

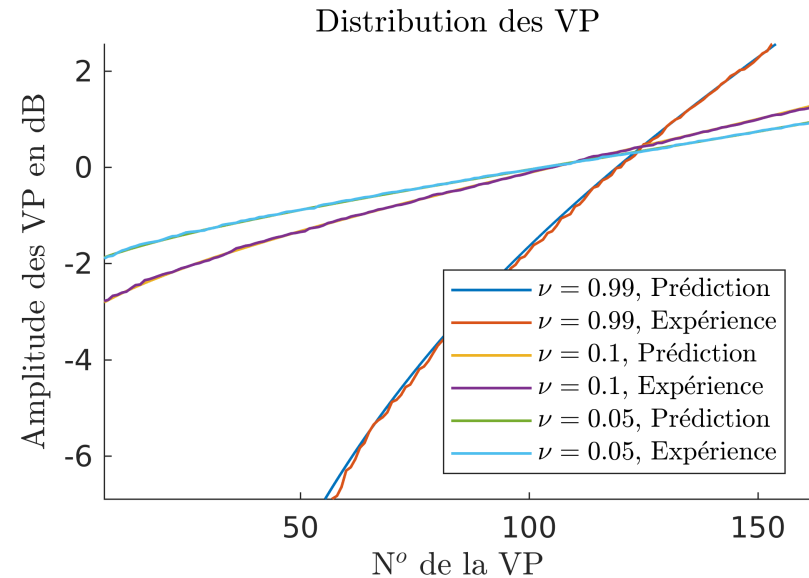
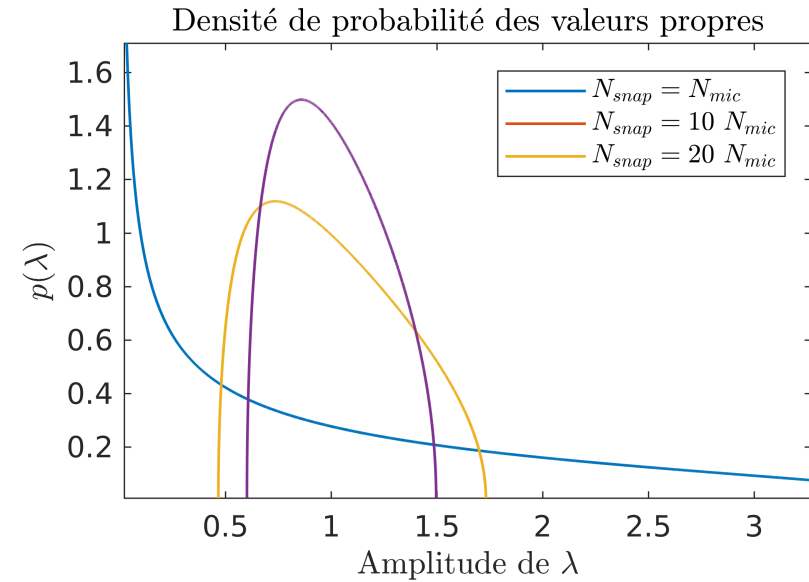
## I. Objectifs

- Comparer méthode débruitage :
  - Alternating projection + Hald + Dougherty
  - SLRD
  - EM (dont impact de l'initialisation) + MCMC
- Étudier code MCMC Jérôme
- État de l'art not. débruitage avec mesure de bruit de fond
- Continuer NASA4

## II. Distribution des valeurs propres d'une matrice de bruit

Voir l'article<sup>1</sup> "Eigenvalues of the sample covariance matrix for a towed array" de Gerstoft et al.

Une matrice interspectrale de bruit gaussien a des valeurs propres sont distribuées selon une densité de probabilité de Marcenko-Pastur<sup>2</sup>, si le nombre de snapshot est supérieur au nombre de microphone ( $0 \leq \nu \leq 1$ ).



1. <http://noiselab.ucsd.edu/papers/Gerstoft2012.pdf>

2. [https://en.wikipedia.org/wiki/Marcenko-Pastur\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Marcenko-Pastur_distribution)

93Pastur\_distribution

### III. Comparaison méthode de débruitage

3 familles de méthodes de débruitage sont comparées sur des matrices interspectrales synthétiques identiques.

Le code permet de faire varier la fréquence pour la matrice de propagation, le nombre de monopole sources  $N_{src}$ , le degré de corrélation des sources, le SNR et le nombre de snapshots  $M_w$ .

