Étude bibliographique : Méthodes de localisation de sources aéroacoustiques

Alice Dinsenmeyer

Pourquoi : localisation de sources dans le sous-sol, dans des tissus humains, dans des pièces industrielles, dans les fluides (avec ou sans écoulement, dans un espace clos ou non). Dans chaque contexte, la nature des sources varie.

Objectif : caractériser quantitativement/qualitativement les sources à partir de mesures obtenue en quelques points discrets de l'espace.

Contexte : Réduction du bruit des avions (not. des turbomachines [1]) par l'identification des mécanismes de génération de bruit.

Historique : Dès 1976, pour répondre à des problématiques de compréhension des bruits de turboréacteur, Billingsley and Kinns (1976) réalisent des mesures simultanées à l'aide d'une antenne linéaire constituées de 14 microphones. Depuis, le nombre de capteur par antenne a augmenté, ainsi la gamme fréquentielle.

Formulation du problème d'imagerie acoustique La formulation du problème direct lie le vecteur des pressions $\boldsymbol{p}$ mesurées aux M points de mesure et l'intensité des N sources $\boldsymbol{q}$ à l'aide de la matrice de transfert $\boldsymbol{G}$ qui représente le modèle de propagation des ondes acoustiques :

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{q} \tag{1}$$

Le problème d'identification de sources acoustique est donc de résoudre le problème inverse qui consiste à estimer les sources $\boldsymbol{q}$ à partir des données $\boldsymbol{p}$:

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{p} \tag{2}$$

où $\boldsymbol{W}$ est appelé opérateur inverse.

1. Le moteur électrique n'est pas pour tout de suite, car il y a 40 fois plus d'énergie dans 1 kg de kérosène que dans 1 kg des meilleures batterie et après calcul de rendement, il reste un rapport 15 entre les 2.

Le problème peut aussi être formulé à partir des matrices de densité interspectrale :

$$\mathbb{E}\left\{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'\right\} = \mathbb{E}\left\{(\boldsymbol{G}\boldsymbol{q})(\boldsymbol{G}\boldsymbol{q})'\right\} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S_{pp}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{S_{qq}}\boldsymbol{G}' \tag{4}$$

Problèmes : On distingue 4 sources de difficultés majeures pour la résolution de ce problème inverse, pouvant nuire à la qualité de la reconstruction :

— le bruit de mesure (notamment hydrodynamique)
— l'approximation du modèle de propagation
— le choix du modèle de sources approché
— le caractère mal-posé du problème inverse (le nombre de source est souvent bien supérieur au nombre de points de mesure)

Pour chaque méthode d'imagerie, comprendre :
-hypothèses et connaissances a priori
-avantages et inconvénient
-contexte de développement
-algorithme(s) de résolution

Notations

m	scalaire	nombre de capteurs de l'antenne
n	scalaire	nombre de sources
$\boldsymbol{p}$	$m \times 1$	coefficients des signaux captés
$\boldsymbol{q}$	$n \times 1$	coefficients des sources
$\boldsymbol{n}$	$m \times 1$	bruit capté
$\boldsymbol{G}$	$m \times n$	matrice de transfert acoustique
$\boldsymbol{W}$	$n \times m$	matrice de l'opérateur inverse
η	scalaire	paramètre de régularisation
$\boldsymbol{S_{xy}}$	$\mathrm{l}(\boldsymbol{x}) \times \mathrm{l}(\boldsymbol{y})$	matrice interspectrale des séries $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{C_{xy}}$	$\mathrm{l}(\boldsymbol{x}) \times \mathrm{l}(\boldsymbol{y})$	matrice de covariance des séries $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{R_{xy}}$	$\mathrm{l}(\boldsymbol{x}) \times \mathrm{l}(\boldsymbol{y})$	matrice d'intercorrélation des séries $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$
$\bar{\boldsymbol{x}}$	$\mathrm{l}(\boldsymbol{x})$	vecteur des moyennes du processus $\boldsymbol{x}$
$\tilde{\boldsymbol{x}}$	$\mathrm{l}(\boldsymbol{x})$	estimation de $\boldsymbol{x}$

Table des matières

I. Méthodes de formation de voies

Le principe des méthodes de formation de voies est de pondérer les signaux de mesure à l'aide de vecteurs de pointage de manière à les focaliser dans chaque point du plan sur lequel les sources sont cherchées. référence Ces méthodes sont très utilisées car elles offrent beaucoup de flexibilité sur la position des capteurs et sont simplew à mettre en œuvre. Cependant, elles offrent une résolution fortement dépendante de la géométrie de l'antenne.

