Étude bibliographique : Méthodes de localisation de sources aéroacoustiques

Alice Dinsenmeyer

Pourquoi : localisation de sources dans le sous-sol, dans des tissus humains, dans des pièces industrielles, dans les fluides (avec ou sans écoulement, dans un espace clos ou non). Dans chaque contexte, la nature des sources varie.

Objectif : caractériser quantitativement/qualitativement les sources à partir de mesures obtenue en quelques points discrets de l'espace.

Contexte : Réduction du bruit des avions (not. des turbomachines [1]) par l'identification des mécanismes de génération de bruit.

Historique : Dès 1976, pour répondre à des problématiques de compréhension des bruits de turboréacteur, Billingsley and Kinns (1976) réalisent des mesures simultanées à l'aide d'une antenne linéaire constituées de 14 microphones. Depuis, le nombre de capteur par antenne a augmenté, ainsi la gamme fréquentielle.

Formulation du problème d'imagerie acoustique La formulation du problème direct lie le vecteur des pressions $\boldsymbol{p}$ mesurées aux M points de mesure et l'intensité des N sources $\boldsymbol{q}$ à l'aide de la matrice de transfert $\boldsymbol{G}$ qui représente le modèle de propagation des ondes acoustiques :

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{q} \tag{1}$$

Le problème d'identification de sources acoustique est donc de résoudre le problème inverse qui consiste à estimer les sources $\boldsymbol{q}$ à partir des données $\boldsymbol{p}$:

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{p} \tag{2}$$

où $\boldsymbol{W}$ est appelé opérateur inverse.

1. Le moteur électrique n'est pas pour tout de suite, car il y a 40 fois plus d'énergie dans 1 kg de kérosène que dans 1 kg des meilleures batterie et après calcul de rendement, il reste un rapport 15 entre les 2.

Le problème peut aussi être formulé à partir des matrices de densité interspectrale :

$$\mathbb{E}\left\{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'\right\} = \mathbb{E}\left\{(\boldsymbol{G}\boldsymbol{q})(\boldsymbol{G}\boldsymbol{q})'\right\} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S_{pp}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{S_{qq}}\boldsymbol{G}' \tag{4}$$

Problèmes : On distingue 4 sources de difficultés majeures pour la résolution de ce problème inverse, pouvant nuire à la qualité de la reconstruction :

- le bruit de mesure (notamment hydrodynamique)
- l'approximation du modèle de propagation
- le choix du modèle de sources approché
- le caractère mal-posé du problème inverse (le nombre de source est souvent bien supérieur au nombre de points de mesure)

Pour chaque méthode d'imagerie, comprendre :
-hypothèses et connaissances a priori
-avantages et inconvénient
-contexte de développement
-algorithme(s) de résolution

Notations

m	scalaire	nombre de capteurs de l'antenne
n	scalaire	nombre de sources
$\boldsymbol{p}$	$m \times 1$	coefficients des signaux captés
$\boldsymbol{q}$	$n \times 1$	coefficients des sources
$\boldsymbol{n}$	$m \times 1$	bruit capté
$\boldsymbol{G}$	$m \times n$	matrice de transfert acoustique
$\boldsymbol{W}$	$n \times m$	matrice de l'opérateur inverse
η	scalaire	paramètre de régularisation
$\boldsymbol{S_{xy}}$	$\mathrm{l}(\boldsymbol{x}) \times \mathrm{l}(\boldsymbol{y})$	matrice interspectrale des séries $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{C_{xy}}$	$\mathrm{l}(\boldsymbol{x}) \times \mathrm{l}(\boldsymbol{y})$	matrice de covariance des séries $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{R_{xy}}$	$\mathrm{l}(\boldsymbol{x}) \times \mathrm{l}(\boldsymbol{y})$	matrice d'intercorrélation des séries $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$
$\bar{\boldsymbol{x}}$	$\mathrm{l}(\boldsymbol{x})$	vecteur des moyennes du processus $\boldsymbol{x}$
$\tilde{\boldsymbol{x}}$	$\mathrm{l}(\boldsymbol{x})$	estimation de $\boldsymbol{x}$

Table des matières

I. Méthodes de formation de voies

Le principe des méthodes de formation de voies est de pondérer les signaux de mesure à l'aide de vecteurs de pointage de manière à les focaliser dans chaque point du plan sur lequel les sources sont cherchées. Ces méthodes sont très utilisées car elles offrent beaucoup de flexibilité sur la position des capteurs et sont simples à mettre en œuvre. Cependant, elles offrent une résolution fortement dépendante de la géométrie de l'antenne.

