

# Analyse Factorielle parcimonieuse avec priors Bernoulli-Gaussiens sur les facteurs

Décembre 2018

## I. Modèle 1 : Parcimonie par priors exponentiels

L'objectif est d'améliorer le modèle suivant :

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{L} \lceil \mathbf{q} \rceil \mathbf{c}_i + \mathbf{n}_i \quad (1)$$

Priors	Hyperpriors
$\mathbf{L} \sim \mathcal{N}_c(0, \frac{\mathbf{I}_{MK}}{K})$	
$\mathbf{c} \sim \mathcal{N}_c(0, \lceil \gamma^2 \rceil)$	$\gamma^2 \sim \mathcal{IG}(a_\gamma, b_\gamma)$
$\mathbf{q} \sim \mathcal{Exp}(\mathbf{a}_q)$	
$\mathbf{n}   \beta^2 \sim \mathcal{N}_c(0, \beta^2 \lceil \sigma^2 \rceil)$	$\sigma^2 \sim \mathcal{IG}(a_\sigma, b_\sigma)$ $\beta^2 \sim \mathcal{IG}(a_\beta, b_\beta)$

Ce modèle pose les problèmes résumés dans le tableau ci-dessous :

Faiblesses rencontrées dans le modèle 1	Solutions proposées par le modèle 2
$\mathbf{q}$ n'est pas normalisé, on ne peut donc pas observer la stabilité de la chaîne	$\mathbf{q}$ vaut 0 ou 1 ; toute la variance est portée par $\mathbf{c}$
$\mathbf{q}$ et $\mathbf{c}$ risquent d'être fortement corrélés, ce qui peut nuire à la mélangeance des chaînes	Marginalisation partielle de l'échantillonneur
Sensibilité des résultats au choix des hyperparamètres $\mathbf{a}_q$	Échantillonnage de l'hyperparamètre dans une loi Bêta.

## II. Bibliographie

Le chapitre 4 de la thèse de Charly Faure y est dédié, avec le modèle suivant :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{f} + \mathbf{n} \quad (2)$$

où  $\mathbf{f} \sim \prod_i \mathcal{BernGauss}(f_i ; l, \gamma^2)$ . L'échantillon  $f_i$  est donc tiré soit dans une Gaussienne, soit dans un Dirac en 0 (cas particulier d'une Gaussienne de variance nulle). Ce qui peut s'écrire :

$$\mathcal{BernGauss}(l, \gamma^2) = (1 - l) \mathcal{N}_c(0, 0) + l \mathcal{N}_c(0, \gamma^2) \quad (3)$$

Ge et al. (2011) ont une approche similaire, en notant  $\mathbf{f} \sim \mathcal{N}_c(0, \lceil \mathbf{q} \rceil \gamma^2)$ , où les éléments de  $\mathbf{q}$  suivent une loi de Bernoulli.

### III. Calculs

#### 3.1. Nomenclature

M	Nombre de micros
K	Nombre de facteurs
$I_s$	Nombre de moyennes pour le calculs des CSM
$i$	indice associé à une moyenne
$L_q$	nombre d'éléments non-nuls du vecteur $\mathbf{q}$

#### 3.2. Modèle 2 : Parcimonie par priors bernoulliens

On choisit un modèle hiérarchique avec la matrice de mixage  $\mathbf{L}$ , les facteurs  $\mathbf{c}$  et les binaires  $\mathbf{q}$  au même étage :

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{L} \lceil \mathbf{q} \rceil \mathbf{c}_i + \mathbf{n}_i \quad (4)$$

Priors	Hyperpriors
$\mathbf{L} \sim \mathcal{N}_c(0, \frac{\mathbf{I}_{MK}}{K})$	
$\mathbf{c} \sim \mathcal{N}_c(0, \lceil \boldsymbol{\gamma}^2 \rceil)$	$\boldsymbol{\gamma}^2 \sim \mathcal{IG}(a_\gamma, b_\gamma)$
$\mathbf{q} \sim \mathcal{Bern}(l)$	$l \sim \mathcal{Beta}(a_l, b_l)$
$\mathbf{n}   \beta^2 \sim \mathcal{N}_c(0, \beta^2 \lceil \boldsymbol{\sigma}^2 \rceil)$	$\boldsymbol{\sigma}^2 \sim \mathcal{IG}(a_\sigma, b_\sigma)$ $\beta^2 \sim \mathcal{IG}(a_\beta, b_\beta)$

On note par la suite  $\boldsymbol{\Omega}_n = \beta^2 \lceil \boldsymbol{\sigma}^2 \rceil$ . Le paramètre  $\beta$  est introduit par anticipation d'un modèle adapté au cas multirégime d'Airbus.

#### 3.3. Posteriors

##### 3.3.1 Échantillonnage du paramètre de parcimonie $l$

$$\begin{aligned}
[l | \mathbf{q}] &\propto \mathcal{Beta}(l; a_l, b_l) \prod_k^K \mathcal{Bern}(q_k; l) \\
&\propto \frac{\Gamma(a_l + b_l)}{\Gamma(a_l)\Gamma(b_l)} l^{a_l-1} (1-l)^{b_l-1} \prod_k^K l^{q_k} (1-l)^{1-q_k} \\
&\propto \frac{\Gamma(a_l + b_l)}{\Gamma(a_l)\Gamma(b_l)} l^{a_l-1} (1-l)^{b_l-1} l^{\sum_k q_k} (1-l)^{\sum_k 1-q_k} \\
&\propto \mathcal{Beta}(a_l + L_q, b_l + K - L_q)
\end{aligned}$$

### 3.3.2 Échantillonnage en bloc de $\mathbf{c}$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{c}_i | \infty_{-\mathbf{c}_i}] &\propto [\mathbf{y}_i | \infty_{-\mathbf{y}_i}] \mathcal{N}_c(\mathbf{c}_i; 0, \mathbf{q}\boldsymbol{\gamma}^2) \\
&\propto \frac{e^{-(\mathbf{y}_i - \mathbf{L}\mathbf{q}\mathbf{c}_i)^H \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{L}\mathbf{q}\mathbf{c}_i)}}{|\boldsymbol{\Omega}_n|} e^{\mathbf{c}_i^H \boldsymbol{\gamma}^{-2} \mathbf{c}_i} \\
&\propto e^{-(\mathbf{c}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^H \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{c}_i}^{-1} (\mathbf{c}_i - \boldsymbol{\mu}_i)}
\end{aligned}$$

Par identification, on a :

- $\mathbf{c}_i^H \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{c}_i}^{-1} \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i^H (\mathbf{q}\mathbf{L}^H \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} \mathbf{L}\mathbf{q} + \boldsymbol{\gamma}^{-2}) \mathbf{c}_i$
- $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{c}_i}^{-1} \boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{q}^H \mathbf{L}^H \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} \mathbf{y}_i$

Finalement :

$$[\mathbf{c}_i | \infty_{-\mathbf{c}_i}] \propto \mathcal{N}_c(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{c}_i}) \quad (5)$$

où :  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{c}_i} = (\mathbf{q}\mathbf{L}^H \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} \mathbf{L}\mathbf{q} + \boldsymbol{\gamma}^{-2})^{-1}$   
et  $\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{c}_i} \mathbf{q}^H \mathbf{L}^H \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} \mathbf{y}_i$

Dans le cas où le nombre de moyenne est suffisamment grand, on peut échantillonner directement la matrice interspectrale  $\mathbf{S}_{cc} = \mathbb{E}\{\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^H\}$ . On a :

$$\mathbf{c}_i = \boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{x}_i \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}_i \sim \mathcal{N}_c(0, \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{c}_i}),$$

donc :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^H\} = \mathbb{E}\{\boldsymbol{\mu}_i \boldsymbol{\mu}_i^H\} + \mathbb{E}\{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H\} + \underbrace{2\mathbb{E}\{\mathbf{x}_i \boldsymbol{\mu}_i^H\}}_{\rightarrow 0 \text{ quand } I_s \rightarrow \infty},$$

avec :

- $\mathbb{E}\{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H\} = \mathbf{W}_c \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{c}_i}, I_s)$
- $\mathbb{E}\{\boldsymbol{\mu}_i \boldsymbol{\mu}_i^H\} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{c}_i} \mathbf{q}^H \mathbf{L}^H \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} \mathbf{S}_{yy} \mathbf{L}\mathbf{q} \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{c}_i}^H$

### 3.3.3 Échantillonnage de $\mathbf{L}$

La matrice  $\mathbf{L}$  est vectorisée de manière à écrire une matrice de covariance pour la postérieure qui soit à 2 dimensions. On note  $\boldsymbol{\lambda} = \text{vec}(\mathbf{L})$

$$[\boldsymbol{\lambda} | \infty_{-\boldsymbol{\lambda}}] \propto \prod_i^{I_s} [\mathbf{y}_i | \infty_{-\mathbf{y}_i}] [\boldsymbol{\lambda}]$$