Les spectres de sources sont

$$\mathbf{Q} \sim \mathcal{N}(0, \frac{q_{rms}}{\sqrt{2}})$$

de dimension  $(N_{src} \times M_w \times N_{freq})$ .

Les sources sont ensuite corrélées :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{corr} \mathbf{Q}$$

avec  $\mathbf{Q}_{corr}$  la factorisation de Cholesky de la matrice de covariance des sources.

Les spectres de pression sont générés par une propagation des sources :

$$\mathbf{P} = \mathbf{G} \mathbf{Q}$$

Les spectres de bruits sont

$$\mathbf{N} \sim \mathcal{N}(0, \frac{n_{rms}}{\sqrt{2}})$$

avec  $n_{rms}(f) = \text{mean}(|\mathbf{P}(f)|) \times 10^{-SNR/20}$ .

Le bruit est ajouté au signal :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P} + \mathbf{N}$$

. Les interspectres sont calculés :

$$\mathbf{S}_q = \frac{1}{M_w} \mathbf{Q} \mathbf{Q}' \quad (\text{sources}) \quad (1)$$

$$\mathbf{S}_p = \frac{1}{M_w} \mathbf{P} \mathbf{P}' \quad (\text{signal}) \quad (2)$$

$$\mathbf{S}_n = \frac{1}{M_w} \mathbf{N} \mathbf{N}' \quad (\text{bruit}) \quad (3)$$

$$\mathbf{S}_y = \frac{1}{M_w} \mathbf{Y} \mathbf{Y}' \quad (\text{signal et bruit}) \quad (4)$$

La matrice à débruiter est  $\mathbf{S}_y$  et l'objectif est de retrouver  $\mathbf{S}_p$  à partir de  $\mathbf{S}_y$ .

L'erreur de reconstruction de la diagonale est quantifiée par :

$$err = \frac{\|\mathbf{d}_{ref} - \hat{\mathbf{d}}\|}{\|\mathbf{d}_{ref}\|} \quad (5)$$

avec  $\mathbf{d}_{ref} = \text{diag}(\mathbf{S}_p)$  et  $\|\bullet\|$  la norme L2.

Pour chaque méthode, on étudie la sensibilité à 4 paramètres :

- le rang de la matrice signal  $\mathbf{S}_p$  : on fait varier le nombre de sources ou la fréquence
- le rang de la matrice de bruit : on fait varier le nombre de snapshots, pour un bruit diagonal
- le SNR : de -10 à 10 dB
- présence de bruit corrélé ou non
- × la norme nucléaire de la matrice signal  $\rightarrow$  revient à faire varier les sources ou la fréquence, donc le rang de la matrice signal

Les paramètres inchangés :

- le nombre de microphones : 93 (en spirale)
- le propagateur : fonction de Green d'un monopole en champ libre

Le germe aléatoire est le même pour toutes les simulations, pour que l'étude ne dépende que des paramètres que l'on fait varier. Est-il nécessaire de moyenner ?

## IV. Réduction successive de la diagonale

Le principe de ces méthodes est de diminuer le niveau de la diagonale jusqu'à ce que la plus petite valeur propre soit nulle :

$$\arg \max_{\mathbf{d}} \sum_i d_i \quad \text{s. c.} \quad \mathbf{S}_y - \mathbf{d} \geq 0 \quad (6)$$

Hald identifie ce problème comme un problème d'optimisation convexe. Dougherty le résout sous forme d'un problème d'optimisation linéaire résolu itérativement. Ce problème peut également être résolu par projections alternées.

### 4.1. Variation du rang de $S_p$

Pour faire varier le rang de  $S_p$ , on fait varier le nombre de monopoles décorrélés.

Paramètres fixés :

- SNR : 10 dB
- rang de  $\mathbf{S}_n$  : plein.
- Bruit décorrélé : les éléments extradiagonaux sont annulés et  $M_w = 9000$  (toutes les VP de  $S_n$  sont donc presque égales).
- Fréquence : 3800 Hz.

Les paramètres qui modifient le rang de la CSM sont :

- la fréquence d'étude,
- le nombre de source
- la corrélation des sources

On choisit donc de fixer la fréquence et la corrélation des sources, et de faire varier le nombre de sources réparties sur 3 lignes.