Les vecteurs de pointage (correspondant aux lignes de l'opérateur inverse $\boldsymbol{W}$) sont les poids attribués à chaque microphone avant de sommer leur réponse. En tout point focal i du plan de recherche de source, le vecteur de pointage est comparé à la pression mesurée par les microphones. Ainsi, le produit scalaire $\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{p}$ entre le vecteur de pointage $\boldsymbol{w}_i$ conjugué transposé (symbole $'$) et le vecteur des pressions $\boldsymbol{p}$ est maximal lorsque les vecteurs sont colinéaires. Le vecteur de pointage est donc associé à un modèle de source. Le modèle de source choisi ici est un ensemble de sources ponctuelles décorrélées. Une source a pour fonction de transfert du point focal i au microphone m :

$$h_{im} = \frac{e^{-jkr_{mi}}}{4\pi r_{mi}}. \tag{5}$$

Donc, le vecteur des pression pour une source ponctuelle au point i d'amplitude A_i est $\boldsymbol{p} = A_i\boldsymbol{h}_i$.

inconvénient : quantification difficile car chaque source est estimée comme si elle est la seule. ref
prise en compte des réflexions : -ajouter la contribution des sources images au processus de formation de voies. B. A. Fenech, “Accurate aeroacoustic measurements in closed-section hard-walled wind tunnels,” Ph.D. dissertation, University of Southampton, June 2009
remarque : en beamforming classique, doubler le nombre de micro améliore le RSB de 3db

1.1. Vecteur de pointage indépendant des données

La formation de voies peut être vue comme la solution d'un problème d'optimisation : afin d'optimiser le vecteur de pointage, on cherche à minimiser l'écart entre l'amplitude estimée $\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{p}$ et l'amplitude réelle A_i. Cette fonction coût est défini à partir d'une densité spectrale $\mathbb{E}\{\bullet\}$ puisque les sources sont des grandeurs aléatoires :

$$\begin{aligned} J =& \mathbb{E}\left\{(\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{p} - A_i)(\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{p} - A_i)^*\right\} && (6)\\ =& \boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{S_{pp}}\boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{h}_i G_{ii} - \boldsymbol{h}_i' G_{ii}'\boldsymbol{w}_i + G_{ii} && (7)\end{aligned}$$

* est l'opérateur conjugué, $\boldsymbol{S_{pp}} = \mathbb{E}\{\boldsymbol{pp}'\}$ et $G_{ii} = E[A_iA_i']$, soit :

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{w}_i'} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{w}_i = \frac{\boldsymbol{h}_i}{\boldsymbol{h}_i'\boldsymbol{h}_i}. \tag{8}$$

Le vecteur de pointage correspond donc au vecteur des fonctions de transferts normalisé de façon à que l'amplitude $S_i = \boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{p}$ soit égale à 1 quand $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{h}_i$.

En présence d'un bruit décorrélé à chaque microphone, on peut montrer que le vecteur de pointage devient :

$$\boldsymbol{w}_i = \frac{\boldsymbol{h}_i}{\boldsymbol{h}_i'\boldsymbol{h}_i + \gamma}, \tag{9}$$

avec $\gamma = G_{nn}/G_{ii}$, G_{nn} étant les termes diagonaux de la matrice interspectrale du bruit aux microphones.

1.2. Construction d'un vecteur de pointage à partir des données

Certaines méthodes de localisation n'utilisent pas un modèle de source mais construisent le vecteur de pointage à partir de l'ensemble des covariances des signaux de mesure.

Capon (1969) propose de minimiser l'énergie en sortie du processeur tout en conservant une contrainte de normalisation que le vecteur de pointage est dans la direction de la source (méthode dite "à variance minimale des sources") : minimiser $\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{S_{pp}}\boldsymbol{w}_i$ (i.e. la densité spectrale des sources) sous la contrainte $\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{h}_i = 1$. On résout donc, en utilisant le multiplicateur de Lagrange λ :

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{w}_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0 \tag{10}$$

avec la fonction coût :

$$J = \boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{S_{pp}}\boldsymbol{w}_i + \lambda(\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{h}_i + \boldsymbol{h}_i'\boldsymbol{w}_i). \tag{11}$$

La résolution de ces 2 équations permet de construire le vecteur de pointage :

$$\boldsymbol{w}_i = \frac{\boldsymbol{S_{pp}}^{-1}\boldsymbol{h}_i}{\boldsymbol{h}_i'\boldsymbol{S_{pp}}^{-1}\boldsymbol{h}_i}. \tag{12}$$

Le spectre de puissance de la distribution des sources estimée est alors donné par la relation :

$$\begin{aligned} \tilde{G_{ii}} &= \mathbb{E}\{S_iS_i^*\} = \mathbb{E}\{\boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{pp}'\boldsymbol{w}_i\} && (13)\\ &= \frac{1}{\boldsymbol{h}_i'\boldsymbol{S_{pp}}^{-1}\boldsymbol{h}_i} && (14)\end{aligned}$$

L'algorithme MUltiple Signal Classification (MUSIC, Schmidt (1986)) propose une décomposition en valeurs propres de la matrice interspectrale $\boldsymbol{S_{pp}}$ pour la décomposer en 2 sous-espaces, l'un associé au signal et l'autre au bruit, afin de diminuer la contribution énergétique du bruit. Dans l'expression de $\tilde{G_{ii}}$ en équation 14, $\boldsymbol{S_{pp}}$ est remplacé par les composantes correspondant au sous-espace bruit. Ainsi, ce nouvel estimateur sera maximal lorsque le processeur pointe vers une source, puisque les éléments du dénominateur seront décorrélés. Cet estimateur ne correspond alors plus à une densité spectrale des sources mais seulement à un indicateur de présence au point i.

