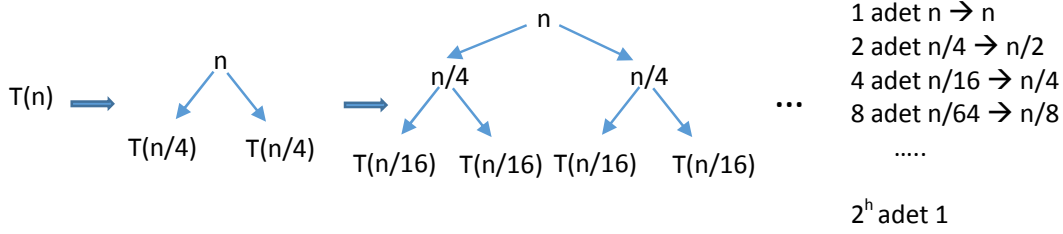


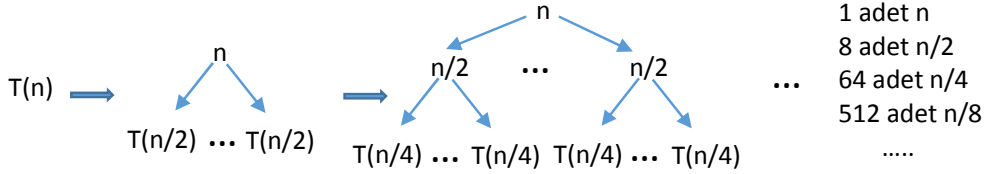
## Ders 9:

- $T(n)=2T(n/4)+n$ , bunun recursion tree'sini çizelim.



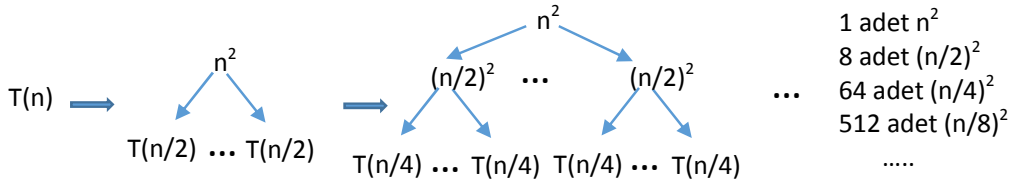
- $h = \log_4 n$
- $T(n) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \dots = n \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = n \sum_{i=0}^{\log_4 n} \left( \frac{1}{2} \right)^i$
- $T(n) = n \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{\log_4 n + 1}}{1 - \frac{1}{2}} = n \frac{1 - \frac{1}{2^{\log_4 n + 1}}}{\frac{1}{2}} = 2n \left( 1 - \frac{1}{2^{\log_4 n + 1}} \right) = 2n \left( 1 - 2^{-(\log_4 n) - 1} \right)$
- $T(n) = 2n \left( 1 - \frac{2^{-(\log_4 n)}}{2} \right) = 2n \left( 1 - \frac{n^{-(\log_4 2)}}{2} \right) = 2n \left( 1 - \frac{n^{-2}}{2} \right) = 2n \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} \right) = 2n - \sqrt{n} = O(n)$

- $T(n)=8T(n/2)+n$  için recursion tree'i çiziniz.



- $T(n) = n + 4n + 16n + 64n + \dots = n(1 + 4 + 16 + 64 + \dots) = n \sum_{i=0}^h 4^i$
- $h = \log_2 n, T(n) = n \sum_{i=0}^{\log_2 n} 4^i = n \frac{4^{(\log_2 n) + 1} - 1}{4 - 1} = \frac{n}{3} (4 * 4^{\log_2 n} - 1)$
- $T(n) = \frac{n}{3} (4n^{\log_2 4} - 1) = \frac{n}{3} (4n^2 - 1) = O(n^3)$

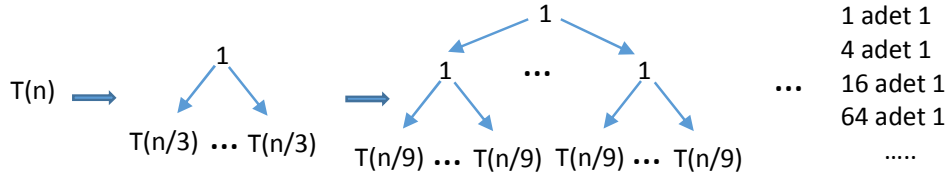
- $T(n)=8T(n/2)+n^2$  için recursion tree'i çiziniz.



- $T(n) = n^2 + 2n^2 + 4n^2 + 8n^2 + \dots = n^2(1 + 2 + 4 + 8 + \dots) = n^2 \sum_{i=0}^h 2^i$
- $h = \log_2 n, T(n) = n^2 \sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^i = n^2 \frac{2^{(\log_2 n) + 1} - 1}{2 - 1} = n^2 (2 * 2^{\log_2 n} - 1)$
- $T(n) = n^2 (2n^{\log_2 2} - 1) = n^2 (2n - 1) = O(n^3)$

- $T(n)=8T(n/2)+1$  için  $O(n)$  ?
- $T(n)=O(n^3)$

- $T(n)=4T(n/3)+1$  için recursion tree'i çiziniz.