Manque une référence type review

Les vecteurs de pointage (correspondant aux lignes de l'opérateur inverse $\boldsymbol{W}$) sont les poids attribués à chaque microphone avant de sommer leur réponse. En tout point focal i du plan de recherche de source, le vecteur de pointage est comparé à la pression mesurée par les microphones. Ainsi, le produit scalaire $\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{p}$ entre le vecteur de pointage $\boldsymbol{w}_i$ conjugué transposé (symbole $'$) et le vecteur des pressions $\boldsymbol{p}$ est maximal lorsque les vecteurs sont colinéaires. Le vecteur de pointage est donc associé à un modèle de source. Le modèle de source choisi ici est un ensemble de sources ponctuelles décorrélées. Une source a pour fonction de transfert du point focal i au microphone m :

$$h_{im} = \frac{e^{-jkr_{mi}}}{4\pi r_{mi}}. \tag{5}$$

Donc, le vecteur des pression pour une source ponctuelle au point i d'amplitude A_i est $\boldsymbol{p} = A_i\boldsymbol{h}_i$.

inconvénient : quantification difficile car chaque source est estimée comme si elle est la seule (decor. ref prise en compte des réflexions : -ajouter la contribution des sources images au processus de formation de voies. B. A. Fenech, "Accurate aeroacoustic measurements in closed-section hard-walled wind tunnels," Ph.D. dissertation, University of Southampton, June 2009
remarque : en beamforming classique, doubler le nombre de micro améliore le RSB de 3db

1.1. Vecteur de pointage indépendant des données

La formation de voies peut être vue comme la solution d'un problème d'optimisation : afin d'optimiser le vecteur de pointage, on cherche à minimiser l'écart entre l'amplitude estimée $\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{p}$ et l'amplitude réelle A_i. Cette fonction coût est défini à partir d'une densité spectrale $\mathbb{E}\{\bullet\}$ puisque les sources sont des grandeurs aléatoires :

$$J = \mathbb{E}\left\{(\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{p} - A_i)(\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{p} - A_i)^*\right\} \tag{6}$$
$$= \boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{S_{pp}}\boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{h}_iG_{ii} - \boldsymbol{h}_i'G_{ii}'\boldsymbol{w}_i + G_{ii} \tag{7}$$

* est l'opérateur conjugué, $\boldsymbol{S_{pp}} = \mathbb{E}\{\boldsymbol{pp}'\}$ et $G_{ii} = E[A_iA_i']$, soit :

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{w}_i'} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{w}_i = \frac{\boldsymbol{h}_i}{\boldsymbol{h}_i'\boldsymbol{h}_i}. \tag{8}$$

Le vecteur de pointage correspond donc au vecteur des fonctions de transferts normalisé de façon à que l'amplitude $S_i = \boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{p}$ soit égale à 1 quand $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{h}_i$.

En présence d'un bruit décorrélé à chaque microphone, on peut montrer que le vecteur de pointage devient :

$$\boldsymbol{w}_i = \frac{\boldsymbol{h}_i}{\boldsymbol{h}_i'\boldsymbol{h}_i + \gamma}, \tag{9}$$

avec $\gamma = G_{nn}/G_{ii}$, G_{nn} étant les termes diagonaux de la matrice interspectrale du bruit aux microphones.

1.2. Construction d'un vecteur de pointage à partir des données

Certaines méthodes de localisation n'utilisent pas un modèle de source mais construisent le vecteur de pointage à partir de l'ensemble des covariances des signaux de mesure.
Capon (1969) propose de minimiser l'énergie en sortie du processeur tout en conservant une contrainte de normalisation que le vecteur de pointage est dans la direction de la source (méthode dite "à variance minimale des sources") : minimiser $\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{S_{pp}}\boldsymbol{w}_i$ (i.e. la densité spectrale des sources) sous la contrainte $\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{h}_i = 1$. On résout donc, en utilisant le multiplicateur de Lagrange λ :

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{w}_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0 \tag{10}$$

avec la fonction coût :

$$J = \boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{S_{pp}}\boldsymbol{w}_i + \lambda(\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{h}_i + \boldsymbol{h}_i'\boldsymbol{w}_i). \tag{11}$$

La résolution de ces 2 équations permet de construire le vecteur de pointage :

$$\boldsymbol{w}_i = \frac{\boldsymbol{S_{pp}}^{-1}\boldsymbol{h}_i}{\boldsymbol{h}_i'\boldsymbol{S_{pp}}^{-1}\boldsymbol{h}_i}. \tag{12}$$

Le spectre de puissance de la distribution des sources estimée est alors donné par la relation :

$$\tilde{G_{ii}} = \mathbb{E}\{S_i S_i^*\} = \mathbb{E}\{\boldsymbol{w}_i' \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}' \boldsymbol{w}_i\} \tag{13}$$
$$= \frac{1}{\boldsymbol{h}_i' \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{pp}}^{-1} \boldsymbol{h}_i} \tag{14}$$

L'algorithme MUltiple Signal Classification (MUSIC, Schmidt (1986)) propose une décomposition en valeurs propres de la matrice interspectrale $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{pp}}$ pour la décomposer en 2 sous-espaces, l'un associé au signal et l'autre au bruit, afin de diminuer la contribution énergétique du bruit. Dans l'expression de $\tilde{G_{ii}}$ en équation 14, $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{pp}}$ est remplacé par les composantes correspondant au sous-espace bruit. Ainsi, ce nouvel estimateur sera maximal lorsque le processeur pointe vers une source, puisque les éléments du dénominateur seront décorrélés. Cet estimateur ne correspond alors plus à une densité spectrale des sources mais seulement à un indicateur de présence au point i.

