Alice Dinsenmeyer `alice.dinsenmeyer@insa-lyon.fr`

Exercices : Nombres Complexes

Pour s'entraîner, des cours et exercices pour la préparation au cursus d'ingénieur se trouvent à l'adresse `emaths.education`

Exercice 1:

Développer et simplifier les expressions suivantes :

a) $A = (2+3i)(7-3i)$

b) $B = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4$

c) $C = (1+i)(2-5i)(4+5i)$

d) $D = (2+3i)^2$

e) Trouver un complexe z tel que $z^2 = 5 + 12i$ (poser $z = a + ib$ puis résoudre le système d'équations).

Exercice 2:

Placer dans le plan complexe les nombres suivant, puis les écrire sous forme trigonométrique :

a) $z_1 = 1 + i$

b) $z_2 = 3 + 3i$

c) $z_3 = -1 + 3i$

Quelle est la nature du triangle formé par z_1, z_2 et z_3 ? Justifier.

Exercice 3:

a) Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z = \left(\sqrt{3} - 2\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

b) Écrire $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^5$ sous forme algébrique.

Exercice 4:

a) Soient $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Calculer le quotient $Z = \frac{z_1}{z_2}$ de deux façons différentes et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

b) On écrit $z = a + ib = Re^{i\theta}$. Écrire de même $\bar{z}$ et $\frac{1}{z}$.

c) Linéariser $\sin^3 \theta$.

d) Linéariser $\sin^4 \theta$

Exercice 5:

A, B et C sont des points d'affixe $a = 6 - i$, $b = -6 + 3i$ et $c = -18 - 7i$. Montrer que ces points sont alignés.

Exercice 6:

Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ des polynômes suivants :

a) $x^2 + x + 1$

b) $4x^2 + 8x + 29$

c) $x^2 - (4+3i)x + (1+5i)$

d) $x^2 - \sqrt{2} + 1$. Les écrire sous forme algébrique et exponentielle.

e) $x^8 - 1$ et les placer dans le plan complexe.

Exercice 7:

On note (H) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant : $z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2$

a) On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M. Montrer l'équivalence : M appartient à (H) ssi $x^2 - y^2 = 4$.

b) Soient A, B et C les points d'affixes 2, $-3-i\sqrt{5}$ et $-3+i\sqrt{5}$. Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).