Exercices : Calcul matriciel

Exercice 1:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB puis BA.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer AB
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2
5. $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -3i & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -i & 2i \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ où $i = \sqrt{-1}$. Calculer AB
6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB puis $B^T A$

Exercice 2:

1. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, les inverser.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquels A n'est pas inversible.
3. $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A.

Exercice 3:

1. Calculer l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.
2. En déduire les solutions des systèmes $\begin{cases} 3x+2y-z &= 5 \\ x-y+z &= 1 \\ 2x-4y+4z &= -3 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3x+2y-z &= -1 \\ x-y+z &= 3 \\ 2x-4y+4z &= 2 \end{cases}$

Exercice 4:

Les familles suivantes forment-elles une base dans $\mathbb{R}^3$?

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 5:

Soit $\mathcal{T}$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est l'image par $\mathcal{T}$ des vecteurs $(1,2,3)^t$ et $(1,2,-1)^t$?
2. Trouver tous les vecteurs X tels que $AX = (1,2,0)^t$.

Exercice 6:

Soit une application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 8{,}9 & 17{,}9 & 17{,}7 \\ 2{,}3 & 5{,}4 & 13{,}1 & 8{,}5 \\ -1 & 1{,}1 & 1{,}2 & 3{,}2 \\ 0{,}1 & 2{,}3 & 4{,}7 & 4{,}5 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = 12{,}4855$, $\lambda_2 = -1.2855$ et $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. On souhaite résoudre $AX = Y$.

1. Connaissant Y, que peut-on dire du vecteur inconnu X ?
2. Que peut-on dire de A exprimée dans la base des vecteurs propres ?
3. On appelle **rang** la dimension de l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Le rang est donc le nombre de vecteurs linéairement indépendants d'une famille. Quel est le rang de A (i.e. quel est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes) ?

Exercice 7:

1. Diagonaliser si cela est possible les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Calculer C^2, C^n.

Exercices supplémentaires

Exercice 8:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices B telles que $AB = 0_3$.
2. Soient a et b des réels non nuls. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est à dire telles que $AB = BA$.

Exercice 9:

Diagonaliser si possible les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 4 & 2- \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$