

Étude bibliographique : Méthodes de localisation de sources aéroacoustiques

Alice DINSENMEYER

Pourquoi : localisation de sources dans le sous-sol, dans des tissus humains, dans des pièces industrielles, dans les fluides (avec ou sans écoulement, dans un espace clos ou non). Dans chaque contexte, la nature des sources varie.

Objectif : caractériser quantitativement/qualitativement les sources à partir de mesures obtenue en quelques points discrets de l'espace.

Contexte : Réduction du bruit des avions (not. des turbomachines¹) par l'identification des mécanismes de génération de bruit.

Les spécificités de la localisation de sources aéroacoustiques sont les suivantes :

- les sources sont réparties parcimonieusement dans l'espace,
- les sources sont large bandes, émettant notamment dans tout le domaine de l'audible,
- les mesures empreintes de bruit aérodynamique venant de la turbulence des couches limites.

En plus d'une localisation précise des sources, une quantification précise de leur amplitude est nécessaire pour un bon ajustement du diagnostique.

Historique : Dès 1976, pour répondre à des problématiques de compréhension des bruits de turboréacteur, [Billingsley and Kinns \(1976\)](#) réalisent des mesures simultanées à l'aide d'une antenne linéaire constituées de 14 microphones. Depuis, le nombre de capteur par antenne a augmenté, ainsi la gamme fréquentielle.

1. Le moteur électrique n'est pas pour tout de suite, car il y a 40 fois plus d'énergie dans 1 kg de kérosène que dans 1 kg des meilleures batterie et après calcul de rendement, il reste un rapport 15 entre les 2.

Formulation du problème d'imagerie acoustique La formulation du problème direct lie le vecteur des pressions \mathbf{p} mesurées aux M points de mesure et l'intensité des N sources \mathbf{q} à l'aide de la matrice de transfert \mathbf{G} qui représente le modèle de propagation des ondes acoustiques :

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (1)$$

Le problème d'identification de sources acoustique est donc de résoudre le problème inverse qui consiste à estimer les sources \mathbf{q} à partir des données \mathbf{p} :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{W}\mathbf{p} \quad (2)$$

où \mathbf{W} est appelé opérateur inverse.

Le problème peut aussi être formulé à partir des matrices de densité interspectrale :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{p}\mathbf{p}'\} = \mathbb{E}\{(\mathbf{G}\mathbf{q})(\mathbf{G}\mathbf{q})'\} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{p}\mathbf{p}} = \mathbf{G}\mathbf{S}_{\mathbf{q}\mathbf{q}}\mathbf{G}' \quad (4)$$

Problèmes : On distingue 4 sources de difficultés majeures pour la résolution de ce problème inverse, pouvant nuire à la qualité de la reconstruction :

- le bruit de mesure (notamment hydrodynamique)
- l'approximation du modèle de propagation
- le choix du modèle de sources approché
- le caractère mal-posé du problème inverse (le nombre de source est souvent bien supérieur au nombre de points de mesure)

Pour chaque méthode d'imagerie, comprendre :

- hypothèses et connaissances a priori
- avantages et inconvénient
- contexte de développement
- algorithme(s) de résolution

NOTATIONS

m	scalaire	nombre de capteurs de l'antenne
n	scalaire	nombre de sources
\mathbf{p}	$m \times 1$	coefficients des signaux captés
\mathbf{q}	$n \times 1$	coefficients des sources
\mathbf{n}	$m \times 1$	bruit capté
\mathbf{G}	$m \times n$	matrice de transfert acoustique
\mathbf{W}	$n \times m$	matrice de l'opérateur inverse
η	scalaire	paramètre de régularisation
\mathbf{S}_{xy}	$l(\mathbf{x}) \times l(\mathbf{y})$	matrice interspectrale des séries \mathbf{x} et \mathbf{y}
\mathbf{C}_{xy}	$l(\mathbf{x}) \times l(\mathbf{y})$	matrice de covariance des séries \mathbf{x} et \mathbf{y}
\mathbf{R}_{xy}	$l(\mathbf{x}) \times l(\mathbf{y})$	matrice d'intercorrélation des séries \mathbf{x} et \mathbf{y}
$\bar{\mathbf{x}}$	$l(\mathbf{x})$	vecteur des moyennes du processus \mathbf{x}
$\tilde{\mathbf{x}}$	$l(\mathbf{x})$	estimation de \mathbf{x}

TABLE DES MATIÈRES

I	Modèle de propagation et nature des sources aéroacoustiques	3
1.1	Exemples de sources aéroacoustiques sur un avion	3
1.1.1	Bruit de jet	4
1.2	Séparation des composantes du bruit	4
1.2.1	Extraction des composantes tonales	5
1.2.2	Extraction des composantes cyclostationnaires	5
1.2.3	Extraction du bruit aérodynamique	5
1.3	Physique de la Propagation acoustique en écoulement	6
1.3.1	Équations classiques de la mécanique des fluides	6
1.4	Aspects expérimentaux	6
1.4.1	Mesures en soufflerie	6
1.4.2	Mesures en vol	6
1.4.3	Antenne	6
II	Méthodes de formation de voies	7
2.1	Vecteur de pointage indépendant des données	8
2.2	Construction d'un vecteur de pointage à partir des données	8
III	Ajout d'une étape de déconvolution	10
3.1	PSF du beamforming standard	10
3.1.1	DAMAS	10
3.1.2	Spectral Estimation Model (SEM)	11
3.1.3	Non-negative least squares (NNLS)	11
3.1.4	LORE	11
3.1.5	Déconvolution avec contrainte de parcimonie	11
3.1.6	Prise en compte de la cohérence des sources	13
IV	Les méthodes inverses	14
4.1	Holographie acoustique	14
4.1.1	Holographie en champ proche (NAH)	14
4.1.2	Statically optimized near-field acoustical holography (SONAH)	14
4.1.3	iBEM	15
4.1.4	ESM	15
4.1.5	Helmoltz equation least squares	15

4.1.6	+soap, generalized BF, bayesian focusing?	15
4.2	Les méthodes de régularisation	15
4.2.1	Décomposition en valeurs singulières	16
4.2.2	Régularisation de Tikhonov	16
4.2.3	Optimisation parcimonieuse	16
V	Approche bayésienne	18
5.1	Formulation probabiliste du problème direct	18
5.2	Estimation des hyperparamètres et des sources	19
5.2.1	Méthodes analytiques	19
5.2.2	Estimateur MAP	20
5.2.3	Méthodes numériques	20
5.3	Confiance accordée à la reconstruction	20

I. MODÈLE DE PROPAGATION ET NATURE DES SOURCES AÉROACOUSTIQUES

On décrit ici les sources de bruit d'un avion à turboréacteur double flux, les méthodes de séparation des différentes contributions et les mécanismes de génération de bruits en écoulement.

Le bruit peut être généralement décomposé en 4 composantes :

- une partie tonale générée par les composantes tournantes de la machine
- une partie cyclostationnaire induite par les composantes tournantes de la machine
- le bruit machine aléatoire
- le bruit de fond (indépendant de la machine) (aérodynamique?)

Séparer ces composantes dans le champ total mesuré permet de mieux comprendre la contribution de chaque source ou de chaque élément du réacteur, par exemple.

1.1. Exemples de sources aéroacoustiques sur un avion

Un bref récap des sources est fait en intro de la thèse de G. Reboul et Simon B.

[Smith \(1989\)](#) décrit un très grand nombre de sources aéroacoustiques sur un avion. Elles peuvent être classées en 2 catégories : le bruit de moteur et le bruit aérodynamique. Le bruit aérodynamique est principalement généré par le train d'atterrissage et par les ailes. La principale source de bruit des ailes est liée aux volets à l'avant (becs de bord d'attaque) et à l'arrière. Ces volets sont des hypersustentateurs qui augmentent la portance qui génèrent localement beaucoup de bruit. Mais paradoxalement, leur présence contribuent fortement à la réduction du bruit des avions par le fait qu'ils favorisent un décollage rapide et un atterrissage à vitesse réduite.

Comme le montre l'image de [Smith \(1989\)](#) [1](#), les bruits du moteur sont d'origines diverses. Les moteurs doubles flux ont permis de fortement diminuer le bruit de jet, ce qui rend le bruit aérodynamique égal voire

prépondérant sur le bruit de moteur en configuration d'approche (atterrissage).

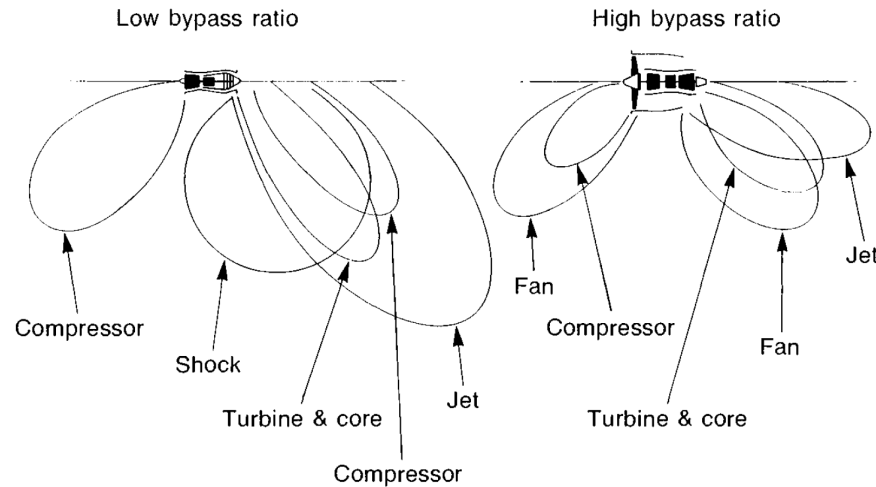


FIGURE 1 – Comparaison des sources de bruits d'un moteur simple flux (à gauche) et d'un moteur double flux (à droite). Image extraite de [Smith \(1989\)](#).

