

①

X_i متغیرهای تصادفی

$$\bar{X} = \frac{4 + 7 + 1 + 1}{4} = 4.8 \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2 = \frac{15}{3}$$

$$Z = \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \quad \text{و} \quad Z = \frac{\mu - 4.8}{\sqrt{\frac{15}{4}}} \times 2 \quad (\text{نکته})$$

ازه اطمینان 95٪:

$$P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$\alpha = 1\%, \quad Z_{\alpha/2} = 1.96, \quad 1 - \alpha = \frac{90}{100}$$

$$\rightarrow P(-Z_{\alpha/2} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \times 2 < Z_{\alpha/2})$$

$$\rightarrow 4.8 - \sqrt{\frac{15}{4}} \times \frac{1.96}{2} \leq \mu \leq 4.8 + \sqrt{\frac{15}{4}} \times \frac{1.96}{2}$$

$$\rightarrow 4.145 \leq \mu \leq 4.855$$

ازه اطمینان 95٪ برای μ برابر است با $[4.145, 4.855]$

(ب) H_0 : سازه‌های استاندارد به شرط $\mu = 4$

H_1 : خلاف فرض صفر

$\mu = 4$ در ازه اطمینان 95٪ وجود ندارد پس فرض صفر رد می‌شود

حل تست t

$$\left. \begin{array}{l} \bar{X} = 1.8 \\ S^2 = 1\% \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim T(n-1) \quad , \quad t_{\alpha/2}(n-1) = 2.18$$

$$\rightarrow M: \left[\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\mu: \left[1.8 - \frac{2.18 \times \sqrt{1\%}}{2}, 1.8 + \frac{2.18 \times \sqrt{1\%}}{2} \right]$$

$$\mu: [1.18, 2.42]$$

به احتمال 95٪ میانگین درک خواندن از 1.18 تا 2.42 است

$H_0: \mu = 2$ $H_1: \mu \neq 2$ ()
و عادت در بازه [1.18 و 2.42] نیست پس به احتمال 5٪ (0.05) ...

⑦

نکته: X_i ، ترتیب شده در مرحله ۱، تصادفی

$$X = \sum_{i=1}^{n=11} X_i \quad X \sim \text{توزیع دوجمله‌ای}$$

$$E[X] = np = \underline{11p}$$

$$\text{Var}(X) = npq = \underline{11pq}$$

$$\left. \begin{array}{l} E[X] = np \\ \text{Var}(X) = npq \end{array} \right\} \rightarrow Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$$

$$p = 1/4 : H_1, \quad p = 1/4 : H_0$$

$$\alpha = 1/4 \rightarrow P(-z_{\alpha/4} < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < z_{\alpha/4}) = 1 - \alpha$$

$$p = 1/4 \rightarrow \frac{11}{4} - 1.96 \times \frac{9}{4} < X < \frac{11}{4} + 1.96 \times \frac{9}{4}$$

$$\rightarrow \boxed{2.1125 < X < 5.9125}$$

$K=12$ ، بازه اطمینان ۹۵٪ وجود ندارد، H_0 رد می‌شود!

ب) برای $n=12$ بازه اطمینان ۹۵٪ در دست می‌آید.

$$\rightarrow 12p - z_{\alpha/4} \sqrt{12pq} < X < 12p + z_{\alpha/4} \sqrt{12pq}$$

$$2.101 < X < 11.92$$

$$K_1 = 0, K_2 = 11 \leftarrow \text{تعداد ترتیب شده صحیح}$$

(3)

$$\begin{aligned} \mu > 9.2 &: H_0 & \leftarrow \text{نظرية } V\% \\ \mu < 9.2 &: H_1 \end{aligned}$$

$$\bar{X} = 11.22 \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{100} (\bar{X} - x_i)^2 = 1.49 \quad (1)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \rightarrow Z = \frac{(11.22 - 9.2) \times \sqrt{100}}{\sqrt{1.49}} = -1.22$$

$Z \sim T(99)$

p-val $\xrightarrow{\text{نظرية}}$

$$p\text{-val} = P(t_{99} < -1.22) = 0.1121 \times 10^{-13}$$

$$t_{99} (1\%) = -1.92$$

(2)

$$\text{do not reject } H_0, -1.22 > -1.92 \quad \text{Yes}$$

$$\rightarrow \text{do not reject } H_0$$

5

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$X_i \sim \text{Bernoulli}$

$$\begin{aligned} \mu = 0.1 & : H_0 \\ \mu \neq 0.1 & : H_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{rej} | \mu = 0.1) &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i > 1 \mid \mu = 0.1\right) \\ &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^n X_i = 0 \mid \mu = 0.1\right) - P\left(\sum_{i=1}^n X_i = 1 \mid \mu = 0.1\right) \\ &= 1 - (1 - 0.1)^n - \binom{n}{1} (0.1)^1 (1 - 0.1)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \alpha = 0.101124$$

$$\begin{aligned} P(\text{rej} | \mu = 0.2) &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i > 1 \mid \mu = 0.2\right) \\ &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^n X_i = 0 \mid \mu = 0.2\right) - P\left(\sum_{i=1}^n X_i = 1 \mid \mu = 0.2\right) \\ &= 1 - (0.8)^n - \binom{n}{1} (0.2)^1 (0.8)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow P(\text{rej} | \mu = 0.2) = 0.19968$$

(d)

(alt)

 H_0 : تفاوت قابل توجهی نیست H_1 : تفاوت قابل توجهی هست

مبارزه
خفیه

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\bar{S}_1^2 + \bar{S}_2^2}{n}}} \sim T_{(n-2)}$$

سردیالت $\mu_1 > \mu_2$ و $\mu_2 > \mu_1$ با افتلات μ_1 و μ_2 ممکن است
بلای عین آزمون ها (دو طرفه است)

$$\begin{array}{l} \bar{X}_1 = 14.75 \quad \bar{X}_2 = 17.175 \\ \bar{S}_1^2 = 2.921 \quad \bar{S}_2^2 = 1.5554 \end{array} \left\{ \rightarrow t = -2.177 \right.$$

p-val \rightarrow $p\text{-val} = P(t_{12} < -2.177) = 0.02100$

چون $p\text{-val} < \frac{1}{4}$ پس H_0 را ابطال 98٪ رد می‌کند.

(با سطح اسیه 0.05 رد می‌کند)

9

$$E[X_0] = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad \text{observed}(X_0) = 1$$

$$E[X_1] = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{64}, \quad \text{observed}(X_1) = 2$$

$$E[X_2] = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{256}, \quad \text{observed}(X_2) = 10$$

$$E[X_3] = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad \text{observed}(X_3) = 1$$

$$X_{(3)}^* = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{observed}(X_i) - E[X_i])^2}{E[X_i]} = 10.125 \sim \chi_{(3)}^2$$

$$p\text{-val} = 1 - P_{\chi_{(3)}^2}(X \leq 10.125) = 1 - 0.989 = 0.011$$

! $\alpha = 0.05$, $p\text{-val} < \alpha$ \Rightarrow H_0 is rejected.