«محاسبات عددی» «استاد پورمحمود»

منابع:

سرفصل ها: ۱) فصل اول ← خطاها ۱۰٪

۲) فصل دوم ← مفاهیم مقدماتی یا پایه‌ای برای ماتریس ها ۲۰٪

۳) فصل سوم ← روش حل دستگاه معادلات ۷۰٪

«فصل اول: خطاها»

انحراف واقعیت

عمدی ← (علم) آگاهی ← خطا

سهوی ← جهالت ← اشتباه

مثال ←

$$a = \frac{۲۵}{۳}$$

$$\tilde{a} = ۸,\underbrace{۳۳۰۰۰۳}_{\text{۱۶ تا}}$$

خطا: قدر مطلق اختلاف بین مقدار واقعی و مقدار تقریبی را خطا گویند.

$$e_a = |a - \tilde{a}| = |\tilde{a} - a| = E_a \Rightarrow$$ خطای مطلق

که قابل محاسبه است اگر a قابل محاسبه باشد.

مثال ←

(۱) $a = ۶۲۴۲$ کیلومتر $\Rightarrow e_a = ۲۴۲$

$\tilde{a} = ۶۰۰۰$

مثال ←

(۲) $a = \frac{۲۵}{۳} \Rightarrow e_a = ۰,۰\underbrace{۰۰۰۰۰۳}_{\text{۱۶ تا}}$ ← معاسبه شده است / قابل نمایش نیست

$\tilde{a} = ۸,\underbrace{۳۳۰۰۰۳}_{\text{۱۶ تا}}$

MRNOTE

$$\frac{۲۵}{۳} - ۸,۳۳ = ۸,۳۳\overline{۳} - ۸,۳۳ = ۸,۰۰\overline{۳}$$

$$\frac{۲۵}{۳} \cong ۸,\underbrace{۳۳\cdots۳}_{۱۶\text{ تا}}$$

$$\frac{۲۵}{۳} - ۸,۳۳ = ۰,۰۰\underbrace{۳۳\cdots۳}_{۱۴\text{ تا}}$$

$$\left(\frac{۲۵}{۳} - ۸,۳۳\right) \times ۰,۰۰۰۰۰۳ = ۳,\underbrace{۳\cdots۳}_{۱۳\text{ تا}} \times ۱۰^{-۳} \times ۳ \times ۱۰^{-۶}$$

مقیاس ← واحد اندازه‌گیری

$e_a \rightarrow$ خطای مطلق

$E_a \rightarrow$ خطای نسبی

خطای نسبی همواره بدون مقیاس است

خطای نسبی ← نسبت خطای مطلق بر قدر مطلق مقدار واقعی می‌گویند.

$$E_a = \frac{e_a}{|a|} = \frac{|a-\tilde{a}|}{|a|}$$

باز ممکن است قابل محاسبه باشد بر اساس اینکه a قابل محاسبه باشد.

$$\cong \frac{|a-\tilde{a}|}{|\tilde{a}|}$$

نکته ← در خطا ها کران بالا مهم است.

نکته ← کران پایین مهم نیست در خطا زیرا همواره در حال کم کردن خطا هستیم.

$e(a) = |a-\tilde{a}| \leq e_a \rightarrow$ کران بالا خطای مطلق

$E(a) = \frac{e(a)}{|a|} = \frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} \cong \frac{|a-\tilde{a}|}{|\tilde{a}|} \leq E_a \rightarrow$ کران بالا خطای نسبی

کران بالا ← بیشترین خطایی که می‌توانیم داشته باشیم.

MRNOTE

مثال ← در یک کارخانه لوله‌سازی قطر لوله‌ها باید در بازه (۲٫۹, ۳٫۱) باشند. یعنی نباید کم‌تر از ۲٫۹ و بزرگ‌تر از ۳٫۱

قطر لوله آزمایش ← ۳ سانتی‌متر

$e_a = ۰٫۱ = |۳٫۱ - ۳|$

همگن ← مطلق ← آزمون سرعت تایپ با تعداد کلمات مساوی بین چند نفر

ناهمگن ← نسبی ← آزمون سرعت تایپ با تعداد کلمات نامساوی بین چند نفر

کران بالا کوچک‌تر باشد ← دقت بالاتر می‌شود

$\frac{|a-\tilde{a}|}{|\tilde{a}|} \le \frac{e_a}{|\tilde{a}|} \le E_a$ چه خطای مطلق و چه خطای نسبی

مثال ← $a = ۰٫۰۳۳\overline{۳} = \frac{۱}{۳۰}$ $\quad \frac{۱}{۳۰} \le ۰٫۰۳۴ = E_a$

$\le ۰٫۰۴ = E_a$

← در همان مثال کارخانه لوله‌سازی اگر بازه در (۲٫۹۵, ۳٫۰۵) باشد، دقت بیشتر می‌شود.