Bruits tonaux

- Fréquence de passage des pales (BPF : blade pass frequency) et ses harmoniques : bruit tonal, connu : $\omega = hZ\Omega$, $h = 1, 2, \dots$, où Z est le nombre de pales du rotor et Ω est sa fréquence de rotation. Les harmoniques qui apparaissent sont alors donnés par : $m = hZ - sV$, avec m le numéro du mode azimutal, V le nombre de pale du stator et $s = \dots, -1, 0, 1, \dots$
- Bruit d'épaisseur (Blade thickness noise) : monopole, tonal. C'est le bruit généré par le déplacement du fluide autour des pales (présent à haute vitesse de rotation seulement).
- Uniform inlet flow : peut être réduit en augmentant le nombre de pales

Bruits large bande

- Flux inconstant : fluctuation stochastique de la vitesse du flux entrant

génère un bruit large bande

- Couche limite turbulente (TBL : Turbulent Boundary layer) : couche turbulente générée aux bords de fuite. Ce bruit peut être modélisé comme un ensemble de dipôles répartis sur la surface de l'aube.
- Décollement de couche limite (Vortex shedding) : décollement de la couche limite (laminaire ou turbulente), ce qui change l'écoulement autour des pales
- tip noise : bruit généré dans l'espacement entre les pales et le carter. Ce bruit augmente si l'espacement augmente. A noter que la vitesse à l'extrémité des pales étant grande, ce bruit peut être important.
- Bruit de soufflante : dans les turboréacteurs double-flux principalement. Ref : thèse G. reboul

Bruit d'interaction rotor-stator : dominant ?

Compléter en lisant la thèse de Simon

Les moteurs double flux ont permis de diminuer l'importance du bruit de jet, mais ont rajouté le bruit de soufflante.

1.1.1 Bruit de jet

page 86 de Smith : Description du bruit de jet

- small-scale Eddies (HF)
- large-scale Eddies (BF)
- mixing region
- shock noise

Sur un moteur à low-bypass-ratation, le centre du jet sort à 500 m/s de la tuyère, et constitue la principale source de bruit du turbo réacteur. Depuis les turboréacteurs double-flux, le jet chaud est entouré du jet froid issu de la soufflante.

L'enjeu est donc de séparer ces composantes pour extraire seulement le bruit induit par les sources d'intérêt.

1.2. Physique de la Propagation acoustique en écoulement

Pour ces méthodes, on considère que la façon dont le son se propage est connue (matrice de transfert acoustique). Prendre en compte l'écoulement, sinon les sources apparaissent décalées vers l'aval (Amiet, par ex). Calibration de la matrice interspectrale avec et sans écoulement : ne nécessite pas de connaître la nature de l'écoulement. (S.Kroeber, K.Ehrenfried, L.Koop et A.Lauterbach, « In-flow calibration approach for improving beamforming accuracy ») Mais contrainte expérimentale car coûteux en temps et surveillance des fluctuations de Temperature...

Pour comprendre le problème, il est nécessaire de rappeler les expressions analytiques de l'intensité acoustique rayonnée par un écoulement.

1.2.1 Équations classiques de la mécanique des fluides

Conservation de la quantité de mouvement : Navier-Stokes

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (5)$$

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

Poursuivre après cours d'aéroacoustique

1.3. Aspects expérimentaux

Etat de l'art beamforming dans le doc

[CEAS-special-issue-arrays_3-April-2017_error.pdf](#)

Pour obtenir une représentation spatiale d'un champ stationnaire, les mesures peuvent être réalisées de plusieurs manières. Le ou les capteurs peuvent être déplacés dans l'espace pas à pas ou continûment (Comesaña et al. (2013) pour un exemple de scan manuel, la position du capteur étant enregistrée par une vidéo). Les mesures peuvent aussi être réalisées simultanément, moyennant l'utilisation d'une antenne fixe et d'une

éventuelle carte d'acquisition multivoies. Pour caractériser un champ instationnaire à un instant donné, seules les mesures simultanées peuvent être réalisées.

1.3.1 Mesures en soufflerie

Les mesures en soufflerie sont plus simples à réaliser que les mesures en vol (échelle réduite, instrumentation facilitée, source fixe, ...) et permettent de réaliser les tests dans un environnement contrôlé. Cependant, pour assurer leur validité, il faut s'assurer que les conditions en soufflerie sont équivalentes aux conditions réelles. Les mesures peuvent être réalisées en soufflerie close ou ouverte. Le veine close permet un meilleur contrôle des conditions d'écoulement mais induit un bruit de turbulence plus élevé que les veines ouvertes.

1.3.2 Mesures en vol

Si les capteurs sont positionnés au sol, la principale problématique est de mettre en œuvre une dédopplérisation. Ces mesures sont plutôt pratiquées pour connaître le bruit à l'atterrissage ou au décollage. Pour des mesures du bruit aérodynamique, les capteurs peuvent être posés sur l'avion en régime idle. Le contenu des mesures dépend alors grandement de la position des capteurs (proximité des turbomachines, des ailes, ...).

1.3.3 Antenne

Les mesures en présence d'un fort écoulement sont fortement marquées par le bruit de turbulence. Pour réduire ce bruit, différentes stratégies peuvent être mises en place. Les microphones peuvent être montés dans des cavités de manière à filtrer les petites longueurs d'ondes associées au bruit de turbulence. En veine ouverte, les microphones peuvent être placés en dehors du jet.

différence entre antenne linéaire et antenne plane et antenne 3D.

acquisition(antenne, micro, accéléro, MEMS)/excitation (nature des sources)

ref sur l'influence de la position des micros : thèse antoine peillot

1.4. Séparation des composantes du bruit

cf fiche technique J. Antoni

1.4.1 Extraction des composantes tonales

1.4.2 Extraction des composantes cyclostationnaires

1.4.3 Extraction du bruit aérodynamique

Le bruit aérodynamique a des propriétés qui peuvent permettre de l'extraire des signaux de mesure :

- il est stationnaire et décorrélié des sources,
- sa longueur de corrélation spatiale est courte (à comparer avec l'espacement des micros)
- il ne génère pas de bruit acoustique (à discuter)
- son contenu spectral est connu (Empirical spectral model of surface pressure fluctuations?) : large-bande et énergie équi-répartie sur les fréquences.

Le champ acoustique a, au contraire, une longueur de corrélation spatiale plus importante (les signaux microphoniques sont très corrélés).

Finalement, la matrice d'autocorrélation du signal total peut s'écrire comme étant la somme des matrices d'autocorrélation des composantes acoustique et turbulente du signal.

acoustique : matrice à rang réduit
turbulence : matrice diagonale si on suppose qu'il y a une décorrélation totale entre les micros(ou une physique proche de la diagonale (décroissance exponentielle orthotrope, par exemple))

$$S_{yy} = HH' + B \quad (7)$$

L'identification de ces matrices s'appelle "Structured Covariance Estimation problem".

état de l'art

$$B = \text{Diag}(\sigma^2)$$

Un filtrage dans le domaine des nombres d'ondes nécessite un grand nombre de microphone pour être fiable. De plus, il fait l'hypothèse que

les parties acoustique et aérodynamique sont disjointes dans ce domaine, ce qui n'est vrai que pour $M < 0.8$. D'autres stratégies de débruitage doivent donc être mises en place.

Suppression des éléments diagonaux Si les signaux sont stationnaires et moyennés, le bruit incohérent devrait impacter principalement la diagonale de la CSM. Il est fréquent de supprimer ces éléments diagonaux. Cette opération a pour effet de rendre la CSM singulière et en y appliquant la méthode de beamforming, les niveaux de sources sont sous-estimés et peuvent même être négatifs.

Certaines méthodes comme le Fonctionnel BF ou l'holographie fonctionnelle supportent très mal la suppression de diagonale.

Reconstruction de la diagonale de la CSM Ce type de méthode propose de résoudre un problème d'optimisation : minimiser la somme des éléments diagonaux de la CSM, sous la condition que la CSM reste semi-définie positive. Pour cela, différents algorithmes d'optimisation peuvent être employés.

