جبر خطی

دانشكده مهندسي كامپيوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی بهار ۱۴۰۲



تمرین اول تاریخ انتشار: ۲۵ بهمن ۱۴۰۱

فضای برداری و دستگاه معادلات

۱. پرسشهای خود در مورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر پاسخ: شما در مجموع در طول نیمسال می توانید تا سقف ۱۵ روز تمارین خود را با تاخیر ارسال کنید. پس از آن به ازای هر ساعت تاخیر ۵.۰ درصد نمره کسر خواهد شد. مقیاس محاسبه تاخیر ساعت است و تاخیر شما رو به بالا گرد خواهد شد تا به مقیاس ساعت درآید. به عنوان مثال ۲ ساعت و ۱۰ دقیقه تاخیر معادل ۳ ساعت در نظر گرفته خواهد شد. تمارین تئوری و عملی در محاسبه تاخیرها دو تمرین جداگانه در نظر گرفته خواهد شد. یعنی ۲ روز تاخیر بر تمرین عملی در مجموع برابر ۳ روز در نظر گرفته خواهد شد. در نهایت اگر بیش از ۱۵ روز تاخیر داشته باشید، تاخیر مجاز شما به نحو بهینه ای توزیع خواهد شد که کمترین میزان نمره را از دست بدهید.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل تمارین: دانشجویان می توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا بدست آوردن ایده کلی با یک دیگر مشارکت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه درس می باشد چرا که همفکری و کار گروهی می تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما بدست آوردن جزئیات راه حل و نگارش پاسخ باید تماما منحصرا توسط خود دانشجو انجام شود. بیشینه اندازه مجاز گروهی که در آن می توانید برای حل تمرین همفکری کنید برابر ۴ نفر است. رعابت آداب نامهی انجام تمرینهای درسی در انجام تمارین الزامی است. در صورت مشاهده تخلف مطابق قوانین دانشکده و دانشگاه برخورد خواهد شد.

سوالات تئوری (۱۴۰ نمره) تاریخ تحویل: ۶ اسفند ۱۴۰۱

 $(c \in \mathbb{R})$. تعریف شده مشخص کنید که آیا یک فضای برداری داریم یا خیر. (V,\odot,\oplus) تعریف شده مشخص کنید که آیا یک فضای برداری داریم یا خیر.

- $c\odot p(t)=cp(t)$ ، $p(t)\oplus q(t)=p'(t)q'(t)$ میباشد ، همینطور ۲ میباشد ، نمره پنجملهای ها از درجه حداکثر ۲ میباشد ، همینطور (۱) و نمره $V=P_{\mathsf{Y}}$
- $(v_1,v_1\in\mathbb{R}^n)$. $c\odot v_1=c\odot v_1=v_1$ و داريم $V=\{v_1,v_1\in\mathbb{R}^n\}$ و $v_1\oplus v_1=v_1\oplus v_1=$
 - $(x_1,y_1)\oplus (x_1,y_1)=(x_1+x_1,y_1+y_1)$ و $(x_1,y_1)\oplus (x_1,y_1)\oplus (x_1,y_1)$ و $(x_1,y_1)\oplus (x_1,y_1)\oplus (x_1,y_1)$ و $(x_1,y_1)\oplus (x_1,y_1)\oplus (x_$

پرسش ۲ (۲۸ نمره) به سوالات زیر پاسخ دهید.

