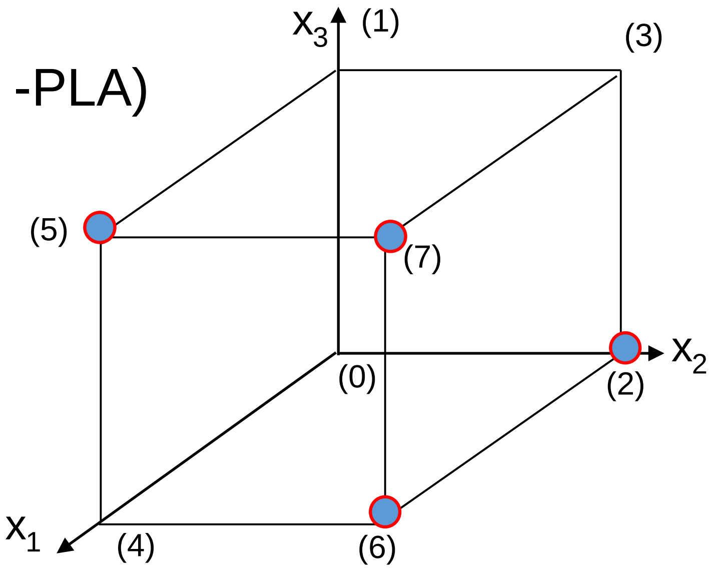
Chapitre III
Minimisation des Fonctions Logiques

I/ - Introduction

Minimiser ou optimiser une fonction logique, c'est rechercher une écriture de la fonction comportant le minimum de lettres et de termes.

c.à.d En pratique

- Minimiser le matériel utilisé pour réaliser la fonction logique (minimum de portes logique
- Minimiser la place mémoire (microprocesseur -PLA)



Exemple.
Soit la fonction logique définie par :

$$f = R_1(2,5,6,7)$$

$$f = f\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

$$f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

Pour simplifier f, on prend deux sommets voisin et de proche en proche, minimise f.

$$f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \left(\bar{x}_3 + x_3\right)$$

ou bien

$$f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3$$

.

$$f = x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_3$$

On a pu minimiser f, car (5 et 7) et (2,6) sont voisin ou adjacents.

On distingue essentiellement trois méthodes de minimisation.

1. Méthode tabulaire (Karnaugh)

2. Méthode linéaire (Quine Mc. Cluskey)

3. Méthode algébrique (Consensus)

Les méthodes de Karnaugh et de Quine Mc Cluskey

Utilisent les formes canoniques de la fonction et les méthodes des

Consensus utilise des formes quelconques de la fonction logique.

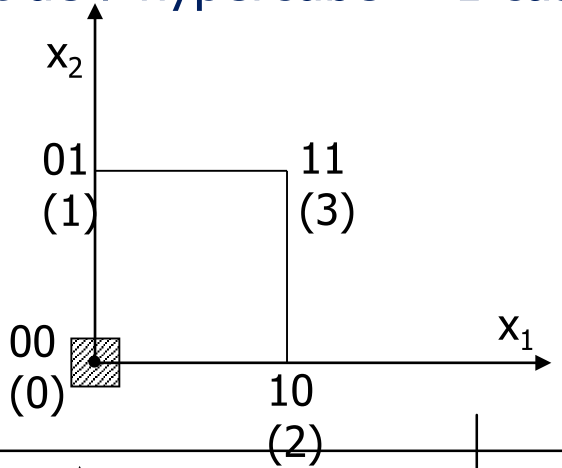
II/ - Méthode Karnaugh)

Principe. C’est la représentation plan de l’hypercube.

Conserve la notion d’adjacence.