Le pseudo-code ci-dessous est un exemple de solveur utilisant les outils de programmation convexe de Michael Grant et Stephen Boyd : CVX : Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta. <http://cvxr.com/cvx>, September 2013. Cette procédure est très proche de celle proposée par Hald (2016).

```
cvx_begin
variable d(M)
minimize( sum(d) )
subject to
eig(CSM + diag(d)) >= 0
cvx_end
```

FIGURE 2 – Exemple de code pour la reconstruction de diagonale

Décomposition en éléments propres de la CSM

Stochastic modelling approche statistique

Mesures vibratoires L'écoulement perturbe la couche limite au niveau de l'antenne de microphones, ce qui génère un fort bruit aérodynamique. La mesure de ce bruit peut être fortement réduite en captant le champ

acoustique à l'aide d'une antenne d'accéléromètres fixés à une plaque fine. Seuls les bas nombres d'onde, correspondant à la partie acoustique du champ d'onde sont alors mesurés. (Acoustic beamforming through a thin plate using vibration measurements + Design and Experimental Validation of an Array of Accelerometers for In-flow Acoustic Beamforming Applications)

Autre possibilité : antennes parcimonieuses d'accéléromètre en complément d'une mesures sur antenne microphonique : ??

II. MÉTHODES DE FORMATION DE VOIES

Le principe des méthodes de formation de voies est de pondérer les signaux de mesure à l'aide de vecteurs de pointage de manière à les focaliser dans chaque point du plan sur lequel les sources sont cherchées. Ces méthodes sont très utilisées car elles offrent beaucoup de flexibilité sur la position des capteurs et sont simples à mettre en œuvre. Cependant, elles offrent une résolution fortement dépendante de la géométrie de l'antenne.

Manque une référence type review

Les vecteurs de pointage (correspondant aux lignes de l'opérateur inverse \mathbf{W}) sont les poids attribués à chaque microphone avant de sommer leur réponse. En tout point focal i du plan de recherche de source, le vecteur de pointage est comparé à la pression mesurée par les microphones. Ainsi, le produit scalaire $\mathbf{w}_i' \mathbf{p}$ entre le vecteur de pointage \mathbf{w}_i conjugué transposé (symbole $'$) et le vecteur des pressions \mathbf{p} est maximal lorsque les vecteurs sont colinéaires. Le vecteur de pointage est donc associé à un modèle de source. Le modèle de source choisi ici est un ensemble de sources ponctuelles décorrélées. Le calcul peut être réalisé aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel. En choisissant un modèle de monopole décrit par une fonction de Green solution de l'équation d'Helmoltz en champ libre, cette source a pour fonction de transfert du point focal i au microphone m :

$$h_{im} = \frac{e^{-jkr_{mi}}}{4\pi r_{mi}}. \quad (8)$$

Donc, le vecteur des pression pour une source ponctuelle au point i d'amplitude \mathbf{q}_i est $\mathbf{p} = \mathbf{q}_i \mathbf{h}_i$.

Différents vecteurs de pointage sont utilisés dans la littérature (Sarradj, E., Three-Dimensional Acoustic Source Mapping with Different Beamforming Steering Vector Formulations).

inconvenient : quantification difficile car chaque source est estimée comme si elle est la seule (decor. ref prise en compte des réflexions : -ajouter la contribution des sources images au processus de formation de voies. B. A. Fenech, "Accurate aeroacoustic measurements in closed-section hard-walled wind tunnels," Ph.D. dissertation, University of Southampton, June 2009
 remarque : en beamforming classique, doubler le nombre de micro améliore le RSB de 3db

2.1. Vecteur de pointage indépendant des données

La formation de voies peut être vue comme la solution d'un problème d'optimisation : afin d'optimiser le vecteur de pointage, on cherche à minimiser l'écart entre l'amplitude estimée $\mathbf{w}'_i \mathbf{p}$ et l'amplitude réelle A_i . Cette fonction coût est défini à partir d'une densité spectrale $\mathbb{E}\{\bullet\}$ puisque les sources sont des grandeurs aléatoires :

$$J = \mathbb{E}\{(\mathbf{w}'_i \mathbf{p} - \mathbf{q}_i)(\mathbf{w}'_i \mathbf{p} - \mathbf{q}_i)^*\} \quad (9)$$

$$= \mathbf{w}'_i \mathbf{S}_{pp} \mathbf{w}_i - \mathbf{w}'_i \mathbf{h}_i \mathbf{S}_{qq_{ii}} - \mathbf{h}'_i \mathbf{S}'_{qq_{ii}} \mathbf{w}_i + \mathbf{S}_{qq_{ii}} \quad (10)$$

* est l'opérateur conjugué, $\mathbf{S}_{pp} = \mathbb{E}\{\mathbf{p}\mathbf{p}'\}$ et $\mathbf{S}_{qq_{ii}} = \mathbb{E}\{\mathbf{q}_i \mathbf{q}'_i\}$, soit :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}'_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{\mathbf{h}'_i \mathbf{h}_i}. \quad (11)$$

Le vecteur de pointage correspond donc au vecteur des fonctions de transferts normalisé de façon à que l'amplitude $\hat{\mathbf{q}}_i = \mathbf{w}'_i \mathbf{p}$ soit égale à 1 quand $\mathbf{p} = \mathbf{h}_i$.

En présence d'un bruit décorrélié à chaque microphone, on peut montrer que le vecteur de pointage devient :

$$\mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{\mathbf{h}'_i \mathbf{h}_i + \gamma}, \quad (12)$$

avec $\gamma = \sigma_n / \mathbf{S}_{qq_{ii}}$, σ_n étant les termes diagonaux de la matrice interspectrale du bruit aux microphones.

Il est fréquent d'annuler la diagonale de \mathbf{S}_{pp} afin de négliger la contribution du bruit de cohérence intermicrophonique nulle. Suite à cette

opération, \mathbf{S}_{pp} n'est plus définie positive et ses valeurs propres peuvent être négatives², ce qui peut rendre la PSF négative.

2.2. Construction d'un vecteur de pointage à partir des données

Certaines méthodes de localisation n'utilisent pas un modèle de source mais construisent le vecteur de pointage à partir de l'ensemble des covariances des signaux de mesure.

• **Capon** Capon (1969) propose de minimiser l'énergie en sortie du processeur tout en conservant une contrainte de normalisation que le vecteur de pointage est dans la direction de la source (méthode dite "à variance minimale des sources") : minimiser $\mathbf{w}'_i \mathbf{S}_{pp} \mathbf{w}_i$ (i.e. la densité spectrale des sources) sous la contrainte $\mathbf{w}'_i \mathbf{h}_i = 1$. On résout donc, en utilisant le multiplicateur de Lagrange λ :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0 \quad (13)$$

avec la fonction coût :

$$J = \mathbf{w}'_i \mathbf{S}_{pp} \mathbf{w}_i + \lambda(\mathbf{w}'_i \mathbf{h}_i + \mathbf{h}'_i \mathbf{w}_i). \quad (14)$$

La résolution de ces 2 équations permet de construire le vecteur de pointage :

$$\mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{S}_{pp}^{-1} \mathbf{h}_i}{\mathbf{h}'_i \mathbf{S}_{pp}^{-1} \mathbf{h}_i}. \quad (15)$$

Le spectre de puissance de la distribution des sources estimée est alors donné par la relation :

$$\hat{\mathbf{S}}_{qq_{ii}} = \mathbb{E}\{\mathbf{w}'_i \mathbf{p} \mathbf{p}' \mathbf{w}_i\} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{h}'_i \mathbf{S}_{pp}^{-1} \mathbf{h}_i} \quad (17)$$

Dougherty (2014) propose le **functional beamforming** qui généralise ce beamforming à variance minimale.

2. La somme des valeurs propres de A est égale à la somme de ses éléments diagonaux.

- **MUSIC** L'algorithme Multiple Signal Classification (MUSIC, Schmidt (1986)) propose une décomposition en valeurs propres de la matrice interspectrale \mathbf{S}_{pp} pour la décomposer en 2 sous-espaces, l'un associé au signal et l'autre au bruit, afin de diminuer la contribution énergétique du bruit. Dans l'expression de \tilde{G}_{ii} en équation 17, \mathbf{S}_{pp} est remplacé par les composantes correspondant au sous-espace bruit. Ainsi, ce nouvel estimateur sera maximal lorsque le processeur pointe vers une source, puisque les éléments du dénominateur seront décorrélés. Cet estimateur ne correspond alors plus à une densité spectrale des sources mais seulement à un indicateur de présence au point i .

Ces méthodes font l'hypothèse de sources décorrélées et sont sensibles au non-respect de cette hypothèse. Des stratégies peuvent être mises en place pour prendre en compte la cohérence des sources (Jiang et al., 2003). De plus, l'utilisation des signaux de mesure pour construire le vecteur de pointage rend ce méthode sensibles à la qualité de ce mesures. Pour contourner cette limitation, une pondération peut être ajoutée à la diagonale de la matrice interspectrale (Li et al., 2003).

Ces méthodes de formation de voies présentent l'avantage d'être simples à implémenter et relativement rapides à calculer. Mais leur résolution diminue fortement lorsque la longueur d'onde devient grande devant l'écart inter-microphonique et les images présentent alors des lobes secondaires qui rendent les sources difficile à localiser et à séparer. Ce problème peut être résolu par une étape de déconvolution décrite dans la section III.

