Traitement du signal (12 h)

Systèmes linéaires stochastiques

- Modèles AR, MA, ARMA
- Prédiction linéaire
- Estimation spectrale «moderne»

Antennerie, Holographie acoustique

Bibliographie

- **Modern Spectral Estimation** (S. M. Kay), Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall, 1988.
- **Discrete-Time Signal Processing** (A. V. Oppenheim and R. W. Schafer) Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall, 1989.
- **Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications** (J. G. Proakis and D. G. Manolakis), Upper Saddle River, NJ:Prentice Hall, 1996.
- **Signaux et systèmes linéaires** (Y. Thomas), Masson, 1994.

Applications des modèles paramétriques

- Identification de fonctions de transfert
- Extraction de caractéristiques
- Traitements adaptatifs
- Analyse spectrale

Extraction de caractéristiques pour le Diagnostic

- **Forme (pattern) : décrit l'état du système**
  - **« Réalisation » x_i d'un vecteur forme de d paramètres, caractères (features)**
  - **Point de l'espace $\Re^d$**

Vecteur forme

paramètre 1 : pic

paramètre 2 : énergie

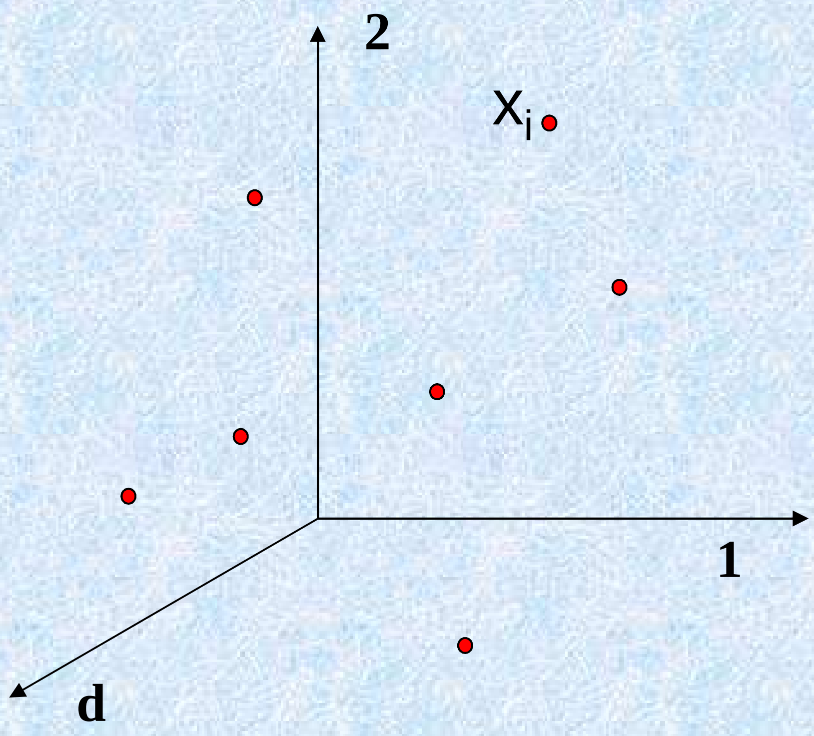
paramètre 3 : zone du plan temps-fréquence

⋮

paramètre d : puissance ligne spectrale

Forme

$$X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ X_{i3} \\ \vdots \\ X_{id} \end{bmatrix}$$

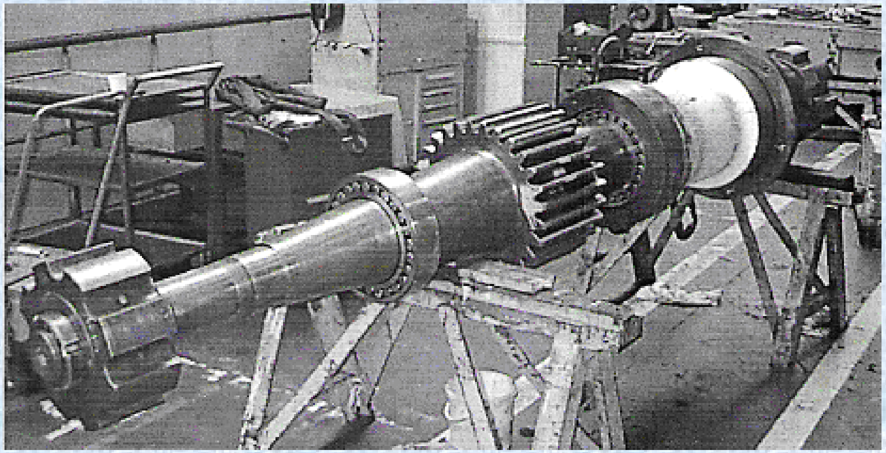


Application :

diagnostic vibratoire

Objectif : Détecter la présence de défauts éventuels sur des composants d’une machine tournante.

Technique utilisée : Suivi de l’analyse spectrale de signaux vibratoires enregistrés par un accéléromètre.



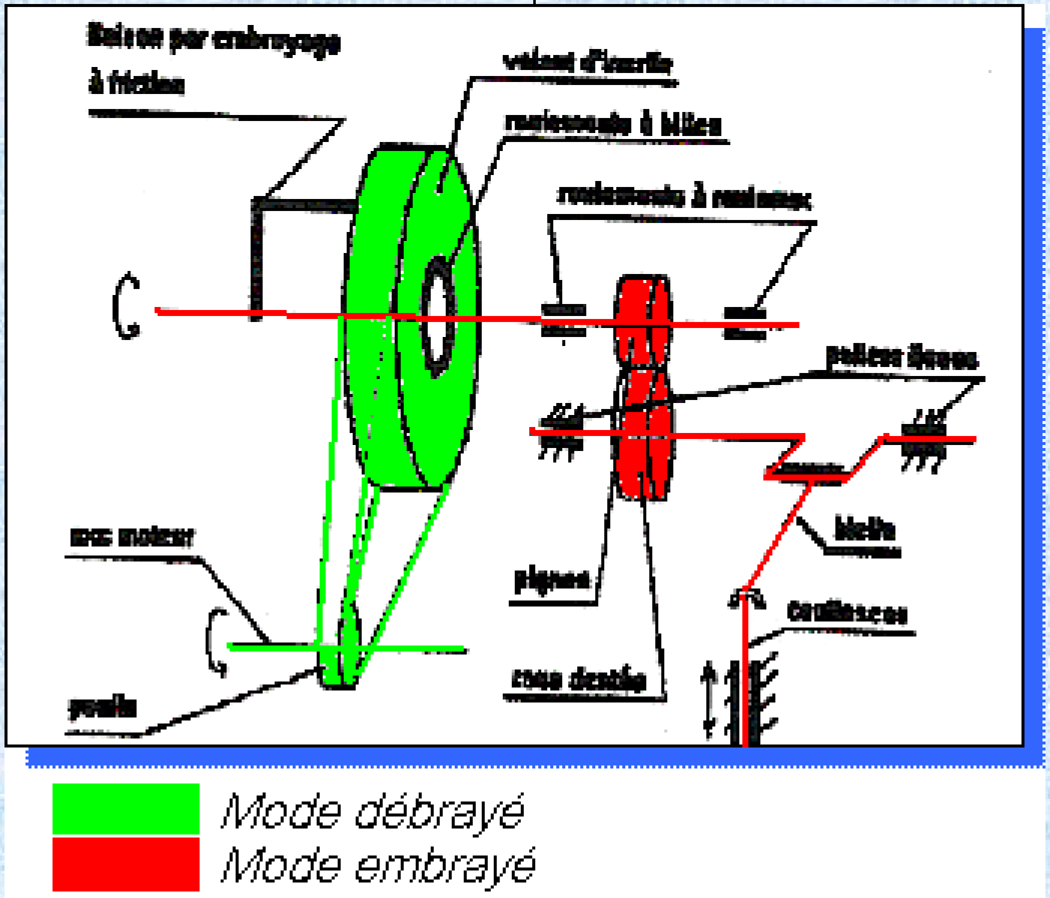
Exemple : Arbre de presse d'emboutissage dans l’industrie automobile

Mode débrayé

L'embrayage n'étant pas excité, seuls le volant d'inertie, la courroie de transmission et le moteur sont en fonctionnement.

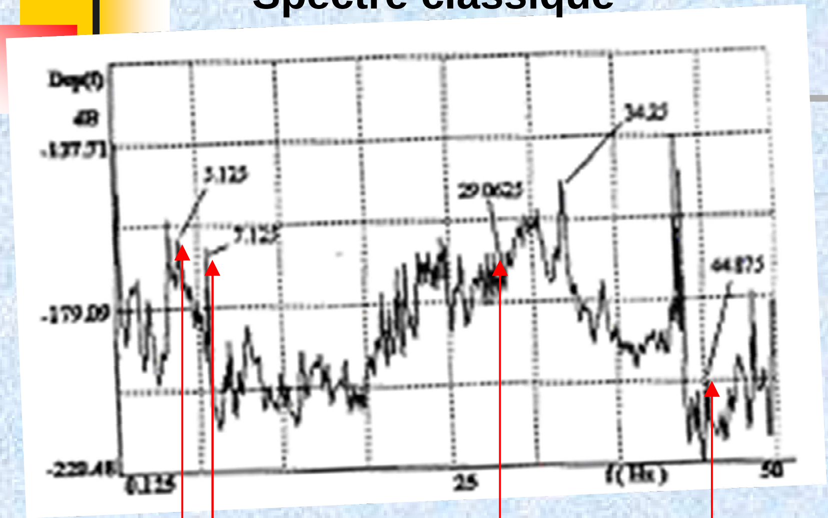
Mode embrayé

Toutes les pièces sont en mouvement. La presse se comporte alors comme une machine tournante et les efforts dynamiques sont périodiques.