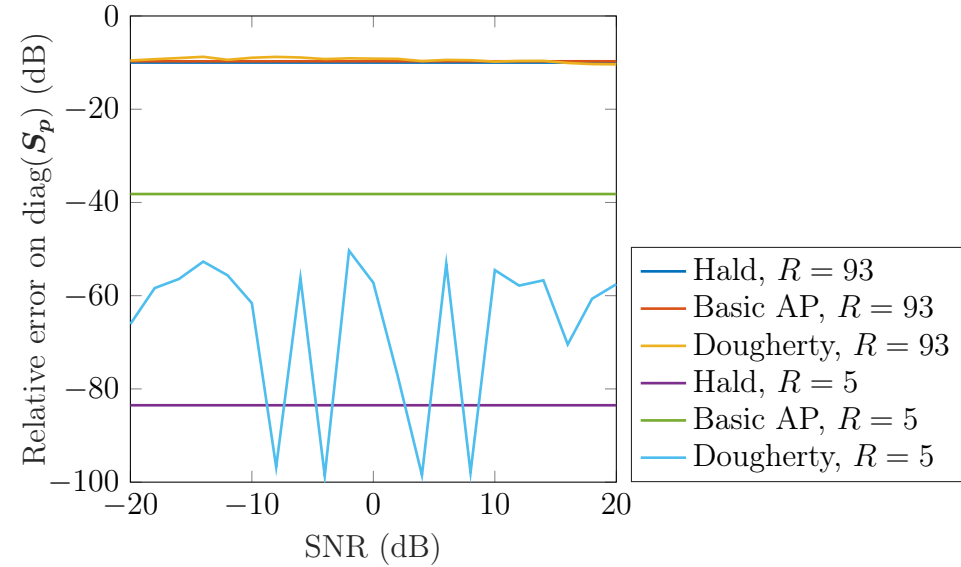
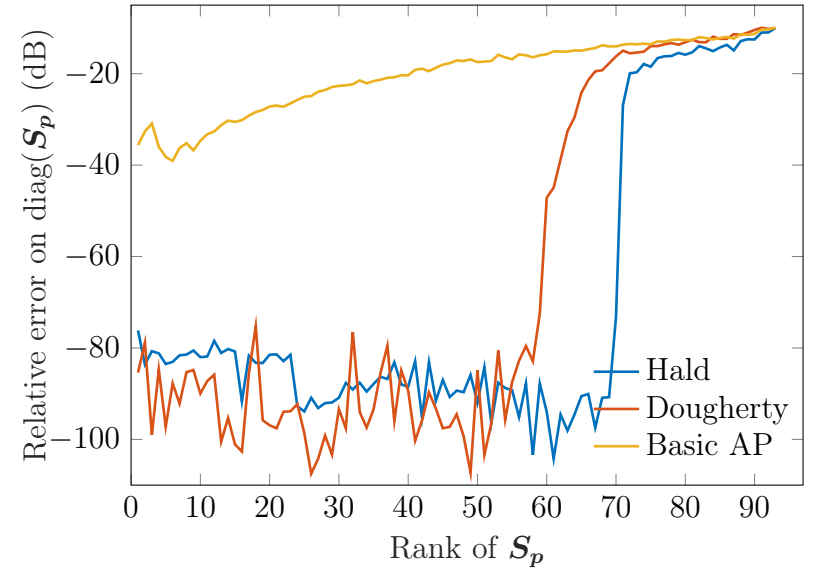
Résultat pour Hald similaire à Hald 2017.

### 4.2. Influence du SNR

On fait varier le SNR de -20 à 20 dB, en fixant les autres paramètres.

On trace l'erreur en fonction du SNR, pour 5 sources et 150 sources (rang de  $S_p$  : 5 et 93).

Les 3 méthodes sont très peu sensibles au SNR.



L'erreur pour Dougherty fluctue un peu, sûrement parce que la convergence n'est pas tout à fait atteinte.