Ces méthodes font l'hypothèse de sources décorrélées et sont sensibles au non-respect de cette hypothèse. Des stratégies peuvent être mises en place pour prendre en compte la cohérence des sources (Jiang et al., 2003). De plus, l'utilisation des signaux de mesure pour construire le vecteur de pointage rend ce méthode sensibles à la qualité de ce mesures. Pour contourner cette limitation, une pondération peut être ajoutée à la diagonale de la matrice interspectrale (Li et al., 2003).

Ces méthodes de formation de voies présentent l'avantages d'être simples à implémenter et relativement rapides à calculer. Mais leur résolution diminue fortement lorsque la longueur d'onde devient grande devant l'écart inter-microphonique et les images présentent alors des lobes secondaires qui rendent les sources difficile à localiser et à séparer. Ce problème peut être résolu par une étape de déconvolution décrite dans la section II.

DORT (pas d'hypothèse sur la distance source-antenne, équation d'euler linéarisées invariantes par RT en changeant le sens de l'écoulement moyen (ex : Localisation de source acoustique en soufflerie anéchoïque par deux techniques d'antennerie : formation de voies et retournement temporel numérique par Thomas Padois))
séparation de champ ? Décomposition en sous-espaces "Orthogonal Beamforming" ?
Generalize Inverse Beamforming ? SAFT, TFM

II. Ajout d'une étape de déconvolution

La distribution de sources obtenue obtenue par une méthode d'imagerie peut être vue comme la convolution entre la distribution de sources et la fonction d'étalement du point (PSF : point spread function). La PSF est comparable à une réponse impulsionnelle du système d'imagerie. En formation de voies, la PSF est souvent connue (Bahr et al., 2011) : elle est composée d'un lobe principal et de lobes secondaires.

Ces lobes diminuent notamment le pouvoir de séparation des sources, surtout à basses fréquences ou si les sources sont proches ou encore multipolaires. Si la PSF est connue, on peut, en principe, déconvoluer la distribution de source calculée afin de réduire l'intrusion des lobes secondaires.

On distingue 2 types de lobes secondaires : ceux liés à l'espacement entre les microphones et ceux généré par la forme générale de l'antenne (le fait qu'elle soit d'une surface finie). Ces derniers peuvent être corrigés en appliquant une fenêtre d'appodisation diminuant la sensibilité des microphones situés sur les bords de l'antenne.

La PSF des méthodes inverses est difficile à estimer car elle dépend des données de mesure. C'est pourquoi les méthodes de déconvolution y sont moins appliquées. En revanche, la PSF du beamforming est bien connue et la résolution de cette méthode est souvent améliorée par une étape de déconvolution.

2.1. PSF du beamforming standard

Le beamforming standard permet d'estimer les sources $\tilde{\boldsymbol{q}}$ ainsi (cf paragraphe 1.1) :

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{p}, \tag{15}$$

ou bien, en terme d'énergie :

$$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{qq}} = \boldsymbol{W}'\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{pp}}\boldsymbol{W} \tag{16}$$

$$\text{avec,} \qquad \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{pp}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{qq}}\boldsymbol{G}' \tag{17}$$

Comme les sources sont supposées décorrélées, on peut calculer avec uniquement les diagonales de $\tilde{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{qq}} = \mathrm{diag}(b_1, ..., b_j ..., b_N)$ et $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{qq}} = \mathrm{diag}(q_1, ..., q_j ..., q_N)$.

On a alors :

$$b_j = \sum_k A_{jk} q_k \tag{18}$$

avec $\boldsymbol{A}$ la PSF associée à chaque point source. D'après 16, et en rappelant que $\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{g}_1, \ \dots \ , \boldsymbol{g}_N]$ et $\boldsymbol{W} = [\boldsymbol{w}_1, \ \dots \ , \boldsymbol{w}_M]^T$, on a :

$$A_{jk} = |\boldsymbol{w}_j' \boldsymbol{g}_k|^2 \tag{19}$$

Rapport $1/M^2$?

La déconvolution consiste théoriquement à inverser la matrice $\boldsymbol{A}$ afin de retrouver les vraies valeurs de sources. En pratique, il est nécessaire d'avoir recours à une inversion avec contrainte de positivité sur la solution ($\boldsymbol{A}$ étant de grande dimension). Ce problème est généralement suffisamment bien posé pour qu'aucune régularisation supplémentaire ne soit requise.

Notations inspirée de `http://www.bebec.eu/Downloads/BeBeC2014/Papers/BeBeC-2014-02.pdf` qui donne aussi g et w en présence d'un écoulement uniforme.

2.1.1 DAMAS

Brooks and Humphreys (2006) proposent l'algorithme DAMAS (deconvolution approach for the mapping of acoustic sources) pour résoudre le problème linéaire de déconvolution :

$$\Leftrightarrow \qquad b_j = \sum_k A_{jk} q_k \tag{20}$$

Les sources sont supposées incohérentes (i.e. distribution de sources indépendantes statistiquement). Cette relation peut être décomposée, de manière analogue à la méthode de Gauss-Seidel :

$$b_j = \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} q_k + A_{jj} q_j + \sum_{k=j+1}^{N} A_{jk} q_k \tag{21}$$

$$\Leftrightarrow \qquad q_j = \frac{1}{A_{jj}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} q_k - \sum_{k=j+1}^{N} A_{jk} q_k \right) \tag{22}$$

avec N le nombre total de points de l'image. Cependant, les q_k sont inconnus. Ils sont calculés de manière itérative : pour $k > j$, les q_k sont calculés à partir de l'itération précédente et pour $k < j$, les sources sont données à l'itération courante par la relation :

$$q_j^n = \frac{1}{A_{jj}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} q_k^n - \sum_{k=j+1}^{N} A_{jk} q_k^{n-1} \right) \tag{23}$$