Orthogonal beamforming Cette méthode repose sur la décomposition en valeurs propres de la matrice interspectrale des pressions, qui est hermitienne et semi-définie positive. Les plus petites valeurs propres sont associées à un sous-espace bruit et les M plus grandes à un sous-espace signal :

$$\mathbf{S}_{pp} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}' + \sigma^2\mathbf{1} \quad (18)$$

Les sources peuvent alors être estimées par un beamforming classique appliqué au sous-espace bruit :

$$\hat{\mathbf{S}}_{qq_{ii}} = \mathbf{h}_i'(\mathbf{V}_i\mathbf{\Lambda}_{ii}\mathbf{V}_i')\mathbf{h}_i \quad (19)$$

L'amplitude des sources correspond donc aux valeurs propres de la matrice intraspectrale des pressions. Le choix du nombre de sources (i.e le

nombre de valeurs propres à associer à l'espace signal) nécessite l'utilisation d'un critère statistique de type Akaike Information Criterion (AIC) ou Minimum Description Length (MDL) (Wax and Kailath, 1985).

DORT (pas d'hypothèse sur la distance source-antenne, équation d'Euler linéarisées invariantes par RT en changeant le sens de l'écoulement moyen (ex : Localisation de source acoustique en soufflerie anéchoïque par deux techniques d'antennerie : formation de voies et retournement temporel numérique par Thomas Padois))
 Décomposition en sous-espaces "Orthogonal Beamforming" ?
 Generalize Inverse Beamforming ?
 SAFT, TFM

III. AJOUT D'UNE ÉTAPE DE DÉCONVOLUTION

La distribution de sources obtenue par une méthode d'imagerie peut être vue comme la convolution entre la distribution de sources et la fonction d'étalement du point (PSF : point spread function). La PSF est comparable à une réponse impulsionnelle du système d'imagerie. En formation de voies, la PSF est souvent connue (?) : elle est composée d'un lobe principal et de lobes secondaires.

Ces lobes diminuent notamment le pouvoir de séparation des sources, surtout à basses fréquences ou si les sources sont proches ou encore multipolaires. Si la PSF est connue, on peut, en principe, déconvoluer la distribution de source calculée afin de réduire l'intrusion des lobes secondaires.

On distingue 2 types de lobes secondaires : ceux liés à l'espacement entre les microphones et ceux générés par la forme générale de l'antenne (le fait qu'elle soit d'une surface finie). Ces derniers peuvent être corrigés en appliquant une fenêtre d'appodisation diminuant la sensibilité des microphones situés sur les bords de l'antenne.

La PSF des méthodes inverses est difficile à estimer car elle dépend des données de mesure. C'est pourquoi les méthodes de déconvolution y sont moins appliquées. En revanche, la PSF du beamforming est bien connue et la résolution de cette méthode est souvent améliorée par une étape de déconvolution.

3.1. PSF du beamforming standard

Le beamforming standard permet d'estimer les sources $\tilde{\mathbf{q}}$ ainsi (cf paragraphe 2.1) :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{W}\mathbf{p}, \quad (20)$$

ou bien, en terme d'énergie :

$$\hat{\mathbf{S}}_{qq} = \mathbf{W}'\mathbf{S}_{pp}\mathbf{W} \quad (21)$$

$$\text{avec, } \mathbf{S}_{pp} = \mathbf{G}\mathbf{S}_{qq}\mathbf{G}' \quad (22)$$

Comme les sources sont supposées décorréliées, on peut calculer avec uniquement les diagonales de $\hat{\mathbf{S}}_{qq} = \text{diag}(b_1, \dots, b_j, \dots, b_N)$ et $\mathbf{S}_{qq} = \text{diag}(q_1, \dots, q_j, \dots, q_N)$.

On a alors :

$$b_j = \sum_k A_{jk}q_k \quad (23)$$

avec \mathbf{A} la PSF associée à chaque point source. D'après 21, et en rappelant que $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_N]$ et $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M]^T$, on a :

$$A_{jk} = |\mathbf{w}'_j \mathbf{g}_k|^2 \quad (24)$$

Rapport $1/M^2$?

La déconvolution consiste théoriquement à inverser la matrice \mathbf{A} afin de retrouver les vraies valeurs de sources. En pratique, il est nécessaire d'avoir recours à une inversion avec contrainte de positivité sur la solution (\mathbf{A} étant de grande dimension). Ce problème est généralement suffisamment bien posé pour qu'aucune régularisation supplémentaire ne soit requise.

Notations inspirée de <http://www.bebec.eu/Downloads/BeBeC2014/Papers/BeBeC-2014-02.pdf> qui donne aussi \mathbf{g} et \mathbf{w} en présence d'un écoulement uniforme.

3.1.1 DAMAS

Brooks and Humphreys (2006) proposent l'algorithme DAMAS (deconvolution approach for the mapping of acoustic sources) pour résoudre le problème linéaire de déconvolution :

$$\Leftrightarrow b_j = \sum_k A_{jk}q_k \quad (25)$$

Les sources sont supposées incohérentes (i.e. distribution de sources indépendantes statistiquement). Cette relation peut être décomposée, de

manière analogue à la méthode de Gauss-Seidel :

$$b_j = \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} q_k + A_{jj} q_j + \sum_{k=j+1}^N A_{jk} q_k \quad (26)$$

$$\Leftrightarrow q_j = \frac{1}{A_{jj}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} q_k - \sum_{k=j+1}^N A_{jk} q_k \right) \quad (27)$$

avec N le nombre total de points de l'image. Cependant, les q_k sont inconnus. Ils sont calculés de manière itérative : pour $k > j$, les q_k sont calculés à partir de l'itération précédente et pour $k < j$, les sources sont données à l'itération courante par la relation :

$$q_j^n = \frac{1}{A_{jj}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} q_k^n - \sum_{k=j+1}^N A_{jk} q_k^{n-1} \right) \quad (28)$$

L'incrémentation se fait donc sur j , la position des sources déconvoluées et le nombre d'itération n est au choix de l'utilisateur. Pour l'initialisation, on peut choisir $q_j = 0$ ou bien $q_j = b_j$, ce qui fera une différence sur la vitesse de convergence.

Pour forcer la convergence, q étant une valeur énergétique, elle est mise à zéro si une valeur est calculée négative.

Cette déconvolution permet de supprimer en partie les lobes secondaires mais présente le principal inconvénient d'être lent.

Il existe de nombreuses extensions de cette méthode de déconvolution (Dougherty, 2005). Par exemple, DAMAS2 considère que la convolution avec la PSF est invariante par translation. Ainsi, la convolution dans le domaine spatial est remplacée par un produit dans le domaine des nombres d'onde. Cette formulation a pour effet d'accélérer la procédure de déconvolution. Elle propose aussi l'ajout d'une régularisation par un filtre passe-bas. Ce choix de PSF peut être une bonne approximation si les sources sont suffisamment éloignées de l'antenne. DAMAS-C prend en compte une définition cohérente des sources.

3.1.2 Spectral Estimation Model (SEM)

Cette méthode propose de minimiser une distance au sens des moindres carrés entre les CSM mesurées et estimées, à l'aide d'un gradient conjugué. La minimisation se fait par l'ajout de sources équivalentes, qui

ne reflètent pas nécessairement la physique des vraies sources. Plusieurs modèles équivalents peuvent donc permettre de minimiser la fonction-objectif. Cette méthode ne donne donc pas une solution unique.

Pour contraindre le problème, la région d'étude est divisée en sous-espaces sur lesquels la recherche de monopoles équivalents est faite. La solution va donc dépendre du choix de ces zones. (Blacodon and Elias, 2003)

L'extension SODIX prend en compte la directivité des sources équivalentes. Équivalent à un filtre de Wiener ? Contrainte de positivité sur la solution de source difficile à appliquer ?

3.1.3 Non-negative least squares (NNLS)

L'approche NNLS est de minimiser l'erreur au sens des moindres carrés entre \mathbf{b} et $\mathbf{A}\mathbf{q}$, en imposant que \mathbf{q} reste non-négatif :

$$\min_{\mathbf{q}} \left(\|\hat{\mathbf{S}}_{qq} - \mathbf{A}\mathbf{S}_{qq}\|^2 \right) \quad (29)$$

$$\text{sous la contrainte } \mathbf{S}_{qq} \geq 0 \quad (30)$$

Possibilité d'utiliser la fonction Octave `lsqnonneg`

De manière similaire à DAMAS2, la version FFT-NNLS remplace la convolution par une multiplication dans le domaine des nombres d'onde pour accélérer les calculs.

3.1.4 LORE

3.1.5 Déconvolution avec contrainte de parcimonie

Les algorithmes ci après font l'hypothèse que le vecteur source est parcimonieux.

CLEAN Pour réduire les lobes secondaires produits par les méthodes d'imagerie, (Hogbom, 1974) propose de traiter les données (issues des radiotélescopes) de manière itérative à l'aide d'un algorithme CLEAN. Le principe de l'algorithme est le suivant : on extrait la plus grande valeur du champ source issu du beamforming, on la note comme un point source, on lui retire un petit gain convolué avec la fonction d'étalement, et on réitère jusqu'à ce que la plus grande valeur atteigne

un seuil. Le pseudo-code correspondant se trouve en figure 3.