## V. RPCA

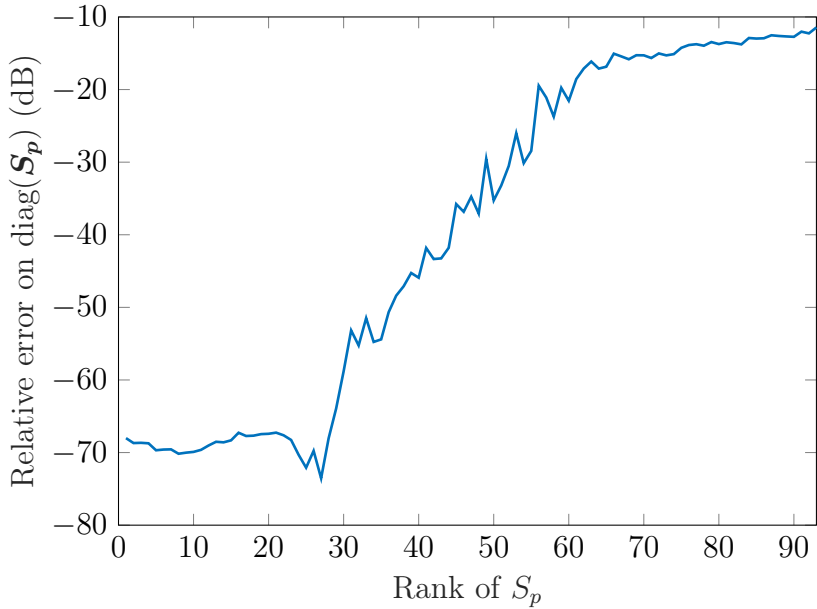
Le problème de débruitage est formulé comme un problème de Robust PCA et résolu par un algorithme de gradient proximal (et aurait pu être résolu par FISTA, AP, etc).

$$\arg \min_{\hat{\mathbf{S}}_p, \hat{\mathbf{S}}_n} \|\hat{\mathbf{S}}_p\|_* + \lambda \|\mathbf{S}_n\|_1 \quad \text{s. c.} \quad \mathbf{S}_y = \hat{\mathbf{S}}_p + \hat{\mathbf{S}}_n \quad (7)$$

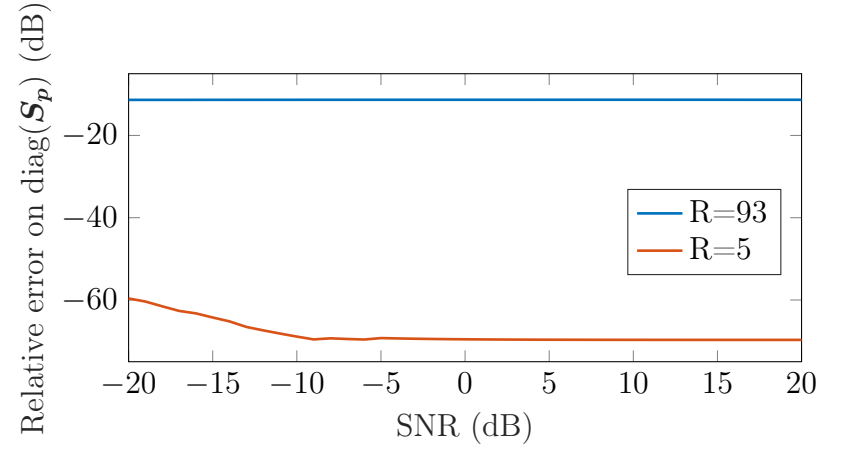
avec  $\hat{\mathbf{S}}_p$  de rang réduit et  $\hat{\mathbf{S}}_n$  matrice de bruit qui peut être de forte amplitude, mais parcimonieuse.

### 5.1. Variation du rang de $S_p$

Mêmes paramètres que précédemment. On fixe  $\lambda = 0.5$ . **Note :** On peut éviter d'avoir à fixer  $\lambda$  en utilisant l'approche RPCA Bayésienne.



### 5.2. Influence du SNR



## VI. Analyse factorielle résolue par EM

### 6.1. Influence du choix de K en entrée d'EM

On simule la présence de 25 sources.

2 types d'initialisations :

- Subspace identification (SI) : les K plus grandes VP sont associées à un sous-espace signal, et les autres au sous-espace bruit. K doit être fixé par l'utilisateur. On retire aux K plus grandes VP la valeur moyenne des  $(M - K - 1)$  VP associées au bruit.
- Bruit nul  $\sigma^2 = 0$  et  $\mathbf{L} = 0$ .