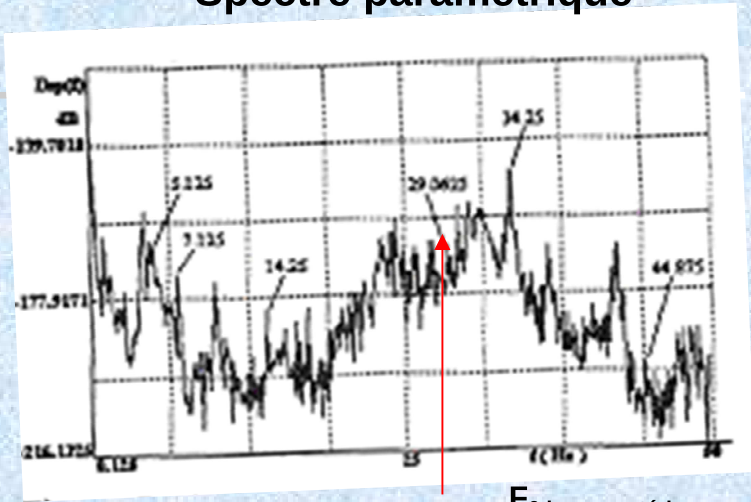


Analyse spectrale (1)

Spectre classique



Spectre paramétrique



$F_{0\ transmission}$
5.125 Hz
-166.8068 dB

$F_{0\ volant}$
7.125 Hz
-172.5 dB

$F_{0\ bague\ extérieure}$
29.0625 Hz
-165.9 dB Hz

$F_{0\ arbre}$
44.875 Hz

$F_{0\ bague\ extérieure}$
29.0625 Hz
-165.9 dB Hz

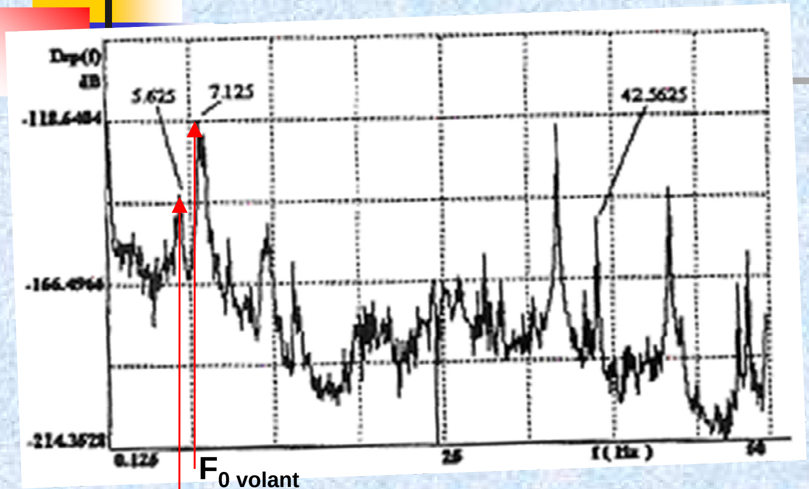
Défaut du balourd du volant d'inertie
Défaut de transmission de la courroie
Début de défaut sur la bague extérieure

Récapitulatif des éléments à surveiller en position p1 - mode non débrayé

Position composants	Défauts	Fréquence (Hz)	Vitesse caractéristique arbre de sortie tr/min	Nombre échantillons	Gamme de fréquence (Hz)
Arbre moteur	Balourd	45.07	80	1024	50
Volant d'inertie	Balourd	7.125	80	1024	50
Courroie	Transmission	5.2	80	1024	50
Roulement 6220	Défaut bague intérieure	42.04	80	1024	50
Roulement 6220	Défaut bague extérieure	29.13	80	1024	50
Roulement 6220	Défaut élément roulant	37.93	80	1024	50

Analyse spectrale (2)

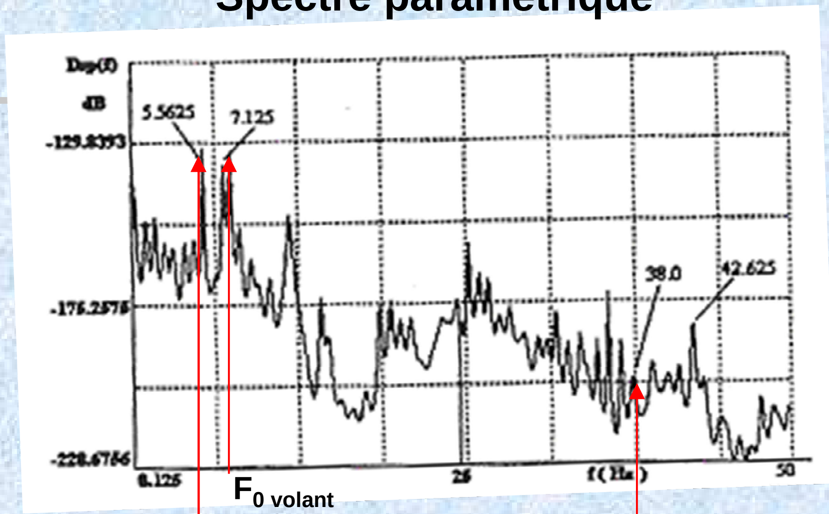
Spectre classique



$F_{0\ volant}$
7.125 Hz
-118.6 dB

$F_{0\ transmission}$
5.625 Hz
-140 dB

Spectre paramétrique



$F_{0\ volant}$
7.125 Hz

$F_{0\ roulement}$
38 Hz

$F_{0\ transmission}$
5.5625 Hz

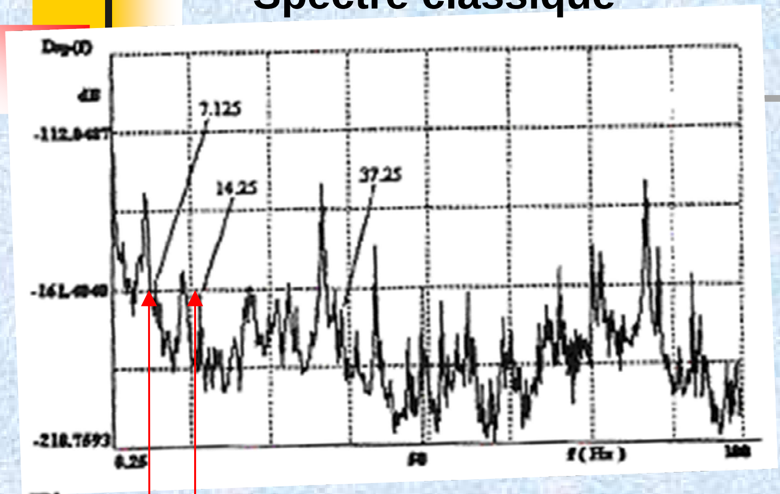
Défaut du balourd du volant d'inertie
Défaut de transmission de la courroie
Début de défaut des roulements

Récapitulatif des éléments à surveiller en position p1 - mode non débrayé

Position composants	Défauts	Fréquence (Hz)	Vitesse caractéristique arbre de sortie tr/min	Nombre échantillons	Gamme de fréquence (Hz)
Arbre moteur	Balourd	45.07	80	1024	50
Volant d'inertie	Balourd	7.125	80	1024	50
Courroie	Transmission	5.2	80	1024	50
Roulement 6220	Défaut bague intérieure	42.04	80	1024	50
Roulement 6220	Défaut bague extérieure	29.13	80	1024	50
Roulement 6220	Défaut élément roulant	37.93	80	1024	50

Analyse spectrale (3)

Spectre classique

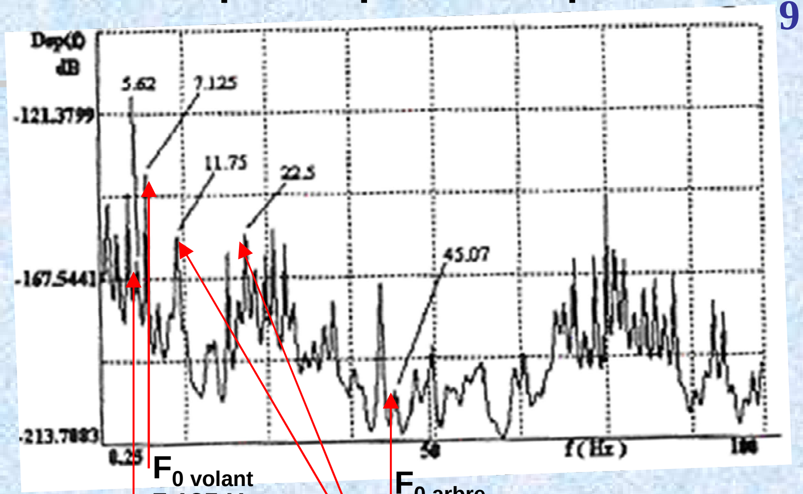


$F_{0\ volant}$
7.125 Hz
-158.54 dB

$2F_{0\ volant}$

Défaut du balourd (volant d'inertie, moteur)
Défaut de transmission de la courroie
Aucune dégradation des roulements

Spectre paramétrique



$F_{0\ volant}$
7.125 Hz

$F_{0\ transmission}$
5.62 Hz
-162.7 dB

$F_{0\ arbre}$
45.07 Hz

$Harmo1_{transmission}$
11.75 Hz
-126.2 dB

$Harmo2_{transmission}$
22.5 Hz
-122.4 dB

Récapitulatif des éléments à surveiller en position p1 - mode non débrayé

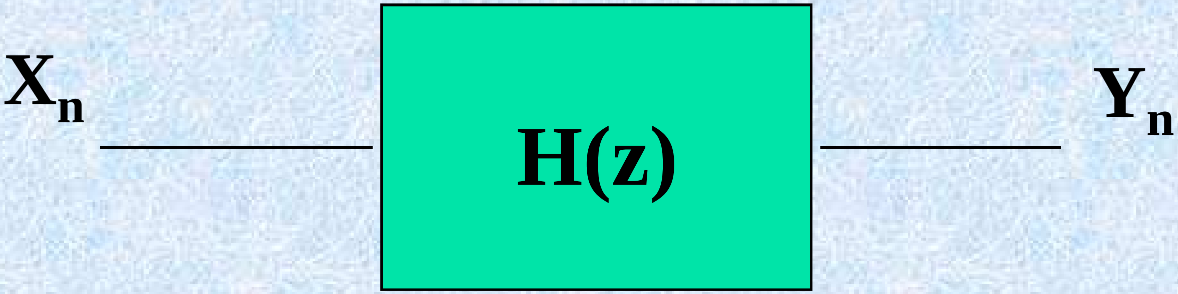
Position composants	Défauts	Fréquence (Hz)	Vitesse caractéristique arbre de sortie tr/min	Nombre échantillons	Gamme de fréquence (Hz)
Arbre moteur	Balourd	45.07	80	1024	50
Volant d'inertie	Balourd	7.125	80	1024	50
Courroie	Transmission	5.2	80	1024	50
Roulement 6220	Défaut bague intérieure	42.04	80	1024	50
Roulement 6220	Défaut bague extérieure	29.13	80	1024	50
Roulement 6220	Défaut élément roulant	37.93	80	1024	50