Or :

$$\text{vec}(\mathbf{y}_i) = \mathbf{y}_i = \text{vec}(\mathbf{L}\mathbf{q}\mathbf{c}_i) + \mathbf{n}_i = (\mathbf{c}_i^T \mathbf{q} \otimes \mathbf{I}_M) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{n}_i, \quad (6)$$

donc :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\lambda}|\infty_{-\boldsymbol{\lambda}}] &\propto e^{-\sum_i (\mathbf{y}_i - (\mathbf{c}_i^T \mathbf{q} \otimes \mathbf{I}_K) \boldsymbol{\lambda})^H \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} (\mathbf{y}_i - (\mathbf{c}_i^T \mathbf{q} \otimes \mathbf{I}_M) \boldsymbol{\lambda})} e^{-\boldsymbol{\lambda}^H K \mathbf{I}_{MK} \boldsymbol{\lambda}} \\ &\propto e^{-(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}_\lambda)^H \boldsymbol{\Omega}_\lambda^{-1} (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}_\lambda)} \end{aligned}$$

Comme précédemment, par identification, on a finalement :

$$[\boldsymbol{\lambda}|\infty_\lambda] \propto \mathcal{N}_c(\boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Omega}_\lambda) \quad (7)$$

où :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_\lambda &= \left( \sum_i (\mathbf{c}_i^T \mathbf{q} \otimes \mathbf{I}_M)^H \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} (\mathbf{c}_i^T \mathbf{q} \otimes \mathbf{I}_M) + K \mathbf{I}_{MK} \right)^{-1} \\ &= ((\mathbf{q} \mathbf{S}_{cc}^* \mathbf{q}) \otimes (\boldsymbol{\Omega}_n^{-1}) + K \mathbf{I}_{MK})^{-1} \\ \text{et } \boldsymbol{\mu}_\lambda &= \boldsymbol{\Omega}_\lambda \sum_i (\mathbf{c}_i^T \mathbf{q} \otimes \mathbf{I}_M)^H \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} \mathbf{y}_i \\ &= \boldsymbol{\Omega}_\lambda \text{vec}(\boldsymbol{\Omega}_n^{-1} \mathbf{S}_{yy} \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} \mathbf{L} \mathbf{q} \boldsymbol{\Omega}_{c_i} \mathbf{q}) \end{aligned}$$

*Notes :* - Ce dernier résultats s'obtient en remplaçant  $\mathbf{c}_i$  par  $\boldsymbol{\mu}_i$ .

- Les propriétés du produit de Kronecker sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{vec}(ABC) &= (C^T \otimes A) \text{vec}(B) \\ (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T \\ (A \otimes B)^* &= A^* \otimes B^* \\ (A \otimes B)(C \otimes D) &= (AC) \otimes (BD) \end{aligned}$$

si les dimensions des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  le permettent.

### 3.3.4 Échantillonnage de $\gamma^2$

Cas où  $\gamma^2 = \gamma^2 \mathbf{I}_K$

$$\begin{aligned} [\gamma^2 | \mathbf{S}_{cc}] &\propto \prod_i [\mathbf{c}_i | \gamma^2] [\gamma^2] \\ &\propto \frac{e^{-\gamma^{-2} \sum_i \mathbf{c}_i^H \mathbf{c}_i} e^{-\gamma^{-2} b_\gamma}}{\gamma^{2I_s K} \gamma^{2(a_\gamma - 1)}} \end{aligned}$$

$[\gamma^2 | \mathbf{S}_{cc}] \propto \mathcal{IG}(a_\gamma + K I_s, b_\gamma + \text{Trace}(\mathbf{S}_{cc}))$

(8)

Cas où  $\gamma^2 = [\gamma^2] = \text{diag}(\gamma_1^2, \dots, \gamma_k^2, \dots, \gamma_K^2)$

$$[\gamma_k^2 | \mathbf{S}_{cc}] \propto \prod_i [\mathbf{c}_{ik} | \gamma_k^2] [\gamma_k^2]$$

$[\gamma_k^2 | \mathbf{S}_{cc}] \propto \mathcal{IG}(a_\gamma + I_s, b_\gamma + \mathbf{S}_{cc_{kk}})$

(9)

### 3.3.5 Échantillonnage de $\sigma^2$

On considère un bruit hétéroskédastique :  $\sigma^2 = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2, \dots, \sigma_M^2)$ .

$$\begin{aligned}
 [\sigma^2 | \infty_{-\sigma^2}] &\propto \prod_i [\mathbf{y}_i | \infty_{-\mathbf{y}_i}] [\sigma] \\
 &\propto \frac{e^{-\sum_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{L} \mathbf{q} \mathbf{c}_i)^H \beta^{-2} \sigma^{-2} (\mathbf{y}_i - \mathbf{L} \mathbf{q} \mathbf{c}_i)} e^{-\sigma^{-2} b_\sigma}}{\beta^2 |\sigma|^{I_s}} \frac{e^{-\sigma^{-2} b_\sigma}}{\sigma^{2(a_\sigma-1)}} \\
 &\propto \frac{e^{-\text{Trace} \left( \beta^{-2} \sigma^{-2} \sum_i \left\{ \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^H + \mathbf{L} \mathbf{q} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^H \mathbf{q} \mathbf{L}^H - \mathbf{y}_i \mathbf{c}_i^H \mathbf{q} \mathbf{L}^H - \mathbf{L} \mathbf{q} \mathbf{c}_i \mathbf{y}_i^H \right\} \right)}}{|\sigma^2|^{I_s}} \frac{e^{-\sigma^{-2} b_\sigma}}{\sigma^{2(a_\sigma-1)}}
 \end{aligned}$$

On réinjecte  $\mathbf{c}_i = \boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{x}_i$  et on suppose que  $\mathbb{E}(\mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^H) \approx 0$ . En notant :

$$\mathbf{P} = \mathbf{L} \mathbf{q} \boldsymbol{\Omega}_{c_i} \mathbf{q} \mathbf{L}^H \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} = \mathbf{P}^H,$$

on a :  $\mathbf{L} \mathbf{q} \boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{P} \mathbf{y}_i$ . Finalement :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \mathbf{S}_{yy} + \mathbf{L} \mathbf{q} \mathbf{W}_c \mathbf{q} \mathbf{L}^H + \mathbf{P} \mathbf{S}_{yy} \mathbf{P} - \mathbf{S}_{yy} \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{S}_{yy} \\
 &= (\mathbf{I}_M - \mathbf{P}) \mathbf{S}_{yy} (\mathbf{I}_M - \mathbf{P}) + \mathbf{L} \mathbf{q} \mathbf{W}_c \mathbf{q} \mathbf{L}^H
 \end{aligned}$$

$$\boxed{[\sigma_m^2 | \infty_{-\sigma_m^2}] \propto \mathcal{IG}(a_\sigma + M I_s, b_\sigma + \beta^{-2} \mathbf{T}_{mm})} \quad (10)$$

### 3.3.6 Échantillonnage de $\beta^2$

De manière similaire à l'échantillonnage de  $\sigma_m$  :

$$\begin{aligned}
 [\beta^2 | \infty_{-\beta^2}] &\propto \prod_i [\mathbf{y}_i | \infty_{-\mathbf{y}_i}] [\beta^2] \\
 &\propto \frac{e^{-\beta^{-2} \text{Trace}(\sigma^{-2} \mathbf{T})} e^{-\beta^{-2} b_\beta}}{|\beta^2 \mathbf{I}_M|^{I_s}} \frac{e^{-\beta^{-2} b_\beta}}{\beta^{2(a_\beta-1)}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{[\beta^2 | \infty_{-\beta^2}] \propto \mathcal{IG}(a_\beta + M I_s, b_\beta + \text{Trace}(\sigma^{-2} \mathbf{T}))} \quad (11)$$

### 3.3.7 Échantillonnage des binaires du vecteur $\mathbf{q}$

Sans marginalisation

$$\begin{aligned}
 [q_k | \infty_{-q_k}] &\propto \prod_i [\mathbf{y}_i | q_k, \infty_{-\mathbf{y}_i}] [q_k] \\
 &\propto \frac{e^{-\sum_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{L} \mathbf{q} \mathbf{c}_i)^H \boldsymbol{\Omega}_n^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{L} \mathbf{q} \mathbf{c}_i)}}{|\boldsymbol{\Omega}_n|^{I_s}} l^{q_k} (1-l)^{1-q_k} \\
 &\propto e^{-\text{Trace}(\boldsymbol{\Omega}_n^{-1} \mathbf{T}(q_k)) - q_k \ln(\frac{1}{l} - 1)} \\
 &\propto e^{-g(q_k)}
 \end{aligned}$$

Le changement d'état d'un binaire se traduit par l'ajout de la quantité  $\delta_k = (-1)^{q_k}$ . On note  $q_{k_{mod}} = q_k + \delta_k$ . La probabilité que le binaire change d'état est :

$$\begin{aligned} [q_{k_{mod}} | \infty_{-q_k}] &\propto \prod_i [\mathbf{y}_i | q_{k_{mod}}, \infty_{-\mathbf{y}_i, \mathbf{c}}] [q_{k_{mod}}] \\ &\propto e^{-\text{Trace}(\mathbf{\Omega}_n^{-1} \mathbf{T}(q_{k_{mod}})) - q_{k_{mod}} \ln(\frac{1}{l} - 1)} \\ &\propto e^{-g(q_{k_{mod}})} \end{aligned}$$

Pour que la somme de ces deux probabilité soit égale à 1, il faut les normaliser. La probabilité qu'un binaire change d'état est alors :

$$\begin{aligned} [q_{k_{mod}} | \infty_{-q_k}] &= \frac{e^{-g(q_{k_{mod}})}}{e^{-g(q_{k_{mod}})} + e^{-g(q_k)}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-(g(q_k) - g(q_{k_{mod}}))}} \end{aligned}$$

Un échantillon  $t \sim \mathcal{U}(0, 1)$  est comparé à  $[q_{k_{mod}} | \infty_{-q_k}]$ . S'il y est inférieur, le binaire change d'état, sinon il conserve son état actuel.