[Sijtsma \(2007\)](#) propose une version de cet algorithme pour lequel, à chaque itération, ce sont les données qui sont nettoyées et l'image des sources est recalculée à chaque fois. Cette version permet notamment d'appliquer une pondération sur les données, comme une suppression de la diagonale pour réduire l'effet du bruit aérodynamique. Cette méthode est de type "matching pursuit" (voir le paragraphe sur l'optimisation parcimonieuse) : à chaque itération, le vecteur de pointages correspondant à une localisation de sources est écarté et le signal est projeté dans le nouvel espace vectoriel.

Partant de l'image des sources issue du beamforming *dirty*, calcule l'image déconvoluée *clean*.

```

gain = gain loop
clean = zeros(shape(dirty))
res = dirty
while i < niter and max(abs(res)) < thresh do
  1. Search for the peak location in dirty
  rmax = coordonnées de max(res)
  mval = res[rmax] × gain
  2. Update clean
  clean[rmax] += mval
  3. Subtract the appropriately scaled PSF from the dirty map.
  calcul des coordonnées des bords de la psf centrée sur rmax
  res[centré sur rmax] -= psf[centrée sur rmax] × mval
  i += 1
end while

```

FIGURE 3 – Pseudo-code de CLEAN de [Hogbom \(1974\)](#).

Pourquoi supprimer aussi la diagonale de $w_{peak} \times w_{peak}'$?

CLEAN-SC [Sijtsma \(2007\)](#) propose une version de CLEAN basée sur une autre PSF, prenant en compte la cohérence des sources. CLEAN-SC repose sur le fait que le lobe principal d'une PSF est cohérent avec ses lobes secondaires. Le principe est le suivant : Le maximum S_{max} de la

Partant de la matrice interspectrale des signaux microphoniques *Spp*, calcule image beamforming *dirty*, puis l'image déconvoluée *clean*, puis la matrice *Sclean* induite.

```

gain = gain loop
clean = zeros(M, N)
for i in niter do
  1. Obtain dirty by beamforming
  for n = 1 : N do
    dirty[n] = W'[n, :] × Spp × W[n, :]
  end for
  2. Search for the peak location in dirty
  rmax = coordonnées de max(dirty)
  mval = dirty[rmax] × gain
  3. Steering vector to location of peak
  wpeak = W[rmax, :]
  4. Update clean
  clean[rmax] += mval
  5. Calculate Sclean induced
  Spp -= mval × wpeak × wpeak'
  6. Trimm Spp
  Spp[logical(eye(N))] = 0
  Stop criterium : Frobenius norm of Spp must always decrease
  normSpp = normFrobenius(Spp)
  if normSpp > normSclean then
    stop
  end if
  normSclean = normSpp
end for

```

FIGURE 4 – Pseudo-code de CLEAN-psf de [Sijtsma \(2007\)](#).

dirty map est trouvé au point r_{max} . Les composantes spatiales corrélées avec ce maximum sont sélectionnées puis soustraites à la *dirty* map.

On veut trouver la matrice interspectrale \mathbf{G} qui contient toutes les contributions des sources corrélées avec la source en r_{max} . Ainsi, la projection de \mathbf{G} sur le vecteur w_{max} est égale à la projection des données

S_{pp} sur ce même vecteur w_{max} :

$$Gw_{max} = Dw_{max} \quad (31)$$

Il faut donc construire un vecteur de propagation h traduisant la cohérence entre S_{max} et les autres sources, de manière à ce que

$$G = S_{max}hh' \quad (32)$$

soit solution de l'équation 31. Cette solution n'est pas unique. On peut exprimer h de la façon suivante :

$$h = \frac{1}{h'w_{max}} \frac{S_{pp}w_{max}}{S_{max}} \quad (33)$$

En réinjectant cette expression dans 31 et en rappelant que $S_{max} = w_{max}S_{pp}w'_{max}$, on trouve que le scalaire $h'w_{max}$ doit être égal à 1.

Si on veut utiliser un G à diagonale nulle, on cherche une expression de h tel que :

$$\bar{G} = S_{max}(hh' - H), \quad (34)$$

avec H contenant les éléments diagonaux de hh' . En isolant h dans l'équation ($Gw_{max}=Dw_{max}$), on a :

$$h = \frac{1}{h'w_{max}} \left(\frac{S_{pp}w_{max}}{S_{max}} + Hw_{max} \right) \quad (35)$$

En réinjectant cette expression dans ($Gw_{max}=Dw_{max}$) 31, on trouve que le scalaire $h'w_{max}$ doit être égal à $\sqrt{1 + w_{max}Hw'_{max}}$.

En théorie, la prise en compte de la cohérence permet bien d'enlever les lobes secondaires. Cependant, si on cherche à imager plusieurs sources corrélées, seule la source de plus fort niveau sera reconstruite et les autres seront considérées comme étant des lobes secondaires de la PSF et leurs contributions seront supprimées.

algo Hogbom en python : <http://www.mrao.cam.ac.uk/~bn204/alma/python-clean.html>
 algo Sijtsma en matlab : <https://github.com/jorgengrythe/beamforming/tree/master/algorithm>

Sparsity constrained DAMAS (SC-DAMAS) Yardibi et al. (2008)
 type basis poursuit

bayésien Comme l'étape de déconvolution revient à résoudre un problème inverse où toutes les sources sont traitées simultanément, les méthodes inverses décrites dans la section ?? peuvent être utilisées.

3.1.6 Prise en compte de la cohérence des sources

DAMAS-C ref : T.F.Brooks and W.M.Humphreys, \T1\textquotedblleft Extension of damas phased array processing for spatial coherence, \T1\textquotedblright 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Cambridge, MA, 2006, AIAA-2006-2654.

référence pour chaque méthode dans bahr2011 :

-damas2

-fft-nnls

-clean-sc

-cmf et son extension aux sources cohérentes (CFM-C) Yardibi et al. (2008)

-macs

: DAMAS, CLEAN-SC, TIDY

lire review : Sparsity constrained deconvolution approaches for acoustic source mapping

Ces méthodes supposent de bien connaître son modèle de sources pour avoir une bonne PSF. Elles sont très utilisées dans le domaine de l'aéroacoustique (? propose une correction pour les sources en déplacement, par exemple).

IV. LES MÉTHODES INVERSES

En formation de voies, chaque source est considérée indépendamment des autres. La surface contenant les sources potentielles est scannée point par point et l'éventuelle cohérence des sources n'est pas prise en compte.

L'approche des méthodes inverses est de traiter le problème dans son ensemble, en recherchant toutes les sources simultanément, prenant ainsi en compte les effets d'interférence entre les sources.

Quid des interactions non-linéaires entre sources ?

La résolution du problème inverse ne peut généralement pas reposer sur une inversion de la matrice de transfert, car le problème inverse est souvent sous-déterminé. De plus, la relation entre sources et mesures n'est pas toujours bijective.

Les méthodes varient selon le modèle de source choisi :

- ondes planes propagatives et évanescentes : NAH, SONAH
- radiation BEM
- distribution de monopoles
- harmoniques sphériques.
- itératif ou non ?

4.1. Holographie acoustique

De manière générale, les méthodes basées sur l'holographie acoustique présentent l'avantage de pouvoir reconstruire le champ source en tout point de l'espace et donc sur un plan source de géométrie arbitraire. Un autre avantage est son utilisation en milieu clos.

4.1.1 Holographie en champ proche (NAH)

L'holographie en champ proche propose d'exploiter des mesures réalisées à proximité des sources pour en reconstruire une image. Cette méthode tire profit de la mesure des ondes évanescentes, exponentiellement décroissantes avec la distance, qui viennent s'ajouter aux ondes propagatives [Maynard et al. \(1985\)](#).

Le champ de pression mesuré est d'abord décomposé dans le domaine des nombres d'ondes par une transformée de Fourier spatiale. A chaque

onde est associé un propagateur (i.e. une fonction de transfert supposée connue) qui, inversé, permet de rétropropager le champ mesuré et ainsi reconstruire le champ source.

La pression recherchée $p_e(\mathbf{r}_0)$ au niveau du plan de recherche de sources s'écrit donc en fonction de la pression mesurée $p_m(\mathbf{r}_h)$:

$$p_e(\mathbf{r}_0, f) = \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F} [p_m(\mathbf{r}_h, f)] \mathcal{F} [G(\mathbf{r}_h - \mathbf{r}_0, f)]] \quad (36)$$

où \mathcal{F} est la transformée de Fourier spatiale et G la fonction de transfert donnant la propagation de l'onde acoustique du plan source au plan de mesure, choisie selon le modèle de sources.

Avant rétropropagation, un filtre sur les hauts nombres d'ondes est appliqué (ex : filtre de Vernoesi ou de Li) de manière à sélectionner les nombres d'ondes d'intérêt : il est nécessaire de trouver un compromis permettant de conserver suffisamment d'ondes évanescentes (porteuses d'informations) tout en limitant l'amplification du bruit. La mesure à proximité permet ainsi d'obtenir une résolution supérieure à la demi-longueur d'onde.