Systèmes linéaires stochastiques

1 **Transmission d’un signal aléatoire dans un système linéaire**

2 **Processus générateurs d’un signal aléatoire : filtres formeurs du 1er ordre**

Transmission d’un signal aléatoire dans un système linéaire



- **Valeur moyenne de la sortie ?**
- **Intercorrélation entre la sortie et l’entrée ?**
- **Autocorrélation de la sortie ?**
- **Densité spectrale de puissance de la sortie ?**

Paramètres statistiques

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Y}_n\right] = \overline{\mathrm{X}} * h_n$$

Moyenne

$$R_{YX_\tau} = R_{X_\tau} * h_\tau$$

Intercorrélation

$$R_{\mathrm{Y}_\tau} = h_\tau * h_{-\tau} * R_{\mathrm{X}_\tau}$$

Autocorrélation

$$S_{\mathrm{Y}}(f) = \left|\mathrm{H}(f)\right|^2 S_{\mathrm{X}}(f)$$

DSP

Filtres formeurs du 1er ordre

$$Y_{t+1} = a\,Y_t + X_t$$

$$avec\ |a| < 1$$

$$E\left[X_t\right] = 0$$

$$E\left[Y_0\right] = \bar{y}_0$$

$$E\left[X_t^{\,2}\right] = V$$

$$E\left[\left(Y_0 - \bar{y}_0\right)^2\right] = P_0$$

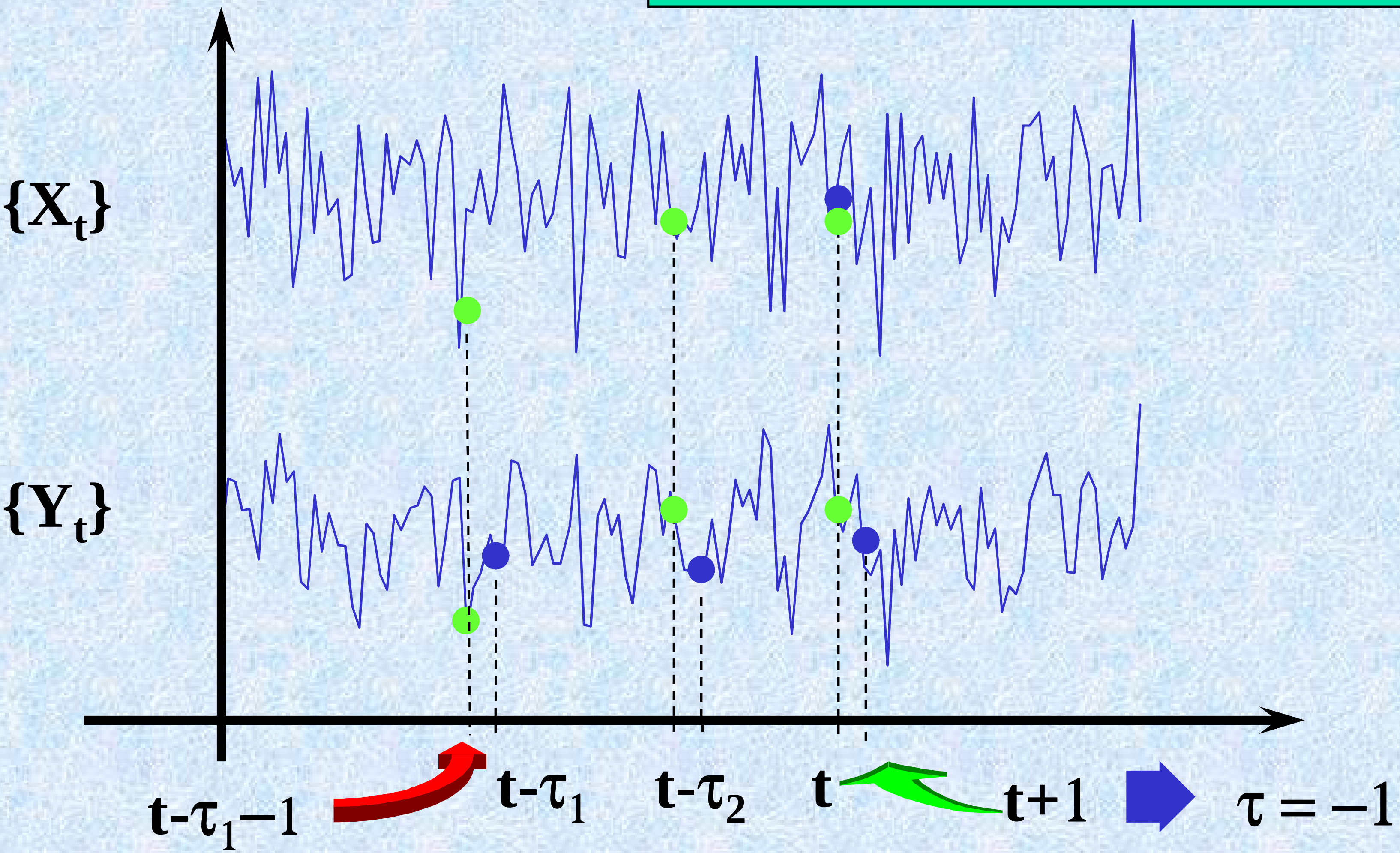
$$E\left[X_t\ X_{t-\tau}\right] = 0 \quad \forall \tau \neq 0$$

$$E\left[X_t\ Y_{t-\tau}\right] = 0 \quad \forall \tau \geq 0$$

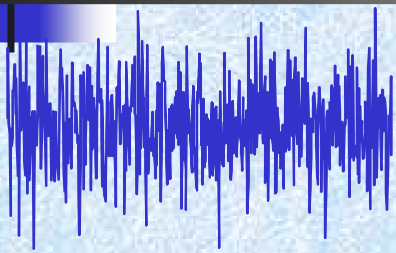
Filtre formeur du 1er ordre

$Y_{t-\tau}$ et X_t corrélés ?

$$E\left[X_t\ Y_{t-\tau}\right]=0\quad\forall\tau\geq 0$$



Analyse



1^{er} ordre

X_t → Y_t

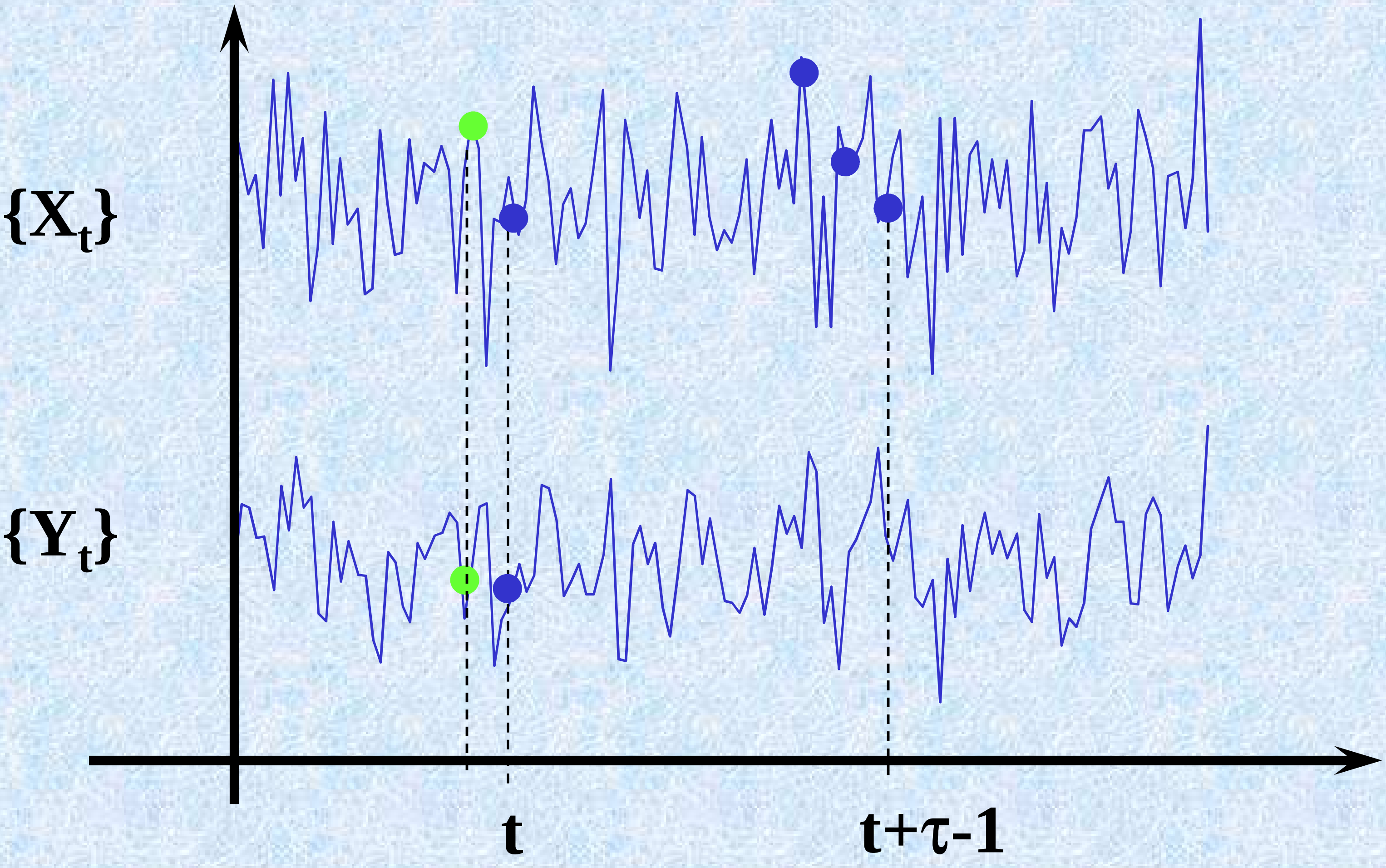
Bruit blanc centré de variance V

Caractéristiques statistiques de Y_t ?

- **Moyenne ?**
- **Variance ?**
- **Autocorrélation ?**

Filtre formeur du 1er ordre

Y_t corrélé à X_t , X_{t+1} , ... $X_{t+\tau-2}$, $X_{t+\tau-1}$?



