(1

$$X = \sum_{i=1}^{500} X_i$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \xleftarrow{\text{اگر در پرتاب i ام ۴ بیاید}} \\ 0 & \xleftarrow{\text{وگرنه}} \end{cases}$$

$$\mu = E[X_i] = 1/6$$

$$\sigma^2 = Var(X_i) = pq = 5/36$$

طبق قضیه حد مرکزی →
$$\frac{\sum_{i=1}^{500} X_i - 500 \times \mu}{\sigma \sqrt{n}} \sim Normal(0,1)$$

اگر α درصد خطا باشد →
$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{X - 500\mu}{\sigma\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$\alpha = 0.05$ →

$$P\left(500\mu - z_{\alpha/2}\,\sigma\sqrt{n} < X < 500\mu + z_{\alpha/2}\,\sigma\sqrt{n}\right) = 0.95$$

جایگذاری →
$$P\left(\frac{500}{6} - 1.96 \times \frac{\sqrt{5}}{6} \times \sqrt{500} < X < \frac{500}{6} + 1.96 \times \frac{\sqrt{5}}{6} \times \sqrt{500}\right) = 0.95$$

→ X به احتمال ۹۵ درصد در $[67, 99.6]$ است

۲)

$$X_i \sim unif(0,\theta) \longrightarrow f_{X_i}(x) \begin{cases} 1/\theta & 0<x<\theta \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف)

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n ; \theta) = P(x_1, x_2 \dots x_n ; \theta) = P(x_1|\theta) \dots P(x_n|\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\theta}\right)^n$$

برای اینکه $\left(\frac{1}{\theta}\right)^n$ ماکسیمم شود باید θ تا حد امکان کوچک شود

اما از آنجایی که x_i نمی‌توانند از θ بزرگ‌تر باشند

$$\boxed{\begin{array}{l} \max(x_1, \dots, x_n) \leqslant \theta \\ \max(x_1 \dots x_n) = mle_\theta \end{array}}$$

$$\to Y = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$F_Y(a) = P(Y<a) = P(x_1<a)P(x_2<a) \dots P(x_n<a)$$

$$= F_{X_1}(a) F_{X_2}(a) \dots F_{X_n}(a)$$

$$= F_X^n(a) = \left(\frac{a}{\theta}\right)^n \longrightarrow f_Y(a) = \frac{n a^{n-1}}{\theta^n}$$

$$E[Y] = E[mle_\theta] = \int_0^\theta y \times \frac{n y^{n-1}}{\theta^n} dy \quad \to f_Y(y) = \frac{n y^{n-1}}{\theta^n}$$

$$= \int_0^\theta n y^n / \theta^n \, dy = \frac{y^{n+1}}{n+1} \times n/\theta^n \Big|_0^\theta = \boxed{\frac{n}{n+1}\theta}$$

ب)

$$E[mle_\theta] - \theta = \boxed{\frac{-1}{n+1}\theta} \longrightarrow \text{biased}$$

 حدس بزن خودمان می‌زنیم

$$\bar{X} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n^2}$$

چون x_i و x_j مستقل از هم هستند

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} E[x_i x_i] + \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i,j \leq n}} \cancel{E[x_i x_j]}^{E[x_i]E[x_j]}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} E[x_i^2] + \sum_{i \neq j} E[x_i]E[x_j]\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} Var(x_i) + \mu^2 + \sum_{i \neq j} \mu^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n\sigma^2 + n\mu^2 + 2\binom{n}{2}\mu^2\right) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\mu^2}{n} + \frac{n-1}{n}\mu^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$\bar{X}$ یک تخمینگر Biased از آب درآمد اما ما تخمینگر unbiased می‌خواهیم.

$\xrightarrow{\text{پس}}$ $\boxed{Y = \bar{X} - \frac{\sigma^2}{n} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 - \frac{\sigma^2}{n}}$

$\boxed{E[Y] - \mu^2 = 0}$ $\leftarrow$ پس Y یک تخمینگر unbiased است.