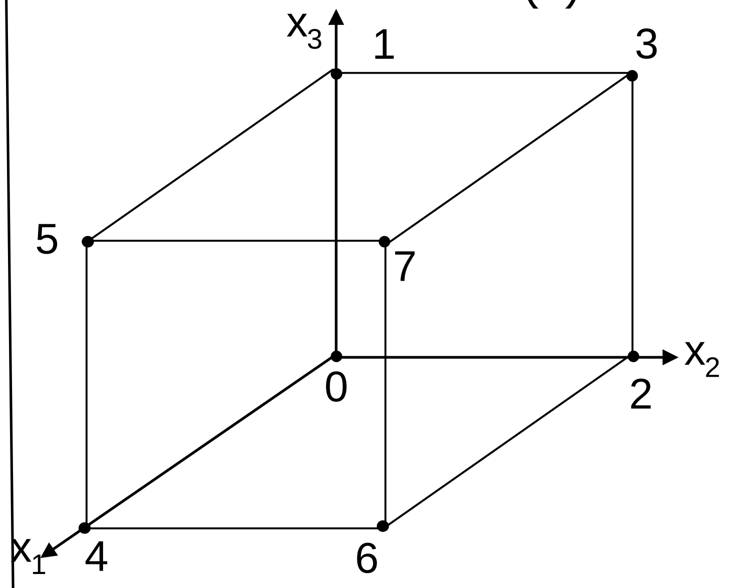
1 sommet de l’hypercube = 1 case de la table.

Exemples.



$x_1 \backslash x_2$	0	1
0	0	1
1	2	3

2^2 Cases



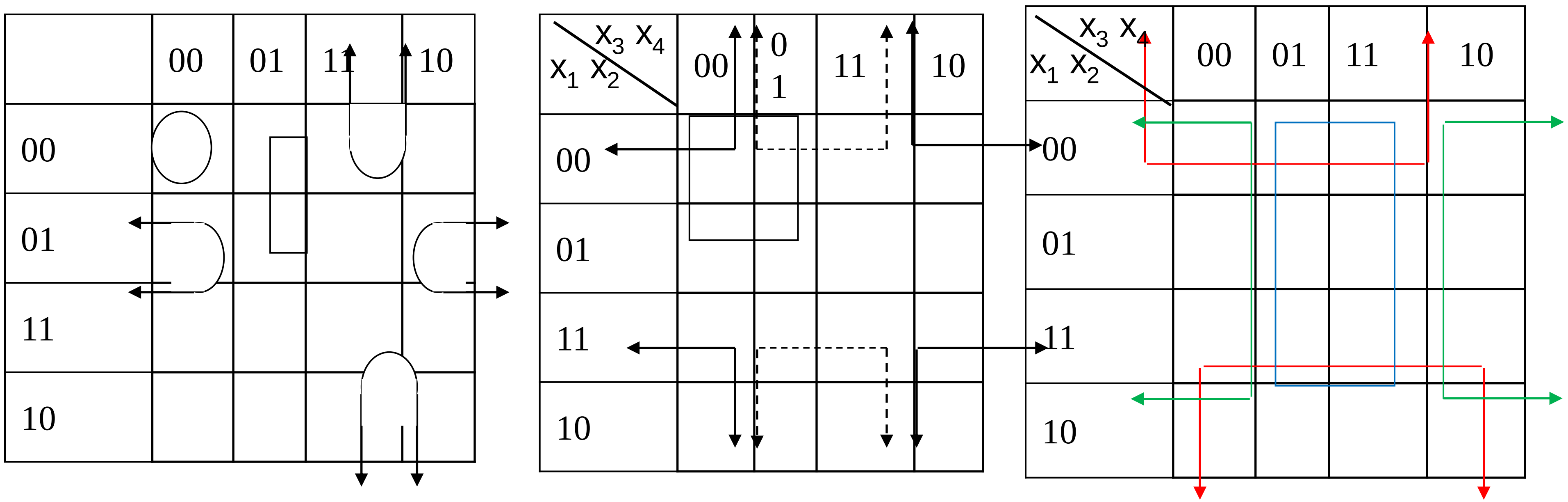
$x_1 \backslash x_2\ x_3$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

2^3 Cases

Technique de minimisation.
On regroupe les cases adjacentes en puissance de 2 : 1,2,4,8,16 etc….

Exemple pour une table à 4 variables

Regroupement possibles.



3 - Exemple ;

Soit une fonction logique de 4 variables (x_1 ,x_2, x_3, x_4)définie par son ensemble d' ouverture.

$$f = R1(0,2,3,4,5,7,8,10,12,13,14)$$

x_3

x_4

$x_1 x_2$ \ $x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1	1	1	
11	1	1		1
10	1			1

x_2

x_1

Base première complète

$$f = \bar{x}2\ \bar{x}4 + \bar{x}3\ \bar{x}4 + x2\ \bar{x}3 + x1\ \bar{x}4 + \bar{x}1 x2\ x4 + \bar{x}1 x3\ x4$$

4 – monôme premier (M.P.)