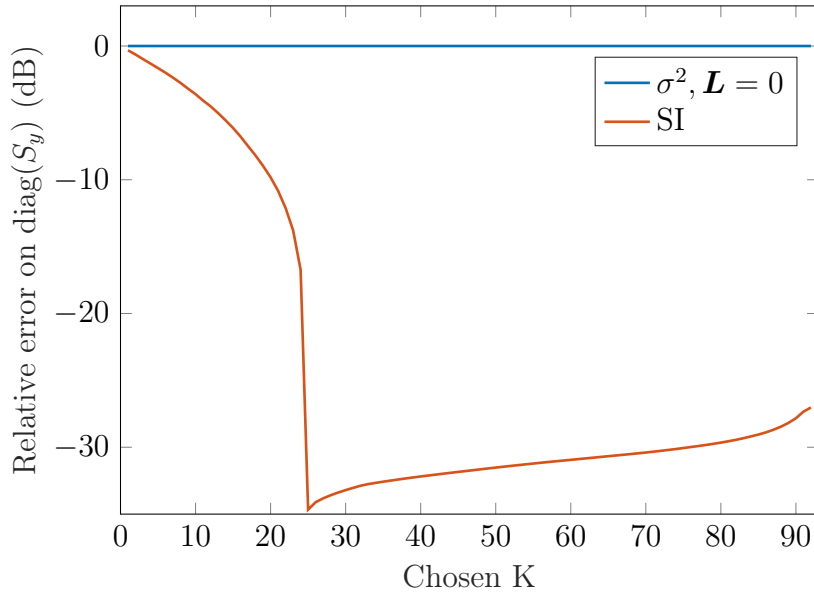


FIGURE 1 – Erreur relative au moment de l'initialisation

Il semble préférable d'initialiser  $\sigma^2, \mathbf{L} = 0$ , et afin de ne pas faire d'hypothèse sur  $K$ , on fixe le rang à  $K = N_{mic} - 1$ .

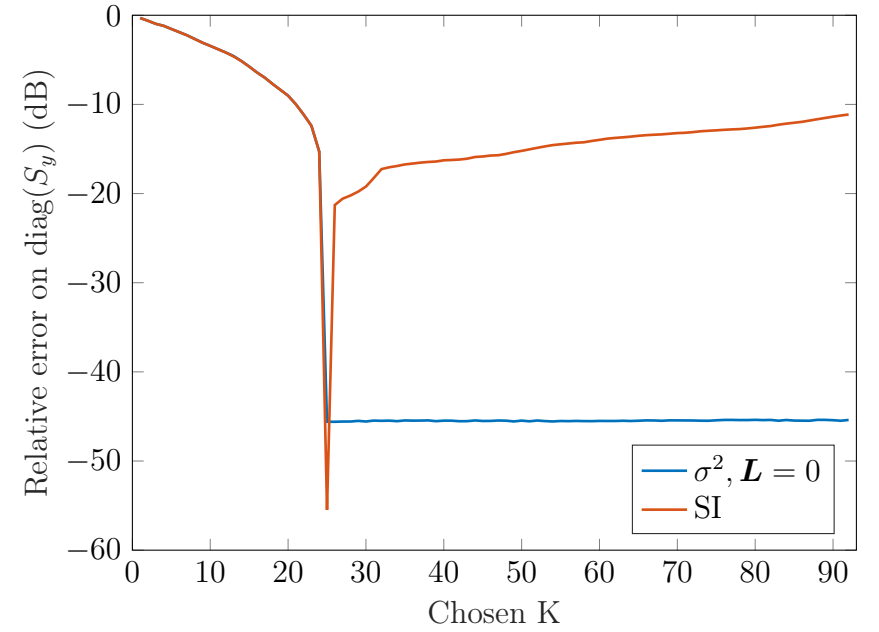
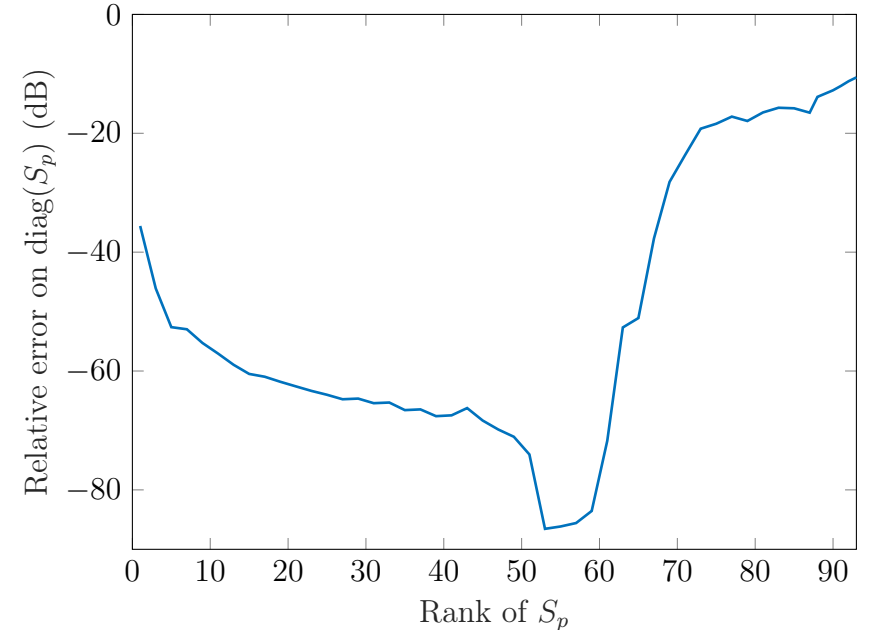


FIGURE 2 – Erreur relative après optimisation EM

### 6.2. Variation du rang de $S_p$

On initialise bruit et signal à 0 et K est fixé à  $N_{mic} - 1$ .