L'incrémentation se fait donc sur j, la position des sources déconvoluées et le nombre d'itération n est au choix de l'utilisateur. Pour l'initialisation, on peut choisir $q_j = 0$ ou bien $q_j = b_j$, ce qui fera une différence sur la vitesse de convergence.
Pour forcer la convergence, q étant une valeur énergétique, elle est mise à zéro si une valeur est calculée négative.
Cette déconvolution permet de supprimer en partie les lobes secondaires mais présente le principal inconvénient d'être lent.

Il existe de nombreuse extension de cette méthode de déconvolution (Dougherty, 2005). Par exemple, DAMAS2 considère que la convolution avec la PSF est invariante par translation. Ainsi, la convolution dans le domaine spatial est remplacée par un produit dans le domaine des nombres d'onde. Cette formulation a pour effet d'accélérer la procédure de déconvolution. Elle propose aussi l'ajout d'une régularisation par un filtre passe-bas. Ce choix de PSF peut être une bonne approximation si les sources sont suffisamment éloignées de l'antenne. DAMAS-C prend en compte une définition cohérente des sources.

2.1.2 Spectral Estimation Model (SEM)

Correction de différence entre deux matrices de covariance minimisée avec un gradient conjugué (Blacodon and Elias, 2003)

Equivalent à un filtre de Wiener ? Contrainte de positivité sur la solution de source difficile à appliquer ?

2.1.3 Non-negative least squares (NNLS)

L'approche NNLS est de minimiser l'erreur au sens des moindres carrés entre $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{Aq}$, en imposant que $\boldsymbol{q}$ reste non-négatif :

$$\min_{\boldsymbol{q}} \left(||\tilde{\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{qq}}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{qq}}||^2 \right) \tag{24}$$

$$\text{sous la contrainte} \quad \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{qq}} \geq 0 \tag{25}$$

Possibilité d'utiliser la fonction Octave lsqnonneg

De manière similaire à DAMAS2, la version FFT-NNLS remplace la convolution par une multiplication dans le domaine des nombres d'onde pour accélérer les calculs.

2.1.4 Déconvolution avec contrainte de parcimonie

Les algorithme ci après font l'hypothèse que le vecteur source est parcimonieux

CLEAN Principe de l'algorithme CLEAN (Hogbom, 1974) : on extrait la plus grande valeur du champ source issu du beamforming, on la note comme un point source, on lui retire un petit gain convolué avec la fonction d'étalement, et on réitère jusqu'à ce que la plus grande valeur atteigne un seuil. Cette méthode est une heuristique (algorithme d'approximation) de type "matching pursuit" (voir le paragraphe sur l'optimisation parcimonieuse).

!!! à chaque fois, sur les données Spp et Spp-clean mettre la diagonale à 0!!! +critère d'arrêt si sum(sum(Spp)) se met à augmenter

CLEAN possède des extensions telles que CLEAN-PSF ou CLEAN-SC. Ces extensions sont très utilisées pour la localisation de sources aéroacoustiques.

algo Hogbom en python : `http://www.mrao.cam.ac.uk/~bn204/alma/python-clean.html`

Sparcity constrained DAMAS (SC-DAMAS) Yardibi et al. (2008)

type basis pursuit

bayésien Comme l'étape de déconvolution revient à résoudre un problème inverse où toutes les sources sont traitées simultanément, les méthodes inverses décrites dans la section **??** peuvent être utilisées.

Partant de l'image des sources issue du beamforming *dirty*, calcule l'image déconvoluée *clean*.

$gain$ = gain loop
$clean$ =zeros(shape($dirty$))
$res = dirty$
while $i < niter$ **and** max(abs(res))$<$ $thresh$ **do**
  1. Search for the peak location in *dirty*
  $rmax$ = coordonnées de max(res)
  2. Update *clean*
  $mval = res[rmax] \times gain$
  $clean[rmax]$ += $mval$
  3. Subtract the appropriately scaled PSF from the dirty map.
  calcul des coordonnées des bords de la psf centrée sur $rmax$
  res[centré sur $rymax$] -= psf[centrée sur $rmax$] $\times mval$
  i += 1
end while

FIGURE 1 – *Pseudo-code de CLEAN de Hogbom (1974)*

Partant de la matrice interspectrale des signaux microphoniques *Spp*, calcule image beamforming *dirty*, puis l'image déconvoluée *clean*, puis la matrice *Sclean* induite.