Caractéristiques statistiques de la sortie du processus du 1er ordre

- **Moyenne**

$$E\left[Y_t\right] = a^t \,\overline{y}_0 = \overline{y}_t$$

- **Variance**

$$P_{t+1} = a^2 \, P_t + V$$

$$\lim_{t \to \infty} P_t = \frac{V}{1-a^2}$$

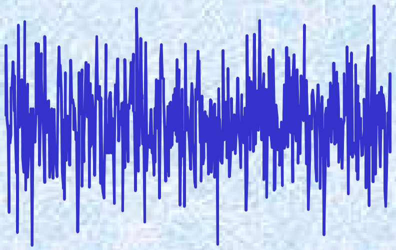
$$P_t = a^{2t} \, P_0 + \left(1 + a^2 + a^4 + \cdots a^{2t-2}\right) V$$

- **Autocorrélation**

$$R_{Y_\tau} = a^{|\tau|} \, \frac{V}{1-a^2}$$

Synthèse

$$R_{Y_\tau} = P\, a^{|\tau|}$$



x_t → **?** → y_t

$$V = \left(1 - a^2\right) P$$

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - a z^{-1}}$$

Modélisation paramétrique

1 **Modèle AR**

2 **Prédiction linéaire**

3 **Modèles MA, ARMA**

4 **Estimation spectrale**

5 **Exemples**

Processus générateurs : MA, AR, ARMA

Bruit blanc centré $\xrightarrow{x_n}$ **H(z)** $\xrightarrow{y_n}$

- **Signal AR, filtre IIR**

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i \, z^{-i}}$$

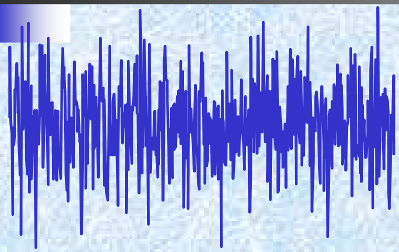
- **Signal MA, filtre FIR**

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N} b_i \, z^{-i}$$

- **Signal ARMA**

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i \, z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i \, z^{-i}}$$

Modélisation autorégressive



X_t

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i \, z^{-i}}$$

Y_t

Bruit blanc centré de variance V

- **Réponse impulsionnelle h_i du filtre ?**
- **Puissance de Y_t ?**
- **Autocorrélation de Y_t ?**

Processus générateur AR

- Réponse impulsionnelle du filtre :

$$\boxed{h_\tau = \frac{1}{V} R_{YX_\tau} = \frac{1}{V}\left(R_{Y_\tau} + \sum_{i=1}^{N} a_i \, R_{Y_{\tau+i}} \right)}$$

- Puissance :

$$\boxed{R_{Y_0} = V - \sum_{i=1}^{N} a_i \; R_{Y_i}}$$

- Autocorrélation :

$$\boxed{\tau > 0}$$

$$\boxed{R_{Y_\tau} = -\sum_{i=1}^{N} a_i \; R_{Y_{\tau-i}}}$$

Equations de Yule Walker

Equations normales étendues

$$\begin{bmatrix} R_{Y_0} & R_{Y_1} & R_{Y_2} & . & R_{Y_N} \\ R_{Y_1} & R_{Y_0} & R_{Y_1} & . & R_{Y_{N-1}} \\ R_{Y_2} & . & . & . & R_{Y_{N-2}} \\ . & & & R_{Y_0} & . \\ R_{Y_N} & R_{Y_{N-1}} & . & . & R_{Y_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R\,\underline{a} = \underline{V}$$

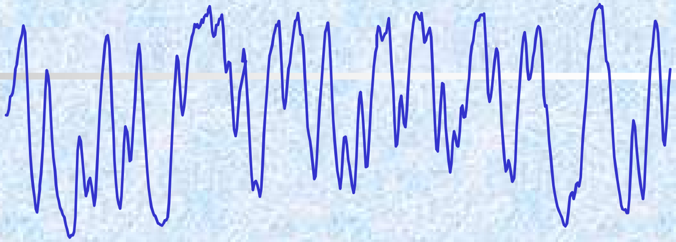
Algorithme de Levinson-Durbin

1. $N = 0$
2. $a_0(0) = 1,\ V_0 = R_{Y_0}$
3. $\Gamma_{N+1} = -V_N^{-1} \sum_{n=0}^{N} R_{Y_{N+1-n}} a_N(n)$
4. $V_{N+1} = \left(1 - \left|\Gamma_{N+1}\right|^2\right) V_N$
5. $a_{N+1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ a_N(n) + \Gamma_{N+1} a_N^*(N+1-n) & \text{si} \quad 1 \le n \le N \\ \Gamma_{N+1} & \text{si} \quad n = N+1 \end{cases}$
6. $N = N + 1$

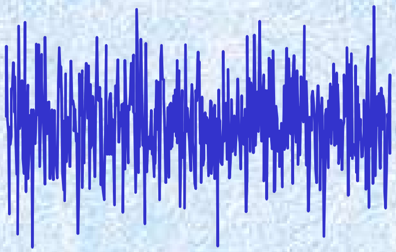
Synthèse d'un signal AR

Processus aléatoire

y_t



- **Estimation de la séquence d'autocorrélation $\{ R_{Y_\tau} \}$**



Bruit blanc
centré de variance V_N

X_t

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_N(i)\, z^{-i}}$$

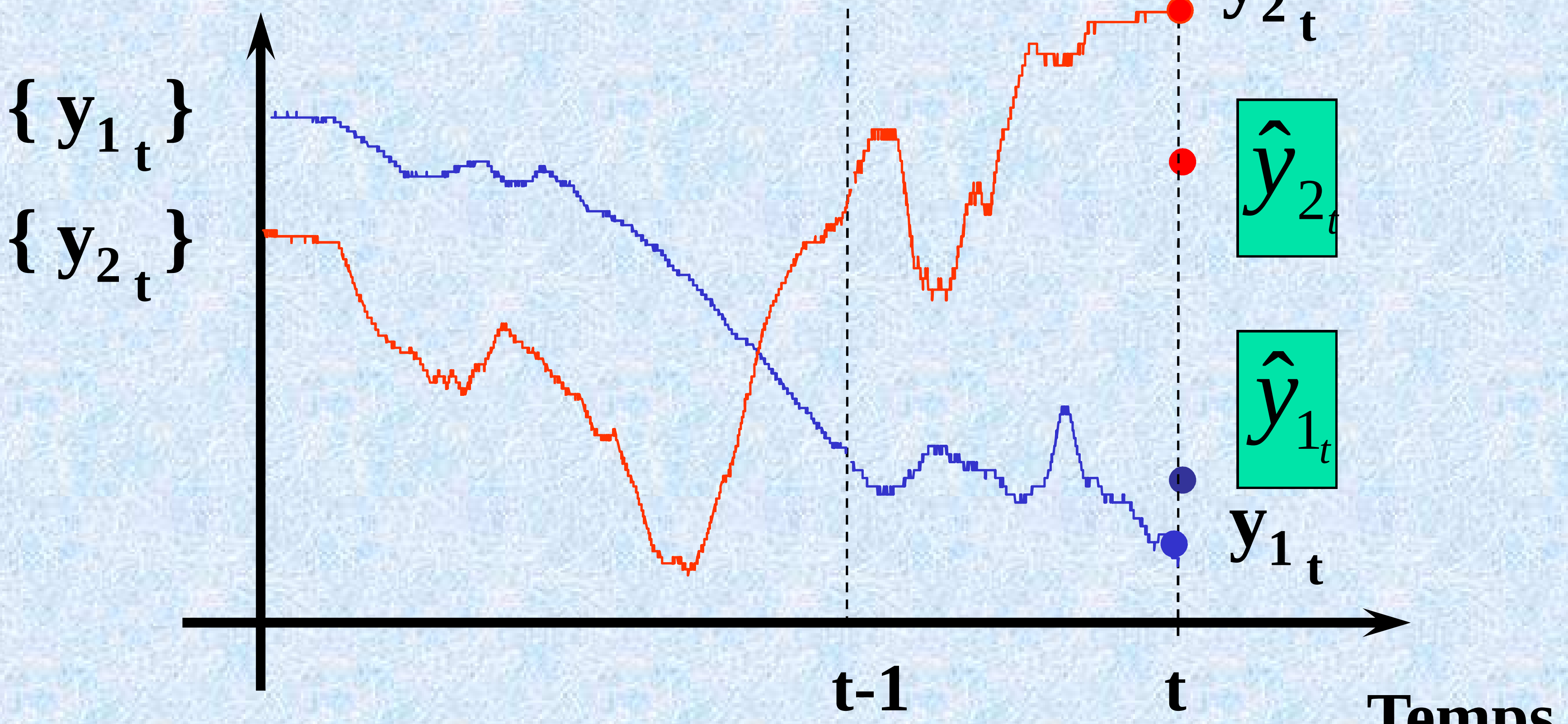
Y_t

- **Calcul des $a_N(i)$ et V_N par l'algorithme de Levinson**

  $(\tau = 0, \ldots N)$

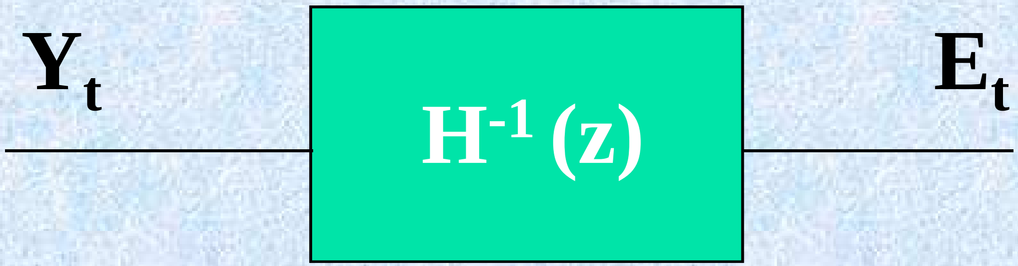
Prédiction linéaire

Valeurs de y_1 et y_2 à l'instant t ?