Ces méthodes font l'hypothèse de sources décorrélées et sont sensibles au non-respect de cette hypothèse. Des stratégies peuvent être mises en place pour prendre en compte la cohérence des sources (Jiang et al., 2003). De plus, l'utilisation des signaux de mesure pour construire le vecteur de pointage rend ce méthode sensibles à la qualité de ce mesures. Pour contourner cette limitation, une pondération peut être ajoutée à la diagonale de la matrice interspectrale (Li et al., 2003).

DORT (pas d'hypothèse sur la distance source-antenne, équation d'euler linéarisées invariantes par RT en changeant le sens de l'écoulement moyen (ex : Localisation de source acoustique en soufflerie anéchoïque par deux techniques d'antennerie : formation de voies et retournement temporel numérique par Thomas Padois))
séparation de champ ? Décomposition en sous-espaces "Orthogonal Beamforming" ?
Generalize Inverse Beamforming ? SAFT, TFM

II. Ajout d'une étape de déconvolution

La distribution de sources obtenue obtenue par une méthode d'imagerie peut être vue comme la convolution entre la distribution de sources et la fonction d'étalement du point (PSF : point spread function). La PSF est comparable à une réponse impulsionnelle du système d'imagerie. En formation de voies, la PSF est souvent connue (Measurement of Phased Array Point Spread Functions for use with Beamforming) : elle est composée d'un lobe principal et de lobes secondaires.

Ces lobes diminuent notamment le pouvoir de séparation des sources, surtout à basse fréquence ou si les sources sont proches ou multipolaires. Si la PSF est connue, on peut, en principe, déconvoluer la distribution de source calculée afin de réduire l'intrusion des lobes secondaires.

On distingue 2 types de lobes secondaires :
-ceux généré par la forme générale de l'antenne (le fait qu'elle soit d'une surface finie) : peuvent être corrigés en appliquant une fenêtre d'appodisation diminuant la sensibilité des microphones situés sur les bords de l'antenne.
-ceux liés à l'espacement entre les microphones

La PSF des méthodes inverses est plus difficile à estimer car elle dépend des données de mesure. C'est pourquoi les méthodes de déconvolution y sont moins appliquées.

DAMAS Brooks and Humphreys (2006) (deconvolution approach for the mapping of acoustic sources)

Spectral Estimation Model Correction de différence entre deux matrices de covariance minimisée avec un gradient conjugué (D. Blacodon, G. Elias, Level estimation of extended acoustic sources using an array of microphones, American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper 2003-3199, 2003)
Contrainte de positivité sur la solution de source difficile à appliquer ?

CLEAN Dougherty and Stoker (1998) présente 3 façons de réduire les lobes secondaires liés au positionnement des michrophones sur l'antenne :
-CSM weighting : réduire le poids des termes de la CSM (cross-spectral matrix) correspondant aux paires de microphones dont l'espacement fait qu'ils apportent une information redondante (par exemple 2 microphones sur la même branche d'une antenne en croix)
-robust adaptative beamforming = minimum variance algorithm = CAPON
-CLEAN algorithme.
De ces trois méthodes, CLEAN ressort comme étant la plus efficace

Hypothèse sur l'algo CLEAN : le vecteur source est parcimonieux : le champ source recherché est constitué de points sources. Principe de l'algorithme CLEAN (Hogbom, 1974) : on extrait la plus grande valeur du champ source issu du beamforming, on la note comme un point source, on lui retire un petit gain convolué avec la fonction d'étalement, et on réitère jusqu'à ce que la plus grande valeur atteigne un seuil. Cette méthode est une heuristique (algorithme d'approximation) de type "matching pursuit" (voir le paragraphe sur l'optimisation parcimonieuse).

: DAMAS, CLEAN-SC, TIDY +amélioration par déconvolution , ex :DAMAS, SEM, NNLS

III. Les méthodes inverses

En formation de voies, chaque source est considérée indépendemment des autres. La surface contenant les sources potentielles est scannées point par point et l'éventuelle cohérence des sources n'est pas prise en compte.

L'approche des méthodes inverses est de traiter le problème dans son ensemble, en recherchant toutes les sources simultanément, prenant ainsi en compte les effets d'interférence entre les sources.

Quid des interactions non-linéaires entre sources ?

