۱) الف)

$A \to$ موفقیت مرحله ۱

$B \to$ موفقیت مرحله ۲

$C \to$ موفقیت مرحله ۳

$D \to$ توانا بودن

$$P(C' \mid A' \cap B') = ans$$

$$\rightarrow ans = \frac{P(C' \cap A' \cap B')}{P(A' \cap B')}$$

D, D' مجموعه کل ما را افراز می‌کنند!

$$\xrightarrow{} ans = \frac{P(C' \cap A' \cap B' \mid D)P(D) + P(C' \cap A' \cap B' \mid D')P(D')}{P(A' \cap B' \mid D)P(D) + P(A' \cap B' \mid D')P(D')}$$

با شرط D یا D'، A' و B' و C' مستقل اند

با شرط D یا D'، A' و B' مستقل اند

$$\rightarrow ans = \frac{P(D)P(C' \mid D)P(A' \mid D)P(B' \mid D) + P(D')P(C' \mid D')P(A' \mid D')P(B' \mid D')}{P(D)P(A' \mid D)P(B' \mid D) + P(A' \mid D')P(B' \mid D')P(D')}$$

$$ans = \frac{0{,}4 \times (0{,}3)^3 + (0{,}6)(0{,}8)^3}{0{,}4 \times (0{,}3)^2 + (0{,}6)(0{,}8)^2} = \frac{0{,}318}{0{,}420} = \frac{159}{210} = \frac{53}{70}$$

$$\boxed{ans = 75{,}7\%}$$

ب)

$$ans = P(C' \mid (A \cap B') \cup (A' \cap B))$$

$$\rightarrow ans = \frac{P(C' \cap (P(A \cap B') \cup P(A' \cap B)))}{P(A \cap B') \cup P(A' \cap B)} = \frac{P(A \cap B' \cap C') \cup P(A' \cap B \cap C')}{P(A \cap B') \cup P(A' \cap B)}$$

$A \cap B'$ و $A' \cap B$ ناسازگارند

$A \cap B' \cap C$ و $A' \cap B \cap C$ ناسازگارند

$$\rightarrow ans = \frac{P(A \cap C' \cap B') + P(B \cap C' \cap A')}{P(A \cap B') + P(A' \cap B)}$$

مانند بخش قبل، با استفاده از افراز D و D' و مستقل بودن آن با A, B, C ---

$$\rightarrow ans = \frac{P(A \cap C' \cap B' \mid D)P(D) + P(A \cap C' \cap B' \mid D')P(D') + \dots}{P(A \cap B' \mid D)P(D) + P(A \cap B' \mid D')P(D') + \dots}$$

CamScanner

$$ans = \frac{۲ \times \left((۰٫۳)^۲ \times (۰٫۷) \times (۰٫۴) + (۰٫۸)^۲ \times (۰٫۲) \times (۰٫۶) \right)}{۲ \times \left(۰٫۳ \times ۰٫۷ \times ۰٫۴ + ۰٫۸ \times ۰٫۲ \times ۰٫۶ \right)}$$

$$= \frac{۰٫۱۰۲}{۰٫۱۸} = \boxed{۱۷/۳۰}$$

ج)

$$ans = P(C' \mid A \cap B)$$

$$\xrightarrow[\text{بخش های قبل حل می‌شود}]{\text{این مسئله هم مثل}} ans = \frac{P(C' \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B \cap C' \mid D)P(D) + P(A \cap B \cap C' \mid D')P(D')}{P(A \cap B \mid D)P(D) + P(A \cap B \mid D')P(D')}$$

$$\longrightarrow ans = \frac{۰٫۴ \times ۰٫۳ \times (۰٫۷)^۲ + ۰٫۶ \times (۰٫۸) \times (۰٫۲)^۲}{۰٫۴ \times (۰٫۷)^۲ + ۰٫۶ \times (۰٫۲)^۲}$$

$$= \boxed{\frac{۰٫۰۷۸}{۰٫۲۲} = \frac{۳۹}{۱۱۰}}$$

CamScanner

۲. برای این سوال نیاز داریم A_α را تعریف کنیم

A_α := تعداد حالت های قرار گرفتن α عدد که هیچ کدام از این اعداد در مکان اصلی خود نباشند

$۳,۴,۱,۲ \in A_\alpha$

$۱,۲,۳,۴ \notin A_\alpha$

برای بدست آوردن A_α، می‌گوییم که کل جایگشت‌ها $n!$ است

$+\, n!$

کل جایگشت های که یک جایگاه، عدد خودش را دارد

$-\, \binom{n}{1}(n-1)!$

کل جایگشت های که دو جایگاه، عدد خودش را دارد

$+\, \binom{n}{2}(n-2)!$

$-$

$\vdots$

(اصل شمول عدم شمول) $\longrightarrow A_\alpha = \alpha!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$

حال برای محاسبه $f(n,r)$، اول r جایگاه را انتخاب می‌کنیم و عدد خودش را در آنجا می‌گذاریم.

