۱) الف)

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle F_{(x)} = 1 \\ \quad {\scriptstyle x\to\infty} \\ f_{(x)} = ce^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty \end{array}\right\} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{0} ce^{x} + \int_{0}^{+\infty} ce^{-x} = 1$$

$$\longrightarrow \left. ce^{x}\right|_{-\infty}^{0} - \left. ce^{-x}\right|_{0}^{\infty} = 1$$

$$\longrightarrow C + C = 1 \rightarrow C = ۱/۲$$

$$E(x^{۲n}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{۲n} f_{(x)}\,dx = C\int_{-\infty}^{0} \underbrace{x^{۲n} \times e^{x}}_{h(x)} dx + C\int_{0}^{\infty} \underbrace{x^{۲n} \times e^{-x}}_{g(x)} dx$$

$$\longrightarrow h(x) = g(-x) \rightarrow \int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} h(x)\,dx$$

$$\rightarrow E(x^{۲n}) = ۲C \int_{-\infty}^{0} x^{۲n} e^{x}\,dx \quad , \quad C = ۱/۲$$

$$\longrightarrow E(x^{۲n}) = \int_{-\infty}^{0} x^{۲n} e^{x}\,dx$$ تغییر متغیر ✓

$$= \left. \underbrace{x^{۲n} e^{x}}_{G(t)} \right|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} ۲n\, x^{۲n-1} e^{x}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} G(0) = 0 \\ G(x) = 0 \\ \lim x \to -\infty \end{array}}$$

$$\Longrightarrow E(x^{۲n}) = -۲n \int_{-\infty}^{0} x^{۲n-1} e^{x}\,dx$$

$$= -۲n \left(\cancel{\left. x^{۲n-1} e^{x} \right|_{-\infty}^{0}} - \int_{-\infty}^{0} (۲n-1)\, x^{۲n-۲} e^{x}\,dx \right)$$

$$0$$

$$= ۲n(۲n-1) \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x^{۲n-۲} e^{x}}_{E(x^{۲n-۲})}$$

پس داریم

$$E(x^{2n}) = 2n(2n-1)\,E(x^{2n-2})$$

$$= 2n(2n-1) \times \left((2n-2)(2n-3)\,E(x^{2n-4})\right)$$

$$\vdots$$

$$= (2n)!\,\cancel{E(1)}^{\,1} = (2n)! \quad \checkmark$$

$$E(X^{2n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} f(x)\,dx$$

$$= C \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^{2n+1} e^{-|x|}}_{h(x)}\,dx = C \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx$$

داریم

$$\boxed{h(x) = -h(-x)} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = 0 \quad \checkmark$$

۲)

می‌دانیم که احتمال برنده شدن با خرید یک بلیط برابر است با $x = 10^{-4}$

الف) احتمال برنده نشدن در صد خرید برابر است با $(1-x)^{100}$

$$P(W) = 1 - P(L) = 1 - (1-x)^{100} = 0.00995066$$

ب) با خرید n بلیط، احتمال برنده شدن برابر است با

$$P(\text{با خرید n بلیط } W) = 1 - (1-x)^{n}$$

نیاز داریم که این احتمال بزرگتر مساوی ۰٫۹۵ باشد.

$$1 - (1-p)^{n} \geq 0.95 \to (1-p)^{n} \leq 0.05 \to n\log(1-p) \leq \log 0.05$$

$$\to n \geq \frac{\log 0.05}{\log 1-p}$$

$$n \geq 29955.8$$

← حداقل ۲۹۹۵۶ خرید خواهیم تا با احتمال ۹۵٪ موفق شویم.

ج) X متغیر تصادفی تعداد بلیط‌هایی است که باید برای برنده شدن بخریم.

$X \sim$ توزیع هندسی ($p = 10^{-4}$)

$$f_X(x) = P(X=x) = (1-p)^{x-1}p$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p = p + \sum_{x=2}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p = p + \sum_{x=1}^{\infty}(x+1)(1-p)^{x}p$$

$$= p + (1-p)\Big(\underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p}_{E(X)} + \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p}_{\sum_{k=1}^{\infty} f_X(k) = 1}\Big)$$

$$\longrightarrow E(X) = p + 1 - p + E(X) - pE(X)$$

$$\longrightarrow E(X) = 1/p = 10^{4}$$

۳)

$x \sim N(3, 9) \qquad \boxed{x = 3z + 3}\ \checkmark$

$\rightarrow \begin{cases} \mu = 3 \\ \sigma^2 = 9 \\ \sigma = 3 \end{cases} \qquad y = 5 - x \rightarrow \boxed{y = 2 - 3z}\ \oplus$