تمرین ← ۳ مثال برای ممیز شناور

$a \pm b$

$a * b \quad a \backslash b$

مثال اول ←

$\boxed{a = 200.071} = 2.00071 \times 10^2$

$\boxed{b = 36.2} = 3.62 \times 10^1 = 0.362 \times 10^2$

$$a+b = \begin{array}{r} 2.00071 \\ +0.362 \\ \hline 2.36271 \end{array} = 2.36271 \times 10^2$$

رند کردن $\xrightarrow{7 \geq 5}$ $a+b \cong 2.363 \times 10^2$

بریدن $\longrightarrow$ $a+b \cong 2.362 \times 10^2$

$$a-b = \begin{array}{r} \overset{1}{2}.\overset{9}{0}\overset{9}{0}\overset{10}{0}71 \\ -0.362 \\ \hline 1.63871 \end{array} = 1.63871 \times 10^2$$

رند کردن $\xrightarrow{7 \geq 5}$ $a-b \cong 1.639 \times 10^2$

بریدن $\longrightarrow$ $a-b \cong 1.638 \times 10^2$

$a*b = 2.00071 \times 3.62 = 7.2425702$ $\qquad 10^2 \times 10^1 = 10^3$

$a*b = 7.2425702 \times 10^3$ رند کردن $\xrightarrow{5 \geq 5}$ $a*b \cong 7.243$

بریدن $\longrightarrow$ $a*b \cong 7.242$

$a/b = 2.00071 / 3.62 = 0.552682\,m = 5.52682\,m \times 10^{-1}$

$10^2 / 10^1 = 10^1$

$a/b = 5.52682\,m \times 10^{-1} \times 10^1 = 5.52682\,m \times 10^0$

رند کردن $\xrightarrow{8 > 5}$ $a/b \cong 5.527 \times 10^0$

بریدن $\longrightarrow$ $a/b \cong 5.526 \times 10^0$

مثال دوم ←

$\boxed{a = 8.08761} = 8.08761 \times 10^{0}$

$\boxed{b = 0.001002} = 1.002 \times 10^{-3} = 0.001002 \times 10^{0}$

$$a+b = \begin{array}{r} 8.08761 \\ +\,0.001002 \\ \hline 8.088612 \end{array} = 8.088612 \times 10^{0}$$

رند کردن $\rightarrow a+b \cong 8.089 \times 10^{0}$

بریدن $\rightarrow a+b \cong 8.088 \times 10^{0}$

$$a-b = \begin{array}{r} 8.0876\overset{0}{1}\overset{10}{0} \\ -\,0.001002 \\ \hline 8.086608 \end{array} = 8.086608 \times 10^{0}$$

رند کردن $\rightarrow a-b \cong 8.087 \times 10^{0}$

بریدن $\rightarrow a-b \cong 8.086$

$a*b = (8.08761)(1.002) \times 10^{-3} = (8.10378522) \times 10^{-3}$

رند کردن $\rightarrow a*b \cong 8.104 \times 10^{-3}$

بریدن $\rightarrow a*b \cong 8.103$

$a/b = (8.08761 / 1.002) \times 10^{3} = (8.07146\ldots) \times 10^{3}$

رند کردن $\rightarrow a/b \cong 8.071 \times 10^{3}$

بریدن $\rightarrow a/b \cong 8.071 \times 10^{3}$

مثال سوم ←

$\boxed{a = 297000000} = 2.97 \times 10^{8}$

$\boxed{b = 0.00000414} = 4.14 \times 10^{-6} = 0.\underbrace{000000000000}_{13\text{ تا}}0414 \times 10^{8}$

$$a+b = \begin{array}{r} 2.97 \\ +\,0.00000000000000414 \\ \hline 2.97000000000000414 \end{array} = 2.97\underbrace{0\ldots0}_{13\text{ تا}}414 \times 10^{8}$$