$gain$ = gain loop
$clean$ =zeros(M, N)
for i in $niter$ **do**
  1. Obtain *dirty* by beamforming
  for $n = 1 : N$ **do**
    $dirty[n] = W'[n,:] \times Spp \times W[n,:]$
  end for
  2. Search for the peak location in *dirty*
  $rmax$ = coordonnées de max($dirty$)
  $mval = dirty[rmax]$
  3. Steering vector to location of peak
  $wpeak = W[rmax,:]$
  4. Update *clean*
  $clean[rmax]$ += $mval$
  5. Calculate Sclean induced
  Spp -= $mval \times wpeak \times wpeak'$
end for

FIGURE 2 – *Pseudo-code de CLEAN-psf de Sijtsma (2007)*

2.1.5 Rpise en compte de la cohérence des sources

clean-sc notamment en aeroacoustique. clean-sc : type matching pursuit

DAMAS-C référence pour chaque méthode dans bahr2011 :
-damas2

-fft-nnls

-clean-sc

-cmf et son extension aux sources cohérentes (CFM-C)

-lore

-macs

: DAMAS, CLEAN-SC, TIDY

lire review : Sparsity constrained deconvolution approaches for acoustic source mapping

III. Les méthodes inverses

En formation de voies, chaque source est considérée indépendemment des autres. La surface contenant les sources potentielles est scannées point par point et l'éventuelle cohérence des sources n'est pas prise en compte.

L'approche des méthodes inverses est de traiter le problème dans son ensemble, en recherchant toutes les sources simultanément, prenant ainsi en compte les effets d'interférence entre les sources.

Quid des interactions non-linéaires entre sources ?

La résolution du problème inverse ne peut généralement pas reposer sur une inversion de la matrice de transfert, car le problème inverse est souvent sous-déterminé. De plus, la relation entre sources et mesures n'est pas toujours bijective.

Les méthodes varient selon le modèle de source choisi :
-ondes planes propagatives et évanescentes : NAH, SONAH
-radiation BEM
-distribution de monopoles
-harmoniques sphériques.

itératif ou non ?

3.1. Holographie acoustique

De manière générale, les méthodes basées sur l'holographie acoustique présentent l'avantage de pouvoir reconstruire le champ source en tout point de l'espace et donc sur un plan source de géométrie arbitraire. Un autre avantage est son utilisation en milieu clos.

3.1.1 Holographie en champ proche (NAH)

L'holographie en champ proche propose d'exploiter des mesures réalisées à proximité des sources pour en reconstruire une image. Cette méthode tire profit de la mesure des ondes évanescentes, exponentiellement décroissantes avec la distance, qui viennent s'ajouter aux ondes propagatives Maynard et al. (1985).
Le champ de pression mesuré est d'abord décomposé dans le domaine des nombres d'ondes par une transformée de Fourier spatiale. A chaque onde est associé un propagateur (i.e. une fonction de transfert supposée connue) qui, inversé, permet de rétropropager le champ mesuré et ainsi reconstruire le champ source.

La pression recherchée $p_e(\boldsymbol{r}_0)$ au niveau du plan de recherche de sources s'écrit donc en fonction de la pression mesurée $p_m(\boldsymbol{r}_h)$:

$$p_e(\boldsymbol{r}_0, f) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[p_m(\boldsymbol{r}_h, f)\right]\mathcal{F}\left[G(\boldsymbol{r}_h - \boldsymbol{r}_0, f)\right]\right] \tag{26}$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier spatiale et G la fonction de transfert donnant la propagation de l'onde acoustique du plan source au plan de mesure, choisie selon le modèle de sources.

Avant rétropropagation, un filtre sur les hauts nombres d'ondes est appliqué (ex : filtre de Vernoesi ou de Li) de manière à sélectionner les nombres d'ondes d'intérêt : il est nécessaire de trouver un compromis permettant de conserver suffisamment d'ondes évanescentes (porteuses d'informations) tout en limitant l'amplification du bruit. La mesure à proximité permet ainsi d'obtenir une résolution supérieure à la demi-longueur d'onde.

Référence pour comprendre les méthodes suivantes : Comparison of patch acoustic holography methods Zdeněk HAVRÁNEK
Référence pour leur implémentation : http://www.sandv.com/downloads/1002wuxx.pdf

3.1.2 Statically optimized near-field acoustical holography (SONAH)

Cette méthode est notamment utilisée lorsque le plan source est plus grand que l'antenne de mesure (on parle de "patch methods"). Elle repose sur l'idée que la pression estimée sur un plan de prédiction (situé entre le plan de mesure et le plan source) est exprimée comme la somme pondérée des pressions mesurées en N points du plan source (Hald, 2009) :

$$p(\boldsymbol{r}) \approx \sum_{n=1}^{N} C_n(\boldsymbol{r}) p_m(\boldsymbol{r}_{h,n}) = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{r}_h)\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}) \tag{27}$$

Les coefficients $\boldsymbol{c}$ ne dépendent pas du champ mais uniquement de la position et, de la même façon, les ondes planes élémentaires composant le champ sur le plan de prédiction peuvent être projetées sur le plan de calcul :

$$\boldsymbol{\phi}_m(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=1}^{N} C_n(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\phi}_m(\boldsymbol{r}_h, n) \tag{28}$$

En notant cette équation sous forme matricielle, avec $A_{mn} = \boldsymbol{\phi}_m(\boldsymbol{r}_h, n)$ et $a_m = \boldsymbol{\phi}_m(\boldsymbol{r})$, on peut calculer les coefficients $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r})$ en résolvant le problème d'optimisation (avec régularisation de Tikhonov) :

$$\arg\min_{\boldsymbol{c}} \left(||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}||^2 + \eta^2||\boldsymbol{c}||^2\right) \tag{29}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} + \eta^2\boldsymbol{I}} \tag{30}$$

$\eta^2 = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}10^{\frac{-SNR}{10}}$?

