مقدمات کنترل فرآیندها

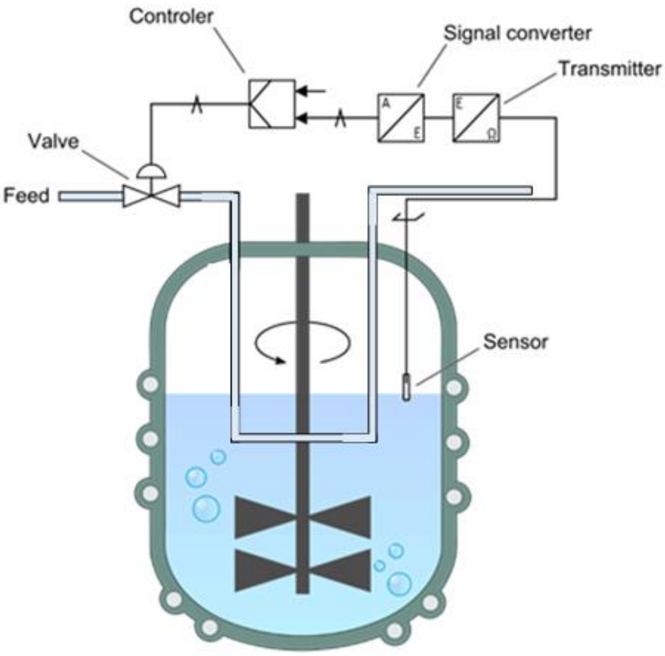
یک تجهیز مجموعه‌ای از فرآیندها اسـت. هر فرآیند دارای یک یا چند ورودی و خرجی می‌باشـد. به طور مثال در یک برج تقطیر، ممکن اسـت فرآیند داری یک ورودی نفت خام و چندین خروجی شـامل مواد مختلف باشد. یا ممکن است در یک بویلر فرآیند تولید بخار باشد. در چنین فرآیندی حرارت ورودی به کوره به عنوان ورودی فرآیند و خروجی فرآیند کیفیت و دمای بخار می‌باشد.

هـدف از کنترل فرآینـد حفظ و کنترل پارامترهـای خروجی فرآینـد (بـه طور مثـال دمـا یـا غلظت محصولات خروجی) در یک میزان مقرر و دلخواه است.

از این رو قدم اول در کنترل فرآیند دانسـتن دینامیک فرآیند و شـبیه‌سـازی آن می‌باشـد. به عبارت دیگر در ابتدا باید بدانیم که در صورت تغییر در ورودی فرآیند خروجی‌ها به چه صورت تغییر می‌کنند.

فرض کنید فرآیند مد نظر تغییر در دمای سیال در یک مخزن باشد. در چنین فرآیندی خروجی که می‌بایسـت کنترل شـود، دمای سـیال اسـت. تغییر دمای سـیال از طریق تزریق بخار به مخزن صورت میگیرد. بنابراین ورودی فرآیند میزان دبی بخار ورودی به مخزن می‌باشد.

برای حفظ دمای این مخزن در میزان مقرر یا تغییر آن به میزان دلخواه ما، در قدم اول باید دانسـت که با تزریق بخار به این مخزن تغییرات دمای آن به چه صورت خواهد بود.



شکل ۱: شماتیک مکانیزم و تجهیزات کنترل دمای یک مخزن

برای شبیه‌سازی دینامیک فرآیند ابتدا معادله موازنه حرارت را می‌نویسیم.

حرارت خروجی - حرارت ورودی = تغییرات انرژی مخزن

$$mC_p\frac{dT}{dt} = UA(T_v\text{-}T)$$

تمامی مسائل مرتبط با کنترل فرآیند وابسته به زمان هستند و باید تغییرات پارامترهای سیستم در طی زمان در آنها بررسی شود. از این رو همیشه با حل یک معادله دیفرانسیل سروکار داریم.

مقدمات معادلات دیفرانسیل

به معادله‌ای که در آن متغیر مستقل، تابع آن متغیر و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل باشد معادله دیفرانسیل گفته می‌شود. معادلات زیر چند نمونه از معادلات دیفرانسیل می‌باشند.

$$\frac{dy}{dt} = 1 \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = sin(t) + 3 \tag{2}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{dy}{dt} = exp(t) + 5y \tag{3}$$

معادلات بالا شامل یک متغیر مستقل t (زمان) و تابع آن y و مشتقات تابع نسبت به زمان می‌باشند و نمونه‌هایی از معادلات دیفرانسیل معمولی به شمار می‌روند. معادلات دیفرانسیل به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند.

- معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE)
- معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE)

در صورتی که معادله شامل مشتقات چندین متغیر باشد معادله دیفرانسیل جزئی نامیده می‌شود. معادله زیر نمونه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی می‌باشند.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 4x^2t \tag{4}$$

اغلب پدیده‌های فیزیکی و سیستم‌های دینامیکی در صورتی که به بیان ریاضی نوشته شوند اغلب معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شود. در کنترل فرآیندها اغلب معادلاتی که برای شبیه‌سازی رفتار سیستم با آنها سروکار داریم از جنس معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) هستند.

به بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل مرتبه معادله دیفرانسیل گفته می‌شود. به طور مثال در معادله ۱ مرتبه اول، معادله ۲ مرتبه دوم و معادله ۳ مرتبه سوم می‌باشد. فیزیک حاکم بر گرم کردن یک مخزن منتهی به معادله‌ای مرتبه اول می‌شود و پدیده‌هایی همانند فیزیک حاکم بر یک شیر پنوماتیک منتهی به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم می‌گردد.