En pratique, comme  $\mathbf{T}$  peut prendre de grandes valeurs (not. si  $I_s$  est grand), le changement est accepté si

$$-\ln\left(\frac{1}{t} - 1\right) < g(q_k) - g(q_{k_{mod}})$$

**Avec marginalisation sur les facteurs  $\mathbf{c}$**

$$[q_k | \infty_{-q_k, -\mathbf{c}}] \propto \prod_i [\mathbf{y}_i | q_k, \infty_{-\mathbf{y}_i, -\mathbf{c}}] [q_k]$$

Or,

$$[\mathbf{y}_i | q_k, \infty_{-\mathbf{y}_i, -\mathbf{c}}] = \mathcal{N}_c(0, \underbrace{\mathbf{L} \mathbf{q} \mathbf{\gamma}^2 \mathbf{q} \mathbf{L}^H}_{\mathbf{B}} + \mathbf{\Omega}_n) \quad (12)$$

Ce résultat est démontré en annexe A.

La posterior marginalisée sur le binaire  $q_k$  est donc :

$$\begin{aligned} [q_k | \infty_{-q_k, -\mathbf{c}}] &\propto \frac{e^{-\sum_i \mathbf{y}_i^H \mathbf{B}(q_k)^{-1} \mathbf{y}_i}}{|\mathbf{B}(q_k)|^{I_s}} l^{q_k} (1-l)^{1-q_k} \\ &\propto e^{-\text{Trace}(\mathbf{B}(q_k)^{-1} \mathbf{S}_{yy}) - I_s \ln |\mathbf{B}(q_k)| - q_k \ln(\frac{1}{l} - 1)} \\ &\propto e^{-g(q_k)} \end{aligned}$$

De la même manière, la probabilité que le binaire change d'état est :

$$\begin{aligned} [q_{k_{mod}} | \infty_{-q_{k_{mod}}, -\mathbf{c}}] &\propto \frac{e^{-\sum_i \mathbf{y}_i^H \mathbf{B}(q_{k_{mod}})^{-1} \mathbf{y}_i}}{|\mathbf{B}(q_{k_{mod}})|^{I_s}} l^{q_{k_{mod}}} (1-l)^{1-q_{k_{mod}}} \\ &\propto e^{-g(q_{k_{mod}})} \end{aligned}$$

Après normalisation, le changement d'état du binaire est accepté si

$$-\ln\left(\frac{1}{t} - 1\right) < g(q_k) - g(q_{k_{mod}})$$

#### 4.1. Pour le couple $\mathbf{c}, \mathbf{L}$

Veit et al. (2008) propose un moyen de gérer l'ambiguïté d'échelle entre les paramètres  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{L}$ . D'après cet article, lever cette ambiguïté permettrait une exploration de la loi cible plus efficace, avec une meilleure mélangeance, en réduisant le temps de chauffe et la corrélation de ces paramètres. De manière générale, cette ambiguïté se retrouve pour tout problème de la forme :

$$z = h \star x + b$$

où  $\star$  est un opérateur bilinéaire quelconque, un produit matriciel dans notre cas. En effet, on a alors, pour tout couple  $(x, h)$  et  $s \neq 0$  :

$$(sx) \star \left( \frac{h}{s} \right) = x \star h$$

Veit et al. (2008) propose donc d'échantillonner le paramètre de changement d'échelle sans modifier la loi cible. Dans notre modèle, il faut un facteur d'échelle  $s_k$  par facteur :

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{q}\mathbf{c} + \mathbf{n} = (\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{S}^{-1})\mathbf{q}(\mathbf{S}\tilde{\mathbf{c}}) + \mathbf{n} \quad \text{avec} \quad \mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_k, \dots, s_K).$$

On peut montrer par un changement de variable

$$\mathbf{L}_k = \frac{\tilde{\mathbf{L}}_k}{s_k} \quad \text{et} \quad \mathbf{c}_k = \tilde{\mathbf{c}}_k s_k$$

que l'échantillonnage de  $s_k$  se fait selon la loi

$$[s_k | \infty_{-s_k}] \propto |s_k|^{2(I_s - M - 1)} [\mathbf{c}_k, \mathbf{L}_k | s_k] \quad (13)$$

Sous l'hypothèse d'indépendance de  $\mathbf{c}_k$  et  $\mathbf{L}_k$ ,

$$[s_k | \infty_{-s_k}] \propto |s_k|^{2(I_s - M - 1)} \prod_i [\mathbf{c}_{ki}] \prod_m [\mathbf{L}_{mk}]. \quad (14)$$

avec  $|s_k|^2 = ss^*$ .

En posant  $r_k = |s_k|^2$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} [r_k | \infty] &\propto r_k^{I_s - M - \frac{1}{2} - 1} e^{-r_k \sum_i \tilde{\mathbf{c}}_{ki}^H \gamma_k^{-2} \tilde{\mathbf{c}}_{ki}} e^{-r_k^{-1} \sum_m \tilde{\mathbf{L}}_{mk}^H K \tilde{\mathbf{L}}_{mk}} \\ &\propto r_k^{I_s - M - \frac{1}{2} - 1} e^{-r_k \gamma_k^{-2} \tilde{\mathbf{S}}_{cc_{kk}}} e^{-r_k^{-1} K \sum_m \tilde{\mathbf{L}}_{mk}^H \tilde{\mathbf{L}}_{mk}} \end{aligned}$$

$r$  suit donc une loi Gaussienne Inverse Généralisée (GIG) de la forme :

$$f_{GIG}(r) = \left( \frac{a_r}{b_r} \right)^{\frac{p_r}{2}} \frac{r^{p_r - 1}}{2 Y_{p_r}(\sqrt{a_r b_r})} e^{-\frac{1}{2}(a_r r + b_r r^{-1})}, \quad r > 0$$

$Y_{p_r}(\cdot)$  est la fonction de Bessel de seconde espèce.

Par identification, les paramètres sont :

$$\begin{aligned} a_{r_k} &= 2\gamma_k^{-2} \tilde{\mathbf{S}}_{cc_{kk}} \\ b_{r_k} &= 2K \sum_m \tilde{\mathbf{L}}_{mk}^H \tilde{\mathbf{L}}_{mk} \\ p_r &= I_s - M - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Après tirage de  $r_k$ , on calcule  $s_k = \sqrt{r_k} e^{j\phi}$  avec  $\phi \sim \mathcal{U}([0; 2\pi[)$ .

Dans le cas où  $M \approx K \ll I_s$ , les paramètres sont de l'ordre de grandeur suivant :

$$\begin{aligned} a_{r_k} &\approx 2I_s \\ b_{r_k} &\approx 2M \\ p_r &\approx I_s - M \end{aligned}$$

le mode de la GIG est alors :

$$\begin{aligned} \text{mode}_{GIG} &= \frac{(p_r - 1) + \sqrt{(p_r - 1)^2 + a_r b_r}}{a_r} \\ &\approx \frac{I_s + \sqrt{I_s^2}}{2I_s} \approx 1 \end{aligned}$$

et la variance est très faible. Le paramètre d'échelle oscille donc légèrement autour de 1, ce qui ne modifie pas l'échelle du problème.

#### 4.2. Pour le couple $\beta^2, \sigma^2$

L'ambiguïté se pose également pour le couple  $\beta^2, \sigma^2$  dans le cas où on exploite  $P$  jeux de données (pour différents régime moteur par ex.). On note  $\beta^2$  le vecteur contenant les  $P$  valeurs réelles de  $\beta_p^2$  et  $\sigma^2$  celui contenant les  $M$  valeurs réelles  $\sigma_m^2$ . Le facteur d'échelle suit alors la loi suivante :

$$\begin{aligned} [s|\infty] &\propto |s|^{P-M-1} \prod_p [s\beta_p^2] \prod_m [s^{-1}\sigma_m^2] \\ &\propto |s|^{P-M-1} e^{-\sum_p \beta_p^{-2} b_\beta s^{-1}} e^{-\sum_m \sigma_m^{-2} b_\sigma s} \\ &\propto \mathcal{GIG}(2 \sum_m \sigma_m^{-2} b_\sigma, 2 \sum_p \beta_p^{-2} b_\beta, P - M) \end{aligned}$$

$s$  doit être réel et son signe est tiré dans une loi uniforme  $\mathcal{U}([0; 1])$ .

---

## V. Résultats et analyse

### 5.1. Paramètres de la simulation

- $M = 20$
- $I_s = 10^4$
- SNR = 0 dB et -10 dB
- Nombre de fonctions de base : 5
- Nombre de facteurs recherchés :  $K_r = M - 1$

Le paramètre  $\beta^2$  est fixé à 1.



