Alice Dinsenmeyer `alice.dinsenmeyer@insa-lyon.fr`

Exercices : Calcul intégral

D'autres exercices corrigés se trouvent à l'adresse : `http://gecif.net/articles/mathematiques/integration/`

Exercice 1: Primitives usuelles

Donner les primitives des fonctions suivantes et vérifier le résultat par dérivation :

a) $f(x) = \sqrt{x}$

$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

b) $f(x) = 1 - x^2$

$F(x) = x - \frac{x^3}{3} + c$

c) $f(x) = e^{-2x} + e^{4x}$

$F(x) = -\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{4x}}{4} + c$

d) $f(x) = 3 + \sin(x) - \cos(x)$

$F(x) = 3x - \cos(x) - \sin(x) + c$

e) $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}}$

$F(x) = \frac{\ln|x|}{2} + \frac{2}{x} + 6\sqrt{x} + c$

f) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Écrire $f(x) = -1 + \frac{2}{1+x^2}$.
On trouve alors $F(x) = -x + 2\,\text{atan}(x) + c$

g) $f(x) = (3x-1)^6$
(f est de la forme $g(u)u'$)

$F(x) = \frac{(3x-1)^7}{21} + c$

h) $f(x) = \cos(3x-1)$

$F(x) = \frac{\sin(3x-1)}{3} + c$

i) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}$
(f est de la forme $u'/\sqrt{u}$)

$F(x) = \frac{2\sqrt{x^3-1}}{3} + c$

Exercice 2: Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x + \sin(x)\mathrm{d}x$

$I = \frac{\pi^2}{8} + 1$

b) $I = \int_2^3 \ln 2 + x\mathrm{d}x$

$I = \ln 2 + \frac{5}{2}$

c) $I = \int_0^2 \sqrt{|1-x|}\mathrm{d}x$

$I = \int_0^1 \sqrt{1-x}\mathrm{d}x + \int_1^2 \sqrt{x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$

Exercice 3: Applications diverses

3.1 Trouver la fonction dont la tangente est donnée par $x^3 - \frac{2}{x^2} + 2$ en tout x et dont la courbe passe par le point (1,3).

La tangente est la dérivée de f, donc

$$f'(x) = x^3 - \frac{2}{x^2} + 2$$

$f(x)$ est la primitive de f' :

$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{x} + 2x + C$$

Or, la courbe de cette fonction passe par (1,3), donc C est telle que $f(1) = 3$. On a donc $C = -\frac{5}{4}$.
Finalement, la fonction recherchée f est $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{x} + 2x - \frac{5}{4}$.

3.2 On considère la fonction g définie sur [0,8] par :

$$\begin{cases} g(x) = 4 \text{ si } x \in [0,3] \\ g(x) = 6 \text{ si } x \in]3,5] \\ g(x) = -2 \text{ si } x \in]5,8] \end{cases}.$$

a) Calculer $I = \int_0^8 g(x)\mathrm{d}x$.

En utilisant la relation de Chasles, $I = 18$.

b) Calculer la valeur moyenne de g sur [0,8].

La moyenne est donnée par $\frac{1}{8-0}\int_0^8 g(x)\mathrm{d}x = \frac{9}{4}$.

3.3 Accélération d'un objet

L'accélération d'un objet est donnée par l'équation $a(t) = 3t$. Elle part de la position $x(t = 0) = 4$ m et sa vitesse initiale est $v(t = 0) = 2$ m/s.

a) Calculer l'accélération à 5 s.

$a(t = 5) = 15$ m/s^2

b) Calculer la vitesse à 5 s.

$v(t) - v(t = 0) = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t$ donc $v(t) = \frac{3t^2}{2} + v(t = 0)$, $v(t = 5) = 39{,}5$ m/s

c) Calculer la position à 5 s.

De même, $x(t) = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t + x(t = 0)$. $x(t = 5) = 76{,}5$ m.

3.4 Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x(1 - x^2)$.

Soit D le domaine constitué de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le x(1 - x^2)$.

a) Calculer l'aire du domaine D

$$A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

b) Existe-t-il une droite (d) passant par l'origine et partageant le domaine D en deux parties de même aire ?

On cherche une droite d'équation $y = ax$ qui coupe la courbe de f :

$$x(1-x^2) = ax \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{1-a}$$

Le point d'intersection est $M(\sqrt{1-a}, a\sqrt{1-a})$.
Tracer la courbe de f, vérifier quelle est positive.
L'aire entre (d) et la courbe de f doit être égale à $1/8$:

$$\int_0^{\sqrt{1-a}} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{1-a}} ax\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$$

Cela revient à résoudre $\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{8} = 0$, ce qui a pour solution $a_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $a_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.
On remarque que $M(\sqrt{1-a_1}, a_1\sqrt{1-a_1})$ a des coordonnées complexes, donc cette valeur de a ne permet pas de partager D comme demandé. La droite (d) recherchée est donc d'équation $y = a_2 x$.