- (آ) (۷ نمره) فضای برداری V را به صورت تمام توابع مشتق پذیر بر روی $\mathbb R$ تعریف میکنیم. همینطور S را بر روی V به صورت مجموعه تمام توابع چندجملهای تعریف میکنیم. نشان دهید که $f(x) = \sin(x)$ در $f(x) = \sin(x)$ قرار ندارد.
- (ب) (۷ نمره) فضای برداری V را مانند قسمت قبل درنظر بگیرید. نشان دهید تمام توابعی که $f'+\Upsilon f=\gamma$ برای آنها برقرار باشد، یک زیرفضا را میسازند.
 - (ج) (ج) نمره) توابع $p_{\mathsf{T}}(x) = \mathsf{T} + \mathsf{T} x + \mathsf{D} x^{\mathsf{T}}$ و $p_{\mathsf{T}}(x) = \mathsf{T} + \mathsf{T} x + \mathsf{T} x^{\mathsf{T}}$ و $p_{\mathsf{T}}(x) = \mathsf{T} + \mathsf{T} x + \mathsf{T} x^{\mathsf{T}}$ تعریف میکنیم. توابع $p_{\mathsf{T}}(x) = \mathsf{T} + \mathsf{T} x + \mathsf{T} x^{\mathsf{T}}$ تعریف میکنیم. توابع $p_{\mathsf{T}}(x) = \mathsf{T} + \mathsf{T} x + \mathsf{T} x^{\mathsf{T}}$ تعریف میکنیم. توابع $p_{\mathsf{T}}(x) = \mathsf{T} + \mathsf{T} x + \mathsf{T} x^{\mathsf{T}}$ ورا به صورت ترکیبی خطی از $p_{\mathsf{T}}(x) = \mathsf{T} + \mathsf{T} x + \mathsf{T} x^{\mathsf{T}}$ پیدا کنید.
 - (د) (۷) نمره) داریم $f(x) = \sin^{7}(x)$ و $g(x) = \cos^{7}(x)$ و شخص کنید که توابع $g(x) = \cos^{7}(x)$ در $g(x) = \sin^{7}(x)$ و رازند یا خیر.

پرسش ۳ (۲۸ نمره) به پرسشهای زیر پاسخ دهید.

(آ) (۱۴ نمره) V یک فضای برداری و ϕ یک مجموعه از زیرفضاهای V میباشد. مجموعه ϕ را به صورت زیر تعریف میکنیم.

 $\cap_{\phi} = \{ v \mid v \in V , \ \forall_{U \in \phi} \ v \in U \}$

نشان دهید که $\rho \cap \div$ ود یک زیرفضا است.

(ب) (۱۴ نمره) فرض کنید W_1,\dots,W_n زیرفضاهایی از V باشند و ϕ مجموعهای که از تمام زیرفضاهایی باشد که شامل تمام W_i ها هستند.

 $\phi = \{U \mid \forall_{W_i} W_i \subseteq U\}$

نشان دهید که داریم:

 $\cap_{\phi} = W_1 + \cdots + W_n$

پرسش ۴ (۲۸ نمره)

- $W \cap W' = \{ m{\cdot} \}$ و همینطور W' = V و همینطور $W' = W \cap W' = W$ و همینطور $W' = W \cap W' = W$ و همینطور $W \cap W' = W \cap W'$
 - (ب) (۷ نمره) زیرمجموعه ناتهی U از \mathbb{R}^7 را در نظر بگیرید که تحت عمل جمع و تفریق بسته میباشد. نشان دهید که U میتواند یک زیرفضا نباشد.

 $V_{v \in V}$ را در نظر بگیرید که $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ را به صورت $V_{v \in V}$ را به مینطور مجموعه ای از اعضای $V_{v \in V}$ را به صورت $V_{v \in V}$ را بستجید.

$$S = \bigoplus_{i=1}^k (S \cap \operatorname{Span}(b_i))$$

(د) V نمره) برای زیرفضاهای W_k در W_k در W_k به طوری که $W_i \neq V$ نشان دهید که عضوی در V وجود دارد که در هیچ یک از W_i ها نمیباشد.