### Priors

- $a_\sigma = b_\sigma = a_\gamma = b_\gamma = 0.01$  (paramètres pour un prior Gamma non-informatif)
- $a_l = b_l = 1$  (paramètre pour un prior bêta non-informatif)

*Remarque :* Le choix d'un prior non informatif pour  $\gamma^2$  est important pour la robustesse du solveur. De cette façon, si le nombre de binaires  $q$  est surestimé, une correction pourra avoir lieu par une mise à 0 de certaines valeurs de  $\gamma_k^2$  et du  $\mathbf{c}_k$  correspondant.

### Initialisation

- $\mathbf{L}_{(0)} \sim \mathcal{N}_c(0, \mathbf{I}/K_r)$
- $\sigma_{m(0)}^2 = \text{Trace}(\mathbf{S}_{yy})/M$
- $\gamma_{k(0)}^2 = 0.3 \times \sigma_{m(0)}^2$  (hypothèse d'un SNR à -5 dB ( $10 \log_{10}(0.3)$ ))
- $\mathbf{q}_{(0)} = \mathbf{1}$

## 5.2. Comparaison du modèle 2 AVEC et SANS marginalisation

On compare ici le cas où  $\mathbf{q}$  est tiré (toujours en bloc) suivant une postérieur marginalisée ou non.