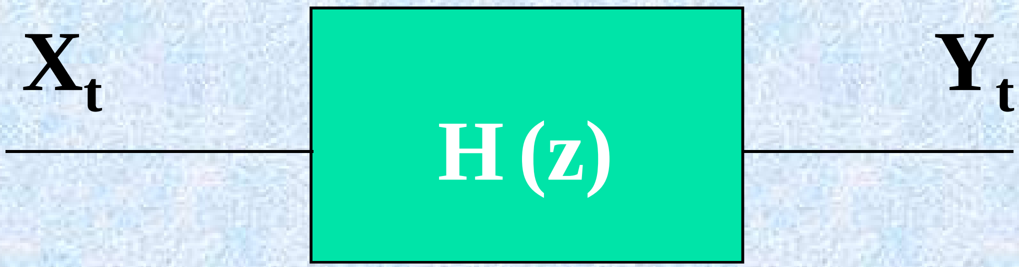


$$E_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

Analogie



Filtre MA prédicteur d’erreur ou filtre de blanchiment



Filtre AR

Equations de Yule Walker

$$\begin{bmatrix} R_{Y_0} & R_{Y_1} & R_{Y_2} & . & R_{Y_N} \\ R_{Y_1} & R_{Y_0} & R_{Y_1} & . & R_{Y_{N-1}} \\ R_{Y_2} & . & . & . & R_{Y_{N-2}} \\ . & & & R_{Y_0} & . \\ R_{Y_N} & R_{Y_{N-1}} & . & . & R_{Y_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{R\,\underline{a} = \underline{V}}$$

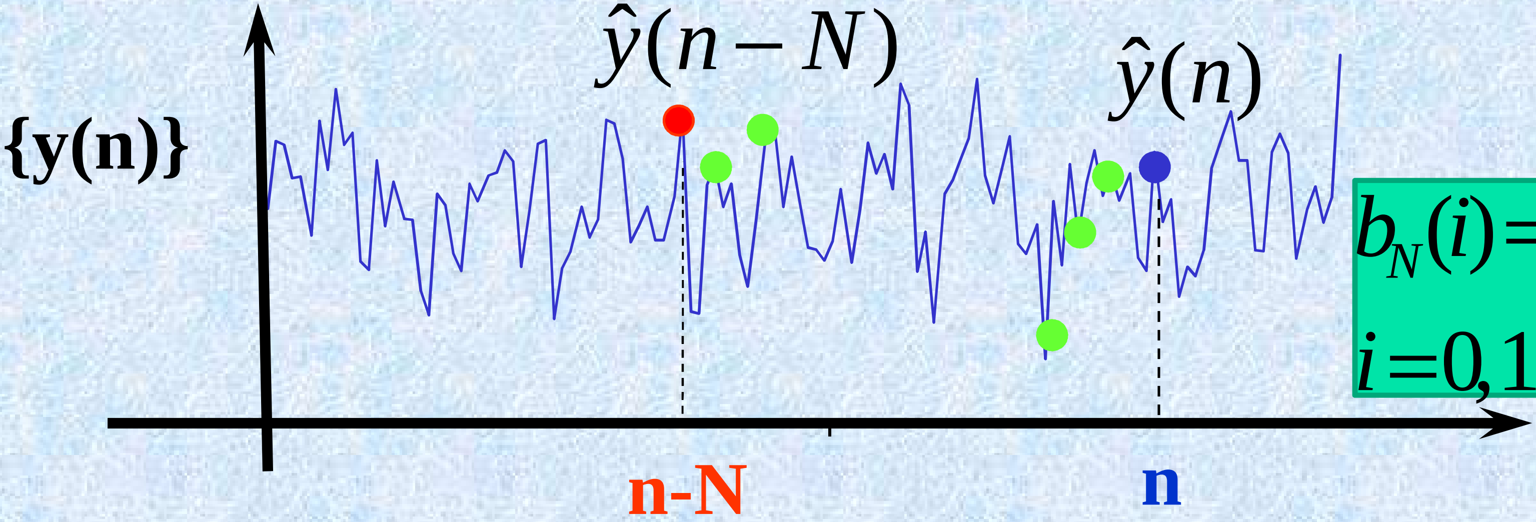
Erreurs de prédiction linéaire

Erreur directe

$$e_{D,N}(n) = y(n) - \hat{y}(n) = y(n) + \sum_{i=1}^{N} a_N(i)\, y(n-i)$$

Erreur rétrograde

$$e_{R,N}(n) = y(n-N) - \hat{y}(n-N) = y(n-N) + \sum_{i=0}^{N-1} b_N(i)\, y(n-i)$$



$b_N(i) = a_N^*(N-i)$

$i = 0,1..N$

Algorithme de Levinson-Durbin

- Critère des moindres carrés

$$J_m^D(n) = E\left[\left|e_{D,m}(n)\right|^2\right] \quad \text{ou} \quad J_m^R(n) = E\left[\left|e_{R,m}(n)\right|^2\right]$$

$m = 1,2,\ldots N$ ordre du modèle

- Récursivité sur l'ordre du modèle

$$a_m(n) = a_{m-1}(n) + \Gamma_m a_{m-1}^*(m-n)$$

$$a_m(m) = \Gamma_m$$

$$\Gamma_m = -\frac{R_{Y_m} + \underline{R}_{m-1}^{rt}\underline{a}_{m-1}}{R_{Y_0} + \underline{R}_{m-1}^{rt}\underline{a}_{m-1}^{r*}} \qquad \underline{a}_{m-1} = \begin{bmatrix} a_{m-1}(1) \\ a_{m-1}(2) \\ . \\ a_{m-1}(m-1) \end{bmatrix} \qquad \underline{R}_{m-1}^{r} = \begin{bmatrix} R_{Y_{m-1}} \\ R_{Y_{m-2}} \\ . \\ R_{Y_1} \end{bmatrix}$$

Coefficient de réflexion

Algorithme de Levinson-Durbin

- Coefficient de réflexion

$$\Gamma_m = -\frac{R_{Y_m} + \underline{R}^{rt}_{m-1}\underline{a}_{m-1}}{E\left[\left|e_{D,m}(n)\right|^2\right]} = -\frac{R_{Y_m} + \underline{R}^{rt}_{m-1}\underline{a}_{m-1}}{E\left[\left|e_{D,m-1}(n)\right|^2\right](1-\left|\Gamma_m\right|^2)}$$

Algorithme de Burg

- Principe
  - Minimisation simultanée des erreurs directe et rétrograde avec la contrainte de respect pour les coefficients du modèle AR de la récursivité de Levinson-Durbin
- Objectif
  - Obtention des coefficients de réflexion
- Spécificités
  - Haute résolution fréquentielle
  - Modèle stable
  - Efficacité de l'algorithme

Algorithme de Burg

- Critère des moindres carrés à minimiser

$$J_m^{D,R}(n) = E\left[\left|e_{D,m}(n)\right|^2 + \left|e_{R,m}(n)\right|^2\right] = \sum_{n=m}^{Npts-1}\left[\left|e_{D,m}(n)\right|^2 + \left|e_{R,m}(n)\right|^2\right]$$

$m = 1,2,\ldots N$ ordre du modèle

- Contrainte

$$a_m(n) = a_{m-1}(n) + \Gamma_m a_{m-1}^*(m-n)$$

$$a_m(m) = \Gamma_m$$

- Equations récursives sur l'ordre

$m = 1,2,\ldots N$

$$e_{D,m}(n) = e_{D,m-1}(n) + \Gamma_m e_{R,m-1}(n-1)$$

$$e_{R,m}(n) = \Gamma_m^* e_{D,m-1}(n) + e_{R,m-1}(n-1)$$

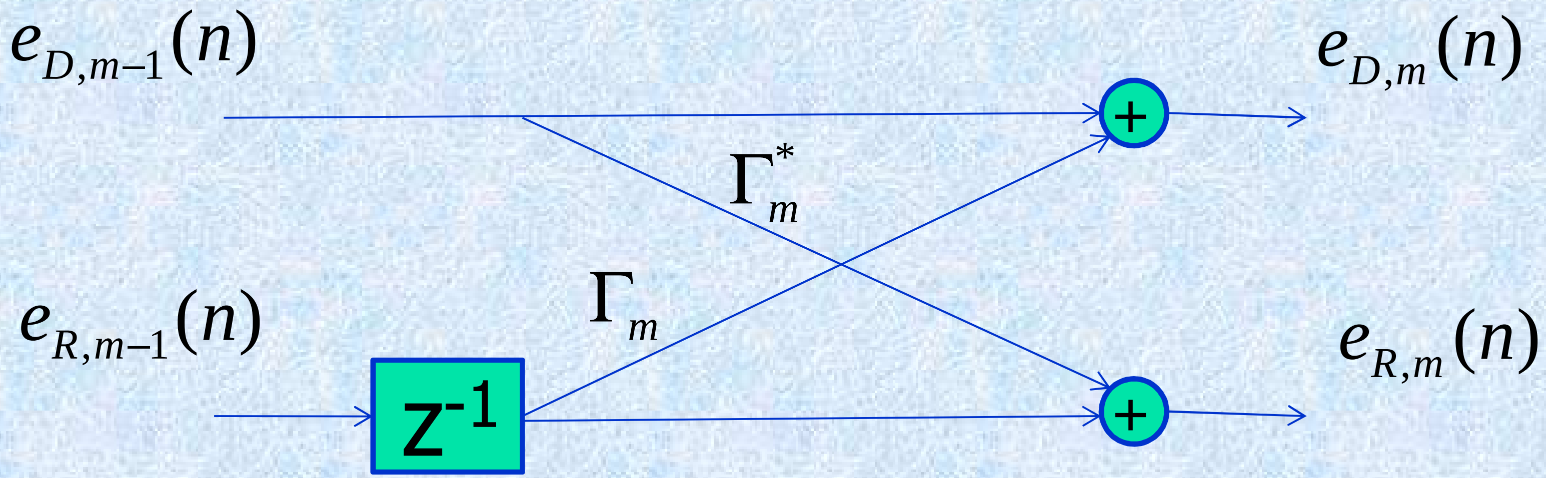
$$e_{D,0}(n) = e_{R,0}(n) = y(n)$$

initialisation

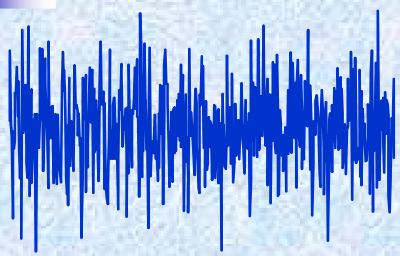
Algorithme de Burg

- Coefficient de réflexion

$$\Gamma_m = \frac{-\sum_{n=m}^{Npts-1} e_{D,m-1}(n)\, e^{*}_{R,m-1}(n-1)}{\frac{1}{2}\sum_{n=m}^{Npts-1}\left[\left|e_{D,m-1}(n)\right|^2 + \left|e_{R,m-1}(n-1)\right|^2\right]} \qquad m = 1,2,\ldots N$$



Modélisation moyenne mobile



X_t

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N} b_i \, z^{-i}$$

Y_t

Bruit blanc centré de variance V

- **Réponse impulsionnelle h_i du filtre ?**
- **Puissance de Y_t ?**
- **Autocorrélation de Y_t ?**