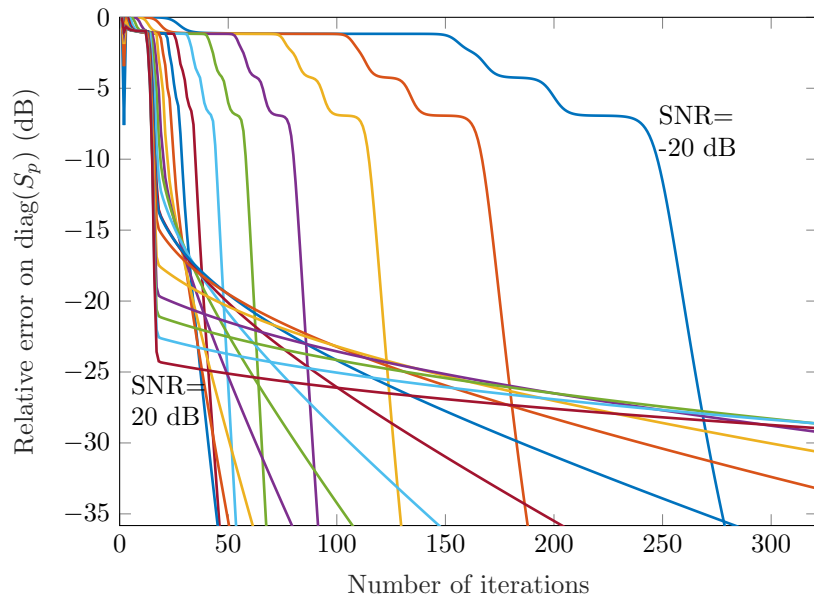
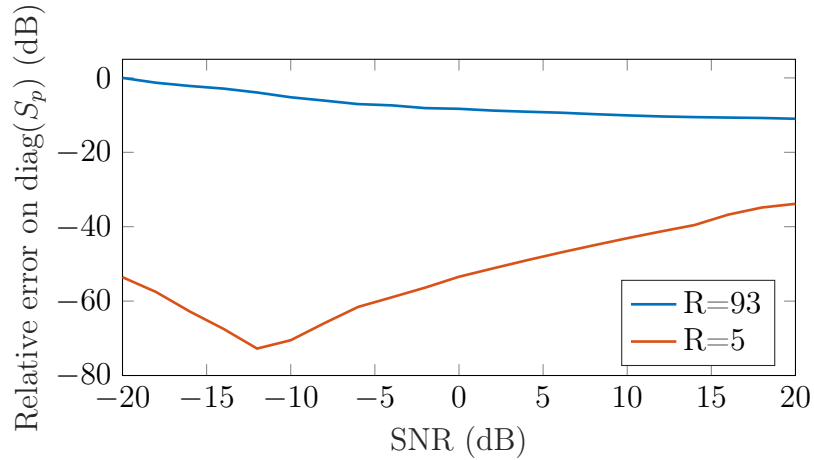


FIGURE 3 – *Courbes de convergence pour chaque valeur de SNR*  
**Attention :** *Courbe de convergence en escalier, prendre un critère d'arrêt sur l'erreur petit.*

### 6.3. Influence du SNR

De même, pour 5 et 150 sources.



## VII. Conclusions

Pour les 3 groupes de méthodes :

- Très peu sensibles au SNR
- Rangs limites : 30/93 pour RPCA, 60-70/93 pour RS, 60-70/93 pour EM.
- Points clé EM : initialisation et convergence en escalier.
- Point clé RPCA : choix du paramètre de régularisation

## VIII. Perspectives

- Prise en main code MCMC
- RPCA : faire varier la régularisation  $\lambda$  pour voir l'effet de seuil sur le rang.
- Effet de seuil sur l'erreur en fonction du rang : lien avec les bornes + et - des VP (cf distribution Marcenko-Pastur) ?
- Courbe d'erreurs sur interspectres bruités moyennés
- Bruit corrélé selon Corcos.