۱) الف)

$$|A+I| = |A + AA^T| = |A||I + A^T| = |A||A+I| \longrightarrow |A+I| = -|A+I| = 0$$

ب)

$$B = A^2 - 2A + 2I = A^2 - 2A + A^3 = A(A^2 + A - 2I)$$

$$= \boxed{A(A+2I)(A-I)} \quad *$$

$$I = A^3 - I = (A-I)(A^2+A+I) \longrightarrow |A-I| \neq 0 \quad ①$$

$$A^3 + 8I = (A+2I)(A^2-2A+4I) = 10I \longrightarrow |A+2I| \neq 0 \quad ②$$

$$*, ①, ② \longrightarrow |B| \neq 0 \longrightarrow B \text{ invertible}$$

CamScanner

۲) الف)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 = 2R_3 + R_4} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{می آوریم}]{\text{از روی معادله بدست}} P_{A \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

را می توانیم ادامه دهیم تا عکس چپ $\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$ گردد:

ب)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_4 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{مانند الف}} P_{B \leftarrow A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ج) کافی است نشان دهیم $AB = BA = I_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \leftarrow 2R_4 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & -2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2 - 2R_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right] \quad (2)$$

$$(1) \longrightarrow \quad [x]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \longrightarrow \quad [x]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۲) الف) W_1 و W_2 زیرفضای هم نیستند پس در هر کدام عضوی هست که در دیگری نیست

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \in W_1 \to v_1 \notin W_2 \\ v_2 \in W_2 \to v_2 \notin W_1 \\ 0 \in W_1 \;\text{و}\; 0 \in W_2 \end{array}\right| \to \begin{array}{l} 0+v_1 = v_1 \in W_1 + W_2 \\ 0+v_2 = v_2 \in W_1 + W_2 \end{array}$$

فرض می‌کنیم $\{w_1 \text{---} w_k\}$ پایه‌های $W_1 \cap W_2$ هستند

حال با برهان خلف ثابت می‌کنیم v_1 مستقل از w_i هاست.

فرض خلف $\Longleftarrow$ v_1 وابسته خطی w_i هاست پس $v_1 \in W_1 \cap W_2$ اما می‌دانیم v_1 عضو W_2 نیست

برای اثبات v_2 هم همینکار را می‌کنیم!

پس بردارهای $\{w_1 \text{---} w_k, v_1, v_2\}$ که مستقل از هم اند و در $W_1 + W_2$ هستند

$$\xrightarrow{\text{پس}} \dim(W_1 + W_2) > \dim(W_1 \cap W_2) + 1$$

ب) فرض کنید $\{v_1 \text{---} v_k\}$ پایه‌های null space A باشند و می‌دانیم $N(A) \subset N(BA)$

پس $\{v_1 \text{---} v_{k+k'}\}$ پایه‌های null space BA هستند. باید اثبات کنیم $\{Av_{k+1} \text{---} Av_{k+k'}\}$ که مستقل اند.

$$\sum_{i=1}^{k'} c_i A v_{k+i} = A(c_1 v_{k+1} + \text{---} + c_{k'} v_{k+k'}) = 0$$

طبق تعریف، $\sum_{i=1}^{k'} c_i v_{k+i}$ عضو $N(A)$ است یعنی: $\sum_{i=1}^{k'} c_i v_{k+i} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$

v_i ها همگی مستقل از یکدیگر هستند $\longleftarrow$ $1 \le i \le k'$: $c_i = 0$

پس Av_i ها با $k+1 \le i \le k+k'$ عضو $Null(B)$ هستند

$\longrightarrow \dim(N(B)) \geq K' \longrightarrow \dim(N(A)) + \dim(N(B)) \geq K + K'$

از طرفی هم می دانیم که $\dim(N(BA)) \leq K + K'$

$$\longrightarrow \dim(N(BA)) \leq \dim(N(A)) + \dim(N(B))$$

ج)

$$\dim(N(A)) + \dim(N(B)) \geq \dim(N(BA))$$

$$r(A) + r(N(A)) = n$$
$$r(B) + r(N(B)) = n$$

$$n - r(A) + n - r(B) \geq n - r(BA)$$
$$n - r(A) + n - r(B) \geq n - r(AB)$$

$$n + r(BA) \geq r(B) + r(A)$$
$$n + r(AB) \geq r(B) + r(A)$$

حال خواهیم داشت $\longrightarrow$ $r(AB) \leq \min(r(B), r(A))$

$r(BA) \leq \min(r(B), r(A))$

ماتریس B فول رنک است $\longrightarrow$ $r(B) = n$ و $\min(r(B), r(A)) = r(A)$

$$\longrightarrow r(B) + r(A) - n \leq r(AB) \leq \min(r(B), r(A))$$
$$r(A) \leq r(AB) \leq r(A)$$

$$\longrightarrow r(A) = r(AB)$$

همینطور خواهیم داشت: $r(A) = r(BA)$

۴) از روی خود توانی A می فهمیم که $\quad A^2 = A \rightarrow A(A-I) = 0$

پس خواهیم داشت که $C(A-I) \subseteq N(A)$

$$\xrightarrow{\text{قضیه رتبه}} \quad r(A) + r(A-I) \leq r(A) + N(A) = n \quad ①$$

