SUBJECT:

DATE: / /

طرق التكامل:

١- طريقة التكامل بالتجزئ

نظرية: إذا كانت $u = u(x)$ ، $v = v(x)$ دالتان قابلتان للتفاضل ومتصلتان فإن:

قانون التكامل بالتجزئ يكون على الصورة:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثل: $\int x^n \tan^{-1}x\,dx$ ، $\int x^n \ln x\,dx$ ، $\int \tan^{-1}x\,dx$ ، $\int \ln dx$ ، $\int e^x \sin x\,dx$

وعند استخدام التكامل بالتجزئ يجب اتباع القواعد التالية:

١- إذا كان التكامل على الصورة الآتية

$\int$ كثيرة الحدود $\cdot$ { دالة لوغاريتمية / دالة مثلثية عكسية / دالة زائدية عكسية } dx

في هذه الحالة هنختار u و dv الباقي من التكامل

امثلة:

١- $\int \ln x\,dx$

$u = \ln x \quad , \quad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx \quad , \quad v = x$

$uv - \int v\,du$

باستخدام القانون

$x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx + C$

$x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$

$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

$(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{2} + C$

$\int x\ln x\,dx$

$u = \ln x \quad , \quad dv = x\,dx$

$du = \frac{dx}{x} \quad , \quad v = \frac{x^2}{2}$

$\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx$

$\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$

SUBJECT:

DATE: / /

$\int \tan^{-1}x \, dx$

$u = \tan^{-1}x \quad , dv = dx$

$du = \frac{1}{1+x^2}dx \quad , v = x$

$uv - \int v \, du$

$x\tan^{-1}x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} = x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}$

$x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

$\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} dx$

$\frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2 + C$

$\int x\tan^{-1}x \, dx$

$u = \tan^{-1}x \quad , dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{1+x^2}dx \quad , v = \frac{x^2}{2}$

$I = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}(x - \tan^{-1}x) + C$

$\int x^n \ln x \, dx$

$u = \ln x \quad , dv = x^n dx$

$du = \frac{1}{x}dx \quad , v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$

$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$

SUBJECT:

DATE: / /

القاعدة الثانية :

إذا كان التكامل على الصورة الآتية :

دالة أسية
دالة مثلثية } كثيرة حدود . dx
دالة زائدية

هنختار u كثيرة الحدود و dv الباقي

الحل :

$\int x e^{x} \, dx$

$u = x \qquad dv = e^{x} dx$

$du = dx \qquad v = e^{x}$

$I = x e^{x} - \int e^{x} dx$

$I = x e^{x} - e^{x} + C .$

$\int 2 e^{x^2} x \, dx$

$e^{x^2} + C$

$\int x^2 e^{x} \, dx$

$u = x^2 \quad , dv = e^{x} dx$

$du = 2x dx \quad , \quad v = e^{x} + C$

$I = x^2 e^{x} - \int 2x e^{x} dx$

$I = x^2 e^{x} - 2 [x e^{x} - e^{x}] + C$

$\int x \cos x \, dx$

$u = x \quad , dv = \cos x \, dx$

$du = dx \quad , \quad v = \sin x$

$I = x \sin x - \int \sin x \, dx$

$I = x \sin x + \cos x + C$

$\int x \cos(x^2) \, dx$

$\frac{1}{2} \sin(x^2) + C$

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

SUBJECT:

DATE: / /

$\int x^2 \cos x \, dx$

$u = x^2 \quad , dv = \cos x \, dx$

$du = 2x\,dx \quad , \quad v = \sin x$

$I_1 = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx \rightarrow \boxed{1}$