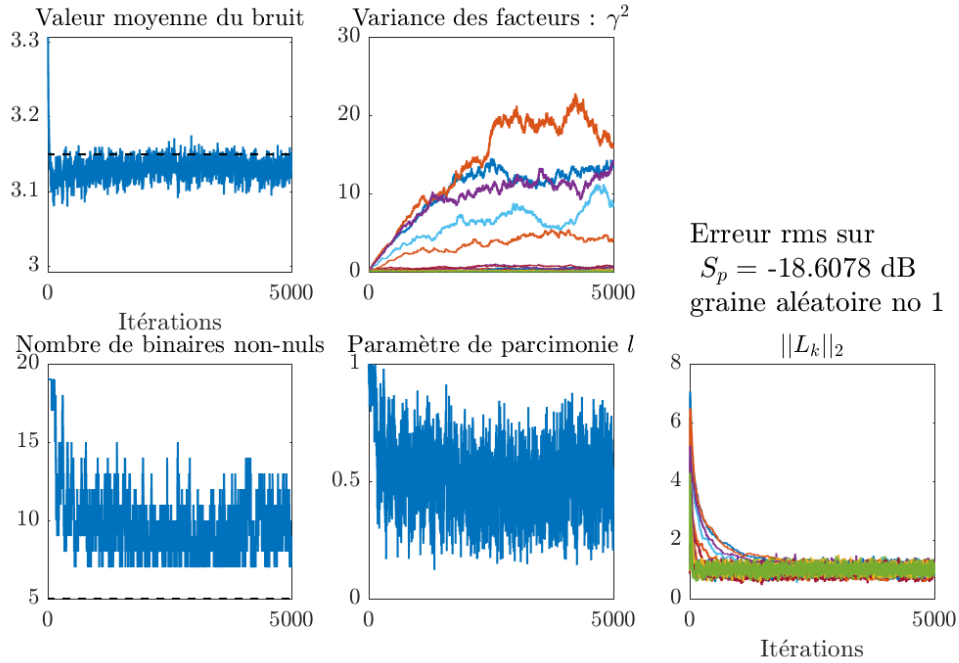


FIGURE 1 –  $SNR = 0$  dB – Modèle 2 AVEC marginalisation

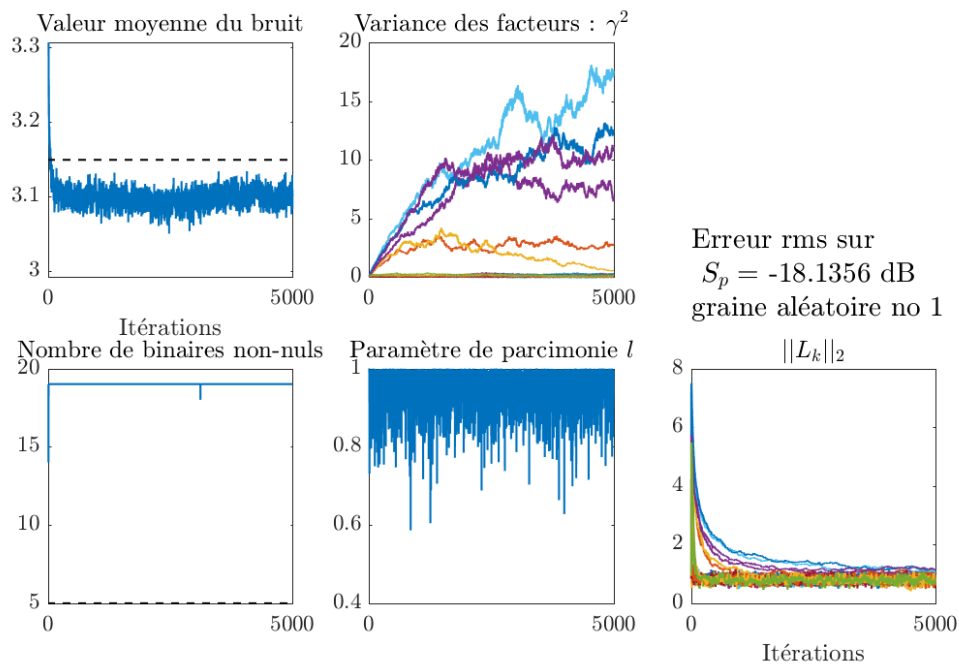


FIGURE 2 –  $SNR = 0 \text{ dB}$  – *Modèle 2 SANS marginalisation*

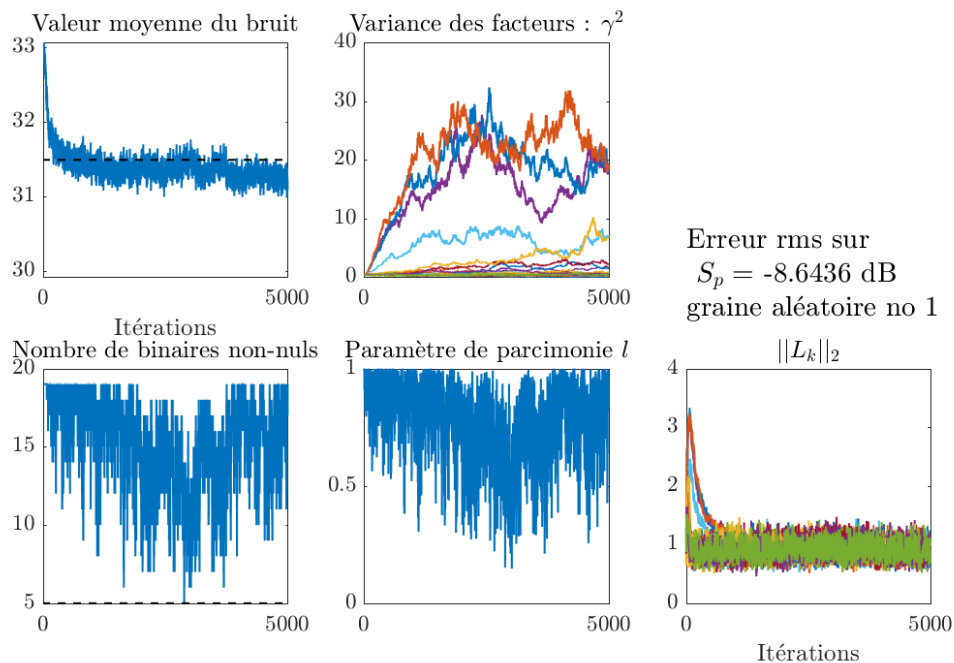


FIGURE 3 –  $SNR = -10 \text{ dB}$  – *Modèle 2 AVEC marginalisation*

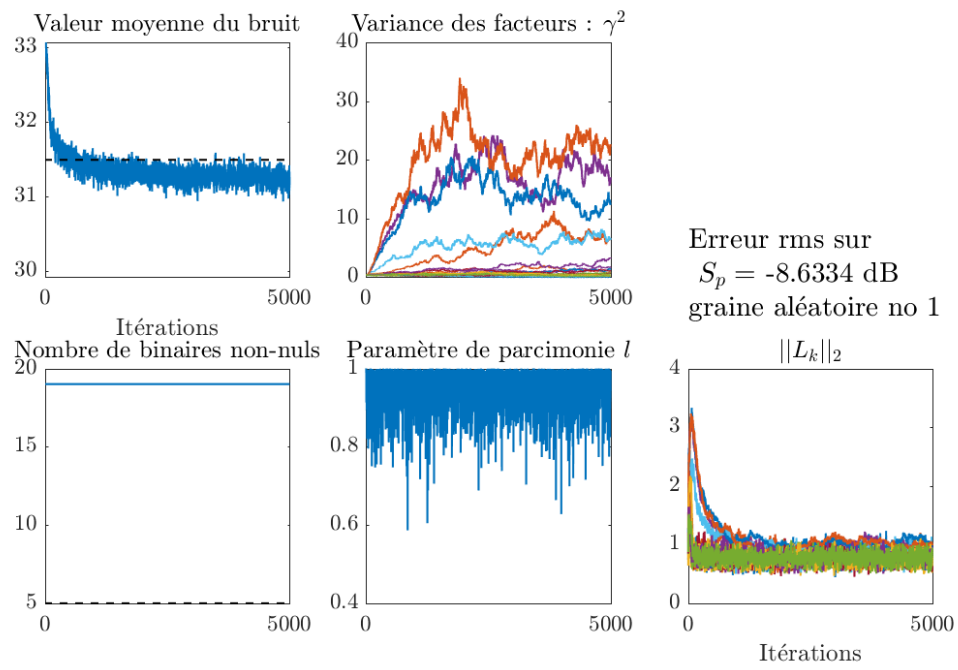


FIGURE 4 –  $SNR = -10$  dB – Modèle 2 SANS marginalisation

### 5.3. Effet de l'échantillonnage d'un facteur d'échelle

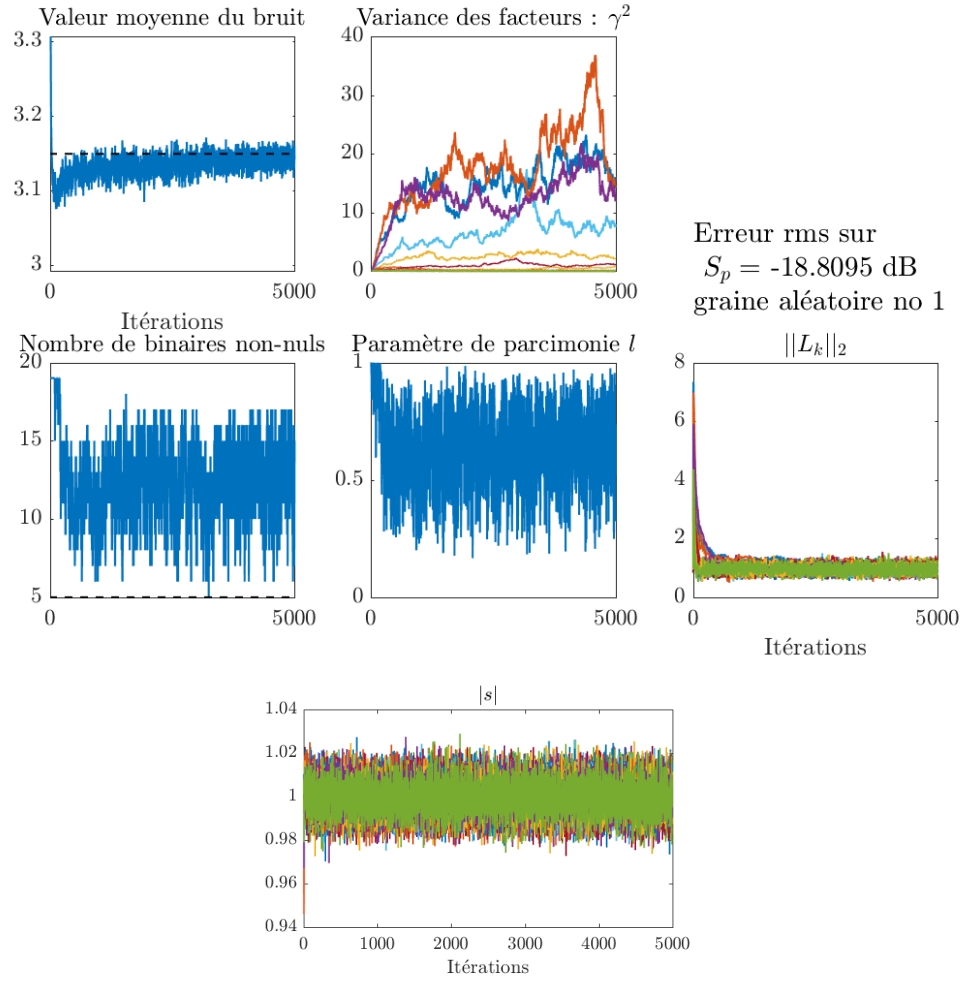


FIGURE 5 –  $SNR = 0$  dB – Modèle 2, avec marginalisation, AVEC échantillonnage d'un facteur d'échelle  $s$ .

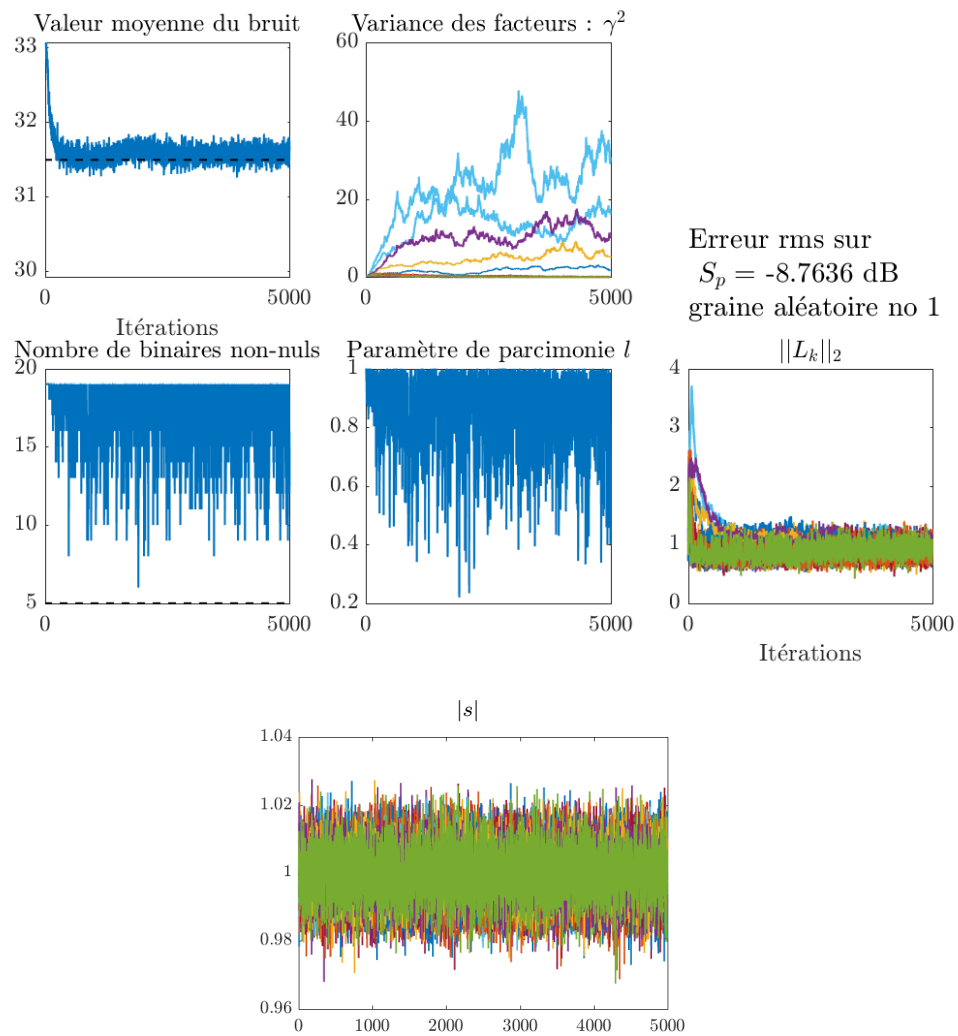


FIGURE 6 –  $SNR = -10$  dB – Modèle 2, avec marginalisation, AVEC échantillonnage d'un facteur d'échelle  $s$ .

#### 5.4. Modèle 2 : binaires fixés à 1

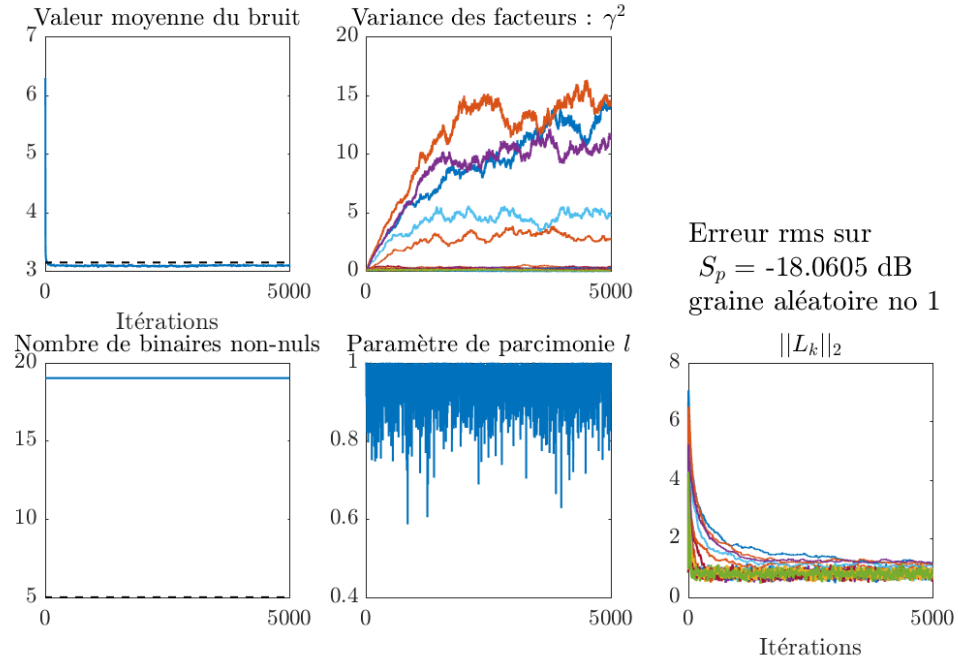


FIGURE 7 –  $SNR = 0$  dB – Modèle 2, avec marginalisation,  $\mathbf{q} = 1$  (sans scaling).