Référence pour comprendre les méthodes suivantes : Comparison of patch acoustic holography methods Zdeněk HAVRÁNEK
Référence pour leur implémentation : <http://www.sandv.com/downloads/1002wuxx.pdf>

4.1.2 Statically optimized near-field acoustical holography (SONAH)

Cette méthode est notamment utilisée lorsque le plan source est plus grand que l'antenne de mesure (on parle de "patch methods"). Elle repose sur l'idée que la pression estimée sur un plan de prédiction (situé entre le plan de mesure et le plan source) est exprimée comme la somme pondérée des pressions mesurées en N points du plan source ([Hald, 2009](#)) :

$$p(\mathbf{r}) \approx \sum_{n=1}^N C_n(\mathbf{r}) p_m(\mathbf{r}_{h,n}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{r}_h) \mathbf{c}(\mathbf{r}) \quad (37)$$

Les coefficients \mathbf{c} ne dépendent pas du champ mais uniquement de la position et, de la même façon, les ondes planes élémentaires composant

le champ sur le plan de prédiction peuvent être projetées sur le plan de calcul :

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N C_n(\mathbf{r}) \phi_m(\mathbf{r}_h, n) \quad (38)$$

En notant cette équation sous forme matricielle, avec $A_{mn} = \phi_m(\mathbf{r}_h, n)$ et $a_m = \phi_m(\mathbf{r})$, on peut calculer les coefficients $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ en résolvant le problème d'optimisation (avec régularisation de Tikhonov) :

$$\arg \min_{\mathbf{c}} (||\mathbf{a} - \mathbf{A}\mathbf{c}||^2 + \eta^2 ||\mathbf{c}||^2) \quad (39)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c} = \frac{\mathbf{A}'\mathbf{a}}{\mathbf{A}'\mathbf{A} + \eta^2 \mathbf{I}} \quad (40)$$

$$\eta^2 = \mathbf{A}'\mathbf{A} 10^{-\frac{SNR}{10}} ?$$

Cette méthode, contrairement à NAH, ne nécessite pas de calcul de transformée de Fourier spatiale.

L'amélioration M-SONAH a été développée pour le cas où l'ensemble des fonctions élémentaires qui compose le champ ne sont pas connues et elles sont alors exprimées comme une combinaison de différentes ondes connues.

Notations et formulation tirées de l'article (en français) : https://www.researchgate.net/publication/225102534_Evaluation_de_deux_methodes_d%27imagerie_acoustique_en_milieu_bruite

NAH et ses dérivés ne permettent pas de reconstruire un champ source en 3D.

4.1.3 iBEM

iBEM propose de résoudre l'équation liant la pression pariétale à la pression mesurée par la méthode des éléments de frontière. La transformée de Fourier spatiale est remplacée par une SVD de la matrice de transfert

+ amélioration sur des géométries quelconques par l'utilisation d'éléments de frontières (iBem : méthode des éléments de frontières inverse). La transformée de Fourier spatiale est remplacée par une SVD de la matrice de transfert (ref 29 thèse de T. Lemagueresse). L

4.1.4 ESM

L'idée de la méthode des sources équivalentes est que le champ source recherché peut être représenté comme une superposition de points source équivalents. Une séparation du champ nécessite qu'il y ait deux plans de mesures et deux plans fictifs de reconstruction des sources équivalentes. L'inverse de la matrice de transfert peut se faire par SVD, par exemple.

4.1.5 Helmholtz equation least squares

Wang and Wu (1997) Peut-être vu comme un cas particulier de SEM.

En résumé, les méthodes inverses utilisées principalement sont de 2 sortes : 1) les méthodes basées sur la transformée de Fourier (holographie,...); 2) Les méthodes "model based". En pratique, ces méthodes sont très proches (ce que montrent

4.1.6 +soap, generalized BF, bayesian focusing ?

L'holographie a une meilleure résolution que le beamforming, même à basse fréquence et donne accès à la puissance de sources. Elle est cependant limitée en résolution par l'espacement inter-microphonique et nécessite de réaliser des mesures en champ proche.

4.2. Les méthodes de régularisation

liste des méthodes de régularisation : <http://www.imm.dtu.dk/~pcha/Regutools/RTv4manual.pdf>

nelson part2 compare deux méthodes de régularisation : 1) il explique comment choisir un paramètre de Tikhonov ; 2) il explique comment choisir les valeurs de la SVD à supprimer.

Beaucoup se sont penchés sur le problème du choix de η . nelson part2 compare les différentes façon de déterminer η en comparant l'erreur entre le champ source désiré et celui reconstruit, ainsi que l'erreur entre l'interspectre reconstruit et le vrai interspectre (les S_{qq}). Les méthodes comparées sont :

-cross-validation technique : augmentation and a method for prediction

-generalize cross-validation technique :

Les problèmes inverses de localisation de sources acoustiques sont souvent mal posés car le nombre de sources est supérieur au nombre de capteur (la solution n'est pas unique) et la solution dépend des données d'entrée. Il est alors nécessaire de mettre en place des stratégies qui améliorent le conditionnement du problème, notamment en réduisant la sensibilité de la solution aux données d'entrée.

4.2.1 Décomposition en valeurs singulières

Le conditionnement du problème peut être quantifié par le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière de la matrice de transfert. Plus ce rapport est faible, mieux le problème est conditionné. Le conditionnement du problème peut donc être amélioré en supprimant les petites valeurs singulières de la matrice de transfert. La question du nombre de valeurs singulières à conserver se pose alors.

4.2.2 Régularisation de Tikhonov

La stratégie la plus souvent adoptée est la régularisation de Tikhonov (Tikhonov, 1963) qui consiste à rajouter un terme de contrôle de l'énergie de la solution dans la fonction coût. Cette dernière prend alors la forme suivante :

$$\|p - Gq\|^2 + \eta^2 \|q\|^2 \quad (41)$$

où $\|\bullet\|$ est la norme euclidienne et η^2 est le paramètre de régularisation, choisi judicieusement de façon à favoriser les solutions de petite norme.

La difficulté de cette régularisation réside dans le choix de η . Ce paramètre peut être déterminé par des procédures ad-hoc qui telle que :

-discrepancy principle

-general cross-validation (méthode de la validation croisée généralisée)

-L-curve method : -(restricted) maximum likelihood :

differentiation procedures for non-exact data

-unbiased predictive risk estimator

-interprétation bayésienne (Pereira et al., 2015)

- méthode utilisant le principe d'anomalie de Morozov

-normalized cumulative periodogram

...

La régularisation de Tikhonov cherchant à restreindre l'énergie de la solution a tendance à sous-estimer les niveaux des sources reconstruite. Cette régularisation ne prend pas correctement en compte le rayonnement omni-directionnel des sources : seule la partie rayonnée vers l'antenne est reconstruite.

4.2.3 Optimisation parcimonieuse

L'objectif d'une approche parcimonieuse est d'obtenir une solution approchée du problème avec le moins de composantes non nulles possible. On minimise alors à la fois l'écart entre les données mesurées et simulées, ainsi que la "norme" L_0 qui donne la parcimonie d'un vecteur x telle que : $\|x\|_0 := \#\{i | x_i \neq 0\}$. Le problème d'optimisation devient alors bi-objectif :

$$\min_q (\|q\|_0, \text{dist}(p, Gq)). \quad (42)$$

Prendre en compte une distribution parcimonieuse des sources dans l'espace, par exemple, permet de réduire le caractère sous-déterminé du problème en exploitant les connaissances a priori sur les sources. Cette propriété de parcimonie sert notamment à compenser le rayonnement omnidirectionnel des sources qui n'est pas mesuré et qui engendre une sous-estimation du niveau des sources.

La parcimonie est donnée par la norme L_0 du champ source (qui donne alors le nombre de valeurs non-nulles de G_{qq}). Un formalisme bayésien permet de prendre en compte cette parcimonie en définissant une densité de probabilité des sources $[p]$. Une loi gaussienne peut par exemple être choisie telle que :

$$[p] \propto \exp \left(-\frac{\sum_i |q_i|^p}{2\gamma^2} \right) \quad (43)$$

avec i le $i^{\text{ème}}$ élément de q . Dans cette formulation, la norme L_0 peut être relaxée par une norme L_p permettant de rendre l'objectif convexe,

avec p un paramètre prenant une valeur entre 0 et 2. $p = 0$ correspond à une distribution parcimonieuse, tandis que plus p tend vers 2, plus la distribution spatiale des source est étendue.

Tropp and Wright (2010) passent en revue les principales façons de poser et de résoudre ce problème d'optimisation.

Lorsque le paramètre p est proche de 0, le critère n'est pas convexe et le problème doit être résolu à l'aide d'algorithmes gloutons, dont les plus répandus sont décrits ci-dessous :

- **Matching pursuit (MP)** Minimiser une fonction coût de la forme $\|\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q}\|_2$ avec une contrainte de parcimonie $\|\mathbf{q}\|_0 \leq \epsilon$ peut être vu comme une sorte d'analyse en composante principale de \mathbf{p} , par une projection sur un ensemble d'atome (pas forcément orthogonaux) trié dans \mathbf{G} , où \mathbf{q} donne l'amplitude pour chaque atome. Mallat and Zhang (1993) propose un algorithme qui calcule successivement à partir d'un dictionnaire d'atomes normalisés les poids associés aux atomes pour lesquels le produit scalaire avec le signal est maximal. L'opération est répétée sur les résidus jusqu'à ce que le signal soit suffisamment décomposé, i.e. qu'un critère sur les résidus soit atteint.