$\int 2x \sin x \, dx$

$u = 2x \quad , dv = \sin x \, dx$

$du = 2dx \quad , \quad v = -\cos x$

$I_2 = -2x\cos x - 2\int -\cos x \, dx$

$= -2x\cos x + 2\sin x \rightarrow \boxed{2}$

بالتعويض بـ $\boxed{2}$ في $\boxed{1}$

$I_1 = x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C$

ملاحظة: عند تطبيق هذه القاعدة يجب أن تكون زوايا الدوال المثلثية في X

مقصورة ع Ln x

$I = \int \cos(\ln x) \, dx$

$u = \cos(\ln x) \quad , \quad dv = dx$

$du = \frac{-1}{x} \sin(\ln x) dx \quad , \quad v = x$

$I = x\cos(\ln x) + \int \sin \ln x \, dx$

$I = x\cos(\ln x) + I_1 \rightarrow (1)$

$I_1 =$

$u = \sin(\ln x) \quad , \quad dv = dx$

$du = \frac{dx}{x} \cos(\ln x) \quad , \quad v = x$

$I_1 = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx$

$= x\sin(\ln x) - I \rightarrow (2)$

نعوض بـ 2 في (1)

$I = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - I + C$

$2I = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$

SUBJECT:

DATE: / /

$$\int \frac{x e^{x}}{(x+1)^2} \, dx$$

$u = x e^{x}$ $\qquad dv = (x+1)^2$

$du = e^{x} + x e^{x} = e^{x}(1+x)$, $\quad V = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x+1}$

$$I = \frac{-x e^{x}}{x+1} + \int \frac{e^{x}(1+x)}{x+1} \, dx$$

$$I = \frac{-x e^{x}}{x+1} + e^{x} + C.$$

SUBJECT:

DATE: / /

$uv - \int v\,du$

1. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

$\int (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

$\int (\ln x)^2\,dx$

$u = (\ln x)^2 \qquad dv = dx$

$du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$

$I = x(\ln x)^2 - \int x \cdot \frac{1}{x}\, 2\ln x\,dx$

$I = x(\ln x)^2 - I'$

$I' =$

$u = \ln x \qquad dv = 2dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = 2x$

$I' = 2x\ln x - \int 2x \frac{1}{x}\,dx$

$I' = 2x\ln x - 2x$

$I = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

2. $\int x^2 e^x\,dx$

$u = x^2 \qquad dv = e^x\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = e^x$

$I = e^x x^2 - \int 2x e^x\,dx$

$I = e^x x^2 - [2x e^x - 2e^x] + C$

SUBJECT:

DATE: / /

3. $\int \sin^{-1} dx$

$u = \sin^{-1}x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad v = x$

$I = x\sin^{-1}x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$I = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$

4. $\int \sin(\ln x)\,dx$

$u = \sin(\ln x) \qquad dv = dx$

$du = \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx \qquad v = x$

$I = x\sin(\ln x) - \int \frac{x}{x}\cos(\ln x)\,dx$

$I' = x\sin(\ln x) - I'$

I'

$u = \cos(\ln x) \qquad dv = x\,dx$

$du = -\frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$I' = \frac{x^2}{2}\cos(\ln x) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{\sin \ln x}{x}$

$I =$

5. $\int x \log_5^x \,dx$

$u = \log_5^x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x\ln 5} \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$I = \frac{x^2}{2}\log_5^x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x\ln 5}$

$I = \frac{x^2}{2}\log_5^x - \frac{1}{2\ln 5} \cdot \frac{x^2}{2} + C.$

SUBJECT:

DATE: / /

6. $\int x \tan^{-1}(2x)\, dx$

$u = \tan^{-1}(2x)$ $\quad dv = x\,dx$

$du = \frac{2}{1+4x^2}\, dx$ $\quad v = \frac{x^2}{2}$

$I = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(2x) - \int \frac{x^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1+4x^2}\, dx$ $\quad x^2 + \frac{1}{4}$

$I = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(2x) - \int \frac{x^2}{1+4x^2}\, dx$