### 5.5. Modèle 2 : prior informatif sur $l$

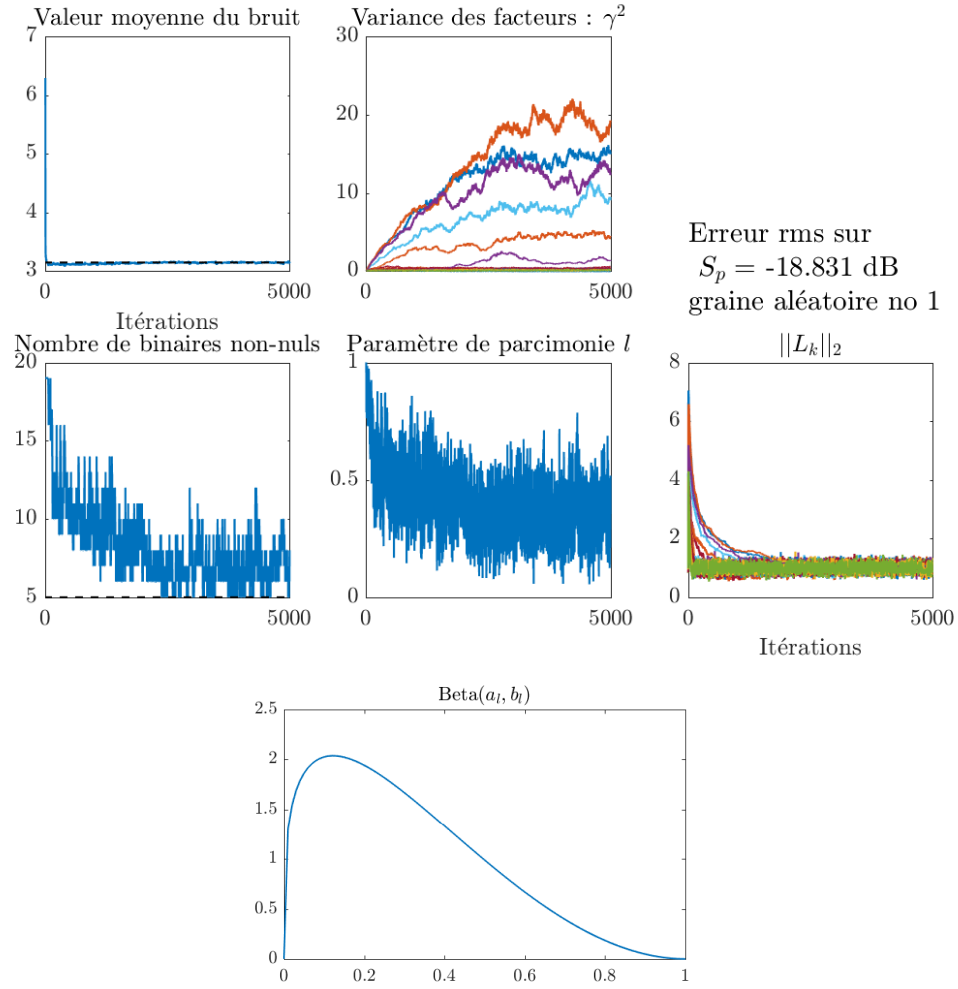


FIGURE 8 –  $SNR = 0$  dB – Modèle 2, avec marginalisation, le prior sur le paramètre de parcimonie  $l$  n'est pas uniforme (sans scaling).

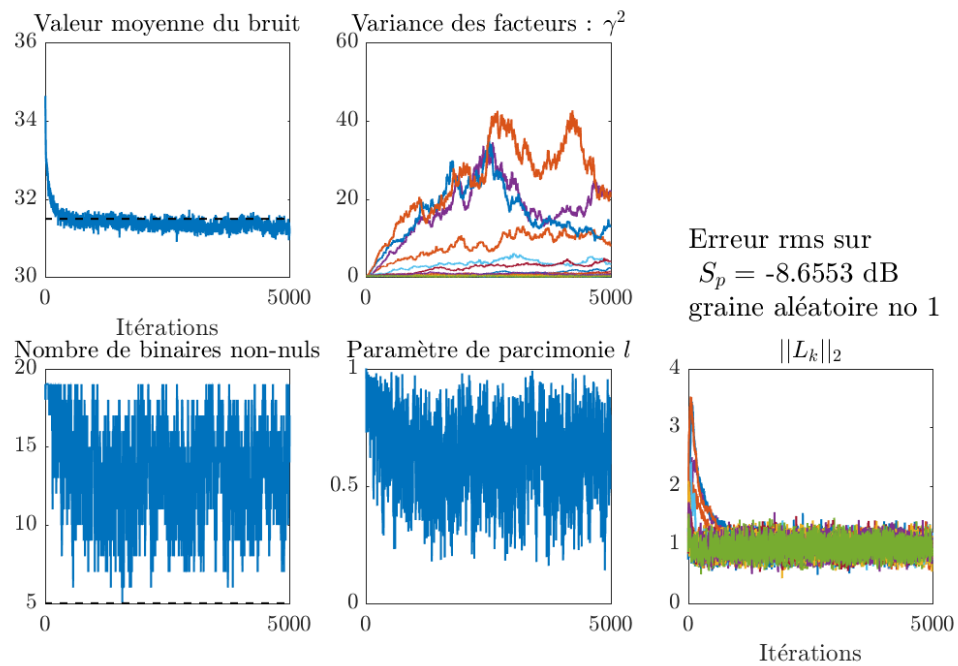


FIGURE 9 –  $SNR = -10$  dB – Modèle 2, avec marginalisation, le prior sur le paramètre de parcimonie  $l$  n'est pas uniforme (sans scaling).



## 5.6. Comparaison avec le modèle 1

Homoscédasticité des facteurs :  $\gamma^2 = \gamma^2 \mathbf{I}_K$

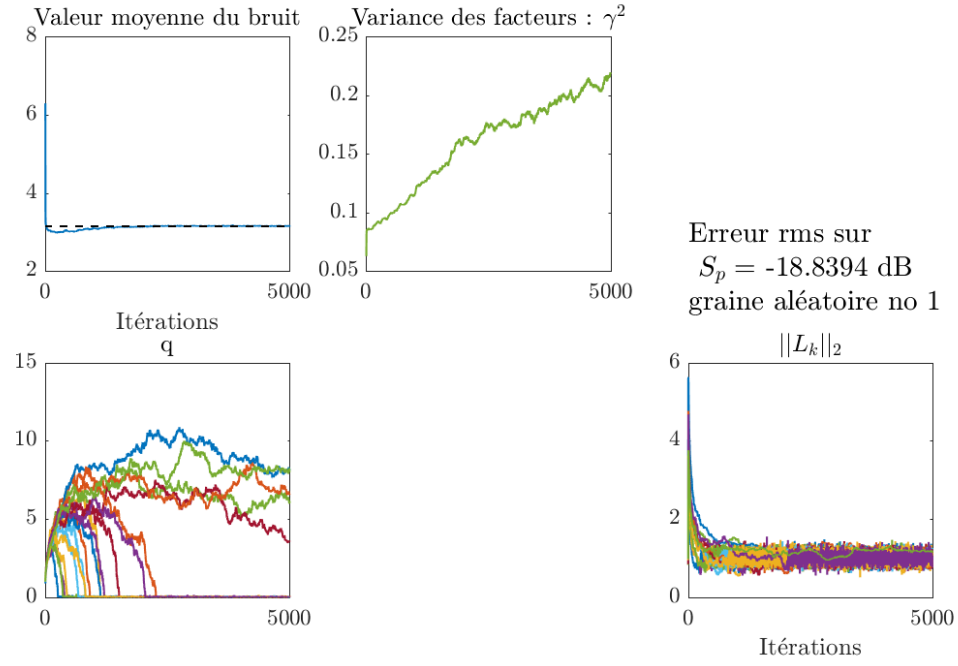


FIGURE 10 –  $SNR = 0$  dB – Modèle 1, avec  $\gamma^2 = \gamma^2 \mathbf{I}_K$  .