Processus générateur MA

- **Réponse impulsionnelle du filtre :**

$$h_i = b_i$$

- **Puissance :**

$$R_{Y_0} = V \sum_{i=0}^{N} h_i^2$$

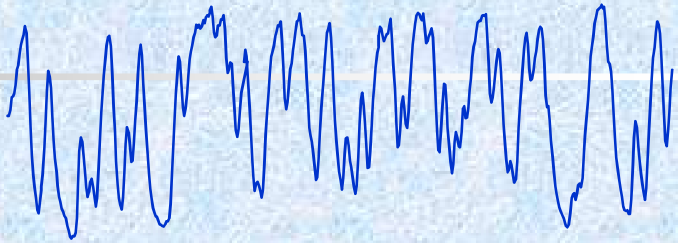
- **Autocorrélation :**

$$\tau \leq N$$

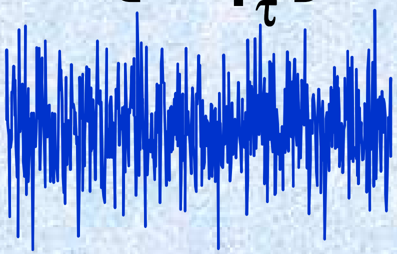
$$R_{Y_\tau} = V \sum_{i=\tau}^{N} h_i h_{i-\tau}$$

Synthèse d'un signal MA

Processus aléatoire → y_t



- **Estimation de la séquence d'autocorrélation $\{ R_{Y_\tau} \}$**

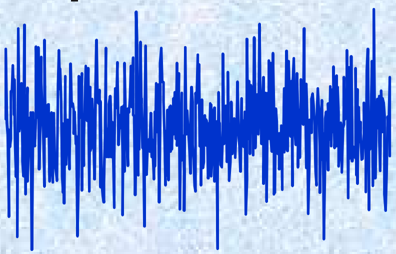


Bruit blanc centré de variance V

X_t → $$H(z) = \sum_{i=0}^{N} b_i \, z^{-i}$$ → Y_t

- **Calcul des b_i par programmation non linéaire** **(τ = 0,... N)**

Modélisation autorégressive et moyenne mobile



Bruit blanc centré de variance V

$\mathbf{X_t}$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i \, z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i \, z^{-i}}$$

$\mathbf{Y_t}$

$$Y_t = \sum_{i=0}^{N} b_i \, X_{t-i} - \sum_{i=1}^{N} a_i \, Y_{t-i}$$

Autocorrélation de $\mathbf{Y_t}$?

Processus générateur ARMA

Autocorrélation :

$$R_{Y_\tau} = -\sum_{i=1}^{N} a_i \; R_{Y_{\tau-i}} + \sum_{i=0}^{N} b_i \; E\left[X_{t-i} \; Y_{t-\tau}\right]$$

$$\tau > N$$

$$R_{Y_\tau} = -\sum_{i=1}^{N} a_i \; R_{Y_{\tau-i}}$$

$$\tau = N$$

$$R_{Y_N} = -\sum_{i=1}^{N} a_i \; R_{Y_{N-i}} + b_0 \, b_N \; V$$

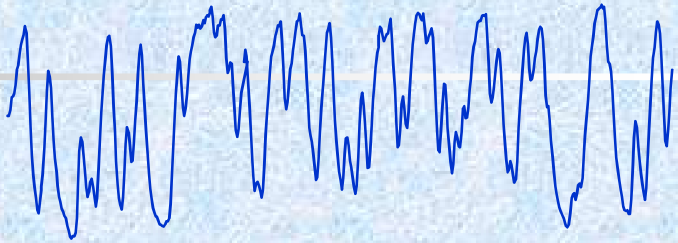
Modélisation ARMA

$$\begin{bmatrix} R_{Y_N} & R_{Y_{N-1}} & R_{Y_{N-2}} & . & R_{Y_0} \\ R_{Y_{N+1}} & R_{Y_N} & R_{Y_{N-1}} & . & R_{Y_1} \\ R_{Y_{N+2}} & . & . & . & R_{Y_2} \\ . & . & . & R_{Y_N} & . \\ R_{Y_{2N}} & R_{Y_{2N-1}} & . & . & R_{Y_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 b_N V \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

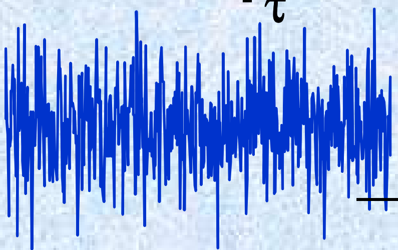
Equations de Yule Walker

Synthèse d'un signal ARMA

Processus aléatoire → y_t



1 **Estimation de la séquence d'autocorrélation $\{ R_{Y_\tau} \}$**



Bruit blanc centré de variance V

X_t → $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} b_i \, z^{-i}$ → U_t → $\displaystyle\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{N} a_N(i)\, z^{-i}}$ → Y_t

2 **Calcul des a $_N$ (i) par l'algorithme de Levinson**

(τ = 0,…N,... 2N)

Synthèse d'un signal ARMA

3 **Détermination des { U_t }**

$$U_t = Y_t + \sum_{i=1}^{N} a_i \, Y_{t-i}$$

4 **Estimation de la séquence d'autocorrélation { R_{U_τ} }**

5 **Calcul des b_i par programmation non linéaire**

$$R_{U_\tau} = V \sum_{i=0}^{N-\tau} b_i \, b_{i+\tau}$$

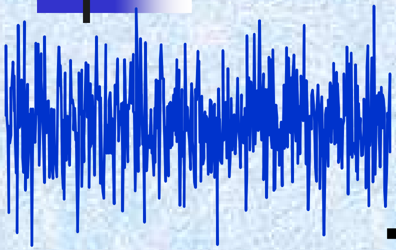
$$b_0 = 1, \tau \leq N$$

Estimation de la DSP à partir du modèle AR du signal

- Estimation de la séquence d'autocorrélation $\{R_y(k)\}$.
- Calcul des $a_N(i)$ et V_N par l'algorithme de Levinson.
- Détermination de la Densité Spectrale de Puissance :

$$\boxed{S_Y(f) = \frac{V_N}{\left|1 + \sum_{n=1}^{N} a_N(n)\, e^{-j2\pi f n T_e}\right|^2}}$$

Estimateur de DSP



Bruit blanc centré de variance 1

$$\left(1 - z^{-1}\right)^{3}\left(1 + z^{-1}\right)$$

Signal MA

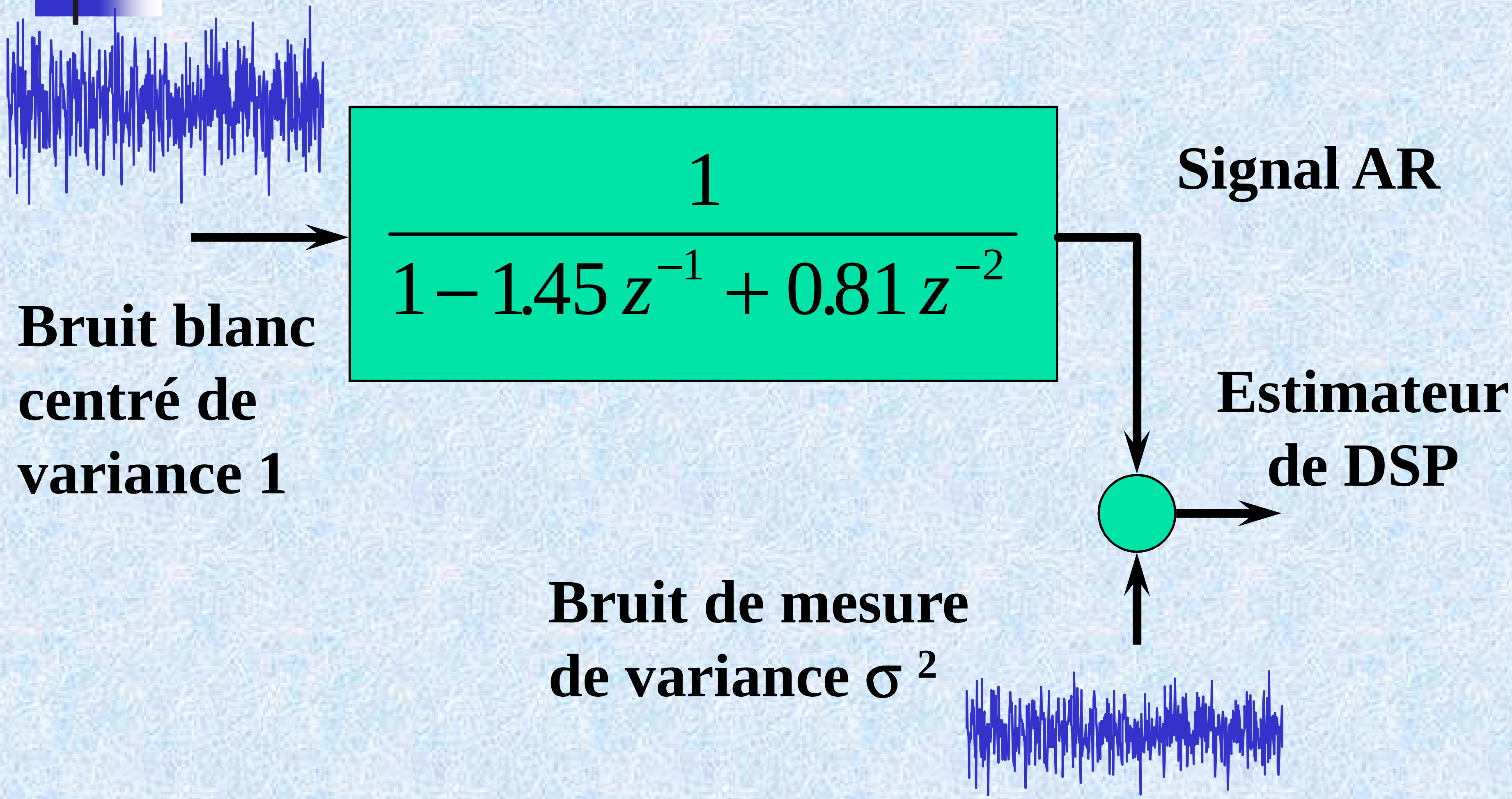
+

+

$$2\sin\left(\frac{4\pi}{5}t\right) + 2\sin\left(\frac{31\pi}{40}t\right)$$

Estimateur de DSP

Estimateur de DSP



Choix de l'ordre du modèle

$$FPE(N) = \frac{M + (N+1)}{M - (N+1)}\hat{\sigma}_N^2$$

Final Prediction Error (Akaike)