La résolution du problème inverse ne peut généralement pas reposer sur une inversion de la matrice de transfert, car le problème inverse est souvent sous-déterminé. De plus, la relation entre sources et mesures n'est pas toujours bijective.

Les méthodes varient selon le modèle de source choisi :
-ondes planes propagatives et évanescentes : NAH, SONAH
-radiation BEM
-distribution de monopoles
-harmoniques sphériques.

itératif ou non ?

Holographie en champ proche : quand il est possible d'effectuer des mesures en champ proche, les signaux de mesures sont porteurs de plus d'information, notamment les ondes évanescentes.

3.1. Holographie en champ proche

L'holographie en champ proche propose d'exploiter des mesures réalisées à proximité des sources pour en reconstruire une image. Cette méthode tire profit de la mesure des ondes évanescentes, exponentiellement décroissantes avec la distance, qui viennent s'ajouter aux ondes propagatives Maynard et al. (1985). Le champ de pression mesuré est d'abord décomposé dans le domaine des nombres d'ondes par une transformée de Fourier spatiale. A chaque onde est associé un propagateur (i.e. une fonction de transfert supposée connue) qui, inversé, permet de rétropropager le champ mesuré et ainsi reconstruire le champ source. Avant rétropropagation, un filtre sur les nombres d'ondes est appliqué de manière à sélectionner les nombres d'ondes d'intérêt : il est nécessaire de trouver un compromis permettant de conserver suffisamment d'ondes évanescentes (porteuses d'informations) tout en limitant l'amplification du bruit. La mesure à proximité permet ainsi d'obtenir une résolution supérieure à la demi-longueur d'onde.

+ en espace clos

+ antenne double couche

3.2. Méthodes par mise à jour successive d'un modèle

L'idée est de minimiser l'écart entre les signaux mesurés et ceux calculés à partir d'un modèle.

The polar correlation technique : JET ENGINE NOISE SOURCE LOCATION : THE POLAR CORRELATION TECHNIQUE M. J. FISHER

Noise source modelling and identi"cation procedure

3.2.1 Choix de la fonction coût

Il existe trois principales approches pour poser le problème d'optimisation et en définir une fonction objectif[2] :

• **le maximum de vraisemblance** , pour lequel on cherche la solution

$$\boldsymbol{q}_{ML} = \arg\max_{\boldsymbol{q}} [\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}] = \arg\min_{q} f_{data}, \qquad (15)$$

avec

$$\begin{aligned} f_{data} &= -\log[\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}] + \mathrm{cst} && (16)\\ &= [\boldsymbol{p}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}]'\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}}^{-1}[\boldsymbol{p}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}] && (17)\end{aligned}$$

en considérant que $[\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}]$ a une répartition gaussienne, de covariance $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}}$. L'estimateur obtenu est le même que celui donné par la méthode des moindres carrés.

2. détails des calculs dans le cours de E. Thiébaut et C. Pichon : https://cral.univ-lyon1.fr/labo/perso/eric.thiebaut/downloads/documents/cargese-2006-thiebaut.pdf

• **le maximum a posteriori** (MAP), qui cherche à maximiser la densité des sources a posteriori :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_{MAP} &= \arg\max_{\boldsymbol{q}}[\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}] & (18)\\ &= \arg\max_{\boldsymbol{q}}([\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}][\boldsymbol{q}]) & (19)\\ &= \arg\min_{\boldsymbol{q}}(\underbrace{-\log[\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}]}_{f_{data}}\underbrace{-\log[\boldsymbol{q}]}_{f_{prior}}) & (20)\end{aligned}$$

La méthode MAP propose donc d'ajouter à au maximum de vraisemblance un terme de régularisation donné par f_{prior}. Considérant que les sources ont une densité de probabilité gaussienne, le terme de régularisation s'écrit :

$$f_{prior} = (\boldsymbol{q} - \bar{\boldsymbol{q}})'\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{q}}^{-1}(\boldsymbol{q} - \bar{\boldsymbol{q}}) \quad (21)$$

• **le minimum de variance**[3], dont le critère est de minimiser l'espérance de l'erreur quadratique :

$$\boldsymbol{q}_{MV} = \arg\min_{\tilde{q}} \mathbb{E}\{||\boldsymbol{q} - \tilde{\boldsymbol{q}}||^2\} \quad (22)$$

Cette solution généralise le filtre de Wiener et est la même que la solution MAP.

En faisant un analyse de la propagation des erreurs pour chaque méthode, on peut montrer que le maximum de vraisemblance en propage davantage.