Cette méthode, contrairement à NAH, ne nécessite pas de calcul de transformée de Fourier spatiale.

L'amélioration M-SONAH a été développée pour le cas où l'ensemble des fonctions élémentaires qui compose le champ ne sont pas connues et elles sont alors exprimées comme une combinaison de différentes ondes connues.

Notations et formulation tirées de l'article (en français) : https://www.researchgate.net/publication/225102534_Evaluation_de_deux_methodes_d%27imagerie_acoustique_en_milieu_bruite

3.1.3 iBEM

iBEM propose de résoudre l'équation liant la pression pariétale à la pression mesurée par la méthode des éléments de frontière. La transformée de Fourier spatiale est remplacée par une SVD de la matrice de transfert

+ amélioration sur des géométrie quelconques par l'utilisation d'éléments de frontières (iBem : méthode des éléments de frontières inverse). La transformée de Fourier spatiale est remplacée par une SVD de la matrice de transfert (ref 29 thèse de T. Lemagueresse). L

3.1.4 ESM

L'idée de la méthode des sources équivalentes est que le champ source recherché peut être représenté comme une superposition de points source équivalents. Une séparation du champ nécessite qu'il y ait deux plans de mesures et deux plans fictifs de reconstruction des sources équivalentes.
L'inverse de la matrice de transfert peut se faire par SVD, par exemple.

3.1.5 Helmoltz equation least squares

Wang and Wu (1997) Peut-être vu comme un cas particulier de SEM.

En résumé, les méthodes inverses utilisées principalement sont de 2 sortes : 1) les méthodes basées sur la transformée de Fourier (holographie,...) ; 2) Les méthodes “model based”. En pratiques, ces méthodes sont très proches (ce que montrent

3.1.6 +soap, generalized BF, bayesian focusing ?

3.2. Les méthodes de régularisation

liste des méthodes de régularisation : http://www.imm.dtu.dk/~pcha/Regutools/RTv4manual.pdf

nelson part2 compare deux méthodes de régularisation : 1) il explique comment choisir un paramètre de Tikhonov ; 2) il explique comment choisir les valeurs de la SVD à supprimer.
Beaucoup se sont penchés sur le problème du choix de η.nelson part2 compare les différentes facçon de déterminer η en comparant l'erreur entre le champ source désiré et celui reconstruit, ainsi que l'erreur entre l'interspectre reconstruit et le vrai interspectre (les S_{qq}). Les méthodes comparées sont :
-cross-validation technique : augmentation and a method for prediction
-generalize cross-validation technique :
-general cross-validation (méthode de la validation croisée généralisée)
-L-curve method : -(restricted) maximum likehood : differentiation procedures for non-exact data
-unbiased predictive risk estimator
-interprétation bayesienne (Pereira et al., 2015)
- méthode utilisant le principe d'anomalie de Morozov
-normalized cumulative periodogramm
-...

Les problèmes inverses de localisation de sources acoustiques sont souvent mal posés car le nombre de sources est supérieur au nombre de capteur (la solution n'est pas unique) et la solution dépend des données d'entrée. Il est alors nécessaire de mettre en place des stratégies qui améliorent le conditionnement du problème, notamment en réduisant la sensibilité de la solution aux données d'entrée.

3.2.1 Décomposition en valeurs singulières

Le conditionnement du problème peut être quantifié par le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière de la matrice de transfert. Plus ce rapport est faible, mieux le problème est conditionné. Le conditionnement du problème peut donc être amélioré en supprimant les petites valeurs singulières de la matrice de transfert. La question du nombre de valeurs singulières à conserver se pose alors.

3.2.2 Régularisation de Tikhonov

La stratégie la plus souvent adoptée est la régularisation de Thikonov (Tikhonov, 1963) qui consiste à rajouter un terme de contrôle de l'énergie de la solution dans la fonction coût. Cette dernière prend alors la forme suivante :

$$||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}||^2 + \eta^2||\boldsymbol{q}||^2 \tag{31}$$

où $|| \bullet ||$ est la norme euclidienne et η^2 est le paramètre de régularisation, choisi judicieusement de façon à favoriser les solutions de petite norme.

La difficulté de cette régularisation réside dans ne choix de η. Ce paramètre peut être déterminé par des procédures ad-hoc qui telle que :
-discrepancy principle

La régularisation de Tikhonov cherchant à restreindre l'énergie de la solution a tendance à sous-estimer les niveaux des sources reconstruite. Cette régularisation ne prend pas correctement en compte le rayonnement omni-directionnel des sources : seule la partie rayonnée vers l'antenne est reconstruite.