$$AIC(N) = \frac{2N}{M} + \ln\hat{\sigma}_N^2$$

Akaike Information Criterion

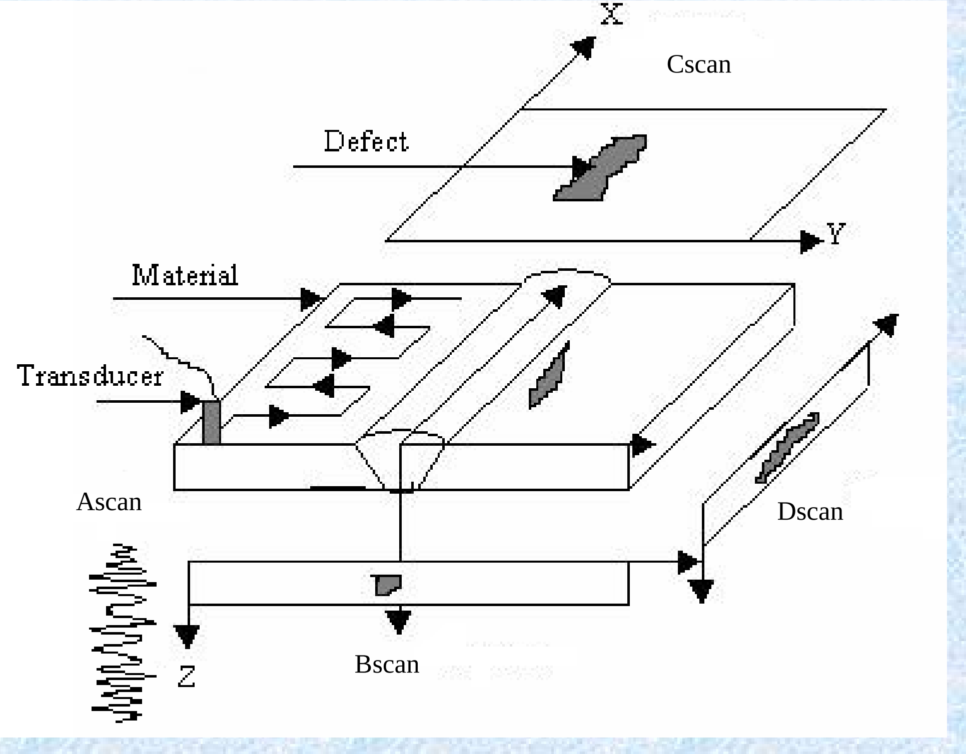
$$MDL(N) = \frac{N\ln M}{M} + \ln\hat{\sigma}_N^2$$

Minimum Description Length (Rissanen)

$$CAT(N) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{M-i}{M\hat{\sigma}_i^2}\right) - \frac{M-N}{M\hat{\sigma}_N^2}$$

Criterion Autoregressive Transfer (Parzen)

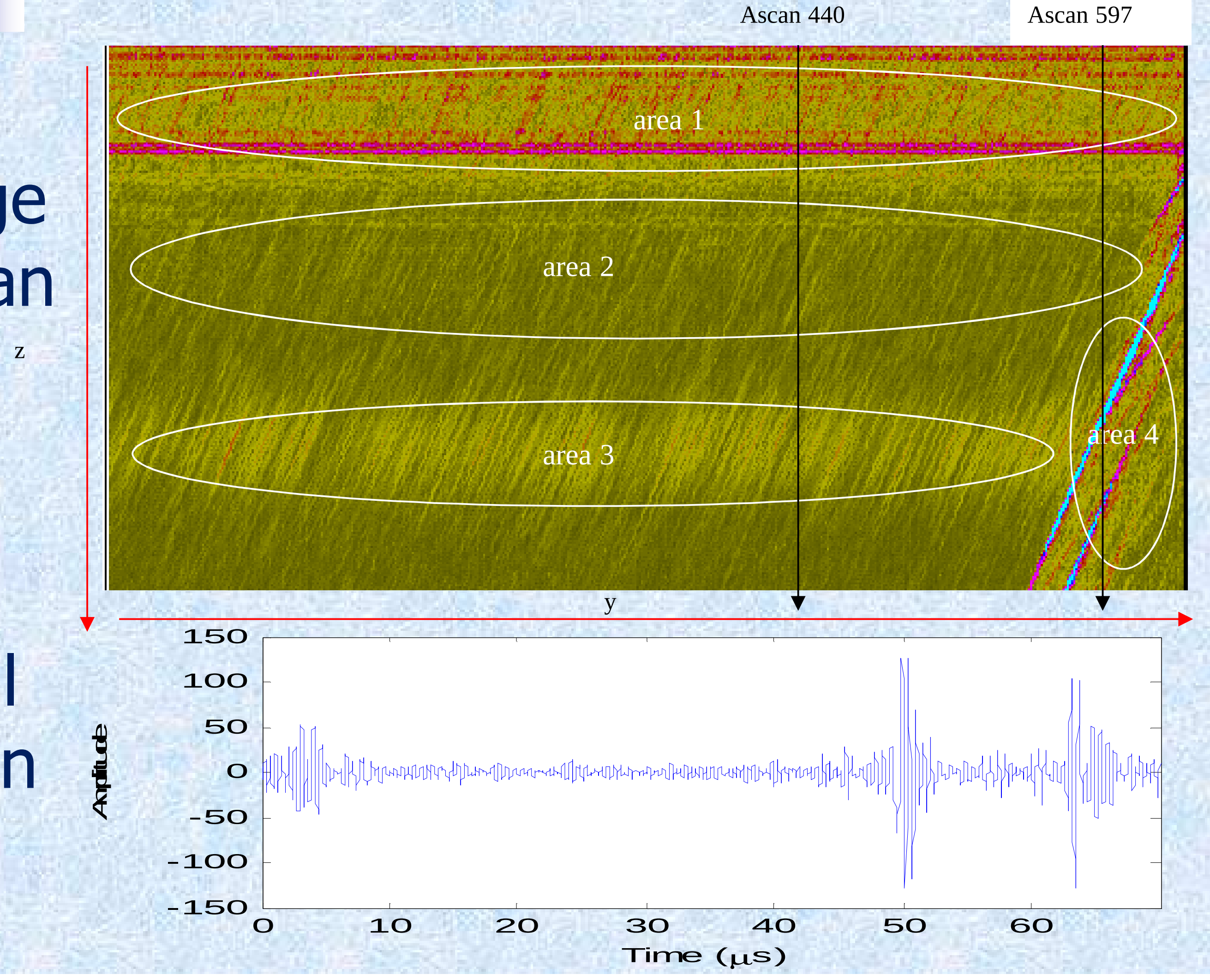
Application au contrôle non destructif d'une pièce en acier