En résumé, les méthodes inverses utilisées principalement sont de 2 sortes : 1) les méthodes basées sur la transformée de Fourier (holographie,...) ; 2) Les méthodes "model based". En pratiques, ces méthodes sont très proches (ce que montrent

//sources équivalentes (ESM)

3.3. Les méthodes de régularisation

nelson part2 compare deux méthodes de régularisation : 1) il explique comment choisir un paramètre de Tikhonov ; 2) il explique comment choisir les valeurs de la SVD à supprimer.
Beaucoup se sont penchés sur le problème du choix de η.nelson part2 compare les différentes facçon de déterminer η en comparant l'erreur entre le champ source désiré et celui reconstruit, ainsi que l'erreur entre l'interspectre reconstruit et le vrai interspectre (les S_{qq}). Les méthodes comparées sont :

-cross-validation technique : augmentation and a method for prediction
-generalize cross-validation technique :

Les problèmes inverses de localisation de sources acoustiques sont souvent mal posés car le nombre de sources est supérieur au nombre de capteur (la solution n'est pas unique) et la solution dépend des données d'entrée. Il est alors nécessaire de mettre en place des stratégies qui améliorent le conditionnement du problème, notamment en réduisant la sensibilité de la solution aux données d'entrée.

Le conditionnement du problème peut être quantifié par le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière de la matrice de transfert. Plus ce rapport est faible, mieux le problème est conditionné.
page 11 thèse thibaut le magueresse

Régularisation de Tikhonov (ref : Tikhonov. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method) : La stratégie la plus souvent adoptée est la régularisation de Thikonov qui consiste à rajouter un terme de contrôle dans la fonction coût (équivalent à un contrôle de l'énergie de la solution). Cette dernière prend alors la forme suivante :

$$||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}||^2 + \eta^2||\boldsymbol{q}||^2 \quad (23)$$

où $|| \bullet ||$ est la norme euclidienne et η^2 est le paramètre de régularisation, choisi judicieusement de façon à favoriser les solutions de petite norme.

La difficulté de cette régularisation réside dans ne choix de η. Ce paramètre peut être déterminé par des procédures ad-hoc qui telle que :
-discrepancy principle
-general cross-validation (méthode de la validation croisée généralisée)
-L-curve method : -(restricted) maximum likehood : differentiation procedures for non-exact data
-unbiased predictive risk estimator
-interprétation bayesienne (Pereira et al., 2015)
- méthode utilisant le principe d'anomalie de Morozov

3.3.1 Optimisation parcimonieuse

L'objectif d'une approche parcimonieuse est d'obtenir une solution approchée du problème avec le moins de composantes non nulles possible. On minimise alors à la fois l'écart entre les données mesurées et simulées, ainsi que la "norme" L_0 qui donne la parcimonie d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ telle que : $||\boldsymbol{x}||_0 := \#\{i|x_i \neq 0\}$. Le problème d'optimisation devient

3. *minimum mean square error*

alors bi-objectif :

$$\min_{\boldsymbol{q}}(||\boldsymbol{q}||_0, ||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}||^2). \tag{24}$$

Prendre en compte une distribution parcimonieuse des sources dans l'espace, par exemple, permet de réduire le caractère sous-déterminé du problème en exploitant les connaissances a priori sur les sources. Cette propriété de parcimonie sert notamment à compenser le rayonnement omnidirectionnel des sources qui n'est pas mesuré et qui engendre une sous-estimation du niveau des sources.

La parcimonie est donnée par la norme L_0 du champ source (qui donne alors le nombre de valeurs non-nulles de $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}}$. Un formalisme bayesien permet de prendre en compte cette parcimonie en définissant une densité de probabilité des sources $[\boldsymbol{p}]$. Une loi gaussienne peut par exemple être choisie telle que :

$$[\boldsymbol{p}] \propto \exp\left(\frac{\sum_i |q_i|^p}{2\gamma^2}\right) \tag{25}$$

avec i le i$^{\text{ème}}$ élément de $\boldsymbol{q}$. Dans cette formulation, la norme L_0 peut être relaxée par une norme L_p permettant de rendre l'objectif convexe, avec p un paramètre prenant une valeur entre 0 et 2. $p = 0$ correspond à une distribution parcimonieuse, tandis que plus p tend vers 2, plus la distribution spatiale des source est étendue.

? passent en revue les principales façons de poser et de résoudre ce problème d'optimisation.

Lorsque le paramètre p est proche de 0, le critère n'est pas convexe et le problème doit être résolu à l'aide d'algorithmes gloutons, dont les plus répandus sont décrits ci-dessous :

• **Matching pursuit (MP)** Minimiser une fonction coût de la forme $||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}||_2$ avec une contrainte de parcimonie $||\boldsymbol{q}||_0 \leq \epsilon$ peut être vu comme une sorte d'analyse en composante principale de $\boldsymbol{p}$, par une projection sur un ensemble d'atome (pas forcément orthogonaux) trié dans $\boldsymbol{G}$, où $\boldsymbol{q}$ donne l'amplitude pour chaque atome. Mallat and Zhang (1993) propose un algorithme qui calcule successivement à partir d'un dictionnaire d'atomes normalisés les poids associés aux atomes pour lesquels le produit scalaire avec le signal est maximal. L'opération est répétée sur les résidus jusqu'à ce que le signal soit suffisamment décomposé, i.e. qu'un critère sur les résidus soit atteint.