- **Orthogonal matching pursuit (OMP)** Une extension de l'algorithme MP propose également d'extraire un à un les atomes et leur coefficient, mais à chaque sélection d'atome, la projection du signal dans le nouvel espace vectoriel généré est recalculée, ce qui permet une convergence plus rapide, moyennant une étape d'orthogonalisation supplémentaire (Pati et al., 1993). Chaque atome n'est sélectionné qu'une fois, contrairement à l'algorithme MP. Cette minimisation des redondances également de réduire l'erreur commise.

Il est possible de s'affranchir de la norme L_0 en relaxant le paramètre p , et en prenant par exemple $p = 1$ ³ (critère non dérivable). Le problème d'optimisation contenant une contrainte en norme L_1 peut s'exprimer de différence manière :

- **Poursuite de base (Basis pursuit, BP)** Ce principe d'optimisation s'écrit sous la forme :

$$\min_{\mathbf{q}} \|\mathbf{q}\|_1 \quad \text{sous la contrainte} \quad \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{p} \quad (44)$$

Ce problème peut être linéarisé puis résolu par des algorithmes comme ceux du simplexe ou de points intérieurs (Chen et al., 2001).

3. $\|\mathbf{a}\|_1 = \sum_i |a_i|$

- **Least absolute shrinkage and selection operator (LASSO)** Tibshirani (1996) propose de résoudre :

$$\min(\|\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q}\|^2) \quad \text{sous la contrainte} \quad \|\mathbf{q}\|_1 \leq t), \quad (45)$$

ce qui revient à estimer $\tilde{\mathbf{q}}$ tel que :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \arg \min_{\mathbf{q}} (\|\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q}\|^2 + \beta \|\mathbf{q}\|_1) \quad (46)$$

Quand $\beta = 0$, le problème LASSO est analogue aux moindres carrés ordinaires. Si β est très grand, $\tilde{\mathbf{q}}$ tend vers 0. Ce paramètre permet donc de fixer certains coefficients de la régression à 0 ou, avec une approche bayésienne, on peut leur associer une incertitude.

- **Basis pursuit denoising (BPDN)** Le principe de BPDN mène au même problème que celui formulé par LASSO. On cherche à résoudre :

$$\min_{\mathbf{q}} \|\mathbf{q}\|_1 \quad \text{sous la contrainte} \quad \|\mathbf{G}\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 \leq \tau, \quad (47)$$

ce qui équivaut, comme LASSO à trouver un compromis entre réduire les résidus et trouver la solution la plus parcimonieuse possible.

Parmi les algorithmes de résolution des problèmes pour $0 < p < 2$, on trouve :

- les algorithmes de relaxation (ex : RELAX, Li & Stoica, 1996),
- les algorithmes de type "seuillage itératif" (type FISTA, Expectation-Maximisation,...),
- IRLS (iterative reweighted least squares) : cette méthode propose de représenter une norme L_p ($0 < p \leq 1$) par une norme L_2 pondérée. Elle ne garantit pas la convergence vers un minimum global. Elle s'utilise donc plutôt en optimisation locale. Voir par exemple l'algorithme FOCUSS (FOcal Underdetermined System Solver).
- least-Angle regression stagewise (LARS) : méthode par homotopie (Osbourne, 2000),
- shooting algorithm (Fu, 1998),
- gradient conjugué et ses dérivés,
- et tous les autres algorithmes d'optimisation convexe quadratique.

Si $p > 1$, le critère est strictement convexe (et ne présente donc qu'un minimum global). Dans le cas où $p = 2$, le problème n'est pas soumis à une contrainte de parcimonie et correspond à la régularisation de Tikhonov ou régression d'arête (*ridge regression*).

Cours et algorithmes liés à l'optimisation parcimonieuse en ligne :

Une liste de solvers selon la catégorie du problème se trouve à l'adresse : <https://web.archive.org/web/20150502191143/http://www.ugcs.caltech.edu/~srbecker/wiki/Category:Solvers>.

Cours d'H. Carfantan sur l'optimisation parcimonieuse : <http://www.ast.obs-mip.fr/users/carfan/PPF-PSI/CarfantanSparse.pdf> 10 cours "Sparse Representations and Signal Recovery (Purdue University)", StudentLecture : [urlhttps ://engineering.purdue.edu/ChanGroup/ECE695Notes/](https://engineering.purdue.edu/ChanGroup/ECE695Notes/)

De manière générale, les méthodes de régularisation se confronte aux problématiques suivantes :

- Comment choisir la base de décomposition optimale ?
- Comment régler le paramètre η
- Quelle formulation et quel algorithme de résolution choisir ?
- Comment évaluer la fiabilité de la solution ?

Faire les parallèles :

CLEAN : technique de déconvolution itérative, heuristique de type "matching pursuit"

SC-DAMAS : de type "basis pursuit"

The polar correlation technique , FISHER

V. APPROCHE BAYÉSIENNE

Rappel des estimation de sources et du paramètre de régularisation proposés par Antoni 2012.

Le problème peut être formulée à l'aide d'une approche probabiliste. Les inconnues du problème sont décrites par une densité de probabilité. L'objectif de cette approche est double : *i)* développer un formalisme généralisant les diverses méthodes développées pour chaque contexte d'imagerie ; *ii)* prendre en compte au mieux les informations connues à l'avance sur les sources, même si elles sont incertaines puisque données par une densité de probabilité. Ce deuxième point est mis en œuvre par l'utilisation d'une régularisation.

la probabilité est la traduction d'un état de connaissance du système.

Principe général des probabilités bayésiennes : on choisit une distribution a priori décrivant la fonction à modéliser $[q]$. Cette distribution est corrigée progressivement sous forme de fonction de vraisemblance à partir des observations $[p|q]$. Prises ensemble, la distribution a priori et la fonction de vraisemblance permettent de construire la distribution a posteriori : $[q|p] = [p|q][q]/[p]$.

5.1. Formulation probabiliste du problème direct

Le problème direct revient à exprimer la pression p au niveau de l'antenne de microphones en fonction du champ source q , du modèle de propagation acoustique G , du bruit de mesure et des erreurs de modèle représentés par le vecteur n :

$$p = Gq + n \quad (48)$$

Le champ source $q(\mathbf{r})$ peut être décomposé sur une base de K fonctions spatiales $\phi_k(\mathbf{r})$ normalisées :

$$q(\mathbf{r}) = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\phi} \quad (49)$$

Les inconnues du problèmes sont donc les fonctions ϕ_k , les coefficients c_k qui dépendent des mesures et leur nombre K .

L'approche bayésienne propose de voir ces coefficients comme des variables aléatoires et d'étudier leur probabilité conditionnée aux mesures $[q(\mathbf{c}, \phi)|\mathbf{p}]$. Si cette probabilité est élevée, ça signifie que les mesures expliquent précisément le champ source q . L'objectif est donc d'estimer ces variables de façon à ce qu'elles expliquent au mieux les mesures \mathbf{p} . Ces estimations de ϕ et de \mathbf{c} sont notées respectivement $\hat{\phi}$ et $\hat{\mathbf{c}}$ telles que :

$$(\hat{\mathbf{c}}, \hat{\phi}) = \arg \max_{\mathbf{c}, \phi} [q(\mathbf{c}, \phi)|\mathbf{p}] \quad (50)$$

La loi de Bayes permet d'exprimer $[q(\mathbf{c}, \phi)|\mathbf{p}]$ ainsi :

$$[q(\mathbf{c}, \phi)|\mathbf{p}] = \frac{[\mathbf{p}|q(\mathbf{c}, \phi)][q(\mathbf{c}, \phi)]}{[\mathbf{p}]} \quad (51)$$

On estime d'abord que le bruit \mathbf{n} a une distribution gaussienne, et que sa moyenne est nulle ($\mathbb{E}\{\mathbf{n}\} = 0$) et par conséquent⁴, $[\mathbf{p}|q]$ suit également une distribution normale multivariée complexe. En introduisant la matrice de covariance $\mathbb{E}\{\mathbf{n}\mathbf{n}^*\} = \beta^2 \mathbf{\Omega}_N$ (β^2 étant l'énergie moyenne du bruit, $\mathbf{\Omega}_N$ matrice connue a priori selon la nature du bruit) :

$$[\mathbf{p}|q, \beta^2] = \mathcal{N}_c(\mathbf{G}\mathbf{q}, \beta^2 \mathbf{\Omega}_N) \quad (52)$$

$$= \frac{1}{\pi^M \beta^{2M} |\mathbf{\Omega}_N|} \exp \left(-\frac{1}{\beta^2} \|\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q}\|_{\mathbf{\Omega}_N}^2 \right) \quad (53)$$

Une distribution gaussienne est également choisie pour la densité de probabilité des sources, de moyenne nulle et de variance $\mathbb{E}\{\mathbf{q}\mathbf{q}'\} = \alpha^2 \mathbf{\Omega}_q$:

$$[\mathbf{q}|\alpha^2] = \mathcal{N}_c(\mathbf{0}, \alpha^2 \mathbf{\Omega}_q) \quad (54)$$

$$= \frac{1}{\pi^K \alpha^{2K} |\mathbf{\Omega}_q|} \exp \left(-\frac{1}{\alpha^2} \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{\Omega}_q}^2 \right) \quad (55)$$

α^2 et β^2 sont appelés les hyperparamètres.