همچنین معادلات دیفرانسیل به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم می‌گردند. به معادله دیفرانسیلی خطی گفته می‌شود که تمام توابع و مشتقات موجود در آن خطی باشد. عبارت‌هایی که در زیر آمده‌اند باعث غیر خطی شدن معادله می‌شوند.

$$y^2, y^3, sin(y), ln(y), \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{5}$$

دقت شود که تنها، غیر خطی بودن تابع وابسته و مشتقاتش منجر به غیر خطی شدن معادله می‌شوند. به عنوان مثال عباراتی که در زیر آمده‌اند، معادله را غیر خطی نمی‌کنند.

$$t^2, x^3, sin(x), ln(t) \tag{6}$$

برای درک عملکرد این تجهیزات معادلات دیفرانسیل حاکم بر آنها باید حل گردد. به طور کلی هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند جواب معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. به طور مثال در صورتی که معادله دیفرانسیل زیر را داشته باشیم.

$$y' + 4y = 0 \tag{7}$$

تابع

$$y = 2e^{-4t} \tag{8}$$

یک جواب برای این معادله دیفرانسیل محسوب می‌شود چرا که در صورت جایگذاری y در معادله خواهیم داشت.

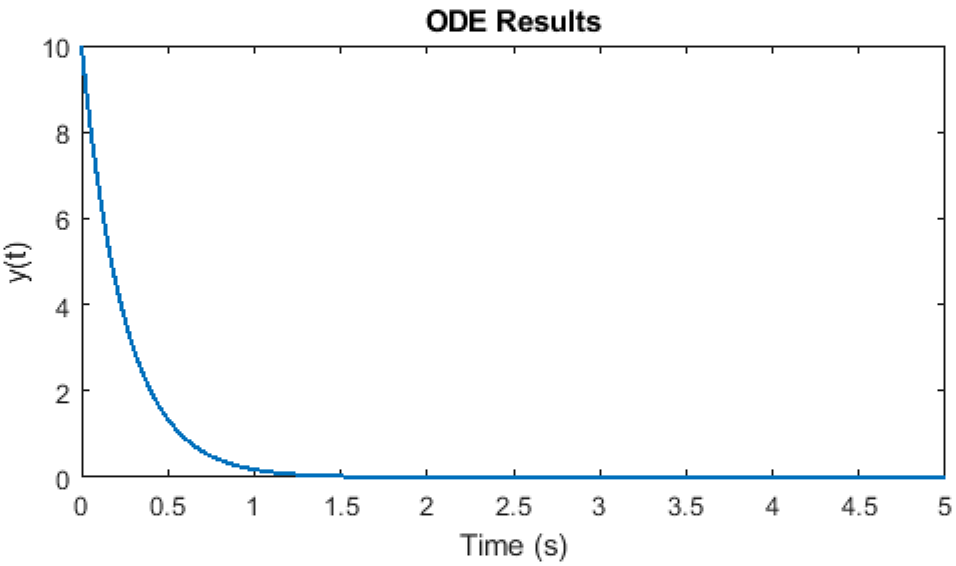
$$-4e^{-4t} + 4e^{-4t} = 0 \tag{9}$$

در واقع تابع $2e^{-4t}$ در معادله صدق می‌کند. حل و پیدا کردن جواب یک معادله دیفرانسیل از چندین روش مقدور می‌باشد.

۱- حل تحلیلی (مانند تفکیک معادله، اســـتفاده از جواب‌های عمومی بســـته به فرم معادله، روش لاپلاس)
۲- حل عددی (روش اویلر، رونگه کوتا)

روش‌های عددی اغلب در حل کامپیوتری مفید می‌باشند و حجم محاسبات آنها بسیار زیاد می‌باشد. به طور مثال در صورتی که بخواهیم معادله 7 را با استفاده از MATLAB و با شرایط اولیه y(0)=10 حل کنیم می‌بایست کد کامپیوتری زیر برای آن نوشته شود.

```
y(1)=10;  % Boundary condition
final_time = 5  % Final time for simulation
dt = 0.001;  % Time step
t = 0:dt:final_time;  % Making time array
for i =1:length(t)-1
    y(i+1) = -4 * y(i)*dt + y(i); % ODE with Euler assumption
end
% Plot results
plot(t, y, LineWidth=1.5)
xlabel('Time (s)')
ylabel('y(t)')
title('ODE Results')
```



شکل ۲: نتایج بدست آمده از روش عددی برای حل ODE

نکته قابل توجه در حل این مثال این است که برای حل ODE ذکر شده برای ۵ ثانیه در صورتی که بخواهیم حل به صورت دقیق باشد ۵۰۰۰ عملیات جبری باید انجام شود.

از این رو در درس کنترل فرآیندها به منظور حل معادلات دیفرانسیل خطی اغلب از روش تحلیلی و به خصـوص روش لاپلاس اسـتفاده می‌شـود. روش لاپلاس قادر اسـت تا معادله دیفرانسـیل را به یک معادله جبری تبدیل و حل آن را ساده کند.

به منظور فهم از عملکرد لاپلاس دانش مقدماتی از انتگرال از توابع متداول، انتگرال جزء به جز، و مشتق از توابع متداول مورد نیاز می‌باشد. از این رو توصیه میگردد منابع موجود در رابطه با انتگرال‌گیری که در وبسایت قرار داده شده مطالعه گردد.