علی آقاملاری ۴۰۰۱۰۴۷۱۵

۱)

گرام اشمیت

$$\xrightarrow{\quad} \tilde{q}_1 = (1,-1,3,1) \longrightarrow q_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-1,3,1)$$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - (q_1,a_2)q_1 = (2,2,0,-3) + 1/\sqrt{3}\ 1/2\sqrt{3}\,(1,-1,3,1)$$

$$= (13/6,\ 11/6,\ 3/6,\ -11/6)$$

$$\longrightarrow q_2 = \frac{1}{2\sqrt{105}}(13,11,3,-11)$$

$$\tilde{q}_3 = a_3 - (q_2,a_3)q_2 - (q_1,a_3)q_1 = (-1,-2,3,2) + \frac{48}{\sqrt{420}} \times \frac{1}{\sqrt{420}}(\text{—})$$

$$- \frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}(1,-1,3,1) =$$

$$(-18/35,\ 9/35,\ 12/35,\ -9/35)$$

$$\longrightarrow q_3 = \frac{1}{\sqrt{630}}(-18,9,12,-9)$$

$$\tilde{q}_4 = a_4 - (q_3,a_4)q_3 - (q_2,a_4)q_2 - (q_1,a_4)q_1$$

$$= (0,-1,-4,0) + \frac{57}{\sqrt{630}} \times \frac{1}{\sqrt{630}}(-18,9,12,-9)$$

$$+ \frac{23}{\sqrt{420}} \times \frac{1}{\sqrt{420}}(13,11,3,-11) + \frac{11}{\sqrt{12}} \times \frac{1}{\sqrt{12}}(1,-1,3,1)$$

$$\longrightarrow \tilde{q}_4 = (0,\ -1/2,\ 0,\ -1/2)$$

$$\longrightarrow q_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1)$$

$$R = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -11/\sqrt{12} \\ 0 & \frac{\sqrt{420}}{6} & \frac{-48}{\sqrt{420}} & -23/\sqrt{420} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{630}}{35} & -57/\sqrt{630} \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad Q = [q_1 \text{ — } q_4]$$

۲)

$A_{m\times n} \xrightarrow[\text{rank}(n)]{m>n}$ وارون چپ به صورت L در صورت سوال ذکر شده

حال می‌خواهیم نشان دهیم $A^t = L$ به صورتی که $A^tA = I$ باشد

$$LA \to (A^TA)^{-1}(A^TA) = \overbrace{A^{-1}\times\underbrace{(A^T)^{-1}A^T}_{I}A}^{I} = I$$

$A_{m\times n} \xrightarrow[\text{rank}(m)]{m<n}$ وارون چپ به صورت R در صورت سوال ذکر شده

حال می‌خواهیم نشان دهیم $A^t = R$ به صورتی که $AA^t = I$

$$AR \to AA^T(A^TA)^{-1} = \overbrace{A\underbrace{A^T(A^T)^{-1}}_{I}A^{-1}}^{I} = I$$

$$A_۱ = [۲\ ۲] \to A^t = R = A^T(AA^T)^{-1} = \begin{pmatrix}۲\\۲\end{pmatrix}\left((۲,۲)\begin{pmatrix}۲\\۲\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$= \frac{۱}{۸}\begin{pmatrix}۲\\۲\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}۱/۴\\۱/۴\end{pmatrix}$$

$$A_۲ = \begin{bmatrix}۵ & ۰ & -۱\\ -۴ & ۲ & ۵\end{bmatrix} \to A^t = R = A^T(AA^T)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}۵ & -۴\\ ۰ & ۲\\ -۱ & ۵\end{pmatrix}\left(\frac{۱}{۵۴۵}\begin{pmatrix}۴۵ & ۲۵\\ ۲۵ & ۲۶\end{pmatrix}\right)$$

$$= ۱/۵۴۵ \begin{pmatrix}۱۲۵ & ۲۱\\ ۵۰ & ۵۲\\ ۸۰ & ۱۰۵\end{pmatrix}$$

ج۳

$$\left.\begin{array}{l} x_K = A x_{K-1} \\ \vdots \\ x_1 = A x_0 \end{array}\right\} \quad x_K = A^K x_0 = A^K (c_1 u_1 + \text{---} + c_n u_n)$$

$$\longrightarrow x_K = c_1 A^{K-1} \underbrace{A u_1}_{\lambda_1 u_1} + \text{---} + c_n A^{K-1} \underbrace{A u_n}_{\lambda_n u_n}$$

$$\xrightarrow{\text{همین روند را ادامه میدهیم}} x_K = c_1 \lambda_1^K u_1 + \text{---} + c_n \lambda_n^K u_n$$

$$\lambda_1^K \left(c_1 u_1 + c_2 u_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^K + \text{---} \right)$$