برای $n-r$ جایگاه دیگر از $A_{(n-r)}$ استفاده می‌کنیم

$$\longrightarrow f(n,r) = \binom{n}{r} A_{(n-r)}$$

$$= \cancel{\binom{n}{r}}(n-r)!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right)$$

$$\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{n!}{r!}\left(\quad\text{———}\quad\right)$$

$$\longrightarrow \frac{f(n,r)}{n!} = \frac{\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right)}{r!}$$

CamScanner

حال می‌گوییم:

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n,r)}{n!} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!} \right)}{r!}$$

با ظاهر شدن e^{-1}

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n,r)}{n!} = \frac{1}{r!} \times e^{-1} = \frac{1}{r! \times e}$$

تکمیلی: داریم

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{i}}{i!}$$

پس

$$1/e = \lim_{n\to\infty} \left(1 - 1/1! + 1/2! + \cdots + \frac{(-1)^{n}}{n!} \right)$$

۳) الف) مسئله را به مسئله ای دیگر تناظر می دهیم.

فرض کنید با $2n$ حرکت می خواهیم در نقشه حرکت کنیم و از مبدأ شروع کنیم و در مبدأ تمام کنیم.

اگر از این مسئله، n حرکت اول را به کاربر یک و قرینه n حرکت بعد را به کاربر دو بدهیم، جواب سوال را به دست می آوریم، چون n حرکت دوم مسئله می خواهد کاربر یک را از مکان فعلی به مبدأ ببرد، پس قرینه این حرکات ما را از مبدأ به مکان کاربر یک می برد!

حل مسئله طرح شده: n حرکت به راست می خواهیم، n حرکت به سمت چپ می خواهیم، زیرا باید در آخر در مبدأ باشیم.

$$p(x) = \frac{\binom{2n}{n}\binom{n}{n}}{2^{2n}} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

۳ ب) این مسئله را هم به مسئله بخش قبل تناظر می دهیم. (با $2n$ حرکت راه برویم و در آخر در نقطه شروع باشیم)

در این مسئله نیاز داریم که: ۱- U و D تعداد برابر داشته باشند

۲- L و R تعداد برابر داشته باشند.

(۱ و ۲) $\longrightarrow$ $D + L = R + U$

پس باید از بین $2n$ حرکت، n حرکت انتخاب کنیم که L یا D باشند و باقی حرکات R و U باشند در با رعایت کردن $R=L$ و $U=D$

تشدید

* می گوییم که در ۲ بخش ایجاد شده،

با i تا که $(i \in \{0, 1, 2, \dots, n\})$ در بخش یک انتخاب کنیم

که (مثلاً) L باشد و i تا در بخش دو انتخاب کنیم

که (مثلاً) R باشد و باقی بخش یک $\rightarrow D$ و باقی بخش ۲ $\rightarrow U$

$$P(n) = \frac{\binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i}}{4^{2n}}$$

$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$ برابر است با

دو بخش کردن $2n$ و انتخاب کردن در مجموع n تا از این ۲ بخش

$\binom{2n}{n}$

$$\longrightarrow P(n) = \frac{\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}}{4^{2n}}$$

$$= \binom{2n}{n}^2 \frac{1}{16^n}$$

* در بخش الف هر حرکت ۲ حالت و در بخش ب هر حرکت ۴ حالت داشت برای همین تعداد کل به ترتیب 2^{2n} و 4^{2n} شد!

۴) حالات کل برابر است با : $\frac{14!}{2!}$

* از آنجایی که ستاره و معین ساختار مشابه دارند $p(G)$ را حساب می‌کنیم و داریم

$$p(G)+p(M)+p(S)=1 \xrightarrow[p(S)=p(M)]{} p(S)=\frac{1-p(M)}{2} \quad (*)$$

برای اینکه گوگوش برنده شود، نیاز داریم ستاره (معین) آخرین حرف مجموعه + ۳ حرف random دیگر از مجموعه را بگیرد و معین (ستاره) آخرین حرف از مجموعه باقی مانده + ۴ حرف " " " " " " " " ، اینگونه گوگوش برنده است!