۴) الف)

X ← از شش نگاره ۲تا علامت دار.

$$\ell(X|n) = P(X|n) = \frac{\binom{۳}{۲}\binom{n-۳}{۴}}{\binom{n}{۶}} = \frac{۳ \times \frac{(n-۶)}{۴!}}{\frac{n \times (n-1) \times (n-۲)}{۶!}}$$

$$= \frac{\overset{۹۰}{\cancel{۶! \times ۳}}}{\cancel{۴!}} \times \frac{(n-۶)}{n(n-1)(n-۲)} = \frac{۹۰(n-۶)}{n(n-1)(n-۲)}$$

$$\xrightarrow[\text{تا } max/\cancel{min} \text{ را دربیاوریم.}]{\text{مشتق آن باید صفر شود}} \quad \frac{d}{dn}\overbrace{\left(\frac{۹۰(n-۶)}{n(n-1)(n-۲)}\right)}^{A} = ۰$$

$$\longrightarrow \frac{dA}{dn} = \frac{n(n-1)(n-۲) - (n-۶)\overbrace{\left((n-1)(n-۲) + n(n-۲) + n(n-1)\right)}^{۳n^۲ - ۶n + ۲}}{n^۲(n-1)^۲(n-۲)^۲} = ۰$$

$$\longrightarrow n^۳ - ۳n^۲ + ۲n = ۳n^۳ - ۲۴n^۲ + ۳۸n - ۱۲$$

$$\longrightarrow ۲n^۳ - ۲۱n^۲ + ۳۶n - ۱۲ = ۰$$

$$n_1 = ۰,۴۹ \quad \text{و} \quad n_۲ = ۱,۴۵ \quad \text{و} \quad n_۳ = ۸,۴۵$$

ولی در فرض مسئله، می‌دانیم که ۶+۳ پرنده نگاره شده که ۲تای آنها نگاری بوده اند

$$\longrightarrow n \geq ۹-۲$$

$$\xrightarrow{\text{پس n مورد قبول}} n = ۸,۴۵$$

n عدد طبیعی است ← پس باید $n=۹$ یا $n=۸$

$$\ell(X|۸) = \frac{۹۰ \times ۲}{۸ \times ۷ \times ۶} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

$$\ell(X|۹) = \frac{۹۰ \times ۳}{۹ \times ۸ \times ۷} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

→ تعداد پرنده‌ها $n=۸$ یا $n=۹$

که تعیین خوبی نیست چون اختلاف آنها بسیار کم است.

۱۵ می‌دانیم که $\hat{\eta}$ یک unbiased است پس داریم:

$$E[\hat{\eta}] = \eta$$

$$\longrightarrow E[\hat{\eta}] = \eta = \alpha_1 E[X_1] + \dots + \alpha_n E[X_n]$$

$$= \alpha_1 \left(E[\eta] + \cancel{E[\varepsilon_1]} \right) + \dots + \alpha_n \left(E[\eta] + \cancel{E[\varepsilon_n]} \right)$$

$$= \alpha_1 \eta + \alpha_2 \eta + \dots + \alpha_n \eta$$

$$= \eta (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

$$\longrightarrow \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1}$$

بعد الان

$$\xrightarrow[\min Var(\hat{\eta})]{} Var(\hat{\eta}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \, Var(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left(\cancel{Var(\eta)} + \underbrace{Var(\varepsilon_i)}_{\sigma_i^2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2$$

ضرب لاگرانژ

$$\longrightarrow F(\dots) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1 \right)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 2 \alpha_i \sigma_i^2 + \lambda = 0 \longrightarrow \alpha_i = \frac{-\lambda}{2 \sigma_i^2}$$

$$\longrightarrow \left[\frac{-\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} = 1 \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{-2}{\sum_{i=1}^{n} 1/\sigma_i^2}} \right.$$

$$\alpha_i = \frac{1}{\sigma_i^2 \left(\sum_{i=1}^{n} 1/\sigma_i^2 \right)}$$