w_n'$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i w_i}_{A} + \overbrace{\sum_{i=k+1}^{n} a_i w_i'}^{B}$$

$$A \in \mathrm{span}(w_1, \dots, w_k) = W$$

$$B \in \mathrm{span}(w_{k+1}', \dots, w_n') = W'$$

عضوی از $W \cap W'$ انتخاب می‌کنیم (u)

$$u \in W \longrightarrow u = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i$$

$$u \in W' \longrightarrow u = \sum_{i=k+1}^{n} a_i w'_i$$

$$u - u = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i - \sum_{i=k+1}^{n} a_i w'_i = 0 \longrightarrow$$

ترکیب خطی از پایه V که همه ضرایب باید صفر باشند ← پس فقط 0 در این مجموعه قرار دارد ($W \cap W'$)، می‌بینیم که هر دو شرط برقرار است پس حکم درست است!

ب) مثال نقض: $\mathbb{Z}^2$

- 0 را دارد
- نسبت به $+$ و $-$ بسته است
- اما نسبت به ضرب اسکالر بسته نیست. مثال: ضرب $\sqrt{2}$ در برداری از $\mathbb{Z}^2$ عضوی از $\mathbb{Z}^2$ نیست!

پس ← $\mathbb{Z}^2$ زیرفضا نیست

ج) B را به صورت مجموعه بردارهای پایه $\mathbb{R}^2$ در نظر می‌گیریم:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

S را هم خط $y = x$ در نظر گرفته و اشتراک آن با $\text{span}(b_i)$ برابر با مبدأ می‌شود ← $S \cap \text{span}(b_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bigoplus_{i=1}^{2} \left(S \cap \text{span}(b_i) \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq S$$

مثال نقض پیدا کردیم!

د) مسئله را برای $k=1$ حل می‌کنیم.

$k=1$: $W_1 \neq V \longrightarrow$ باید عضوی از V باشد که در W_1 نیست

$k \geq 2$: زیرفضای W_2 را بررسی می‌کنیم، اگر $W_2 \subseteq W_1$ باشد، W_2 را حذف و W_1 را انتخاب می‌کنیم

از مجموعه باقی‌مانده، یک عضو از W_1 و یک عضو از W_2 به صورتی که این اعضا فقط در W_1 و فقط در W_2 هستند انتخاب می‌کنیم (u و v)

به خاطر کاری که در خط اول کردیم، این عمل امکان‌پذیر است! مگر آنکه فقط یک مجموعه بماند که با $k=1$ اثبات می‌شود، پس در این حالت فرض می‌کنیم که حداقل ۲ مجموعه مانده است!

$u+v$ در W_1 و W_2 قرار ندارند زیرا که بسته بودن نسبت به جمع برای زیرفضا زیر سوال می‌رود.

$$\left.\begin{array}{l} u+v \in W_1 \\ u+v \in W_2 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} (u+v)+(-u) = v \in W_2 ,\ v \notin W_1 \\ (u+v)+(-v) = u \in W_1 ,\ u \notin W_2 \end{array}$$

$u+v$ را در مجموعه‌ای مانند W_3 قرار می‌دهیم.

$u+v$ را با v جمع می‌کنیم و مانند بالا می‌گوییم که $u+2v$ در W_1, W_2, W_3 نیست!

ادامه می‌دهیم تا به $a+(k-1)b \in W_k$ برسیم.

در هیچ کدام از $W_1, W_2, \ldots, W_k$ نیست

برداری که مسئله می‌خواهد پیدا شد!

علی آقایاری ۴۰۰۱۰۴۷۱۵

د)

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ -2 & -7 & 3 & -5 \\ -1 & -5 & k^2-6 & k+1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 += R_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ -2 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & k^2-9 & k+3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 += 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & k^2-9 & k+3 \end{bmatrix}$$

if $k^2-9=0$ $\longrightarrow$ $k=3$ $\quad 0x+0y+0z=6$ ✗ هیچ جواب

$\longrightarrow$ $k=-3$ $\quad 0x+0y+0z=0$ بی‌شمار جواب

if $k^2-9\neq 0$ $\longrightarrow$ جواب یکتا