علی تقی‌لاری ۴۰۱۰۲۷۱۵

۱- الف)

$$Cov(X,Y|Z) = E[(X-E(X|Z))(Y-E[Y|Z])|Z]$$

$$= E[XY - XE[Y|Z] - YE[X|Z] + E[X|Z]E[Y|Z]|Z]$$

$$= E[XY|Z] - E[XE[Y|Z]|Z] - E[YE[X|Z]|Z] + E[E[X|Z]E[Y|Z]|Z]$$

$$= E[XY|Z] - E[X|Z]E[Y|Z] - \cancel{E[Y|Z]E[X|Z]} + \cancel{E[X|Z]E[Y|Z]} \rightarrow 0$$

$$= \boxed{E[XY|Z] - E[X|Z]E[Y|Z]}$$

ب)

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$\xrightarrow{E[X]=E[E(X|Y)]\ \text{[illegible]}} = E[E[XY|Z]] - E[E[X|Z]]E[E[Y|Z]]$$

$$\xrightarrow{\text{طبق الف}} = E[Cov(X,Y|Z) + \underset{A}{E[X|Z]}\,\underset{B}{E[Y|Z]}] - E[\underset{A}{E[X|Z]}]\,E[\underset{B}{E[Y|Z]}]$$

$$= E[Cov(X,Y|Z)] + E[AB] - E[A]E[B]$$

$$\xrightarrow{Cov(A,B) = E[AB]-E[A]E[B]} = E[Cov(X,Y|Z)] + \underbrace{Cov(A,B)}$$

حال $Cov(E[X|Z], E[Y|Z])$

$$= \boxed{E[Cov(X,Y|Z)] + Cov(E[X|Z], E[Y|Z])}$$

حل) از راست به چپ میریم.

$$Var(E[X|Y]) = E[(E[X|Y])^2] - (E[E[X|Y]])^2$$

$$= E[(E[X|Y])^2] - (E[X])^2 \quad \mathrm{I}$$

$$E[var(X|Y)] = ?$$

$$var(X|Y) = E[(x - E[X|Y])^2 | Y] = E[X^2 - 2X E[X|Y] + (E[X|Y])^2 | Y]$$

$$= E[X^2|Y] - 2(E[X|Y])^2 + (E[X|Y])^2$$

$$= \boxed{E[X^2|Y] - (E(X|Y))^2}$$

$$\xrightarrow{\text{پس}} E[var(X|Y)] = E[E[X^2|Y]] - E[(E[X|Y])^2]$$

$$= E[X^2] - E[(E[X|Y])^2] \quad \mathrm{II}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}\ \mathrm{II}} Var[E(X|Y)] + E[var(X|Y)] = E[X^2] - E^2[X]$$

$$= Var(X) \quad \checkmark$$

$$Y = \sum_{n=۱}^{۵۰} X_i \quad , \quad E[X_i] = ۲ \quad , \quad Var(X_i) = ۱$$

$$Z = \frac{\sum_{۱}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^۲}} \xrightarrow{n=۵۰} Z = \frac{Y - ۱۰۰}{\sqrt{۵۰}}$$

$$Z \sim norm(۰,۱)$$

$$\longrightarrow P(۹۰ < Y < ۱۱۰) = P\left(\frac{۹۰-۱۰۰}{\sqrt{۵۰}} < Z < \frac{۱۱۰-۱۰۰}{\sqrt{۵۰}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-۱۰}{\sqrt{۵۰}} < Z < \frac{۱۰}{\sqrt{۵۰}}\right)$$

$$= P(-\sqrt{۲} < Z < \sqrt{۲})$$

$$= \Phi(\sqrt{۲}) - \Phi(-\sqrt{۲})$$

$$= ۲\Phi(\sqrt{۲}) - ۱ = \boxed{۰/۸۴}$$

۳) الف) $K>0$

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x\,p(X=x) \geqslant \sum_{x=1}^{K} x\,p(X=x)$$

$$\geqslant \sum_{x=1}^{K} x\,p(X=K)$$

چون طبق صورت سوال داریم: $x>y \to p(x)<p(y)$ (چون p نزولی است)

$$= p(X=K)\left(\frac{K(K+1)}{2}\right)$$

$$\geqslant p(X=K)\,\frac{K^2}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{پس}} E[X] \geqslant p(X=K)\,\frac{K^2}{2}$$