پرسش ۵ (۲۸ نمره) برای تمامی مقادیر k مشخص کنید که چه زمانی دستگاه معادلات زیر جواب ندارد، جواب یکتا دارد و یا بینهایت جواب دارد.

$$x+\Delta y-\Upsilon z=\Upsilon$$

$$-\Upsilon x-\nabla y+\Upsilon z=-\Delta$$

$$-x-\Delta y+(k^\intercal-\vartheta)z=k+1$$

سوالات عملی (۳۲ نمره) تاریخ تحویل: ۸ اسفند ۱۴۰۱

پرسش ۱ (۳۲ نمره) همانطور که میدانید، کامپیوتر موجود بسیار نفهمی است و تمام تلاش خود را برای نفهم بودن میکند. یکی از مصادیق نفهم بودن کامپیوتر در نفهمیدن متون و شباهت میان آنها است. این است که برای فهماندن متن به کامپیوتر، چارهای به جز تولید یک بازنمایی برداری از آن نداریم. یک بازنمایی برداری معروف در کامپیوتر از متون، کد ASCII و یا UTF برای ذخیرهسازی کاراکترها و استفاده از دنبالهای از آنها برای ذخیرهسازی یک متن است. اما مشکلی که این بازنمایی دارد این است که هیچ ارتباطی به بعد معنایی کلمات و جمله نخواهد داشت.

میخواهیم یک بازنمایی جدید برای جملات معرفی کنیم. فرض کنید که مجموعهای از m جمله داریم که در مجموع از n کلمه متمایز تشکیل شدهاند. حال از روی کلمات و جملات میخواهیم دو ماتریس زیر را تعریف کنیم.

آ) ماتریس بسامد کلمات: هر چه یک کلمه در یک جمله پرتکرار تر باشد، احتمالا نقش پررنگ تری در معنی آن جمله خواهد داشت. ماتریس بسامد کلمات که آن را F مینامیم یک ماتریس $m \times n$ است که درایه f آن برابر بسامد کلمه f در جمله f است. به عنوان مثال در جمله

I like eating desert in desert.

۶ کلمه داریم و کلمه desert در آن دو بار تکرار شده است. بنابرین بسامد این کلمه در این جمله برابر ۶ است.

(ب) ماتریس متداول بودن کلمات: هر چه یک کلمه در جملات بیشتری واقع شده باشد، احتمالاً بار معنایی کمتری دارد. به عنوان مثال حروف اضافی و ربط در اکثر قریب به اتفاق جملات واقع شدهاند. ماتریس (بردار) تدوال کلمات یک ماتریس $1 \times n$ است که درایه iام آن برابر لگاریتم نسبت تعداد کل جملات به تعداد جملاتی است که شامل کلمه iام باشند. به صورت رسمی اگر D مجموعه کل جملات باشد و D_i زیر مجموعه از جملات باشد که شامل کلمه iام ماتریس تداول کلمات که با I آن را نمایش می دهیم، برابر است با

$$I[i] = \ln \frac{|D|}{|D_i|}$$

حال بازنمایی جمله iام را به صورت ضرب درایه به درایه ردیف iام ماتریس بسامد در بردار تداول در نظر می گیریم.

ور این مساله یک مجموعه به نام S داریم که شامل تعدادی جمله است. در مرحله اول باید بازنمایی این جملات محاسبه شود. در نهایت باید اندیس شبیهترین جملهی S به query برگردانده شود. این داریم که باید بازنمایی آن مطابق بازنمایی محاسبه شده برای جملات بالا محاسبه شود. در نهایت باید اندیس شبیهترین جملهی S به query برگردانده شود. این شباهت از طریق محاسبه زاویه بدست می آید.

پیش از انجام هر یک از این موارد، باید علائم نگارشی متن را حذف کنید. همچنین باید از کوچک یا بزرگ بودن حروف صرف نظر شود.

ورودى

در خط اول ورودی عدد صحیح n وارد می شود که برابر |S| است. در n خط بعدی در هر خط یک جمله از مجوعه S وارد می شود. در نهایت در خط بعدی جمله وارد می شود.

خروجي

در خروجی باید اندیس جملهای که بیشترین شباهت را به query دارد چاپ شود.

ورودى نمونه

3

This is the first document.

This document is the second document.

And that is the third one.

Is this the first document?

خروجي نمونه

1 1