Tout monôme qui figure dans la fonction après emploi de la méthode de Karnaugh est premier.

5 – monôme premier essentiel (M.P.E.)

c’est un monôme premier qui est le seul à couvrir au moins un sommet de la fonction. .

Exemple :

$$X_2\overline{X_3} + \overline{X_1}X_3X_4$$

6– Base premier (B.P.)

Écriture de la fonction qui regroupe tous les monôme premier essentiels et non essentiel sil n’en existe qu’une seul.

Exemple :

$$f = \bar{x}_2\ \bar{x}_4 + \bar{x}_3\ \bar{x}_4 + x_2\ \bar{x}_3 + x_1\ \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2\ x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_3\ x_4$$

Pour réaliser la fonction f, il faut.

$$\left.\begin{array}{l} 3\ \text{portes ET à 3 entrées.} \\ 4\ \text{portes ET à 2 entrées.} \\ 1\ \text{portes OU à 7 entrées} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f$$

7 – Codage de la table de Karnaugh, code binaire réfléchi. (code de Gray).

a) Cas de quatre variables

x_3 x_4

$x_3\ x_4$ / $x_1\ x_2$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

x_2 x_1

$2^4=16$ Cases

x_1 de poids : $2^3=8$
x_2 de poids : $2^2=4$
x_3 de poids : $2^1=2$
x_4 de poids : $2^0=1$

b) Cas de cinq variables.

$x_1 x_2$ \ $x_3 x_4 x_5$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

$2^5=32$ Cases

x_1 de poids : $2^4=16$

x_2 de poids : $2^3=8$

x_3 de poids : $2^2=4$

x_4 de poids : $2^1=2$

x_5 de poids : $2^0=1$

III Méthode de Quine Mc Cluskey

Cette méthode possède l'avantage d'être systématique et donc programmable. Elle consiste, portant de la première forme canonique de la fonction en l'application itérée de la relation.

$$Ax + A\bar{x} = A$$

- Algorithme

1ére étape.

Prendre la première forme canonique de la fonction et classer les sommets par classes.

C_n : classe de monômes comportant n, ‘’1 ‘’.

2éme étape.

a/ - Prendre un sommet $i \in C_0$ et le combiner si possible avec le sommet $j \in C_1$ pour tout j.

b/ - Itérer sur tout $j \in C_1 / \ k \in C_2 \ , \forall k$ chaque fois qu'une combinaison

est possible entre $j \in C_1$ et $k \in C_2$

c/ - Itérer sur les classes nouvelles.
On a ainsi la base première.
Ce mode de calcul se comprend mieux sur un exemple.

Exemple. On se propose de chercher la base minimale de la fonction suivante.

$$f(x1, x2, x3, x4) = R1(0,2,3,4,5,7,8,10,12,13,14)$$

1ère étape.
Classer les sommets.
- Classes

C0	0	0 0 0 0	V
C1	2 4 8	0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0	V V V
C2	3 5 10 12	0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0	V V V V
C3	7 13 14	0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0	V V V

2ème étape.
Combiner tous les sommets de la classe C avec C_{i+1}

0 ,2 0 ,4 0 ,8	0 0 - 0 0 - 0 0 - 0 0 0	V V V
2,3 2 ,10 4,5 4,12 8,10 8,12	0 0 1 - - 0 1 0 0 1 0 - - 1 0 0 1 0 - 0 1 - 0 0	MP V V V V V

C012	0 ,2,8,10 0 ,4 ,8,12	- 0 - 0 - - 0 0	MP MP
C123	4,5,12,13 8,10,12,14	- 1 0 - 1 - - 0	MP MP
C0123		Φ	

C23	3,7 5,7 5 ,13 10,14 12,13 12 ,14	0 - 1 1 0 1 - 1 - 1 0 0 1 - 1 0 1 1 0 - 1 1 - 0	MP MP V V V V

- Itérer sur les classes nouvelles.