در حالت ستاره بازنده اول :

$$\overbrace{\underbrace{\binom{12}{3}}_{\text{یکی برای حرف ۱۳ام}} 4!}^{\text{ستاره}} \times \overbrace{\underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{یکی برای بزرگ‌ترین حرف مانده}} \times 4!}^{\text{معین}} \times \binom{5}{5} \frac{5!}{2!}$$

در حالت معین بازنده اول :

$$\overbrace{\binom{12}{3} 4!}^{\text{معین}} \times \overbrace{\binom{8}{3} 4!}^{\text{ستاره}} \times \binom{5}{5} \frac{5!}{2!}$$

$$\longrightarrow p(G)=\frac{2\times\binom{12}{3}\binom{8}{3}\, 4!\times 4!\times \frac{5!}{2!}}{\frac{14!}{2!}} = \frac{32}{9\times 13} = \frac{32}{117}$$

$$\xrightarrow{(*)} p(S)=\left(1-\frac{32}{117}\right)/2 = \frac{85}{234}$$

برد گوگوش $\longrightarrow p(G)$

برد ستاره $\longrightarrow p(S)$

برد معین $\longrightarrow p(M)$

فرض: $\{E_n, n\geq 1\}$ یک دنباله صعودی است و پیشامد F_n $(n\geq 1)$ را تعریف می‌کنیم که:

$$F_1 = E_1$$

$$F_n = E_n\left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right]^C = E_n E_{n-1}^C \ , \quad n>1$$

چون دنباله صعودی است پس $\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i = E_{n-1}$ است به عبارتی F_n شامل نقاطی از E_n است که در هیچ یک از E_iها $(i<n)$ وجود ندارند. به سادگی می‌توان نشان داد که پیشامدهای F_n دو به دو ناسازگار اند به طوری که برای هر $n\geq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \ , \quad \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

$\xrightarrow{\text{پس}}$

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right] = P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) \quad \longleftarrow \text{چون } F_i \text{ها ناسازگار اند}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left[\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

نتیجه برای $\{E_n, n\geq 1\}$ وقتی که صعودی است ثابت می‌شود اگر $\{E_n, n\geq 1\}$ دنباله‌ای نزولی از پیشامدها باشد، آنگاه $\{E_n^C, n\geq 1\}$ دنباله‌ای صعودی است و بنابراین با استفاده از روابط قبل داریم.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

اما چون $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c$ است نتیجه می‌شود

$$P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

$$1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - P(E_n)\right] = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

CamScanner

۵ ب) داریم که:

$$\lim_{n\to\infty} P(C_n)=0 \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(C_{n+1}-C_n)<\infty$$

می‌خواهیم به جواب روبه‌رو برسیم!

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k\right)=0}$$

A_α را تعریف می‌کنیم به طوری که

$$A_\alpha=\bigcup_{k=\alpha}^{\infty} C_k$$

$$\longrightarrow P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k\right)=P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

$$=P\left(\lim_{i\to\infty}\bigcap_{n=0}^{i} A_i\right)$$

$$=P\left(\lim_{i\to\infty} B_i\right)$$

B_i ها دنباله‌ای نزولی تشکیل می‌دهند زیرا:

$$B_i=\bigcap_{n=0}^{i} A_i$$

$$\xrightarrow[\text{در الف}]{\text{اثبات شده}} P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k\right)=\lim_{i\to\infty} B_i=\lim_{i\to\infty}\left(\bigcap_{n=0}^{i} A_n\right)$$

$$A_0\subset A_1\subset \text{—} \subset A_i \longrightarrow \lim_{i\to\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{i} A_i\right)=\lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

$$=\lim_{i\to\infty} P\left(\bigcup_{k=i}^{\infty} C_k\right)$$

$$\bigcup_{k=i}^{\infty} C_k=\lim_{j\to\infty}\left(\bigcup_{k=i}^{j} C_k\right) \quad ①$$

تعریف می‌کنیم که

$$② \quad D_j=\bigcup_{k=i}^{j} C_k$$

③ D_j افزایشی است $\longleftarrow$

$$\xrightarrow{۱,۲} \bigcup_{K=i}^{\infty} C_K = \lim_{j\to\infty} D_j$$

$$\xrightarrow{۳} \lim_{i\to\infty} P\left(\bigcup_{K=i}^{\infty} C_K\right) = \lim_{i\to\infty} P\left(\lim_{i\to\infty} D_j\right)$$

$$= \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} P\left(\bigcup_{K=i}^{j} C_K\right)$$

$$\bigcup_{K=i}^{j} C_K = C_i \cup (C_{i+1} - C_i) \cup \text{——} \cup (C_j - C_{j-1})$$

$$\longrightarrow P\left(\bigcup_{K=i}^{j} C_K\right) \leqslant P(C_i) + \sum_{K=i}^{j-1} P(C_{K+1} - C_K)$$

$$\longrightarrow \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} P\left(\bigcup_{K=1}^{j} C_K\right) \leqslant \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} \sum_{K=1}^{j-1} P(C_{K+1} - C_K)$$

$$+ \cancel{\lim_{i\to\infty} P(C_i)}$$

0 فرض سوال

طبق اثبات زیر ادامه خواهیم داد!