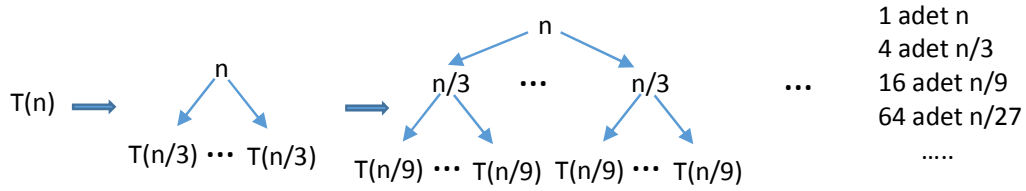


- $T(n) = \sum_{i=0}^h 4^i, h = \log_3 n$
- $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_3 n} 4^i = \frac{4^{(\log_3 n)+1}-1}{4-1} = \frac{4 \cdot 4^{\log_3 n}-1}{3} = \frac{4 \cdot n^{\log_3 4}-1}{3} = O(n^{\log_3 4})$

- $T(n)=9T(n/3)+1$  için recursion tree'i çiziniz.

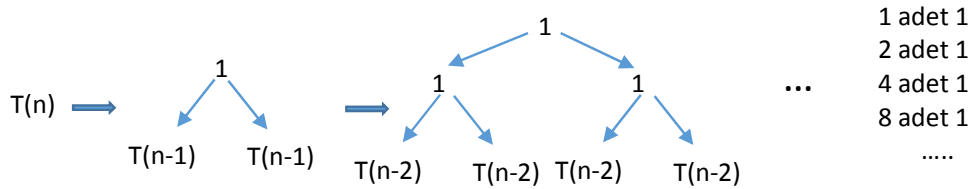
- $T(n) = \sum_{i=0}^h 9^i, h = \log_3 n$
- $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_3 n} 9^i = \frac{9^{(\log_3 n)+1}-1}{9-1} = \frac{9 \cdot 9^{\log_3 n}-1}{8} = \frac{9n^{\log_3 9}-1}{8} = \frac{9n^2-1}{8} = O(n^2)$

- $T(n)=4T(n/3)+n$  için recursion tree'i çiziniz.



- $T(n) = n + 4n/3 + 16n/9 + 64n/27 + \dots = n(1 + 4/3 + 16/9 + 64/27 + \dots) = n \sum_{i=0}^h \left(\frac{4}{3}\right)^i, h = \log_3 n, T(n) = n \sum_{i=0}^{\log_3 n} \left(\frac{4}{3}\right)^i$
- $\sum_{i=0}^{\log_3 n} \left(\frac{4}{3}\right)^i = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{(\log_3 n)+1}-1}{\frac{4}{3}-1} = 3 \cdot \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n} - 1\right) = 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n} - 3 = 4n^{\log_3 \frac{4}{3}} - 3$
- $= 4n^{\log_3 \left(\frac{4}{3} \cdot 4\right)} - 3 = 4n^{\log_3 \frac{16}{3} + \log_3 4} - 3 = 4n^{(\log_3 4)-1} - 3$
- $T(n) = n(4n^{(\log_3 4)-1} - 3) = 4n^{\log_3 4} - 3n = O(n^{\log_3 4})$

- $T(n)=2T(n-1)+1$  için recursion tree'i çiziniz.



- $T(n) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \sum_{i=0}^h 2^i, h = n$
- $T(n) = \sum_{i=0}^n 2^i = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = O(2^n)$ , çok fazla

- $T(n)=T(n-1)+T(n-2)+1$  olursa, fibonacci

- $T(n) = O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ , bu da çok fazla

- $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$  golden ratio  $\approx 1.618$ ,  $2^n$ 'den küçük çünkü bazı recursion'lar daha önce bitiyor. Hepsi aynı seviyede değil. Önceden fibonacci(n)'i  $O(n)$  ile hesaplayabiliyorduk. Bu şekilde ( fib(n)=fib(n-1)+fib(n-2) ) recursive olarak tanımlarsak çok daha kötü oldu. ☹
- Fibonacci(n)'i  $O(n)$ 'den daha iyi bulabilir miyiz?
  - $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  olsun.  $F^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
  - $F^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $F^4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ,
  - $F^5 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$
  - $F^n = \begin{bmatrix} fib(n+1) & fib(n) \\ fib(n) & fib(n-1) \end{bmatrix}$  güzel ☺
  - $F^n$ 'i lineer olarak hesaplırsak karmaşıklık yine  $O(n)$  olur. Ama bir sayının üssünü  $\log_2 n$ 'le bulabiliştik. Aynı şekilde bir matrisinde üssünü  $\log_2 n$ 'de bulabilir miyiz?
  - hpower'ın aynısı sadece  $T=k*k$ 'da  $k$ 'lar sayı değil,  $2*2$ 'lik matris.  $2*2$ 'lik 2 matris sabit sayıda işlemle çarpılır. Yani  $n$ 'e bağlı değil. Dolayısıyla  $F^n$ 'de  $\log_2 n$ 'le bulunabilir. İşte bu süper ☺