رابطه بازگشتی فیبوناچی را با شرایط آغازی $a_0 = 1$ و $a_1 = 1$ حل کنید.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$
$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$$
$$x^{n-2}(x^2 - x - 1) = 0 \longrightarrow x^{n-2} = 0, x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = A(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

$$a_0 = 1 = A + B$$
$$a_1 = 1 = A(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) + B(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$$

$$-(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = -A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})) - B(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))$$
$$1 = A(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) + B(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$$

$$1 - (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = A(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \longrightarrow A = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

$$1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} + B \longrightarrow B = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

$$a_n = (\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{5+\sqrt{5}}{10})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی را با استفاده از رابطه بازگشتی بیابید.

هر زیرمجموعه از $\{1, ..., n-1\}$ می‌تواند تبدیل به زیرمجموعه‌ای از $\{1, ..., n\}$ شود به دو روش: ۱. دارای n باشد. ۲. دارای n نباشد.
بنابر این:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} = 2a_{n-1}$$

$$x^n = 2x^{n-1}$$
$$x^n - 2x^{n-1} = 0$$
$$x^{n-1}(x-2) = 0 \longrightarrow x^{n-1} = 0, x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$a_n = A(2)^n$$

$$a_0 = 1 = A$$

$$a_n = 2^n$$

جواب یکتای رابطه بازگشتی $a_n = 3a_{n-1}+4a_{n-2}-12a_{n-3}$ را که در $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 13$ بیابید

$$x^n = 3x^{n-1} + 4x^{n-2} - 12x^{n-3}$$
$$x^n - 3x^{n-1} - 4x^{n-2} + 12x^{n-3} = 0$$
$$x^{n-3}(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) = 0 \longrightarrow x^{n-3} = 0,\ x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x-3)(x^2-4) = 0 \to x = 3, \pm 2$$

$$a_n = A(3)^n + B(2)^n + C(-2)^n$$

$$a_0 = 2 = A + B + C \longrightarrow C = 2 - A - B$$
$$a_1 = 5 = 3A + 2B - 2C \longrightarrow 5 = 3A + 2B - 4 + 2A + 2B \longrightarrow 9 = 5A + 4B$$
$$a_2 = 13 = 9A + 4B + 4C \longrightarrow 13 = 9A + 4B + 8 - 4A - 4B \longrightarrow 5 = 5A \longrightarrow A = 1$$

$$9 = 5 + 4B \longrightarrow B = 1$$
$$C = 2 - 1 - 1 = 0$$

$$a_n = 3^n + 2^n$$

حاصل جمع مجوزهای نخستین n عدد صحیح مثبت را محاسبه کنید (به کمک روابط بازگشتی)

$$S_n = S_{n-1} + n^2$$

$$x^n = x^{n-1}$$
$$x^n - x^{n-1} = 0$$
$$x^{n-1}(x-1) = 0 \longrightarrow x^{n-1} = 0,\ x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$$

عدد یک ریشه است بنابر این:

$$a_n = A(1)^n + n^1(B + Cn^{3-2=1} + Dn^{3-1=2}) = A + nB + Cn^2 + Dn^3$$

$$a_0 = 0 = A$$

$$Bn + Cn^2 + Dn^3 = B(n-1) + C(n-1)^2 + D(n-1)^3 + n^2$$
$$Bn + Cn^2 + Dn^3 = Bn - B + Cn^2 - 2Cn + C + Dn^3 - 3n^2D + 3nD - D + n^2$$
$$Bn + Cn^2 + Dn^3 = n(B - 2C + 3D) + n^2(C - 3D + 1) + n^3(D) + (-B + C - D)$$

$$C - 3D + 1 = C \longrightarrow -3D = -1 \rightarrow D = \tfrac{1}{3}$$
$$B - 2C + 3D = B \longrightarrow -2C + 3(\tfrac{1}{3}) = 0 \rightarrow C = \tfrac{1}{2}$$
$$-B + C - D = 0 \longrightarrow -B + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = 0 \rightarrow B = \tfrac{1}{6}$$

$$a_n = \tfrac{1}{6}n + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{3}n^3$$
$$a_n = \tfrac{n+3n^2+2n^3}{6} = \tfrac{n(1+3n-2n^2)}{6} = \tfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

اگر معادله‌ی سرشت‌نما رابطه بازگشتی ناهمگن $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 = 0$ باشد، حل این معادلات با فرض

الف) $f(n) = 4n^3 + 5n$

ب) $f(n) = 3^n$

ریشه‌های معادله: $1, 1, 2, 3, 3$

این ریشه‌ها معادله روبرو را نتیجه می‌دهند:

$$(A_0 + B_0 n)(1)^n + (A_1)(2)^n + (A_2 + B_2 n)(3)^n$$

که برای راحتی کار در محاسبه حالت‌های بعدی با $(*)$ آن را نشان می‌دهیم.