3.2.3 Optimisation parcimonieuse

L'objectif d'une approche parcimonieuse est d'obtenir une solution approchée du problème avec le moins de composantes non nulles possible. On minimise alors à la fois l'écart entre les données mesurées et simulées, ainsi que la "norme" L_0 qui donne la parcimonie d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ telle que : $||\boldsymbol{x}||_0 := \#\{i|x_i \neq 0\}$. Le problème d'optimisation devient alors bi-objectif :

$$\min_{\boldsymbol{q}}(||\boldsymbol{q}||_0, ||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}||^2). \tag{32}$$

Prendre en compte une distribution parcimonieuse des sources dans l'espace, par exemple, permet de réduire le caractère sous-déterminé du problème en exploitant les connaissances a priori sur les sources. Cette propriété de parcimonie sert notamment à compenser le rayonnement omnidirectionnel des sources qui n'est pas mesuré et qui engendre une sous-estimation du niveau des sources.
La parcimonie est donnée par la norme L_0 du champ source (qui donne alors le nombre de valeurs non-nulles de $\boldsymbol{G_{qq}}$. Un formalisme bayesien permet de prendre en compte cette parcimonie en définissant une densité de probabilité des sources $[\boldsymbol{p}]$. Une loi gaussienne peut par exemple être choisie telle que :

$$[\boldsymbol{p}] \propto \exp\left(\frac{\sum_i |q_i|^p}{2\gamma^2}\right) \tag{33}$$

avec i le $\text{i}^{\text{ème}}$ élément de $\boldsymbol{q}$. Dans cette formulation, la norme L_0 peut être relaxée par une norme L_p permettant de rendre l'objectif convexe, avec p un paramètre prenant une valeur entre 0 et 2. $p = 0$ correspond à une distribution parcimonieuse, tandis que plus p tend vers 2, plus la distribution spatiale des source est étendue.

Tropp and Wright (2010) passent en revue les principales façons de poser et de résoudre ce problème d'optimisation.
Lorsque le paramètre p est proche de 0, le critère n'est pas convexe et le problème doit être résolu à l'aide d'algorithmes gloutons, dont les plus répandus sont décrits ci-dessous :

• **Matching pursuit (MP)** Minimiser une fonction coût de la forme $||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}||_2$ avec une contrainte de parcimonie $||\boldsymbol{q}||_0 \leq \epsilon$ peut être vu comme une sorte d'analyse en composante principale de $\boldsymbol{p}$, par une projection sur un ensemble d'atome (pas forcément orthogonaux) trié dans $\boldsymbol{G}$, où $\boldsymbol{q}$ donne l'amplitude pour chaque atome. Mallat and Zhang (1993) propose un algorithme qui calcule successivement à partir d'un dictionnaire d'atomes normalisés les poids associés aux atomes pour lesquels le produit scalaire avec le signal est maximal. L'opération est répétée sur les résidus jusqu'à ce que le signal soit suffisamment décomposé, i.e. qu'un critère sur les résidus soit atteint.

• **Orthogonal matching pursuit (OMP)** Une extension de l'algorithme MP propose également d'extraire un à un les atomes et leur coefficient, mais à chaque sélection d'atome, la projection du signal dans le nouvel espace vectoriel généré est recalculée, ce qui permet une convergence plus rapide, moyennant une étape d'orthogonalisation supplémentaire (Pati et al., 1993). Chaque atome n'est sélectionné qu'une fois, contrairement à l'algorithme MP. Cette minimisation des redondances également de réduire l'erreur commise.

Il est possible de s'affranchir de la norme L_0 en relaxant le paramètre p, et en prenant par exemple $p = 1$ [2] (critère non dérivable). Le problème d'optimisation contenant une contrainte en norme L_1 peut s'exprimer de différence manière :

• **Poursuite de base (Basis pursuit, BP)** Ce principe d'optimisation s'écrit sous la forme :

$$\min_{\boldsymbol{q}} ||\boldsymbol{q}||_1 \quad \text{sous la contrainte} \quad \boldsymbol{G}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \tag{34}$$

Ce problème peut être linéarisé puis résolu par des algorithmes comme ceux du simplexe ou de points intérieurs (Chen et al., 2001).

2. $||a||_1 = \sum_i |a_i|$

• **Least absolute shrinkage and selection operator (LASSO)** Tibshirani (1996) propose de résoudre :

$$\min(||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}||^2) \quad \text{sous la contrainte} \quad ||\boldsymbol{q}||_1 \leq t), \tag{35}$$

ce qui revient à estimer $\tilde{q}$ tel que :

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \arg\min_{\boldsymbol{q}} \left(||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}||^2 + \beta||\boldsymbol{q}||_1\right) \tag{36}$$

Quand $\beta = 0$, le problème LASSO est analogue aux moindres carrés ordinaires. Si β est très grand, $\tilde{\boldsymbol{q}}$ tend vers 0. Ce paramètre permet donc de fixer certain coefficients de la régression à 0 ou, avec une approche bayésienne, on peut leur associer une incertitude.

• **Basis pursuit denoising (BPDN)** Le principe de BPDN mène au même problème que celui formulé par LASSO. On cherche à résoudre :

$$\min_{\boldsymbol{q}} ||\boldsymbol{q}||_1 \quad \text{sous la contrainte} \quad ||\boldsymbol{G}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}||^2 \leq \tau, \tag{37}$$

ce qui équivaut, comme LASSO à trouver un compromis entre réduire les résidus et trouver la solution la plus parcimonieuse possible.