داریم :

① $$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \sum_{i=n}^{\infty} x_i$$

② $$\sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{n}^{\infty} x_i$$

$$\longrightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{n}^{\infty} x_i$$

CamScanner

$$\xrightarrow{\text{پس}} \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} \sum_{K=i}^{j-1} P(C_{K+1}-C_K)=0$$

$$\longrightarrow \Big\} \; P\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{K=n}^{\infty} C_K\Big)=0$$

CamScanner

۶) الف

برای حالات کل داریم: $\frac{n(n+1)}{2}$ عدد داریم و تعداد حالات گذاشتن $\frac{n(n+1)}{2}$ عدد در یک صف طبقه بندی شده $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)!$ است.

مسئله را به صورت بازگشتی حل می‌کنیم. $f(n)$ برابر تعداد حالات جایگذاری یک هرم n طبقه‌ای با شرط گفته شده در صورت سوال است.

برای $f(n)$ داریم: در طبقه آخر m_n باید بزرگترین عدد مجموعه باشد و تعداد $(n-1)$ عدد طبقه هم نیستند و می‌توانند هر کدام از $\frac{n(n+1)}{2}-1$ عدد باقی مانده باشند و در آخر باید حواسمان باشد که n عدد در طبقه n ام، $n!$ حالت جایگذاری دارند!

$$\rightarrow f(n) = \binom{\frac{n(n+1)}{2}-1}{n-1} n! \cdot f(n-1)$$

$$\longrightarrow f(n) = \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)!\, n!}{(n-1)!\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!} \times f(n-1)$$

$$f(n) = \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)!\,(n!)}{\cancel{(n-1)!}\,\cancel{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!}_{\frac{n(n-1)}{2}}} \times \frac{\cancel{\left(\frac{n(n-1)}{2}-1\right)!}\,\cancel{(n-1)!}}{(n-2)!\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)!} \times \dots$$

$$\longrightarrow f(n) = \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)!\, n!}{\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{(n-1)(n-2)}{2} \times \dots} = \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)!\, n!}{n!\,(n-1)!\,(1/2)^{n-1}}$$

$$\longrightarrow p(n) = \frac{2^{n-1}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)!}{(n-1)!\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)!} = \boxed{\frac{2^n}{(n+1)!}}$$

۷ - الف

مسئله از ما می‌خواهد که اثبات کنیم $\frac{N_i}{2^i} \leq 1$

حال هر دو طرف را در 2^n ضرب می‌کنیم $N_i \times 2^{n-i} \leq 2^n$

طرح مسئله جدید برای اثبات $N_i \times 2^{n-i} \leq 2^n$:

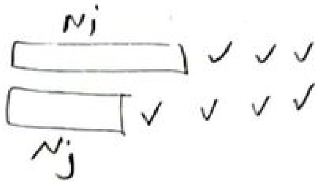
$N_i \times 2^{n-i}$ ⟵ تعداد اعداد باینری به طول n که i بیت اول آن از قوانین ذکر شده در سوال پیروی می‌کنند (قانون prefix نبودن)

2^n ⟵ تعداد اعداد باینری به طول n

اثبات می‌کنیم که در عبارت $N_i \times 2^{n-i}$، در عددها تکراری نیستند، پس با این شرط $N_i \times 2^{n-i} \leq 2^n$ است زیرا $N_i \times 2^{n-i}$ عدد تکراری نمی‌سازد که بخواهد از max خود بالا بزند

با انتقال $\frac{N_i}{2^i} \leq 1$ را اثبات کرده‌ایم.

$N_i \times 2^{n-i}$ و $N_j \times 2^{n-j}$ ⟵ فرض ۱ (i > j) :



اگر برابر باشند (تکراری باشند) ⟵ N_j prefix N_i و این ※

مانند فرض ۱ ※ : (i < j) فرض ۲ ⟵

باید $N_i = N_j$: (i = j) فرض ۳ ⟵

و این باعث می‌شود (N_i prefix N_j) ⟵ ※

پس ⟵ $\frac{N_i}{2^i} \leq 1$