4. Modèle direct : $\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{n}$; bruit centré : $\langle \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q} \rangle = 0$; la covariance du bruit est la covariance des mesures étant données les sources :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n &= \mathbb{E}\{\mathbf{n}\mathbf{n}^*\} \\ &= \mathbb{E}\{(\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q})(\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q})^*\} \\ &= \mathbf{C}_{\mathbf{p}|q} \end{aligned}$$

Notes :

vraisemblance : adéquation entre une distribution observée (sur échantillon) et la loi de proba qui décrit la population dont est issu l'échantillon
fonction de vraisemblance : la vraisemblance varie en fonction des paramètres de la loi choisie. Paramètre s'appelle généralement θ . Sert donc à ajuster des observations à une loi.

https://en.wikipedia.org/wiki/Bayesian_interpretation_of_kernel_regularization :

Dans le contexte de régression, la fonction de vraisemblance ($[p|q]$) sont souvent supposé suivre une distribution gaussienne, car "corrompues" par du bruit gaussien. Les observations sont supposées indépendantes et identiquement distribuées, ce qui fait qu'il est possible de factoriser la fonction de vraisemblance sur chaque point de mesure.

5.2. Estimation des hyperparamètres et des sources

5.2.1 Méthodes analytiques

Il existe trois principales approches pour poser le problème d'optimisation et en définir une fonction objectif⁵ :

- le **maximum de vraisemblance** , pour lequel on cherche la solution

$$\mathbf{q}_{ML} = \arg \max_{\mathbf{q}} [\mathbf{p}|\mathbf{q}] = \arg \min_{\mathbf{q}} f_{data}, \quad (56)$$

avec

$$f_{data} = -\log[\mathbf{p}|\mathbf{q}] + \text{cst} \quad (57)$$

$$= [\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q}]' \mathbf{C}_{\mathbf{p}|q}^{-1} [\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{q}] \quad (58)$$

en considérant que $[\mathbf{p}|\mathbf{q}]$ a une répartition gaussienne, de covariance $\mathbf{C}_{\mathbf{p}|q}$. L'estimateur obtenu est le même que celui donné par la méthode des moindres carrés.

5. détails des calculs dans le cours de E. Thiébaud et C. Pichon : <https://cral.univ-lyon1.fr/labo/perso/eric.thiebaud/downloads/documents/cargese-2006-thiebaud.pdf>

• **le maximum a posteriori** (MAP), qui cherche à maximiser la densité des sources a posteriori :

$$\mathbf{q}_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{q}} [\mathbf{q}|\mathbf{p}] \quad (59)$$

$$= \arg \max_{\mathbf{q}} ([\mathbf{p}|\mathbf{q}][\mathbf{q}]) \quad (60)$$

$$= \arg \min_{\mathbf{q}} \underbrace{(-\log[\mathbf{p}|\mathbf{q}])}_{f_{data}} - \underbrace{\log[\mathbf{q}]}_{f_{prior}} \quad (61)$$

La méthode MAP propose donc d'ajouter à au maximum de vraisemblance un terme de régularisation donné par f_{prior} . Considérant que les sources ont une densité de probabilité gaussienne, le terme de régularisation s'écrit :

$$f_{prior} = (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})' \mathbf{C}_q^{-1} (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) \quad (62)$$

• **le minimum de variance**⁶, dont le critère est de minimiser l'espérance de l'erreur quadratique :

$$\mathbf{q}_{MV} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{q}}} \mathbb{E}\{\|\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}\|^2\} \quad (63)$$

Cette solution généralise le filtre de Wiener et est la même que la solution MAP.

En faisant un analyse de la propagation des erreurs pour chaque méthode, on peut montrer que le maximum de vraisemblance en propage davantage.

5.2.2 Estimateur MAP

La résolution du problème inverse se fait donc par l'estimation de la probabilité $[\mathbf{q}|\mathbf{p}, \alpha^2, \beta^2]$. Le vecteur \mathbf{q} est ainsi approché en observant sa valeur la plus probable d'après les données, le "Maximum a posteriori" (MAP) :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{MAP} = \arg \max([\mathbf{q}|\mathbf{p}, \alpha^2, \beta^2]) \quad (64)$$

$$= \arg \max([\mathbf{p}|\mathbf{q}][\mathbf{q}]) \quad \text{d'après 51} \quad (65)$$

puisque $[\mathbf{p}]$ est une constante du problème.

En prenant le logarithme négatif de la quantité à maximiser, on peut définir une fonction coût à minimiser :

$$J(\mathbf{c}, \phi) = -\ln[q|\mathbf{p}] = -\ln[\mathbf{p}|\mathbf{q}] - \ln[q] \quad (66)$$

D'après les lois normales choisies,

$$J = M \ln(\beta^2) + K \ln(\alpha^2) + \beta^{-2} \|\mathbf{p} - \mathbf{H}\mathbf{c}\|_{\Omega_n}^2 + \alpha^{-2} \|\mathbf{q}\|_{\Omega_c}^2 \quad (67)$$

revoir les notations ci-dessus

Finalement, on ne conservant que les termes qui dépendent de c , on retrouve la formulation des moindres carrés :

$$J = (p' - cH)\Omega_n^{-1}(p - Hc) + \nu^2 c' \Omega^{-1} c \quad (68)$$

avec pour terme de régularisation $\nu = \beta^2/\alpha^2$.

5.2.3 Méthodes numériques

Échantillonneur de Gibbs

MCMC algo utilisé par Charles : Metropolis-Hasting

5.3. Confiance accordée à la reconstruction

6. *minimum mean square error*

RÉFÉRENCES

- J. Billingsley and R. Kinns. The acoustic telescope. *Journal of Sound and Vibration*, 48(4) :485 – 510, 1976.
- D. Blacodon and G. Elias. Level estimation of extended acoustic sources using an array of microphones. *OFFICE NATIONAL D ETUDES ET DE RECHERCHES AEROSPATIALES ONERA-PUBLICATIONS-TP*, (63), 2003.
- T. F. Brooks and W. M. Humphreys. A deconvolution approach for the mapping of acoustic sources (DAMAS) determined from phased microphone arrays. *Journal of Sound and Vibration*, 294(4) :856 – 879, 2006.
- J. Capon. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proceedings of the IEEE*, 57(8) : p. 1408–1418, 1969.
- S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM review*, 43(1) :129–159, 2001.
- D. F. Comesaña, S. Steltenpool, G. C. Pousa, H.-E. de Bree, and K. R. Holland. Scan and paint : Theory and practice of a sound field visualization method. *ISRN Mechanical Engineering*, (ID 241958), 2013.
- R. P. Dougherty. Extensions of damas and benefits and limitations of deconvolution in beamforming. *AIAA paper*, 2961(11), 2005.
- J. Hald. Basic theory and properties of statistically optimized near-field acoustical holography. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(4) :2105–2120, 2009.
- J. Hald. Cross-spectral matrix diagonal reconstruction. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 253, pages 3766–3777. Institute of Noise Control Engineering, 2016.
- J. A. Hogbom. Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 15 :417–426, 1974.
- Y. Jiang, P. Stoica, Z. Wang, and J. Li. Capon beamforming in the presence of steering vector errors and coherent signals. In *11th Annual Workshop on Adaptive Sensor Array Processing (ASAP 2003)*, MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA, 2003.
- J. Li, P. Stoica, and Z. Wang. On robust Capon beamforming and diagonal loading. *Trans. Sig. Proc.*, 51(7) :1702–1715, 2003.
- S. G. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on signal processing*, 41(12) :3397–3415, 1993.
- J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee. Nearfield acoustic holography : I. Theory of generalized holography and the development of NAH. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 78(4) : 1395–1413, 1985.
- Y. C. Pati, R. Rezaifar, and P. S. Krishnaprasad. Orthogonal matching pursuit : Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In *Signals, Systems and Computers, 1993. 1993 Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on*, pages 40–44. IEEE, 1993.
- A. Pereira, J. Antoni, and Q. Leclerc. Empirical bayesian regularization of the inverse acoustic problem. *Applied Acoustics*, 97 :11–29, 2015.
- R. . Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, AP-34(3) : p. 276–280, 1986.
- P. Sijtsma. Clean based on spatial source coherence. *International journal of aeroacoustics*, 6(4) :357–374, 2007.
- M. J. T. Smith. *Aircraft noise*. Cambridge University Press, 1989.
- R. Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 58 :267–288, 1996.
- A. Tikhonov. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Meth. Dokl.*, 4 :1035–1038, 1963.

- J. A. Tropp and S. J. Wright. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems. *Proceedings of the IEEE*, 98(6) :948–958, 2010.
- Z. Wang and S. F. Wu. Helmholtz equation–least-squares method for reconstructing the acoustic pressure field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102(4) :2020–2032, 1997.
- M. Wax and T. Kailath. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 33(2) :387–392, 1985.
- T. Yardibi, J. Li, P. Stoica, and L. N. Cattafesta III. Sparsity constrained deconvolution approaches for acoustic source mapping. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5) :2631–2642, 2008.