• **Orthogonal matching pursuit (OMP)** Une extension de l'algorithme MP propose également d'extraire un à un les atomes et leur coefficient, mais à chaque sélection d'atome, la projection du signal dans le nouvel espace vectoriel généré est recalculée, ce qui permet une convergence plus rapide, moyennant une étape d'orthogonalisation supplémentaire (Pati et al., 1993). Chaque atome n'est sélectionné qu'une fois, contrairement à l'algorithme MP. Cette minimisation des redondances également de réduire l'erreur commise.

Il est possible de s'affranchir de la norme L_0 en relaxant le paramètre p, et en prenant par exemple $p = 1$ [4] (critère non dérivable). Le problème d'optimisation contenant une contrainte en norme L_1 peut s'exprimer de différence manière :

• **Poursuite de base (Basis pursuit, BP)** Ce principe d'optimisation s'écrit sous la forme :

$$\min_{\boldsymbol{q}} ||\boldsymbol{q}||_1 \quad \text{sous la contrainte} \quad \boldsymbol{G}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \tag{26}$$

Ce problème peut être linéarisé puis résolu par des algorithmes comme ceux du simplexe ou de points intérieurs (Chen et al., 2001).

• **Least absolute shrinkage and selection operator (LASSO)** Tibshirani (1996) propose de résoudre :

$$\min(||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}||^2) \quad \text{sous la contrainte} \quad ||\boldsymbol{q}||_1 \leq t), \tag{27}$$

ce qui revient à estimer $\tilde{q}$ tel que :

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \arg\min_{\boldsymbol{q}} \left(||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}||^2 + \beta||\boldsymbol{q}||_1\right) \tag{28}$$

Quand $\beta = 0$, le problème LASSO est analogue aux moindres carrés ordinaires. Si β est très grand, $\tilde{\boldsymbol{q}}$ tend vers 0. Ce paramètre permet donc de fixer certain coefficients de la régression à 0 ou, avec une approche bayésienne, on peut leur associer une incertitude.

• **Basis pursuit denoising (BPDN)** Le principe de BPDN mène au même problème que celui formulé par LASSO. On cherche à résoudre :

$$\min_{\boldsymbol{q}} ||\boldsymbol{q}||_1 \quad \text{sous la contrainte} \quad ||\boldsymbol{G}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}||^2 \leq \tau, \tag{29}$$

ce qui équivaut, comme LASSO à trouver un compromis entre réduire les résidus et trouver la solution la plus parcimonieuse possible.

Parmi les algorithmes de résolution des problèmes pour $0 < p < 2$, on trouve :

- les algorithmes de relaxation (ex : RELAX, Li & Stoica, 1996),
- les algorithmes de type "seuillage itératif" (type FISTA, Expectation-Maximisation,...),

4. $||a||_1 = \sum_i |a_i|$

- IRLS (iterative reweighted least squares) : cette méthode propose de représenter une norme L_p ($0 < p \leq 1$) par une norme L_2 pondérée. Elle ne garantie pas la convergence vers un minimum global. Elle s'utilise donc plutôt en optimisation locale. Voir par exemple l'algorithme FOCUSS (FOcal Underdetermined System Solver).
- least-Angle regression stagewise (LARS) : méthode par homotopie (Osbourne, 2000),
- shooting algorithm (Fu, 1998),
- gradient conjugué et ses dérivés,
- et tous les autres algorithmes d'optimisation convexe quadratique.

Si $p > 1$, le critère est strictement convexe (et ne présente donc qu'un minimum global). Dans le cas où $p = 2$, le problème n'est pas soumis à une contrainte de parcimonie et correspond à la régularisation de Tikhonov ou régression d'arête (*ridge regression*).

Cours et algorithmes liés à l'optimisation parcimonieuse en ligne :
Une liste de solvers selon la catégorie du problème se trouve à l'adresse : https://web.archive.org/web/20150502191143/http://www.ugcs.caltech.edu/~srbecker/wiki/Category:Solvers.
Cours d'H. Carfantan sur l'optimisation parcimonieuse : http://www.ast.obs-mip.fr/users/carfan/PPF-PSI/CarfantanSparse.pdf 10 cours "Sparse Representations and Signal Recovery (Purdue University)", StudentLecture : urlhttps ://engineering.purdue.edu/ChanGroup/ECE695Notes/

De manière générale, les méthodes de régularisation se confronte aux problématiques suivantes :
- Comment choisir la base de décomposition optimale ?
- Comment régler le paramètre η
- Quelle formulation et quel algorithme de résolution choisir ?
- Comment évaluer la fiabilité de la solution ?