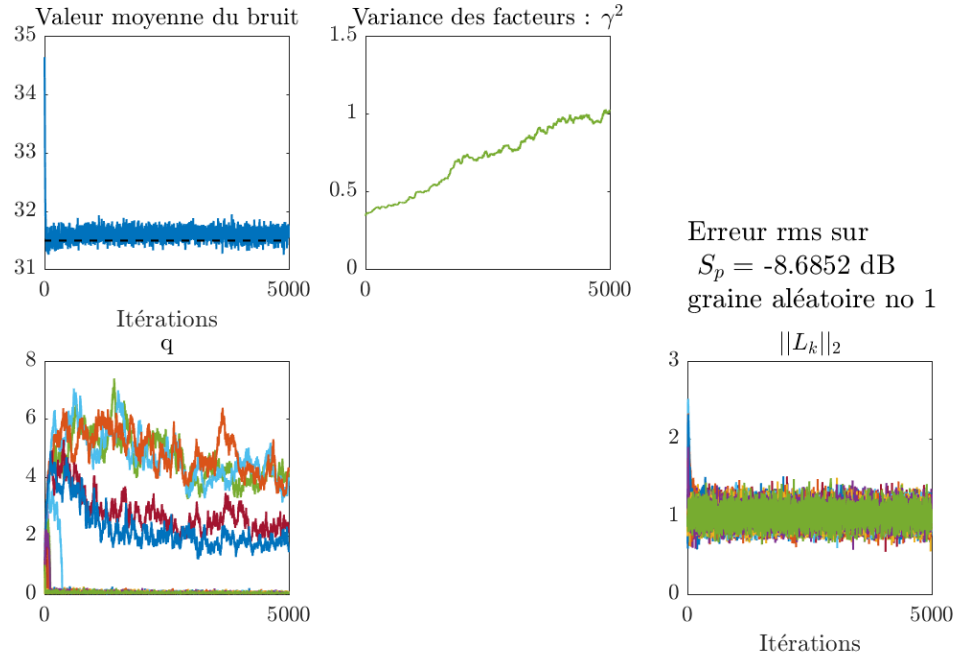


FIGURE 11 –  $SNR = -10$  dB – Modèle 1, avec  $\gamma^2 = \gamma^2 \mathbf{I}_K$  .

# Hétéroscédasticité des facteurs : $\gamma^2 = \lceil \gamma^2 \rceil$

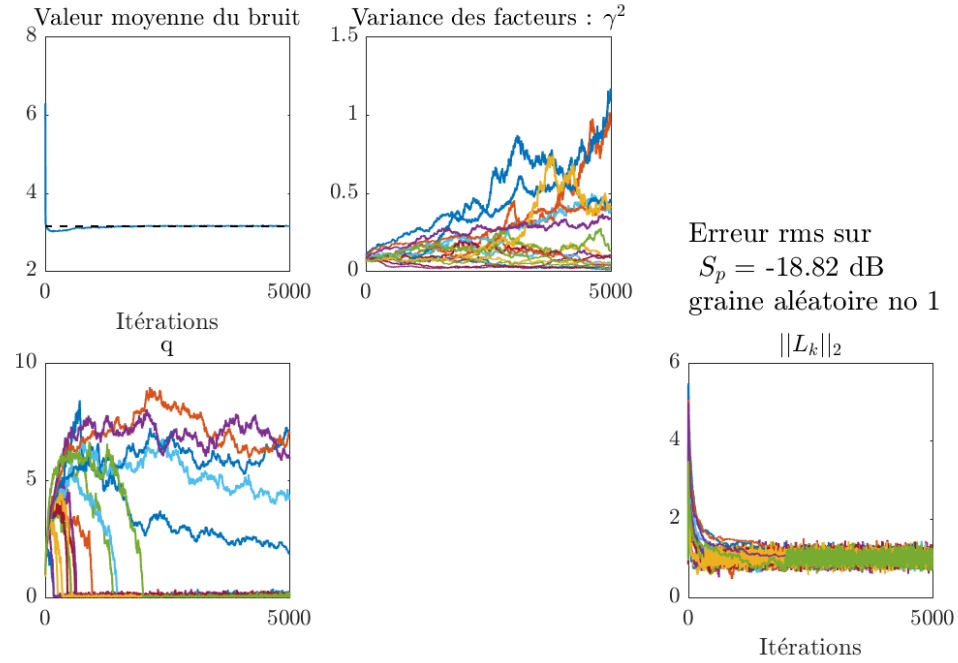


FIGURE 12 –  $SNR = 0 \text{ dB}$  – *Modèle 1*, avec  $\gamma^2 = \lceil \gamma^2 \rceil$  .

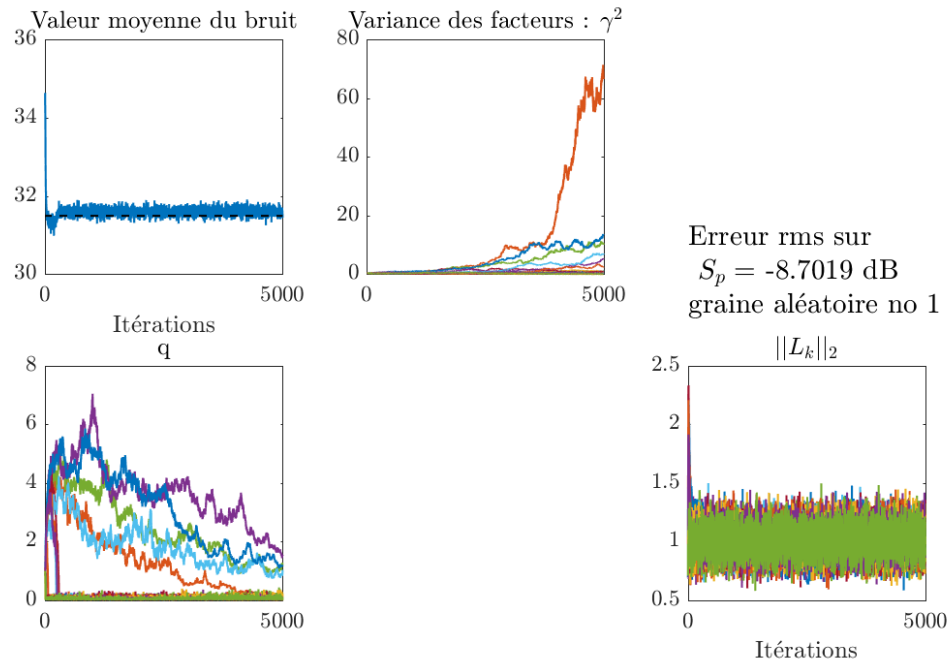


FIGURE 13 –  $SNR = -10 \text{ dB}$  – *Modèle 1*, avec  $\gamma^2 = \lceil \gamma^2 \rceil$  .

## Sensibilité à l'initialisation

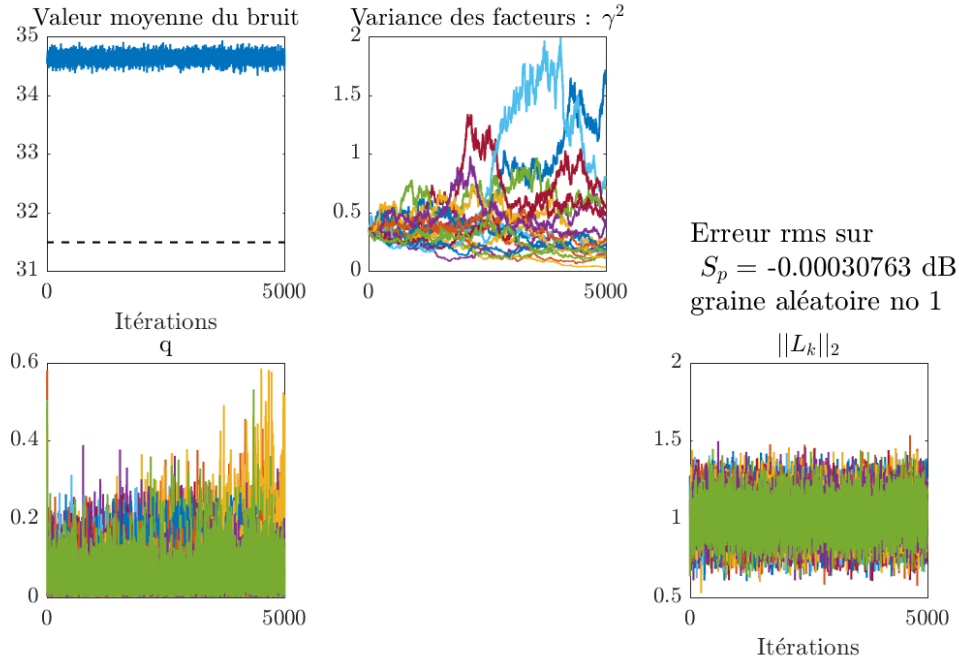


FIGURE 14 –  $SNR = -10$  dB – *Modèle 1*, avec  $\mathbf{q}_{(0)} = 2$ .

### 5.7. Observations

#### Marginalisation :

- Mélangeance : La marginalisation favorise la mélangeance des chaîne et ainsi la sélection de l'ordre du modèle est plus précise. Sans marginalisation, le signal est surestimé, le résultat est moins parcimonieux.
- Convergence : La marginalisation n'accélère pas visiblement la convergence. Cette observation variera sûrement dans le cas d'initialisation moins favorables.
- Coût de calcul :
  - Dans le cas d'un échantillonnage en bloc de  $\mathbf{q}$ , la marginalisation est à peine plus coûteuse (calcul d'un déterminant et d'un inverse de  $\mathbf{B}$ , de taille  $M \times M$ )
  - Si  $\mathbf{q}$  n'est pas échantillonné en bloc, la marginalisation est un gain de temps considérable puisqu'il évite de mettre à jour  $\mathbf{S}_c$  après chaque tirage d'un  $\mathbf{q}_k$ .