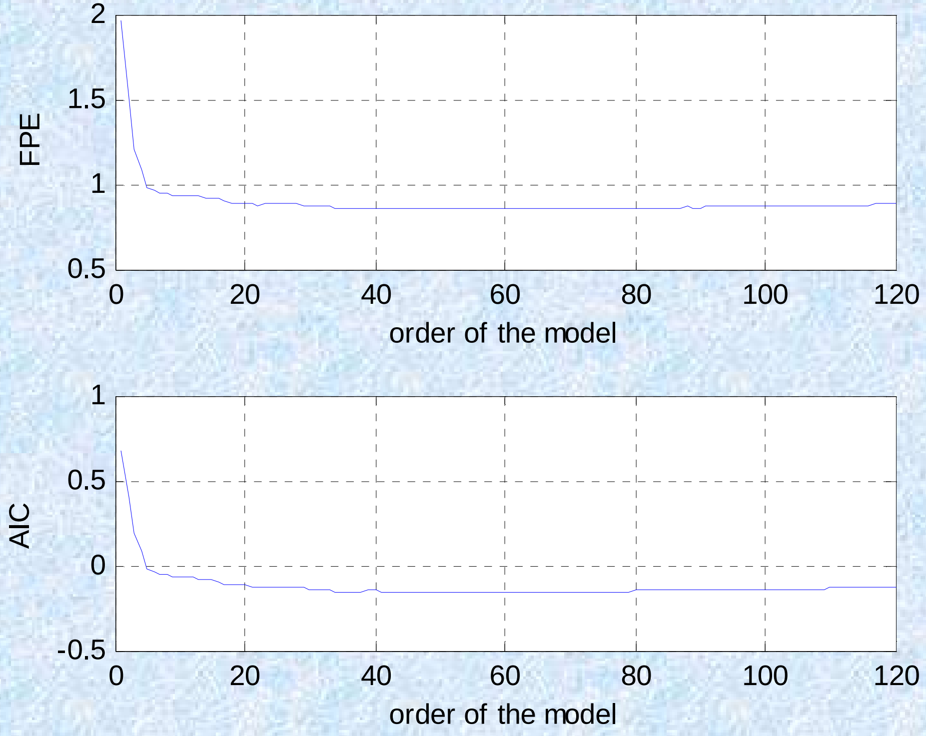
Modélisation d'un bruit de structure

Image
B-scan

Signal
A-scan

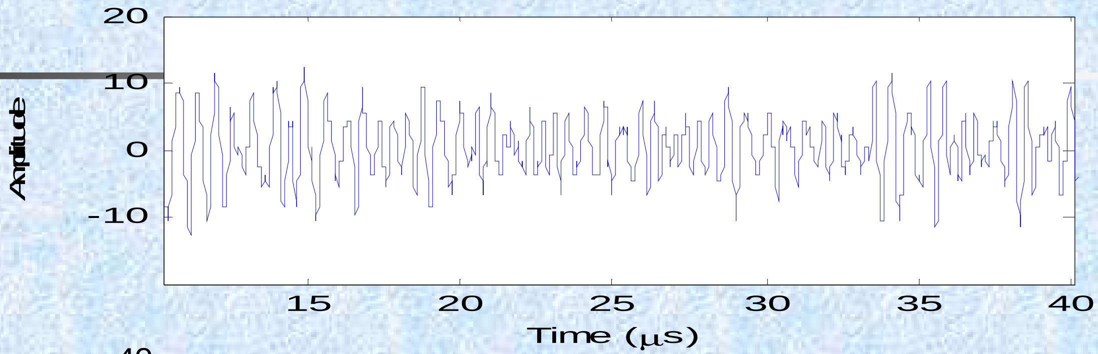


Choix de l’ordre du modèle

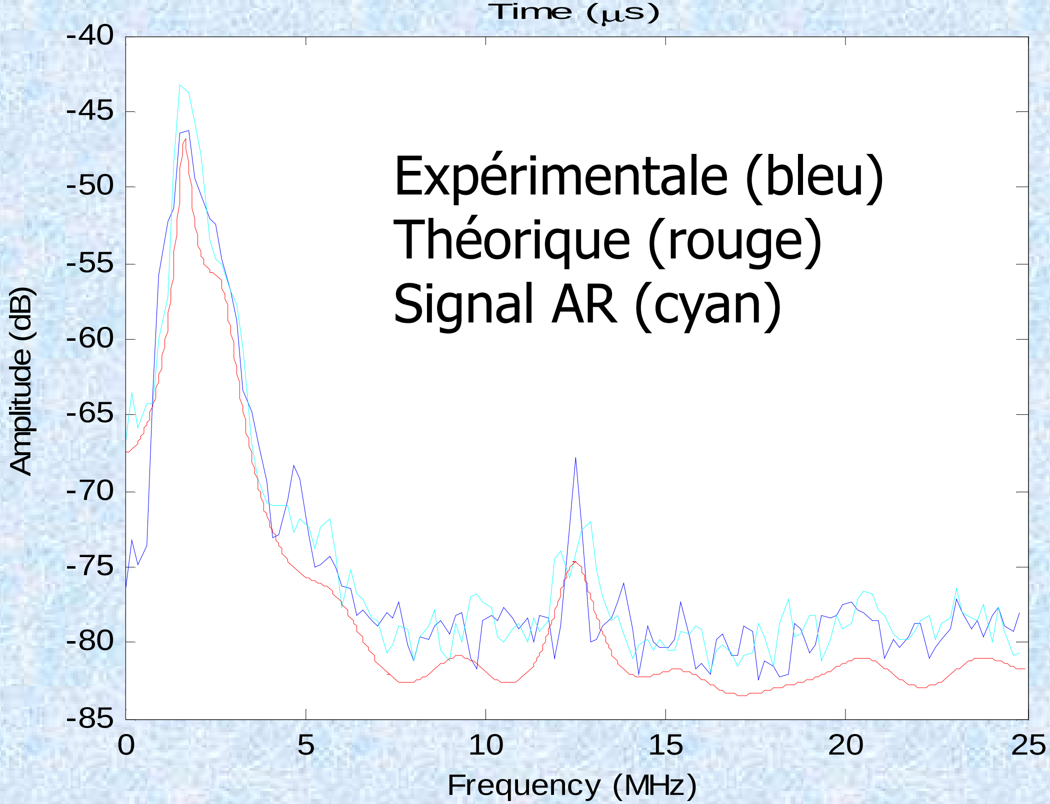


DSP paramétrique (modèle à 18 coefficients)

Signal A-scan



DSP



Analyse en valeurs propres pour l'estimation spectrale

- Cas d'une sinusoïde

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2)$$

$$a_1 = -2\cos 2\pi f_k \qquad x(-1) = 0$$

$$a_2 = 1 \qquad x(-2) = -\sin 2\pi f_k$$

- Cas de p sinusoïdes

$$x(n) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m x(n-m)$$

⇨ Résolution de $A(z) = 1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m} = 0$

Analyse en valeurs propres

- En présence de bruit

$$y(n) = x(n) + w(n)$$

$$\sum_{m=0}^{2p} a_m y(n-m) = -\sum_{m=0}^{2p} a_m w(n-m) \qquad a_0 = 1$$

$$\Gamma_y \underline{a} = \sigma_w^2 \underline{a} \qquad \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ . \\ a_{2p} \end{bmatrix}$$

$\underline{a}$: Vecteur propre de la matrice de variance-covariance

Méthode de Pisarenko

- Objectif : déterminer des composantes sinusoïdales dans un signal bruité

- Propriété du signal bruité :

$$R_Y(0) = \sigma_w^2 + \sum_{i=1}^{p} P_i$$

$$R_Y(k) = \sum_{i=1}^{p} P_i \cos(2\pi f_i k) \qquad k \neq 0$$

P_i : Puissance de la i^ème^ sinusoïde

Méthode de Pisarenko : algorithme

- Estimation de la matrice de variance-covariance $\hat{\Gamma}_Y$ des données
- Calcul des valeurs propres de $\hat{\Gamma}_Y$
  - La plus petite ⇨ σ_w^2
  - Le vecteur propre associé ⇨ $\underline{a}$
- Calcul des racines de $A(z) = 1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m} = 0$

  ⇨ fréquences f_i
- Résolution du système d'équations :

Méthode de Pisarenko : algorithme (suite)

$$\begin{bmatrix} \cos 2\pi f_1 & \cos 2\pi f_2 & . & . & \cos 2\pi f_p \\ \cos 4\pi f_1 & \cos 4\pi f_2 & . & . & \cos 4\pi f_p \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \cos 2\pi p f_1 & \cos 2\pi p f_2 & . & . & \cos 2\pi p f_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ . \\ . \\ P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_Y(1) \\ R_Y(2) \\ . \\ . \\ R_Y(p) \end{bmatrix}$$

- Obtention des amplitudes de chaque sinusoïde

Décomposition en valeurs propres

- Contexte : p sinusoïdes dans un bruit blanc

- Modèle de signal : $x(n) = \sum_{i=1}^{p} A_i \, e^{j(2\pi f_i n + \phi_i)}$

- Propriété : $R_X(m) = \sum_{i=1}^{p} P_i \, e^{j 2\pi f_i m}$

- En présence de bruit $y(n) = x(n) + w(n)$

$$R_Y(m) = R_X(m) + \sigma_w^2 \delta(m) \qquad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm(M-1)$$

Matrice de variance-covariance décomposée en sous-espaces

$$\Gamma_Y = \Gamma_X + \sigma_w^2 I$$

Autocorrélation du signal

(M,M) Rang p

M>p

Autocorrélation du bruit

(M,M) Rang M

$$\Gamma_X = \sum_{i=1}^{p} P_i \, \underline{s}_i \, \underline{s}_i^H$$

$$\underline{s}_i = [1 \; e^{j2\pi f_i} \; e^{j4\pi f_i} \; e^{j2\pi(M-1) f_i} \;]^t$$

- Décomposition en valeurs propres de Γ_Y
  - λ_i Valeurs propres en ordre décroissant
  - $\underline{v}_i$ Vecteurs propres i=1, M

Matrice de variance-covariance décomposée en sous-espaces

- En absence de bruit : $\lambda_i \neq 0 \quad i = 1, p$

$$\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \ldots = \lambda_M = 0$$

$$\Gamma_X = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, \underline{v}_i \underline{v}_i^H$$

- En présence de bruit

$$\Gamma_Y = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \sigma_w^2) \underline{v}_i \underline{v}_i^H + \sum_{i=p+1}^{M} \sigma_w^2 \underline{v}_i \underline{v}_i^H$$

Sous-espace signal Sous-espace bruit

Méthode MUSIC
Multiple Signal Classification

$$P(f) = \sum_{i=p+1}^{M} w_i \left| \underline{S}^H(f)\underline{v}_i \right|^2$$

Vecteurs propres
de l'espace bruit

$$\underline{S}(f) = [1\ e^{j2\pi f}\ \ e^{j4\pi f}\ \ \ldots e^{j2\pi(M-1)f}\ ]^t$$

$$si \quad f = f_i \qquad \underline{S}(f) = \underline{s}_i \qquad\qquad \underline{s}_i \ et\ \underline{v}_i\ orthogonaux$$

$$P(f_i) = 0 \quad i = 1,2\ldots p$$

$$\frac{1}{P(f)} = \frac{1}{\sum_{i=p+1}^{M} w_i \left| \underline{S}^H(f)\underline{v}_i \right|^2}$$

Méthode de Prony

- Modèle de signal : $x(n) = s(n) + b(n)$

$$s(n) = \sum_{k=1}^{p} a_k \, e^{j2\pi f_k n} \quad \text{ou} \quad s(n) = \sum_{k=1}^{p} A_k \cos(2\pi f_k n + \Phi_k)$$

$$0 \leq f_k \leq 1$$

- Equations :

$$s(n) + b_1 \, s(n-1) + b_2 \, s(n-2) + \ldots + b_P \, s(n-P) = 0$$

ou

$$s(n) + b_1 \, s(n-1) + b_2 \, s(n-2) + \ldots + b_{2P} \, s(n-2P) = 0$$

Méthode de Prony

- A partir des b_1, b_2, … b_{2P}, en résolvant le polynôme

$$z^{2P} + b_1 z^{2P-1} + b_2 z^{2P-2} + \cdots + b_{2P} = 0$$

on obtient les solutions $$z = \rho_k e^{\pm 2 j\pi f_k}$$

et donc les fréquences f_k

Méthode de Prony

$$x(n)+b_1 x(n-1)+\cdots+b_P x(n-2P)=\varepsilon(n)=x(n)*h$$

$$h=[1 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{2P}]$$

- On cherche b_1, b_2, … b_{2P} qui minimise le bruit $\sum_n \varepsilon^2(n)$
- En faisant varier n de 2P à 2P+M-1

$$x(n)+b_1 x(n-1)+\cdots+b_P x(n-2P)=\varepsilon(n)$$

Méthode de Prony

$$\mathbf{D}\,\mathbf{b} = \mathbf{E}$$

$$\begin{bmatrix} x(2P) & x(2P-1) & . & . & x(0) \\ x(2P+1) & x(2P) & . & . & x(1) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x(2P+M-1) & x(2P+M-2) & . & . & x(M-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ . \\ . \\ b_{2P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon(2P) \\ \varepsilon(2P+1) \\ . \\ . \\ \varepsilon(2P+M-1) \end{bmatrix}$$

- M équations, 2P inconnus, 2P+M points sur le signal

Méthode de Prony

- **Principe** : minimiser $\mathbf{E}^t\mathbf{E}$
  sous la contrainte que la première composante de $\mathbf{b}$
  soit égale à 1
- **Algorithme**
  - Construire $\mathbf{D}$ puis $\mathbf{R} = \mathbf{D}^t\mathbf{D}$ puis $\mathbf{R}^{-1}$
  - Déterminer $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\mathbf{u}^{\mathbf{t}}\mathbf{R}^{-\mathbf{t}}\mathbf{u}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \underset{(2P+1,1)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}$$

  - Déduire les racines du polynôme et les fréquences f_k