Remarque 1.

On ne peut combiner que les termes ayant un tiret dans la même

colonne.

Donc la base première complète est

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_4$$

-

Recherche de la base minimale à partir de la base première.

1 Les monômes premiers essentiels (MPE) figurent dans tous les monômes de la fonction et en particulier dans la base première.

$$\sum MPE = Noyau$$

2 Recherche des bases minimales.

C’est rechercher les monômes premiers non essentiels qu’on peut supprimer sans changer l’écriture de la fonction.

Table de choix

	0	2	3	4	5	7	8	10	12	13	14
a) $\bar{x}1\ \bar{x}2\ x3$		●	●								
b) $\bar{x}1\ x3\ x4$			●			●					
c) $\bar{x}1\ x2\ x4$					●	●					
d) $\bar{x}2\ \bar{x}4$	●	●					●	●			
e) $\bar{x}3\bar{x}4$	●			●			●		●		
f) $x2\ \bar{x}3$				●	●				●	●	
g) $x1\ \bar{x}4$							●	●	●		●

MPE MPE

Les monômes premiers essentiels (MPE) sont :

$$x1\,\overline{x4} \quad \text{et} \quad x2\,\overline{x3}$$

Il doivent intervenir obligatoirement dans l'expression de la fonction pour couvrir respectivement les sommets 13 et 14.

Table de choix réduite.

On supprime les sommets couverts par les MPE. (4,5,8,10,12,13,14)

- Pour couvrir le sommet ‘’0’’ : d+e
- ’’ ’’ ’’ ’’ ’’ ’’2’’ : a+d
- ’’ ’’ ’’ ’’ ’’ ’’3’’ : a+b
- ‘’ ’’ ‘’ ‘’ ‘’ ‘’7’’ : b+c
- Pour couvrir les 4 sommets (0,2,3 et 7)

	0	2	3	7
a) $\bar{x}1\ \bar{x}2\ x3$		●	●	
b) $\bar{x}1\ x3\ x4$			●	●
c) $\bar{x}1\ x2\ x4$				●
d) $\bar{x}2\ \bar{x}4$	●	●		
e) $\bar{x}3\bar{x}4$	●			

(d+e)(a+b)(a+d)(b+c)=1

(ad+ae+de+d)(ab+ac+bc+b)=1

(ae+d)(ac+b)= ace+abe+acd+bd=1

$\boxed{ace+abe+acd+bd=1}$

chaque monôme de cette expression constitue une association nécessaire et suffisante de MPNE qui assure que les sommets qui ne sont pas couverts par les MPE le soient.

Donc les bases minimales sont :

$$f_1 = x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_4 + \overline{x}_3 \bar{x}_4$$

$$f_2 = x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + \overline{x}_3 \bar{x}_4$$

$$f_3 = x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_4$$

$$f_4 = x_2 x_3 + x_1 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_4$$

La véritable base minimale de la fonction est l'expression f_4

$$f = x2\,\bar{x}3 + x1\,\bar{x}4 + \bar{x}1\,x3\,x4 + \bar{x}\,2\,\bar{x}4$$

IV – Méthode des consensus.

Elle s'applique à des écritures quelconques de la fonction logique.

a - Absorption :

$$x_i\ m + m = m$$

b – Consensus :

$$x_i\ m_1 + \bar{x}_i\ m_2 = x_i\ m_1 + \bar{x}_i\ m_2 + m_1\ m_2$$

$m1\ m2$: consensus/ x_i

xi terme conséquent.

Algorithme.

1. Appliquer la relation des consensus entre les monômes pris deux à deux, l'ensemble des termes conséquents ainsi obtenu est ajouté à l'expression de la fonction.
2. Appliquer éventuellement la relation d'absorption pour simplifier la nouvelle expression.

   La méthode se termine lorsqu'on ne peut appliquer aucune de ces deux étapes.

On montre alors que l'expression obtenue est bien la base première complète de la fonction.

Exemple.