$I_1 =$ $u = x^2$ $\quad dv = \frac{2x}{1+4x^2}$

$du = 2x$

$v = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x^2)$

$\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}(2x)^2 - \int \tan^{-1}$

7. $\int x \sec^2(x^2)\, dx$

$\frac{1}{2}\tan(x^2) + C$

$\int x \sec^2 x\, dx$

$u = x$ $\quad dv = \sec^2 x\, dx$

$du = dx$ $\quad v = \tan x$

$I = x\tan x - \int \tan x\, dx$

$I = x\tan x - \ln \sec + C$

8. $\int \frac{\ln(2x)}{x}\, dx$

$\frac{1}{2}\int \ln(2x)\frac{2}{2x}\, dx$

$\frac{(\ln(2x))^2}{2} + C$

$\int \ln(2x)\, dx$

$u = \ln 2x$ $\quad dv = dx$

$du = \frac{2}{2x}$ $\quad v = x$

$I = x\ln 2x - \int x\frac{2}{2x}\, dx$

$I = x\ln 2x - x + C$

SUBJECT:

DATE: / /

9. $\int x \sin(3x^2)\, dx$

$\frac{1}{6} \cos(3x^2) + C$

$\int x \sin(3x)\, dx$

$u = x \qquad dv = \sin(3x)\, dx$

$du = dx \qquad v = \frac{-1}{3} \cos(3x)$

$I = \frac{-x}{3} \cos(3x) - \int -\frac{1}{3} \cos(3x)$

$\frac{-x}{3} \cos(3x) + \frac{1}{9} \sin(3x) + C$

10. $\int e^x \cos x\, dx$

$\int e^x \cos 5x\, dx$

$u = \cos x \qquad dv = e^x\, dx$

$du = -\sin x\, dx \qquad v = e^x$

$I = e^x \cos + \int e^x \sin x\, dx$

$I = e^x \cos x + \sin x\, e^x - \int e^x \cos x\, dx$

$\int e^x \cos x\, dx$

$2 \int e^x \cos dx = e^x \cos x + \sin e^x$

$\int e^x \cos dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$

11. $\int e^{2x} \sin(5x)\, dx$

$u = \sin(5x) \qquad dv = e^{2x}\, dx$

$du = 5 \cos(5x)\, dx \qquad v = \frac{e^{2x}}{2}$

$I = \frac{e^{2x}}{2} \sin(5x) - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 5 \cos(5x)\, dx = \frac{e^{2x}}{2} \sin(5x) - \frac{5}{2} \int \cos(5x) e^{2x}\, dx$

I'

$\frac{e^{2x}}{2} \sin(5x) - \frac{5}{2} \left[\cos(5x) \frac{e^{2x}}{2} + \frac{5}{2} \int e^{2x} \sin(5x)\, dx \right.$

$\frac{29}{4}$

$\int e^{2x} \sin 5x + \frac{25}{4} \int e^{2x} \sin 5x = \frac{\sin 5x\, e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x} 5 \cos(5x)}{4}$

$\frac{2 e^{2x} \sin(5x)}{29} - \frac{5 e^{2x} \cos(5x)}{29} + C$

RS

CamScanner المسوحة ضوئيا بـ

SUBJECT:

DATE: / /

12- $\int e^{3x} \cos(10x)\, dx$

$u = \cos(10x)$ $\qquad dv = e^{3x}\, dx$

$du = -10 \sin(10x)\, dx$ $\qquad v = \frac{1}{3} e^{3x}$ d

$I = \frac{e^{3x}}{3} \cos(10x) + \int \frac{e^{3x}\, 10}{3} \sin(10x)\, dx$

$I = \frac{e^{3x}}{3} \cos(10x) + \frac{10}{3} \left[\frac{e^{3x}}{3} \sin(10x) - \int \frac{e^{3x}\, 10}{3} \cos(10x)\, dx \right.$

$\int e^{3x} \cos\overset{\frac{109}{9}}{(10x)} + \frac{100}{9} \int e^{3x} \cos(10x) = \frac{e^{3x} \cos(10x)}{3} + \frac{e^{3x} 10 \sin(10x)}{9}$ Fe.