Faire les parallèles :
CLEAN : technique de déconvolution itérative, heuristique de type "matching pursuit"
SC-DAMAS : de type "basis pursuit"

IV. Approche bayésienne

Rappel des estimation de sources et du paramètre de régularisation proposés par Antoni 2012.

Le problème peut être formulée à l'aide d'une approche probabiliste. Les inconnues du problème sont décrites par une densité de probabilité. L'objectif de cette approche est double : *i)* développer un formalisme généralisant les diverses méthodes développées pour chaque contexte d'imagerie ; *ii)* prendre en compte au mieux les informations connues à l'avance sur les sources, même si elles sont incertaines puisque données par une densité de probabilité. Ce deuxième point est mis en œuvre par l'utilisation d'une régularisation.

la probabilité est la traduction d'un état de connaissance du système.

Principe général des probabilités bayésiennes : on choisit une distribution a priori décrivant la fonction à modéliser $[\boldsymbol{q}]$. Cette distribution est corrigée progressivement sous forme de fonction de vraisemblance à partir des observations $[\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}]$. Prises ensemble, la distribution a priori et la fonction de vraisemblance permettent de construire la distribution a posteriori : $[\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}] = [\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}][\boldsymbol{q}]/[\boldsymbol{p}]$.

4.1. Formulation probabiliste du problème direct

Le problème direct revient à exprimer la pression $\boldsymbol{p}$ au niveau de l'antenne de microphones en fonction du champ source $\boldsymbol{q}$, du modèle de propagation acoustique $\boldsymbol{G}$, du bruit de mesure et des erreurs de modèle représentés par le vecteur $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{n} \tag{30}$$

Le champ source $q(\boldsymbol{r})$ peut est décomposé sur une base de K fonctions spatiales $\phi_k(\boldsymbol{r})$ normalisées :

$$q(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{\phi} \tag{31}$$

Les inconnues du problèmes sont donc les fonctions ϕ_k, les coefficients c_k qui dépendent des mesures et leur nombre K.

L'approche bayésienne propose de voir ces coefficients comme des variables aléatoires et d'étudier leur probabilité conditionnée aux mesures $[q(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\phi})|\boldsymbol{p}]$. Si cette probabilité est élevée, ça signifie que les mesures expliquent précisément le champ source q. L'objectif est donc d'estimer ces variables de façon à ce qu'elles expliquent au mieux les mesures $\boldsymbol{p}$. Ces estimations de $\boldsymbol{\phi}$ et de $\boldsymbol{c}$ sont notées respectivement $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ et $\hat{\boldsymbol{c}}$ telles que :

$$(\hat{\boldsymbol{c}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}) = \arg\max_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{\phi}} [q(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\phi})|\boldsymbol{p}] \tag{32}$$

La loi de Bayes permet d'exprimer $[q(\boldsymbol{c},\boldsymbol{\phi})|\boldsymbol{p}]$ ainsi :

$$[q(\boldsymbol{c},\boldsymbol{\phi})|\boldsymbol{p}] = \frac{[\boldsymbol{p}|q(\boldsymbol{c},\boldsymbol{\phi})][q(\boldsymbol{c},\boldsymbol{\phi})]}{[\boldsymbol{p}]}. \tag{33}$$

On estime d'abord que le bruit $\boldsymbol{n}$ a une distribution gaussienne, et que sa moyenne est nulle ($\mathbb{E}\{\boldsymbol{n}\} = 0$) et par conséquent [5], $[\boldsymbol{p}|q]$ suit également une distribution normale multivariée complexe. En introduisant la matrice de covariance $\mathbb{E}\{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^*\} = \beta^2\boldsymbol{\Omega}_N$ (β^2 étant l'énergie moyenne du bruit, $\boldsymbol{\Omega}_N$ matrice connue a priori selon la nature du bruit) :

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{p}|q,\beta^2] &= \mathcal{N}_c(\boldsymbol{G}\boldsymbol{q},\beta^2\boldsymbol{\Omega}_N) && (34)\\ &= \frac{1}{\pi^M\beta^{2M}|\boldsymbol{\Omega}_N|}\exp\left(-\frac{1}{\beta^2}||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}||^2_{\boldsymbol{\Omega}_N}\right) && (35)\end{aligned}$$

Une distribution gaussienne est également choisie pour la densité de probabilité des sources, de moyenne nulle et de variance $\mathbb{E}\{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'\} = \alpha^2\boldsymbol{\Omega}_q$:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{q}|\alpha^2] &= \mathcal{N}_c(\boldsymbol{0},\alpha^2\boldsymbol{\Omega}_q) && (36)\\ &= \frac{1}{\pi^K\alpha^{2K}|\boldsymbol{\Omega}_q|}\exp\left(-\frac{1}{\alpha^2}||\boldsymbol{q}||^2_{\boldsymbol{\Omega}_q}\right) && (37)\end{aligned}$$

α^2 et β^2 sont appelés les hyperparamètres.