Soit la fonction de cinq variable suivante :

$$f = x_1 x_2 x_4 x_5 + x_1 x_2 \overline{x}_5 + x_1 x_3 \overline{x}_4 + x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 + \overline{x}_2 \overline{x}_4$$

-5 variables :

- Monoforme : x_1

Biforme : x_2 , x_3 , x_4 , x_5

Pour la variable x_1

: aucun terme n’est formé

Pour la variable x_2

Consensus/ x_2	Absorption
$x_1 \overline{x}_4 \overline{x}_5$	rien
$\overline{x}_3 \overline{x}_4$	$x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$

Donc

$$f = x_1x_2x_4x_5 + x_1x_2\overline{x}_5 + x_1x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_2\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_4\overline{x}_5 + \overline{x}_3\overline{x}_4$$

Pour la variable x_3

:

Consensus x_3	Absorption
$x_1\overline{x}_4$	$x_1x_3\overline{x}_4$, $x_1\overline{x}_4\overline{x}_5$

$$f = x_1x_2x_4x_5 + x_1x_2\overline{x}_5 + \overline{x}_2\overline{x}_4 + \overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_4$$

Pour la variable x_4

Consensus/ x_4	Absorption
$x_1x_2\overline{x}_3x_5$	rien
$x_1x_2x_5$	$x_1x_2x_4x_5$,

$$f = x_1 x_2 \overline{x}_5 + \overline{x}_2 \overline{x}_4 + \overline{x}_3 \overline{x}_4 + x_1 \overline{x}_4 + x_1 x_2 x_5$$

Pour la variable x_5

Consensus/ x_5	Absorption
$x_1 x_2$	$x_1 x_2 x_5$, $x_1 x_2 \overline{x}_5$

On obtient donc :

La base première complète est : $\boxed{f = x_1 x_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_4 + \overline{x}_3 \overline{x}_4 + x_1 \overline{x}_4}$

Recherche des bases minimales

On pose

$$a = x_1 x_2$$

$$b = \bar{x}_2 \bar{x}_4$$

$$c = \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

$$d = x_1 \bar{x}_4$$

On montre que les relations d’inclusion qui existent entre les monômes premiers de f sont les mêmes que celles qui existent entre les monômes premiers de la fonction suivantes.

$$\boxed{f = a\, x_1 x_2 + b\, \bar{x}_2 \bar{x}_4 + c\, \bar{x}_3 \bar{x}_4 + d\, x_1 \bar{x}_4}$$

Les nouvelles variables a, b, c et d sont monoformes.

Pour trouver les monômes premiers essentiels de f on rapplique la méthode des consensus pour les variables biformes

-Variables monoformes : $x_1, \quad x_3, \quad x_4$

-Variables biformes : x_2

$$f = a\, x_1 x_2 + b\, \overline{x}_2 \overline{x}_4 + c\, \overline{x}_3 \overline{x}_4 + d\, x_1 \overline{x}_4$$

Consensus/ x_2	Absorption
$a\, x_1 b \overline{x}_4$	rien

$$f = a\, x_1 x_2 + b\, \overline{x}_2 \overline{x}_4 + c\, \overline{x}_3 \overline{x}_4 + d\, x_1 \overline{x}_4 + ab x_1 \overline{x}_4$$

$$f = a\, x_1 x_2 + b\, \overline{x}_2 \overline{x}_4 + c\, \overline{x}_3 \overline{x}_4 + \left(d + ab\right) x_1 \overline{x}_4$$

$$f = a\, x_1 x_2 + b\, \overline{x}_2 \overline{x}_4 + c\, \overline{x}_3 \overline{x}_4 + (d + ab)\, x_1 \overline{x}_4$$

Le monôme x_1x_2 est couvert par a

Le monôme $\overline{x}_2\overline{x}_4$ est couvert par b

Le monôme $\overline{x}_3\overline{x}_4$ est couvert par c

Le monôme $x_1\overline{x}_4$ est couvert par d mais

peut aussi être couvert par a et b

Pour trouver la base première minimale on développe le produit des parenthèses. on considère les identificateurs comme des variables

a . b . c . (d+ab)

Il y a deux bases minimales

$$f_1 = a + b + c + d = x_1 x_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_4 + \overline{x}_3 \overline{x}_4 + x_1 \overline{x}_4$$

$$f_2 = a + b + c + a + b = x_1 x_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_4 + \overline{x}_3 \overline{x}_4$$