الف) ماکسیم حالت یعنی $4n^3$ را در نظر می‌گیریم.
۱ عضو ریشه‌ها است لذا: $a_n = (*) + n^2(A_3 + B_3 n + C_3 n^2 + D_3 n^3)$

ب)۳ عضو ریشه‌ها است،لذا: $a_n = (*) + C(n)^2(3)^n$

حل کنید $f(n) = f(n-1) + 2f(n-2) + 4(3)^n$ همراه با شرایط آغازی
$f(1) = 28,\ f(0) = 1$

$x^n = x^{n-1} + 2x^{n-2}$
$x^n - x^{n-1} - 2x^{n-2} = 0$
$x^{n-2}(x^2 - x - 2) = 0 \longrightarrow x^{n-2} = 0,\ x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \to x = 2, -1$

سه عضو ریشه‌ها نیست بنابراین:

$f(n) = A(2)^n + B(-1)^n + C(3)^n$

$f(0) = 1 = A + B + C$
$f(1) = 28 = 2A - B + 3C$
$f(2) = f(1) + 2f(0) + 4(3)^2 = 28 + 2 + 36 = 66 = 4A + B + 9C$

$1 = A + B + C \longrightarrow C = 1 - A - B$
$28 = 2A - B + 3C \longrightarrow 28 = 2A - B + 3 - 3A - 3B \to 25 = -A - 4B$
$66 = 4A + B + 9C \longrightarrow 66 = 4A + B + 9 - 9A - 9B \to 57 = -5A - 8B$

$25 = -A - 4B$
$57 = -5A - 8B$

$-50 = 2A + 8B$
$57 = -5A - 8B$

$7 = -3A \longrightarrow A = \frac{-7}{3}$
$25 = \frac{7}{3} - 4B \longrightarrow B = \frac{-17}{3}$
$1 = \frac{-7}{3} + \frac{-17}{3} + C \longrightarrow C = 9$

$f(n) = \frac{-7}{3}(2)^n + \frac{-17}{3}(-1)^n + 9(3)^n$

مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $a+b+c+d=27$ به طوریکه هر متغیر حداقل ۳ و حداکثر ۸ باشد.

$$(x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)^4=x^{27}$$
$$(x^3)^4(1+x+x^2+\ldots+x^5)^4=x^{27}$$
$$(x^3)^4(1-x^6)^4(1+x+\ldots)^4=x^{27}$$
$$(1-x^6)^4(1+x+\ldots)^4=x^{15}$$

$$(1-x^6)^4=x^{24}-4x^{18}+6x^{12}-4x^6+1$$

$$\binom{4+15-1}{15}-4\binom{4+9-1}{9}+6\binom{4+3-1}{3}$$

اگر سه متمایز پرتاب شوند، تعداد طرف به دست آوردن حاصل جمع برابر ۱۳؟ (با استفاده از تابع مولد)

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 = x^{13}$$
$$(x^1)^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3 = x^{13}$$
$$x^3(1 - x^6)^3(1 + x + ...)^3 = x^{13}$$
$$(1 - x^6)^3(1 + x...)^3 = x^{10}$$

$$(1 - x^6)^3 = 1 - 3x^6 + 3x^{12} - x^{18}$$
$$\binom{3+10-1}{10} - 3\binom{3+4-1}{4}$$

به چند طریق می‌توان ۱۰ پلیس یک شهر کوچک را را در ۳ خیابان مهم این شهر مستقر کرد، به طوری‌که در هر خیابان یک پلیس قرار گیرد

حل با استفاده از اصل متمم و اصل شمول و عدم شمول:
تعداد حالاتی که خیابانی در آن خالی است را از کل حالات کم می‌کنیم:

A حالاتی که خیابان یک خالی باشد
B حالاتی که خیابان دو خالی باشد
C حالاتی که خیابان سه خالی باشد

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$|A \cup B \cup C| = (2^{10}) + (2^{10}) + (2^{10}) - (1) - (1) - (1) + (0) = 3 * (2^{10} - 1)$$

$$3^{10} - (3 * (2^{10} - 1))$$

در یک طرح مجموعه هنری ۴ اثر از دالی، ۵ اثر از ون گوگ و ۶ اثر از پیکاسو وجود دارد. ۵ نفر خریدار همه این آثار هستند. اگر خبرنگار فقط تعداد اثر خریداری شده از هر نقاش توسط هر خریدار را گزارش بدهد به چند طریق متخلف می‌توان نتیجه را گزارش داد؟