Parmi les algorithmes de résolution des problèmes pour $0 < p < 2$, on trouve :
- les algorithmes de relaxation (ex : RELAX, Li & Stoica, 1996),
- les algorithmes de type "seuillage itératif" (type FISTA, Expectation-Maximisation,...),
- IRLS (iterative reweighted least squares) : cette méthode propose de représenter une norme L_p ($0 < p \leq 1$) par une norme L_2 pondérée. Elle ne garantie pas la convergence vers un minimum global. Elle s'utilise donc plutôt en optimisation locale. Voir par exemple l'algorithme FOCUSS (FOcal Underdetermined System Solver).
- least-Angle regression stagewise (LARS) : méthode par homotopie (Osbourne, 2000),
- shooting algorithm (Fu, 1998),
- gradient conjugué et ses dérivés,
- et tous les autres algorithmes d'optimisation convexe quadratique.

Si $p > 1$, le critère est strictement convexe (et ne présente donc qu'un minimum global). Dans le cas où $p = 2$, le problème n'est pas soumis à une contrainte de parcimonie et correspond à la régularisation de Tikhonov ou régression d'arête (*ridge regression*).

Cours et algorithmes liés à l'optimisation parcimonieuse en ligne :
Une liste de solvers selon la catégorie du problème se trouve à l'adresse : `https://web.archive.org/web/20150502191143/http://www.ugcs.caltech.`

edu/~srbecker/wiki/Category:Solvers.
Cours d'H. Carfantan sur l'optimisation parcimonieuse : http://www.ast.obs-mip.fr/users/carfan/PPF-PSI/CarfantanSparse.pdf 10 cours "Sparse Representations and Signal Recovery (Purdue University)", StudentLecture : urlhttps ://engineering.purdue.edu/ChanGroup/ECE695Notes/

De manière générale, les méthodes de régularisation se confronte aux problématiques suivantes :

- Comment choisir la base de décomposition optimale ?
- Comment régler le paramètre η
- Quelle formulation et quel algorithme de résolution choisir ?
- Comment évaluer la fiabilité de la solution ?

Faire les parallèles :
CLEAN : technique de déconvolution itérative, heuristique de type "matching pursuit"
SC-DAMAS : de type "basis pursuit"

The polar correlation technique , FISHER

Références

C. Bahr, N. S. Zawodny, B. Bertolucci, K. Woolwine, F. Liu, J. Li, M. Sheplak, and L. Cattafesta. Measurement of phased array point spread functions for use with beamforming. In *17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, volume 2767. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011.

J. Billingsley and R. Kinns. The acoustic telescope. *Journal of Sound and Vibration*, 48(4) :485 – 510, 1976.

D. Blacodon and G. Elias. Level estimation of extended acoustic sources using an array of microphones. *OFFICE NATIONAL D ETUDES ET DE RECHERCHES AEROSPATIALES ONERA-PUBLICATIONS-TP*, (63), 2003.

T. F. Brooks and W. M. Humphreys. A deconvolution approach for the mapping of acoustic sources (DAMAS) determined from phased microphone arrays. *Journal of Sound and Vibration*, 294(4) :856 – 879, 2006.

J. Capon. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proceedings of the IEEE*, 57 (8) : p. 1408–1418, 1969.

S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM review*, 43(1) :129–159, 2001.

R. P. Dougherty. Extensions of damas and benefits and limitations of deconvolution in beamforming. *AIAA paper*, 2961(11), 2005.

J. Hald. Basic theory and properties of statistically optimized near-field acoustical holography. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125 (4) :2105–2120, 2009.

J. A. Hogbom. Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 15 :417–426, 1974.

Y. Jiang, P. Stoica, Z. Wang, and J. Li. Capon beamforming in the presence of steering vector errors and coherent signals. In *11th Annual Workshop on Adaptive Sensor Array Processing (ASAP 2003), MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA*, 2003.

J. Li, P. Stoica, and Z. Wang. On robust Capon beamforming and diagonal loading. *Trans. Sig. Proc.*, 51(7) :1702–1715, 2003.

S. G. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on signal processing*, 41(12) :3397–3415, 1993.

J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee. Nearfield acoustic holography : I. Theory of generalized holography and the development of NAH. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 78(4) :1395–1413, 1985.

Y. C. Pati, R. Rezaiifar, and P. S. Krishnaprasad. Orthogonal matching pursuit : Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In *Signals, Systems and Computers, 1993. 1993 Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on*, pages 40–44. IEEE, 1993.

A. Pereira, J. Antoni, and Q. Leclere. Empirical bayesian regularization of the inverse acoustic problem. *Applied Acoustics*, 97 :11–29, 2015.

R. . Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, AP-34(3) : p. 276–280, 1986.

P. Sijtsma. Clean based on spatial source coherence. *International journal of aeroacoustics*, 6(4) :357–374, 2007.

R. Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 58 :267–288, 1996.

A. Tikhonov. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Meth. Dokl.*, 4 :1035–1038, 1963.

J. A. Tropp and S. J. Wright. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems. *Proceedings of the IEEE*, 98(6) :948–958, 2010.

Z. Wang and S. F. Wu. Helmholtz equation–least-squares method for reconstructing the acoustic pressure field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102(4) :2020–2032, 1997.

T. Yardibi, J. Li, P. Stoica, and L. N. Cattafesta III. Sparsity constrained deconvolution approaches for acoustic source mapping. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5) :2631–2642, 2008.