داریم: $n = r(I) = r(A + I - A) \leq r(A-I) + r(A) \rightarrow$

$$n \leq r(A-I) + r(A) \quad ②$$

$$\boxed{1,2} \longrightarrow \boxed{r(A-I) + r(A) = n}$$

۱۵)

ا) نگاشت خطی

آ و ب)
$$\|T(x-y)\|^2 = (T(x-y), T(x-y)) = (T(x)-T(y), T(x)-T(y))$$
$$= \boxed{\|T(x)\|^2 - 2(T(x), T(y)) + \|T(y)\|^2} \quad ①$$

$$\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = \boxed{\|x\|^2 - 2(x,y) + \|y\|^2} \quad ②$$

از الف داریم که $\|T(u)\| = \|u\|$ ③

$$1,2,3 \longrightarrow (T(x), T(y)) = (x,y)$$

ب و ج) فرض: $\{v_1 — v_n\}$ پایه متعامد و یکا برای V:

$i=j: \quad (v_i, v_j) = 1$

$i \neq j: \quad (v_i, v_j) = 0$

حال مجموعه $T(v_1) — T(v_n)$ را در نظر بگیرید که از روی ب داریم.

$$(T(x), T(y)) = (x, y)$$

پس $T(v_i)$ ها هم پایه متعامد و یکا برای V خواهند بود

ج و آ) مجموعه‌های پایه‌های متعامد $v_1 — v_n$ و $T(v_1) — T(v_n)$ را در نظر می‌گیریم.

$$\|T(x)\|^2 = (T(x), T(x)) = (a_1 T(v_1) + — + a_n T(v_n), a_1 T(v_1) + — + a_n T(v_n))$$
$$= \sum a_i^2 \underbrace{(T(v_i), T(v_i))}_{1} = \sum a_i^2$$

$$\|x\|^2 = (x, x) = (a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \,,\, a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = \sum a_i^2 \underbrace{\cancel{(v_i, v_i)}}_{1}$$

$$= \sum a_i^2$$

$\|A\| \neq 0$ ⟸ پس خواهیم داشت $\|T(x)\| = \|x\|$

۶- الف)

$$B = X(A - AX)^{-1} \to B(A - AX)X^{-1} = X(A - AX)^{-1}(A - AX)X^{-1}$$

$$\longrightarrow B(A - AX)X^{-1} = I \to \boxed{B^{-1} = (A - AX)X^{-1}}$$

B وارون پذیر است!

ب) از الف می دانیم که B هم وارون پذیر است.

$$(A - AX)^{-1} = X^{-1}B \to A - AX = B^{-1}X$$

$$\to \underbrace{A}_{\text{وارون پذیر}} = (A + B^{-1})X$$

پس $(A + B^{-1})X$ هم وارون پذیر است.

$$\longrightarrow \boxed{X = (A + B^{-1})^{-1}A}$$

۷) طرف اول : فرض کنید $x \perp (Ax)$: $\forall x$

$$(Ax \perp x) \longrightarrow (Ax, x) = x^t A x = 0$$

$$\xrightarrow{x = e_i} e_i^T A e_i = 0 \longrightarrow A_{ii} = 0$$

$$\xrightarrow{x = e_i + e_j} (e_i + e_j)^T A (e_i + e_j) = 0 \longrightarrow e_i^t A e_j + e_i^t A e_i + e_j^t A e_i + e_j^t A e_j = 0$$

$$\longrightarrow e_i^t A e_j = - e_j^t A e_i$$

$$\longrightarrow A_{ij} = - A_{ji}$$

پس طرف اول ثابت شد

طرف دوم : فرض می‌کنیم A پادمتقارن است

$$(Ax, x) = x^t A x = \sum x_i (Ax)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j$$

$$\xrightarrow[\text{حاصل جمع صفر می‌شود}]{\text{چون } A \text{ پادمتقارن است}} (Ax, x) = 0 \longrightarrow \boxed{Ax \perp x}$$

دو طرف اثبات شد!

۸) الف

$$(UV)^T(UV) = V^TU^TUV = V^TV = I$$

و می‌دانیم که UV یک ماتریس مربعی است $\longleftarrow$ پس UV ماتریس متعامد است

ب) ماتریس داده شده مربعی است، پس:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} U & U \\ -V & -V \end{bmatrix}\right)^T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} U & U \\ V & -V \end{bmatrix}\right) = 1/2\begin{bmatrix} U^T & V^T \\ U^T & -V^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U & U \\ V & -V \end{bmatrix}$$

$$= 1/2\begin{pmatrix} I_n + I_n & I_n - I_n \\ I_n - I_n & I_n + I_n \end{pmatrix}$$

$$= 1/2\begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

پس ماتریس صورت سوال یک ماتریس متعامد است!