5. Modèle direct : $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{n}$; bruit centré : $\langle\boldsymbol{n}\rangle = \langle\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{q}\rangle = 0$; la covariance du bruit est la covariance des mesures étant données les sources :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C_n} &= \mathbb{E}\{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^*\}\\ &= \mathbb{E}\{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{q})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{q})^*\}\\ &= \boldsymbol{C_{p|q}}\end{aligned}$$

Notes :
vraisemblance : adéquation entre une distribution observée (sur échantillon) et la loi de proba qui décrit la population dont est issu l'échantillon fonction de vraisemblance : la vraisemblance varie en fonction des paramètres de la loi choisie. Paramètre s'appelle généralement θ. Sert donc a ajuster des observations à une loi.
https://en.wikipedia.org/wiki/Bayesian_interpretation_of_kernel_regularization : Dans le contexte de régression, la fonction de vraisemblance (

$$p|q$$

) sont souvent supposé suivre une distribution gaussienne, car "corrompues" par du bruit gaussien. Les observation sont supposées indépendantes et identiquement distribuées, ce qui fait qu'il est possible de factoriser la fonction de vraisemblance sur chaque point de mesure.

4.2. Estimation des hyperparamètres et des sources

4.2.1 Estimateur MAP

La résolution du problème inverse se fait donc par l'estimation de la probabilité $[\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p},\alpha^2,\beta^2]$. Le vecteur $\boldsymbol{q}$ est ainsi approché en observant sa valeur la plus probable d'après les données, le "Maximum a posteriori" (MAP) :

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{q}}_{MAP} &= \arg\max([\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p},\alpha^2,\beta^2]) && (38)\\ &= \arg\max\left([\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}][\boldsymbol{q}]\right) \quad \text{d'après } 33 && (39)\end{aligned}$$

puisque $[\boldsymbol{p}]$ est une constante du problème.

En prenant le logarithme négatif de la quantité à maximiser, on peut définir une fonction coût à minimiser :

$$J(\boldsymbol{c},\boldsymbol{\phi}) = -\ln[q|\boldsymbol{p}] = -\ln[\boldsymbol{p}|q] - \ln[q] \tag{40}$$

D'après les lois normales choisies,

$$J = M\ln(\beta^2) + K\ln(\alpha^2) + \beta^{-2}||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{c}||^2_{\Omega_n} + \alpha^{-2}||\boldsymbol{q}||^2_{\Omega_c} \tag{41}$$

revoir les notations ci-dessus

Finalement, on ne conservant que les termes qui dépendent de c, on retrouve la formulation des moindres carrés :

$$J = (p' - cH)\Omega_n^{-1}(p - Hc) + \nu^2 c'\Omega^-1_c c \tag{42}$$

avec pour terme de régularisation $\nu = \beta^2/\alpha^2$.

4.2.2 MCMC

algo utilisé par Charles : Metropolis-Hasting

4.3. Confiance accordée à la reconstruction

Références

J. Billingsley and R. Kinns. The acoustic telescope. *Journal of Sound and Vibration*, 48(4) :485 – 510, 1976.

T. F. Brooks and W. M. Humphreys. A deconvolution approach for the mapping of acoustic sources (DAMAS) determined from phased microphone arrays. *Journal of Sound and Vibration*, 294(4) :856 – 879, 2006.

J. Capon. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proceedings of the IEEE*, 57 (8) : p. 1408–1418, 1969.

S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM review*, 43(1) :129–159, 2001.

R. P. Dougherty and R. W. Stoker. Sidelobe suppression for phased array aeroacoustic measurements. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Paper 98-2242, 1998.

J. A. Hogbom. Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 15 :417–426, 1974.

Y. Jiang, P. Stoica, Z. Wang, and J. Li. Capon beamforming in the presence of steering vector errors and coherent signals. In *11th Annual Workshop on Adaptive Sensor Array Processing (ASAP 2003), MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA*, 2003.

J. Li, P. Stoica, and Z. Wang. On robust Capon beamforming and diagonal loading. *Trans. Sig. Proc.*, 51(7) :1702–1715, 2003.

S. G. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on signal processing*, 41(12) :3397–3415, 1993.

J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee. Nearfield acoustic holography : I. Theory of generalized holography and the development of NAH. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 78(4) :1395–1413, 1985.

Y. C. Pati, R. Rezaiifar, and P. S. Krishnaprasad. Orthogonal matching pursuit : Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In *Signals, Systems and Computers, 1993. 1993 Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on*, pages 40–44. IEEE, 1993.

A. Pereira, J. Antoni, and Q. Leclere. Empirical bayesian regularization of the inverse acoustic problem. *Applied Acoustics*, 97 :11–29, 2015.

R. . Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, AP-34(3) : p. 276–280, 1986.

R. Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 58 :267–288, 1996.