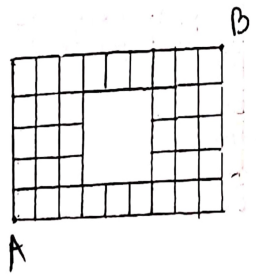
$$a+b+c+d+e=4$$
$$(1+x^1+x^2+x^3+x^4)^5=x^4$$
$$(1-x^5)^5(1+x+...)^5=x^4$$
$$(1-x^5)^5=5x^{20}-x^{25}-10x^{15}+10x^{10}-5x^5+1$$
$$1*\binom{5+4-1}{4}$$

$$a+b+c+d+e=5$$
$$(1+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5)^5=x^5$$
$$(1-x^6)^5(1+x+...)^5=x^5$$
$$(1-x^6)^5=5x^{24}-x^{30}-10x^{18}+10x^{12}-5x^6+1$$
$$1*\binom{5+5-1}{5}$$

$$a+b+c+d+e=6$$
$$(1+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^5=x^6$$
$$(1-x^7)^5(1+x+...)^5=x^6$$
$$(1-x^6)^5=5x^{28}-x^{35}-10x^{21}+10x^{14}-5x^7+1$$
$$1*\binom{5+6-1}{6}$$

$$1*\binom{5+4-1}{4}*1*\binom{5+5-1}{5}*1*\binom{5+6-1}{6}$$

در شکل زیر چند مسیر از A به B وجود دارد؟



حالت‌های رسیدن از نقطه گوشه پایین مربع خالی به B را از کل حالت‌های رسیدن از A به B کم می‌کنیم.

$$\binom{14}{9}\binom{5}{5} - \binom{10}{6}\binom{4}{4}$$

مجموع اعداد ۴ رقمی که با ارقام متمایز را که با رقم‌های ۱،۲،۴،۶،۷،۹ می‌توان نوشت را بیابید؟

رقم n در یکان:

$$\underline{|}\,\underline{|}\,\underline{|}n$$
$$5 * 4 * 3 = \frac{5!}{2!}$$

همچنین داریم:

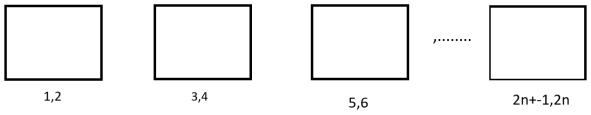
$$1246 = 6 * 1 + 4 * 10 + 2 * 100 + 1 * 1000$$
$$1246 + 4679 = 6 * 1 + 4 * 10 + 2 * 100 + 1 * 1000 + 9 * 1 + 7 * 10 + 6 * 100 + 4 * 1000 =$$
$$1 * (6 + 9) + 10 * (4 + 7) + 100 * (2 + 6) + 1000(1 + 4)$$

همچنین برای n در دهگان و ... مشابه استدلال می‌کنیم بنابراین داریم:

$$\frac{5!}{2!}((1 + 2 + 4 + 6 + 7 + 9)(1 + 10 + 100 + 1000))$$

فرض کنید از اعداد $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$، $n + 1$ عدد را انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل ۲ تا از اعداد انتخاب شده نسبت به هم اولند؟

در ابتدا تمامی دو عدد پشت سر هم را در خانه‌ها به شکل زیر می‌ریزیم:



و همچنین می‌دانیم که هر دو عدد پشت‌سرهم نسبت به هم اول هستند. حال $n + 1$ لانه داریم. در نتیجه $n + 1$ عدد داریم و n لانه. طبق اصل لانه کبوتری حتما دو عدد وجود خواهد داشت که نسبت به هم اولند.

فرض کنید از اعداد $\{1, 2, 3, ..., 2010\}$ ، 673 عضو دلخواه انتخاب می کنیم ثابت کنید حداقل ۲ پیدا می‌شوند که حاصل جمع آن بر ۶ بخش پذیر است.