$\int e^{3x} \cos(10x)\, dx = \frac{3 e^{3x} \cos(10x)}{109} + \frac{10\, e^{3x} \sin(10x)}{109} + C$.

13- $\int \sec^3 x\, dx$.

SUBJECT:

DATE: / /

$\int x \tan^{-1} 2x \; dx$

$u = \tan^{-1} 2x$ $\quad$ $dv = x\,dx$

$du = \frac{2}{1+4x^2}$ $\quad$ $v = \frac{x^2}{2}$

$\frac{x^2}{2} \tan^{-1}(2x) - \int \frac{x^2}{1+4x^2}\,dx$

I'

$I' = \frac{1}{4}\int \frac{4x^2+1-1}{1+4x^2} = \int \frac{4x^2+1}{1+4x^2} - \frac{?}{1+4x2}$

$x - \tan^{-1}(2x)$

$I = \frac{x^2}{\tan^{-1}(2x)} - \frac{1}{4}\left[x + \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)\right] + C$

SUBJECT:

DATE: / /

٣- القاعدة الثالثة

إذا كان التكامل على الصورة الآتية

أسية . مثلثية . زائدية dx
مثلثية . زائدية

فإن: نختار كما نحب لكن نتفق أن u و dv لـ الباقي

ملحوظة: عند استخدام هذه القاعدة فإن:
التكامل الأصلي هيظهر في الطرفين

احسب:

$1.\ \int e^x \sin x\, dx$

$u = e^x \qquad dv = \sin x\, dx$

$du = e^x dx \qquad v = -\cos x$

باستخدام التكامل بالتجزيئ

$uv - \int v\,du\, ds = \int u\,dv$

$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$

$I = -e^x \cos x + I_1 \rightarrow \boxed{1}$

$I_1 = \int e^x \cos x\, dx$

$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = e^x dx \qquad v = \sin x$

$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$

بالتعويض

$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$

$2I = \quad ''$

$I = \frac{1}{2}\left[e^x \cos x + e^x \sin x\right] + C$

$-\int e^x \sin(e^x)\, dx$

$-\cos(e^x) + C$

SUBJECT:

DATE: / /

2. $I = \int \sec^3 x \, dx$

$I = \int \sec x \sec^2 x \, dx$

$u = \sec x \quad , \quad dv = \sec^2 x \, dx$

$du = \sec x \tan x \, dx \quad , \quad v = \tan x$

باستخدام التكامل بالتجزيئ

$I = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$

$I = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx$

$I = \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$

$2I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$

$I = \frac{1}{2} [\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|] + C$

* القاعدة بالتعويض

أ- تعويضات جبرية

ب- تعويضات مثلثية أو زائدية

- الجبرية احسب ...

نحط إلي تحت الجذر بـ u^2

1. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x+1}}$

Let $u^2 = x + 1 \xrightarrow{+1} u^2 + 1 = x^2 + 2$

$2u \, du = 1 \, dx$

$I = \int \frac{2u \, du}{(u^2+1) \, u} = \int \frac{2 \, du}{u^2+1} = 2\tan^{-1} u + C$

$= 2\tan^{-1}(\sqrt{x+1}) + C$

SUBJECT:

DATE: / /

2. $\int x^3 \sqrt{x^2+1}\, dx$

$\boxed{u^2 = x^2+1}$

$2u\,du = 2x\,dx \Rightarrow \boxed{u\,du = x\,dx}$

$I = \int x^2 \sqrt{x^2+1}\; x\,dx$

$I = \int (u^2-1) \cdot u \cdot u\,du$

$I = \int (u^4 - u^2)\, du \Rightarrow \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$