$$\longrightarrow p(X=K) \leqslant \frac{2E[X]}{K^2}$$

ب) $K>0$

$$E[X] = \int_0^{\infty} x f(x)\,dx \geqslant \int_0^{K} x f(x)\,dx$$

$$\geqslant \int_0^{K} x f(K)\,dx$$

مشابه قسمت ب

$$\geqslant f(K)\int_0^{K} x\,dx = \frac{f(K)\,K^2}{2}$$

$$\longrightarrow E[X] \geqslant \frac{f(K)\,K^2}{2} \rightarrow f(K) \leqslant \frac{2E[X]}{K^2}$$

$$\longrightarrow f(x) \leqslant 2\,\frac{E[X]}{x^2}$$

(۴)

$$\underbrace{X}_{\text{تفاوت عمق اصلی با عمق عددها}} = \underbrace{X_1}_{\text{خطا عدد اول}} + X_2 + \cdots + \underbrace{X_{50}}_{\text{خطا عدد ۵۰ ام}}$$

$X_i \sim \text{uni}(-1/2, 1/2)$

$E[X_i] = 0 \qquad Var(X_i) = \frac{1}{12}$

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \longrightarrow Z = \frac{X - (50 \times 0)}{\sqrt{\frac{50}{12}}}$$

$Z_n \sim \text{norm}(0,1)$

$$\longrightarrow P(|X| > 3) = P\left(|Z| > \frac{3\sqrt{6}}{5}\right) = \boxed{2\Phi\left(-\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)}$$

$\simeq 0.14$

تقریبا ۱۴ درصد احتمال دارد !

۵) مسئله را با ... فرض حل می‌کنیم، با قضیه حد مرکزی خواهیم داشت ←

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \qquad E(X_i)=\mu \qquad Var(X_i)=\sigma^2=4$$

$$\xrightarrow{\text{تقریبا}} Z_n \sim norm(0,1)$$

$$P\left(-1/2 < \frac{\sum_{n=1}^{n} X_i - \mu n}{n} < 1/2\right) = P\left(-1/2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < 1/2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{-\sqrt{n}}{4} < Z_n < \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{16}\right) - 1$$

$$\longrightarrow P\left(-1/2 < \frac{\sum X_i}{n} - \mu < 1/2\right) \simeq 2\phi\left(\frac{-\sqrt{n}}{16}\right) - 1$$

هرچه n بیشتر شود، کران بالای بهتری پیدا می‌کنیم ← تخمین دقیق‌تر

برای حل مسئله ۶

$$\longrightarrow P\left(-1/2 < \frac{\sum X_i}{n} - \mu < 1/2\right) \geq 95/100$$

$$\longrightarrow 2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1 \geq 95/100$$

$$\longrightarrow \phi(\sqrt{n}/4) \geq \frac{195}{200} \quad \frac{39}{40}$$

$$\longrightarrow \sqrt{n}/4 \geq \frac{196}{100} \longrightarrow n \geq 61.4$$

$$\longrightarrow \boxed{n = 62}$$

با حداقل ۶۲ آزمایش، با احتمال ۹۵٪ مطمئنیم که اختلاف میانگین آزمایش‌ها از میانگین واقعی کمتر از ۱/۲ است.

(۹)

$$p(X \geq a) = p(X+b \geq a+b) \leq p\left((X+b)^2 \geq (a+b)^2\right)$$

$\xrightarrow{\text{نامساوی مارکف}}$ $p(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$ مقادیر X غیرمنفی ✓

$a > 0$ ✓

$$\longrightarrow p(X \geq a) \leq p\left((x+b)^2 \geq (a+b)^2\right) \leq \frac{E[(x+b)^2]}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{\sigma^2 + b^2}{(a+b)^2}$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{b = \frac{Var(X)}{a}} p(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{a^2}}{\left(\frac{a^2+\sigma^2}{a}\right)^2} = \frac{a^2\sigma^2 + \sigma^4}{(a^2+\sigma^2)^2}$$

$$= \frac{(a^2+\sigma^2)\sigma^2}{(a^2+\sigma^2)^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$$

$$\longrightarrow p(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2} = \frac{Var(X)}{a^2 + Var(X)}$$