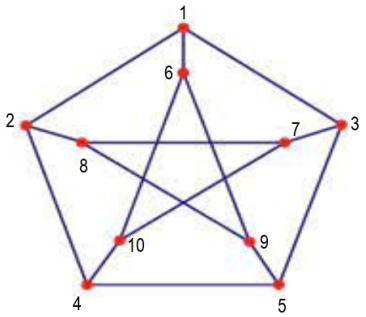
از الگوریتم تقسیم خواهیم داشت:

$$a = 6k + r$$
$$k \in Z,\ r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

و در 2010...1 به تعداد $\frac{2010}{6} = 335$ عدد خواهیم داشت که باقیr مانده آن‌ها بر ۶ یکسان خواهد شد.
اگر آن دو دارای باقی‌مانده ۰ یا ۳ باشد آنگاه بر ۶ بخش پذیر است.
بنابر این اعداد را در نظر نمی‌گیریم بنابر این باید از $2010 - 335 * 2 = 1340$ عدد انتخاب نماییم.
که چهار لانه باقی خواهند ماند: ۱،۲،۴،۵
طبق اصل لانه کبوتری حداقل سه لانه وجود دارد که بیشتر از ۳ عدد به آن متعلق خواهد بود بنابر این جمع حداقل دوتا از آن‌ها بر ۶ بخش پذیر خواهد بود.
نکته:

$$a = 6q + r$$
$$b = 6p + t$$
$$a + b = 6(p + q) + (r + t)$$

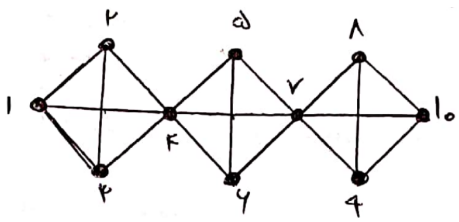
نشان دهید که گراف پترسون دقیقا ۶ جورسازی کامل دارد.
گراف پترسون:



جورسازی‌ها:

$M_1 = \{16, 37, 28, 4\,10, 59\}$
$M_2 = \{35, 24, 16, 89, 7\,10\}$
$M_3 = \{69, 7\,10, 13, 54, 82\}$
$M_4 = \{12, 69, 87, 35, 10\,4\}$
$M_5 = \{73, 6\,10, 89, 12, 54\}$
$M_6 = \{13, 6\,10, 87, 24, 95\}$

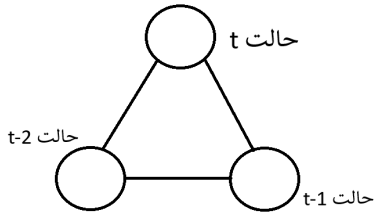
.تعداد جورسازی‌های کامل گراف زیر را بیابید؟
گراف زیر ۶ عدد جوری‌سازی دارد ک در ادامه به بررسی این ۶ جوری‌سازی می‌پردازیم.



جورسازی‌ها:

$M_1 = \{14, 23, 56, 87, 9\,10\}$
$M_2 = \{12, 34, 56, 87, 9\,10\}$
$M_3 = \{12, 34, 56, 7\,10, 89\}$
$M_4 = \{14, 23, 56, 7\,10, 89\}$
$M_5 = \{12, 34, 56, 79, 8\,10\}$
$M_6 = \{14, 23, 56, 79, 8\,10\}$

چند جمله‌ای رنگی گراف K_n را بنویسید.
برای مثال برای K_3:



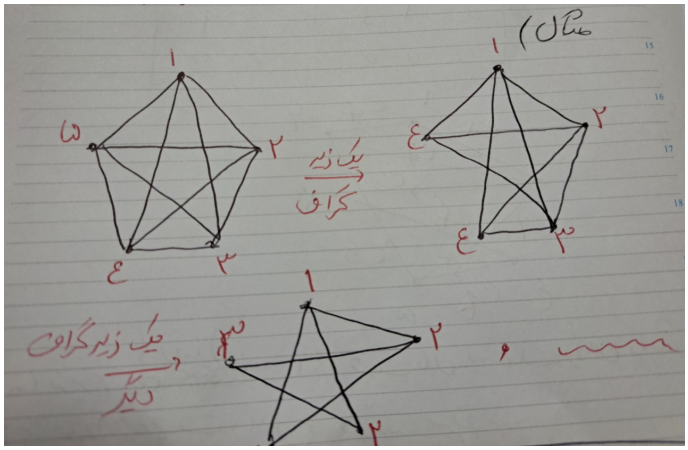
$$\Pi_t = t(t-1)(t-2)$$

$$\Pi_t = t(t-1)...(t-(n-1))$$

گراف بحرانی-K را تعریف و برای $K = 5$ یک مثال بزنید.

اگر مینیمم رنگ مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی سره راسی $\chi(G)$، K باشد. گراف G یک گراف k بحرانی است اگر به ازای هر زیرگراف، k کاهش پیدا کند.(به عبارتی هر زیرگراف سره G، عدد رنگی کمتر از K داشته باشد.