Exercice 4: Intégration par partie

4.1 Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x \mathrm{d}x$

Poser $u = x$, $u' = 1$ et $v = -\cos x$, $v' = \sin x$. Faire une IPP. $I = \pi$.

b) $I = \displaystyle\int_1^{2} \ln x \mathrm{d}x$

Poser $u = x$, $u' = 1$ et $v = \ln x$, $v' = 1/x$. Faire une IPP. En déduire que les primitives de $\ln x$ sont $x \ln x - x + c$. Enfin, $I = \ln 4 - 1$

c) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos(x) \mathrm{d}x$

Poser $u = e^x$, $u' = e^x$ et $v = \sin(x)$, $v' = cos(x)$. Faire une IPP.
Refaire une IPP sur le terme $\int_0^\pi vu'\mathrm{d}x$, en posant $w = e^x$, $w' = e^x$ et $y = -\cos x$, $y' = \sin x$.
En déduire que $-I = e^\pi + 1 + I$ et donc que $I = \frac{-e^\pi - 1}{2}$.

d) $I = \displaystyle\int_0^{1} (3-2x)e^{-x} \mathrm{d}x$

Poser $u' = e^{-x}$ et $v = 3 - 2x$. Faire une IPP. $I = 1 + e^{-1}$.

Exercice 5: Changement de variables

5.1 Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$

Changement de variable : $y = 1 + x$, soit $x = y - 1$. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

b) $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

Poser le changement de variable $u = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x$. En déduire que $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int_{0{,}75}^{1} \frac{1}{2\sqrt{u}} \mathrm{d}u$ et donc que $I = 1 - \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}13$.

5.2 Montrer que $\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$.

Faire le changement de variable $u = \cos x$.

5.3 Trouver les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = xe^{x^2}$

Changement de variable : $u = x^2$.
$F(x) = \frac{e^u}{2} + c$

b) $f(x) = (x \ln x)^{-1}$

Changement de variable : $u = \ln x$.
$F(x) = \ln|u| + c$.

Exercice 6: Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est le quotient d'un polynôme P par un polynôme Q. Pour pouvoir en calculer une primitive, il faut la décomposer en une somme de fonctions dont on sait calculer les primitives.

6.1 On souhaite trouver une primitive de $f(x) = \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$

a) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+5}$.

$a = b = 1$

b) En déduire une primitive de f.

$F(x) = \ln(|x-2|) + \ln(|x+5|) + c$

6.2 En utilisant la méthode de la question précédente, déterminer les primitives de

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-3x+2}$$

Remarquer que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Écrire $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ et calculer que $a = 0$ et $b = 2$. En déduire que $F(x) = 2\ln(|x-2|) + c$.

6.3 Soit $f(t) = \frac{t^2-1}{(t+3)^4}$. On souhaite calculer $I = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(t) = \frac{a}{(t+3)^2} + \frac{b}{(t+3)^3} + \frac{c}{(t+3)^4}$.

$a = 1$, $b = -6$ et $c = 8$

b) En déduire la valeur de I.

Chaque terme est de la forme $\frac{u'}{u^n}$ avec $u = t+3$ et a pour primitive $\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$. Finalement, $I = \frac{1}{4} + \frac{-9}{16} + \frac{7}{24} = -\frac{1}{48}$.

Exercice 7: Intégrales doubles

7.1 Calculer les intégrales suivantes

a) $I = \iint_D xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \;,\; 0 \leq y \leq 1 - x\}$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy \ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2} x(1-x)^2 \ \mathrm{d}x = \frac{1}{24}$$

b) $I = \iint_D \sin(x+y) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0 \text{ et } x + y \leq \pi\}$

$$I = \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{\pi - x} \sin(x+y) \ \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} cos(x) + 1\mathrm{d}x = \pi$$

Exercice 8: Calcul d'aires et de volumes

8.1 Utiliser le calcul intégral pour démontrer que la surface d'un disque de rayon R vaut πR^2.

Indication : On pourra utiliser un système de coordonnées cylindriques et une surface élémentaire de dimension $\mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta$.

En sommant les surfaces élémentaires de $r = 0$ à $r = R$ et de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$, on couvre la surface d'un disque et :

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi R^2$$

8.2 Démontrer que le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H vaut $H\pi R^2$.

Même raisonnement :

$$\int_0^H \int_0^R \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \pi R^2 H$$

8.3 Démontrer que le volume d'une boule de rayon R vaut $4\pi R^3/3$.

Indication : On pourra utiliser un système de coordonnées sphériques et un volume élémentaire de dimension $\mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta \times r\sin(\phi)\mathrm{d}\phi$.

Autre méthode : Intégrer une "pile" de disques.

Première méthode :

$$V = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} r^2 \sin\phi \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Deuxième méthode :

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - h^2)\mathrm{d}h = \frac{4\pi R^3}{3}$$