$\boxed{\pm}$ در همه بخش‌ها از $\checkmark$ و $\oplus$ استفاده شده

الف)

$$P(x > 2) = P(3z + 3 > 2) = P(z > -1/3)$$

$$= 1 - P(z < -1/3) = 1 - \Phi(-1/3) \simeq 0.63$$

ب)

$$P(-1 < y < 3) = P(-1 < 2 - 3z < 3) = P(-1/3 < z < 1)$$

$$= P(-1/3 < z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1/3) = 0.84 - 0.37 = 0.47$$

ج)

$$P(x > 4 \mid y < 2) = P(z > 1/3 \mid z > 0)$$

$$= \frac{P(z > 1/3 \wedge z > 0)}{P(z > 0)} = \frac{P(z > 1/3)}{P(z > 0)}$$

$$= \frac{1 - \Phi(1/3)}{1 - \Phi(0)} = \frac{\Phi(-1/3)}{1/2} = 2\Phi(-1/3)$$

$$\simeq 0.74$$

۴) الف) x_1 ← تعداد زمین لرزه هفته اول

x_2 ← تعداد زمین لرزه هفته دوم

$X = x_1 + x_2$

$\longrightarrow E(X) = E(x_1) + E(x_2) = 2\lambda = 4$

پس X ← توزیع پواسون با $\lambda = 4$ ↜ $p(X = x) = \frac{e^{-4} 4^x}{x!}$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-4} 4^k}{k!} = 1 - e^{-4} - 4e^{-4} - \frac{4^2 e^{-4}}{2}$$

$$= 1 - 13e^{-4} \simeq 0.76$$

ب) می دانیم E تعداد زمین لرزه ها $\lambda = 2$ است پس اگر زمان شروع تا زمان x را n تکه کنیم، هر قسمت به طول x/n می شود. پس می دانیم در کل این مدت امید ریاضی تعداد زمین لرزه ها $x\lambda$ است پس هر تکه امید ریاضی $\frac{x\lambda}{n}$ دارد و اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد ← شانس نیامدن زمین لرزه در هر تکه $1 - \frac{\lambda x}{n}$ است پس اگر متغیر تصادفی X را مقدار زمان تا زمین لرزه بعدی بگیریم، داریم:

$$P(Y > x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda x}$$

$$P(Y < x) = 1 - P(Y > x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\longrightarrow F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x} \longrightarrow f_Y = \frac{d F_Y(x)}{dx} = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\longrightarrow f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x} \rightarrow f_Y(x) = 2e^{-2x} \rightarrow Y \sim \exp(2)$$

د)

$$x \sim \exp(\lambda) \rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$Y = \min\left(X, \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$F_Y(y) = P(Y > y) = P\left(X > y , \frac{\lambda}{2} > y\right) = P\left(x > y \cap \frac{\lambda}{2} > y\right)$$

اگر $y \geq \lambda/2$ $\leftarrow$ $P(x > y \cap \lambda/2 > y) = 0$

و اگر $y < \lambda/2$

$$P(x > y \cap \lambda/2 > y) = P(X > y) = 1 - F_X(y)$$

$$= 1 - (1 - e^{-\lambda y}) = e^{-\lambda y}$$

$$\longrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & y < \lambda/2 \\ 1 & y \geq \lambda/2 \end{cases}$$

۶) X را تعداد حالات پرتاب‌ها برای رفتن به $n+1$ از ۱ می‌گیریم.

و می‌گوییم x_i برابر است با تعداد پرتاب‌های لازم برای رفتن از خانه i به خانه $i+1$ است.

برای اینکه از خانه یک به خانه $n+1$ برویم باید هر یک از خانه‌ها را طی کنیم پس: $x_i = 2^i$

$$X = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

ویژگی امید ریاضی

$$E(X) = E(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$$
$$= E(x_1) + E(x_2) + \cdots + E(x_n)$$

x_i ها هر یک، یک توزیع هندسی با $p = 1/2^i$ هستند.

$$P\{x_i = k\} = (1-p)^{k-1} p$$

که موفقیت در مرحله k

$$E[x_i] = \sum_{k=1}^{\infty} \overset{(k-1+1)}{k} (1-p)^{k-1} p = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-1} p + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p}_{p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1}$$

$$\longrightarrow E[x_i] = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-1} p + 1$$

$$= (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-2} p + 1$$

$$= (1-p) \sum_{j=2}^{\infty} j (1-p)^{j-1} + 1 \longrightarrow E[x_i] = (1-p) E[x_i] + 1$$

$$\longrightarrow E[x_i] = 1/p$$

پس:

$$E[X] = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \boxed{2^{n+1} - 2}$$

اگر بخواهیم از n خارج شویم، جواب بالا درست است. اما اگر بخواهیم به n برسیم جواب $2^n - 2$ است!