مثال:



گراف سودار $D = (V, E)$
را که در آن

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (1, 6), (2, 6), (5, 2)$
در نظر بگیرید:

الف) ماتریس مجاورت و اتصال آن را بیابید؟

ماتریس مجاورت:

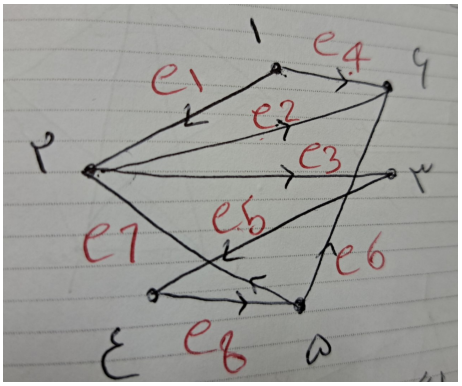
$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ماتریس اتصال: اگر چهت یال به سمت راس باشد +۱ و اگر خلاف جهت راس باشد -۱

ماتریس اتصال:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

خود گراف:



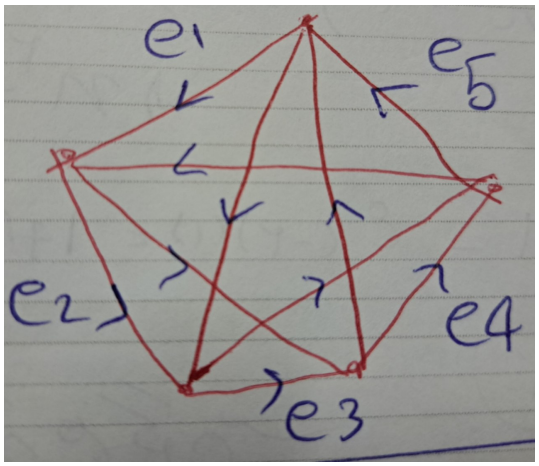
ب) تمامی مسیرها به طول ۲ از راس ۲ به ۴ را بیابید؟

تنها یک مسیر -> e_3e_5

گراف کامل مسطحی با $n \geq 10$ مثال بزنید.

چون هر گراف کامل با $n \geq 10$ راس، K_5 را به عنوان زیرگراف خود دارد لذا یک زیرتقسیم از K_5 خواهد داشت، بنابراین وجود نخواهد داشت.

گراف کامل K_5 را به صورت دلخواه جهت‌دار کرده و یک مسیر همیلتونی سودار در آن بیابید؟



مسیر همیلتونی = $e_1e_2e_3e_4$

گراف دلخواه G را به چند طریق می‌توان سودار کرد؟

اگر E مجموعه یال‌های گراف G باشد و $|E|$ تعداد یال‌های گراف باشد، از آنجایی که برای هر یال دو حالت وجود دارد(یا به راسی خارج یا وارد شود)، در نتیجه روش‌های سودار کردن یک گراف به $2^{|E|}$ حالت است.

مطلوب است حل $a_n = a_{n-1} + 12n^2$ در صورتی که $a_0 = 5$

$x^n = x^{n-1}$
$x^n - x^{n-1} = 0$
$x^{n-1}(x-1) = 0 \longrightarrow x^{n-1} = 0,\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$a_n = A(1)^n + n^1(B + Cn + Dn^2) = A + nB + Cn^2 + Dn^3$

$a_0 = 5 = A \longrightarrow a_n = 5 + nB + Cn^2 + Dn^3$
$a_1 = 5 + 12 = 17 = 5 + B + C + D \longrightarrow 12 = B + C + D$
$a_2 = 17 + 48 = 65 = 5 + 2B + 4C + 8D \longrightarrow 30 = B + 2C + 4D$
$a_3 = 65 + 108 = 173 = 5 + 3B + 9C + 27D \longrightarrow 56 = B + 3C + 9D$

$12 = B + C + D \longrightarrow D = 12 - B - C$
$30 = B + 2C + 4D \longrightarrow 30 = B + 2C + 48 - 4B - 4C \rightarrow -18 = -3B - 2C$
$56 = B + 3C + 9D \longrightarrow 56 = B + 3C + 108 - 9B - 9C \rightarrow -52 = -8B - 6C$

$-18 = -3B - 2C$
$-52 = -8B - 6C$

$54 = 9B + 6C$
$-52 = -8B - 6C$

$B = 2$

$-18 = -6 - 2C \longrightarrow C = 6$

$12 = 2 + 6 + D \longrightarrow D = 4$

$a_n = 5 + 2n + 6n^2 + 4n^2$