**Facteur d'échelle :** l'échantillonnage du facteur d'échelle accélère légèrement la convergence, visible notamment sur l'évolution du paramètre  $\gamma^2$  qui croît plus rapidement.

**Prior informatif sur  $l$  :** Le résultat est plus parcimonieux, mais la convergence n'est pas accélérée, et les résultats ne sont pas particulièrement améliorés.

**Choix de l'initialisation :** Ces deux modèles sont très sensibles à l'initialisation. Le modèle 2 présente un jeu de paramètres sensibles (les  $a_\gamma$ ) de moins à initialiser, ce qui améliore sa robustesse.

**Note sur la variance de  $\mathbf{L}$**  Le prior sur  $\mathbf{L}$  pourrait être :

$$\mathbf{L} \sim \mathcal{N}_c(0, \frac{\mathbf{I}_{MK}}{L_q})$$

avec  $L_q = \sum_k q_k$ . De cette façon, l'estimation de  $\mathbf{L}$  ne dépendrait pas du choix du nombre de facteurs recherchés. Ce prior implique que  $\mathbf{q}$  devienne le parent de  $\mathbf{L}$  dans le graphe hiérarchique. Les postérieurs sur  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{L}$  sont alors changés :

- $\Omega_\lambda = ((\mathbf{q}\mathbf{S}_{cc}^*\mathbf{q}) \otimes (\Omega_n^{-1}) + L_q\mathbf{I}_{MK})^{-1}$
- $[q_k | \infty_{-q_k, -c}] \propto \prod_i [\mathbf{y}_i | q_k, \infty_{-\mathbf{y}_i, -c}] [q_k]$   
 $\propto e^{-\text{Trace}(\mathbf{B}(q_k)^{-1}\mathbf{S}_{yy}) - I_s \ln |\mathbf{B}(q_k)| - q_k \ln(\frac{1}{l} - 1) - \boldsymbol{\lambda}^H \boldsymbol{\lambda} L_q + MK \ln(L_q)}$

De même pour la version non-marginalisée.

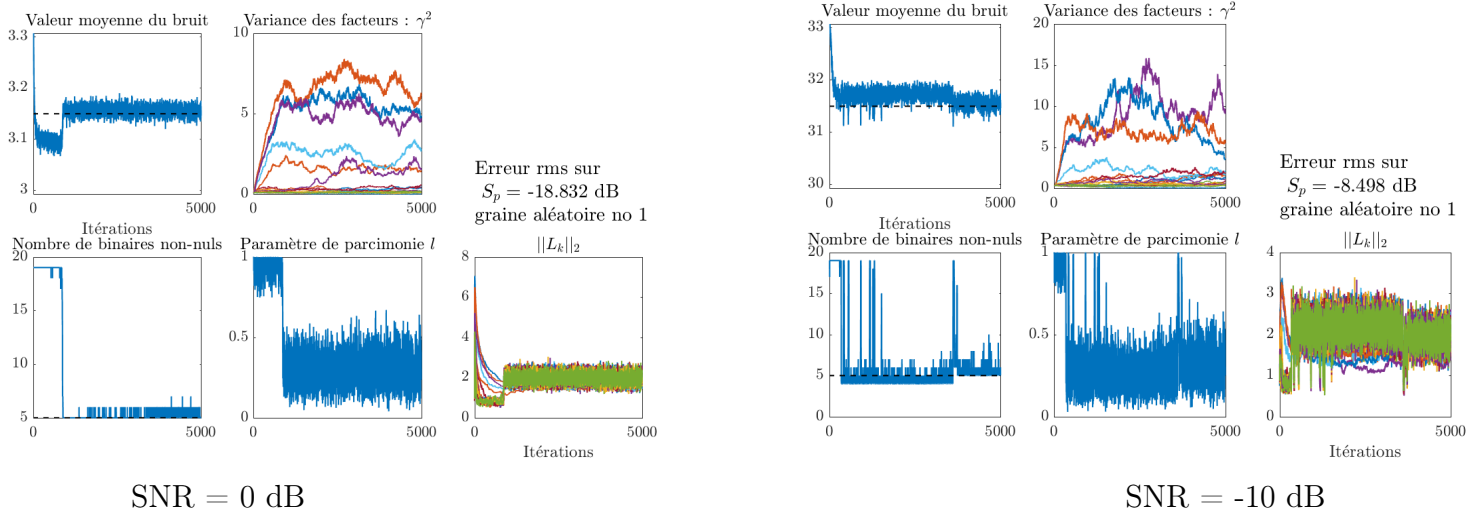


FIGURE 15 – *Modèle 1 modifié : le prior sur  $\mathbf{L}$  dépend de  $\mathbf{q}$ .*

Le résultat est plus parcimonieux mais oscille fortement entre 2 modes, sûrement à cause de la corrélation introduite entre  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{q}$ .

## Annexe A. Détail du calcul de la postérieure marginalisée

La marginalisation revient à projeter la loi conjointe  $[\mathbf{y}_i, \mathbf{c}_i]$  sur  $\mathbf{c}_i$  :

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}_i | \infty_{-c}] &= \int [\mathbf{y}_i, \mathbf{c}_i] d\mathbf{c}_i \\ &= \int [\mathbf{y}_i | \mathbf{c}_i][\mathbf{c}_i] d\mathbf{c}_i \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}_i | \mathbf{c}_i][\mathbf{c}_i] &= e^{(\mathbf{y}_i - \mathbf{L}q\mathbf{c}_i)^H \sigma_n^{-2} (\mathbf{y}_i - \mathbf{L}q\mathbf{c}_i)} e^{c^h \gamma^{-2} \mathbf{c}_i} \\ &= e^{-\mathbf{y}_i^H \sigma_n^{-2} \mathbf{y}_i} e^{\underbrace{(\mathbf{L}q\mathbf{c}_i)^H \sigma_n^{-2} \mathbf{y}_i}_{\mathbf{c}_i \Omega_{\mathbf{c}_i}^{-1} \boldsymbol{\mu}_i}} e^{\underbrace{\mathbf{y}_i^H \sigma_n^{-2} \mathbf{L}q\mathbf{c}_i}_{\boldsymbol{\mu}_i^H \Omega_{\mathbf{c}_i}^{-1} \mathbf{c}_i}} e^{\underbrace{-(\mathbf{L}q\mathbf{c}_i)^H \sigma_n^{-2} \mathbf{L}q\mathbf{c}_i}_{-\mathbf{c}_i^H \Omega_{\mathbf{c}_i}^{-1} \mathbf{c}_i}} \\ &= C_1 e^{-(\mathbf{c}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^H \Omega_{\mathbf{c}_i} (\mathbf{c}_i - \boldsymbol{\mu}_i)} \end{aligned}$$

avec  $\boldsymbol{\mu}_i$  et  $\Omega_{\mathbf{c}_i}$  sont donnés dans l'encart (5). Donc,

$$[\mathbf{y}_i | \infty_{-c}] = \int [\mathbf{y}_i | \mathbf{c}_i][\mathbf{c}_i] d\mathbf{c}_i = C_1 \underbrace{\int \mathcal{N}_c(\boldsymbol{\mu}_i, \Omega_{\mathbf{c}_i}) d\mathbf{c}_i}_{=1} = C_1$$

Par identification,

$$\begin{aligned} C_1 e^{-\boldsymbol{\mu}_i^H \Omega_{\mathbf{c}_i} \boldsymbol{\mu}_i} &= e^{-\mathbf{y}_i^H \sigma_n^{-2} \mathbf{y}_i} \\ \Leftrightarrow C_1 &= e^{-\mathbf{y}_i^H \sigma_n^{-2} \mathbf{y}_i} e^{\underbrace{\mathbf{y}_i^H \sigma_n^{-2} \mathbf{L}q\Omega_{\mathbf{c}_i} q^H \mathbf{L}^H \sigma_n^{-2} \mathbf{y}_i}_A} \\ C_1 &= e^{-\mathbf{y}_i^H B^{-1} \mathbf{y}_i} \end{aligned}$$

avec

$$A = \frac{\sigma_n^{-2}}{1 + \underbrace{\mathbf{L}^{H-1} q^{H-1} \gamma^{-2} q^{-1} \mathbf{L}^{-1}}_{A_2^{-1}} \sigma_n^2}$$

et

$$\begin{aligned} B^{-1} &= -A + \sigma_n^{-2} = \frac{-\sigma_n^{-2} + \sigma_n^{-2} (1 + A_2^{-1} \sigma_n^2)}{1 + A_2^{-1} \sigma_n^2} \\ &= \frac{1}{A_2 + \sigma_n^2} \end{aligned}$$

Finalement,

$$[\mathbf{y}_i | \infty_{-c}] = C_1 = \mathcal{N}_c(\mathbf{0}, B) \quad \text{où} \quad B = \mathbf{L}q\gamma^2 q^H \mathbf{L}^H + \sigma_n^2.$$

## Références

Di Ge, Jérôme Idier, and Eric Le Carpentier. Enhanced sampling schemes for mcmc based blind bernoulli–gaussian deconvolution. *Signal Processing*, 91(4) :759–772, 2011.

Thomas Veit, Jérôme Idier, and Saïd Moussaoui. Rééchantillonnage de l'échelle dans les algorithmes mcmc pour les problèmes inverses bilinéaires. 2008.