$u = \sqrt{x^2+1}$

$\frac{1}{5}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + C$

$\int x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C$

3. $\int \frac{2x}{\sqrt{2x-1}}\, dx$

$u^2 = 2x-1$

$2u\,du = 2\,dx$

$u\,du = dx$

$I = \int$

SUBJECT:

DATE: / /

4. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}}\, dx$ $\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ $\qquad$ ~~$u = 1 + \sqrt{x}$~~ بالتعويض

$u = 1 - \sqrt{x}$

$-2\int \frac{-1}{2\sqrt{x}} \sqrt{1-\sqrt{x}}\, dx$ $\qquad$ صار فر

$-2 \cdot \frac{2}{3}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C$

5. $\int e^{\sqrt{1-\sin x}} \sqrt{1+\sin x}\, dx$ $\qquad$ نأخذ الأس بـ u لو في دالة أسية

$\boxed{u = \sqrt{1-\sin x}}$

$du = \frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}\, dx$ $\quad (\times \sqrt{1+\sin x})$ بالمرافق بعين

$du = \frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}\, dx$ $\qquad \sqrt{a}\sqrt{a} = a$

$\sqrt{b}\sqrt{a} = \sqrt{ab}$

$du = \frac{-\cos x \sqrt{1+\sin x}}{2\sqrt{(1-\sin^2 x)}}\, dx$

$du = -\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x}\, dx$

$\boxed{-2\, du = \sqrt{1+\sin x}\, dx}$

$I = -2\int e^{u}\, du$

$I = -2e^{u} + C$

$I = -2e^{\sqrt{1-\sin x}} + C$

نحط اللي تحت الجذر بـ u

SUBJECT:

DATE: / /

6. $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$

$u^2 = e^x - 1$

$2u\,du = e^x\, dx$

$\frac{1}{e^x} 2u\,du = dx$

$\boxed{\frac{2u\,du}{u^2+1} = dx}$

$I = \int u \frac{2u}{u^2+1}\, du = 2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}\, du$

$2 \int \frac{u^2+1}{u^2+1} - 2\int \frac{1}{u^2+1}\, du$

$2 \cancel{\int} x - 2\tan^{-1} u + C$

$\int e^x \sqrt{e^x - 1}\, dx$

$\frac{2}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$

7. $\int \frac{x^3\, dx}{3\sqrt{x^2 - 4}}$

$u^2 = x^2 - 4$

SUBJECT:

DATE: / /

8- $$\int \frac{\cos x}{2\cos^2 x-3}\,dx$$

$$I=\int \frac{\cos x}{2(1-\sin^2 x)-3}\,dx$$

$$I=\int \frac{\cos x}{\cancel{3}-1-2\sin^2 x}\,dx$$

$$I=-\int \frac{\cos x\,dx}{2\sin^2 x+1}=-\int \frac{\cos x}{(\sqrt{2}\sin x)^2+1^2}\,dx$$

$$I=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{1}\right)+C$$

الموضوع: ....

التاريخ: ....

التعويضات المثلثية (الزائدية)

اذا احتوى تكامل على احدى الصور الاتية فانه يمكن استخدام المعلومات الاتية

الدالة المطلوب تكاملها	التعويض المثلثي	التعويض الزائدي
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$	$x=a\tanh\theta$
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u=a\sin\theta$	$u=a\tanh\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$	$x=a\ \text{sish}\ \theta$
$\sqrt{a^2+u^2}$	$u=a\tan\theta$	$u=a\sinh\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	$x=a\cosh\theta$
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u=a\sec\theta$	$u=a\cosh\theta$

الموضوع : ....

التاريخ : ....