طبق فرض سوال :

$$\xrightarrow{i \geq 2} \lim_{K \to \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^K = 0$$

$$\xrightarrow{\text{پس}} \lim_{K \to \infty} x_K = c_1 \lambda_1^K u_1$$

$$\lim_{K \to \infty} \beta_K = \lim_{K \to \infty} \frac{x_K \cdot x_{K+1}}{x_K \cdot x_K}$$

$$= \frac{x_K^T x_{K+1}}{x_K^T x_K} = \frac{(c_1 \lambda_1^K u_1)^T (c_1 \lambda_1^{K+1} u_1)}{(c_1 \lambda_1^K u_1)^T (c_1 \lambda_1 u_1)}$$

$$= \frac{(\lambda^{2K+1} c_1^2)(u_1^T u_1)}{(\lambda_1^{2K} c_1^2)(u_1^T u_1)} = \lambda_1$$

$$\longrightarrow \lim_{K \to \infty} \beta_K = \lambda_1$$

می دانستیم که u_1 بردار ویژه است پس $\|u_1\| \neq 0$

سوال ۴) الف) بردار v را به شکل $\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}_{n\times 1}$ در نظر می‌گیریم

$$Av = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i a_{1i} \\ \vdots \\ \sum_i a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = v$$

$$Av = \lambda v \rightarrow \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

ب) فرض کنید v بردار ویژه A باشد ← $Av = \lambda v$ فرض کنید که $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \quad Av = \lambda v \Rightarrow \begin{bmatrix} \sum_i a_{1i} v_i \\ \vdots \\ \sum_i a_{ni} v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix}$$

$$\lambda v_{min} = \sum_i a_{\alpha i} v_i \geq \sum_i a_{\alpha i} v_{min} = v_{min} \overbrace{\left(\sum_i a_{\alpha i}\right)}^{1}$$

$$\longrightarrow \lambda v_{min} \geq v_{min}$$

$$\lambda v_{max} = \sum_i a_{\beta i} v_i \leq \sum_i a_{\beta i} v_{max} = v_{max} \overbrace{\left(\sum_i a_{\beta i}\right)}^{1}$$

$$\longrightarrow \lambda v_{max} \leq v_{max}$$

حالت ۱و۲: V_{max} و V_{min} هم‌علامت

هردو

$\oplus \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \geq 1 \\ \lambda \leq 1 \end{array} \right\} \longrightarrow \lambda = 1$

$\ominus \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 1 \end{array} \right\} \longrightarrow \lambda = 1$

حالت ۳: علامت مختلف

V_{max} | V_{min}

$\oplus$ | $\ominus \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \leq 1 \\ \lambda \leq 1 \end{array} \right\} \longrightarrow \lambda \leq 1$

حالت ۴: $V_{max} = 0$ و $V_{min} \leq 0$

$\longrightarrow \lambda \leq 1$

نتیجه حالات $\longleftarrow$ $\lambda \leq 1$

CamScanner

اثبات $A^{-1} = \frac{C^T}{|A|}$ با استفاده از قانون کرامر:

ستون j ام A^{-1} برابر بردار x است به طوری که $Ax = e_j$ ← حل با کرامر

$$\underline{a_{ij}} = x_i = \frac{|A_i(e_j)|}{|A|} \quad , \quad |A_i(e_j)| = (-1)^{i+j}|A_{ji}| = C_{ji}$$

a_{ij} ← درایه از A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & & \\ C_{1n} & & C_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{C^T}{|A|}$$

از آنجایی که $|A| = 1$ ← $A^{-1} = C^T$

حال باید ثابت کنیم درایه‌های C چندجمله‌ای هستند

(با توجه به اینکه درایه‌های A^{-1} همان درایه‌های C هستند)

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

اثبات می‌کنیم دترمینان هر ماتریس با درایه‌های چندجمله‌ای، چندجمله‌ای است

پایه: $A(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, n=2$ ← $C = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$

چون همه درایه‌های C چندجمله‌ای اند، حالت پایه برقرار است

$$|A(x)| = a_{11}C_{11} + \cdots + a_{1n}C_{1n} = a_{11}|A_{11}| \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}|A_{1n}|$$

از روی استقرا می دانیم که $|A_{ij}|$ چندجمله‌ای است و همینطور a_{ij} ها هم چندجمله‌ای می باشد

و می دانیم که ضرب و جمع چند چندجمله‌ای برابر یک چندجمله‌ای است.

پس $|A_{ij}|$ و a_{ij} ها همگی چندجمله‌ای اند

و $|A_{(n)}|$ هم مجموع n چندجمله‌ای است پس $|A_{(n)}|$ چندجمله‌ای است!

با استفاده از نتیجه به دست آمده، می فهمیم که همه c_{ij} ها چندجمله‌ای اند پس درایه‌های

$A_{(n)}^{-1}$ هم چندجمله‌ای خواهند بود.