① $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

sol:-

$$\left[\begin{array}{l} a^2 = 9 - x^2 \\ 2a\,da = -x\,dx \end{array}\right] \times$$

$\boxed{x = 3\sin\theta}$ $\quad dx = 3\cos\theta\, d\theta$

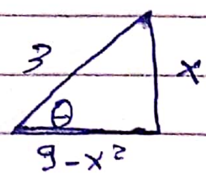
$\because \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9 - 9\sin^2\theta}$

$= 3\sqrt{1-\sin^2\theta} = 3\cos\theta$

$$I = \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\, d\theta = -\cot\theta \cdot \frac{1}{9}$$

$\because x = 3\sin\theta \longrightarrow \frac{x}{3} = \sin\theta$



$$I = -\frac{1}{9}\,\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$$

الموضوع : .... التاريخ : ....

② $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$

sol:-

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+(2x)^2}}$$

$2x = \tan\theta$

$2\,dx = \sec^2\theta \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

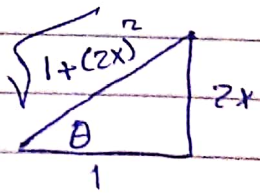
$\because \sqrt{1+(2x)^2} = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{\sec^2} = \sec\theta$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(\sec\theta + \tan\theta)\right] + C$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\sqrt{1+(2x)^2}\right) + 2x\right] + C$$



الموضوع: .... التاريخ: ....

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$$

Sol:

$x = 3\sec\theta$

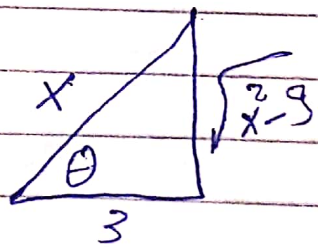
$dx = 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$\because \sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\sec^2\theta-9} = 3\tan\theta$

$$\therefore I = \int \frac{3\tan\theta \cdot 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{3\sec\theta}$$

$= 3\int \tan^2\theta\,d\theta = 3\int \sec^2-1\,d\theta = 3[\tan\theta-\theta]$

$$I = 3\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - \sec^{-1}\frac{x}{3}\right]$$



SUBJECT: ....

DATE: / /

التاريخ : .... الموضوع : ....

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

Sol.:-

$$x = \tan\theta$$

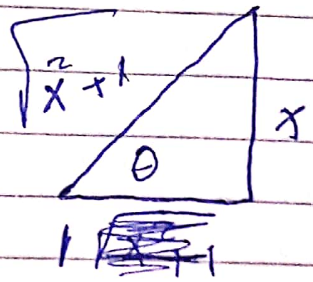
$$dx = \sec^2\theta \, d\theta$$

$$\because \sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2\theta + 1} = \sec\theta$$

$$I = \int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{(\sec\theta)^3}$$

$$= \int \frac{1}{\sec\theta} \, d\theta = \int \cos\theta \, d\theta = \sin\theta + c$$

$$I = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c$$



SUBJECT:

الموضوع : .... التاريخ : ....

(٣) طريقة اكمال المربع

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+13} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+9}$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right)+c$$

(2) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-4x+13}\,dx$

$$I = \int \frac{(2x+1)\,dx}{(x-2)^2+9}$$

$\boxed{u = x-2}$ $\boxed{du = dx}$

$x = u+2$

$2x = 2u+4$

$\boxed{2x+1 = 2u+5}$

$$I = \int \frac{(2u+5)\,du}{u^2+9}$$

$$= \int \frac{2u\,du}{u^2+9} + 5\int \frac{du}{u^2+9}$$

$$= \ln(u^2+9) + \frac{5}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3}$$

$$I = \ln\left((x-2)^2+9\right) + \frac{5}{3}\tan^{-1}\frac{x-2}{3}$$

SUBJECT:

التاريخ : ....

الموضوع : ....

(3) $\dfrac{dx}{\sqrt{1+4x-2x^2}}$

$= -2\left(x^2-2x-\frac{1}{2}\right)$

$= -2\left[(x-1)^2-\frac{3}{2}\right]$

$= 2\left(\frac{3}{2}-(x-1)^2\right)$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(\frac{3}{2}-(x-1)^2\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-(x-1)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C$$