رند کردن $\rightarrow a+b \cong 9.970 \times 10^{8}$

بریدن $\rightarrow a+b \cong 2.970 \times 10^{8}$

$$a-b = \begin{array}{r} 2.97^{6} \\ -0.00000000000000419 \\ \hline 2.\underbrace{9699999999999}_{\text{تعداد دهها لا ت}}586 \end{array} = 2.969\ldots9586\times10^{8}$$

رند کردن $\rightarrow a-b \cong 2.970\times10^{8}$

بریدن $\rightarrow a-b \cong 2.969\times10^{8}$

$$a*b = (2.97)(4.14)\times10^{2} = 12.2958\times10^{2}$$

رند کردن $\rightarrow a*b \cong 12.296\times10^{2}$

بریدن $\rightarrow a*b \cong 12.295\times10^{2}$

$$a/b = (2.97/4.14)\times10^{14} = (0.71739\ldots)\times10^{14} = 7.1739\ldots\times10^{13}$$

رند کردن $\rightarrow a/b \cong 7.174\times10^{13}$

بریدن $\rightarrow a/b \cong 7.173\times10^{13}$

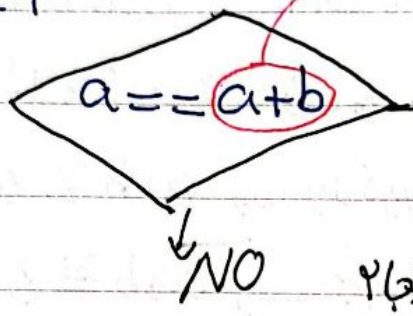
$a = ۴,۵۶۷۸ \times 10^{۶} \longrightarrow \tilde{a}_1 = ۴,۵۶ \times 10^{۶} \rightarrow \varepsilon =$ [illegible]

$\tilde{a}_2 = ۴,۵۷ \times 10^{۶} \rightarrow \varepsilon = 1000$

مثال ← $a - b,\ a \star b,\ a/b$

$a = ۴۵۶۷۸۰۰$

$b = 1000149$

$a + b \longrightarrow$ 

نکته ← بریدن یا قطع کردن 10^{-n}

گرد کردن ← $\frac{1}{2} \times 10^{-n}$

n = تعداد ارقام اعشار تقریب کرده ← در اینجا ۲

بستگی به ممیز شناور دارد. مثلاً تا دو رقم اعشار نشان دهد، جواب Yes خواهد بود. یا در پنج رقم اعشار، جواب NO است.

$a + b = ۴۵۶۷۸۰۰ + 1000149 = ۴۵۶۷۸۰۰1000149$

مثال ← برای این مثال جواب همواره $a = 102 \quad b = 1035$ ← NO است.

ممیز شناور ← $x \in \mathbb{R} \rightarrow x = x_1 \times 10^{n} \quad 1 \le x_1 < 10$

$|x| = |x_1| \times 10^{n}, \quad 0 \le x_1 < 10$

نکته ← صفر ماشین $\neq$ صفر مطلق (0)

$\varepsilon = e > 0 \qquad \varepsilon = e =$ صفر ماشین

$\forall a \in \mathbb{R} \ ; \quad a = a \pm \varepsilon$

نکته ← $x = ۳,۷۹۵ \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1 = ۳,۸۰ \\ \tilde{x}_2 = ۳,۷۹ \end{cases}$

اولین رقم ناخواسته

MRNOTE

مثال ← $y = ٤,٢٧٨٩٥ \quad z = ٤,٢٧١٩٥$

نکته ← 10^{-n} (کران بالا) برش

گرد کردن $0,5 \times 10^{-n}$ ← کران بالای خطای ماشین

مثال ← گرد کردن $٢,١٧٦ \cong ٢,١٨$

برش $\cong ٢,١٧$

گرد کردن $|٢,١٧٦ - ٢,١٨| = ١٠٠٤ < 0,5 \times 10^{-2}$

$|٢,١٧٦ - ٢,١٧| = ١٠٠٦ < 1 \times 10^{-2} = ١٠١$

«حل عددی یا تقریبی معادله»

$x^2 - 1 = 0 \begin{cases} \to x = 1 \\ \to x = -1 \end{cases}$ ← یک معادله که جواب هایش

به این صورت است ولی همیشه به این سادگی نیست مثلاً:

$x + \sin x = 1$ ← این معادله ها باید به چه صورت حل شوند؟

یا $x^3 + x + 1 = 0$

یا $x + \sqrt{x} = 1$

یا $\sqrt{x} - x = 0$

* هر کدام از این معادلات روش حل مخصوص و مناسب خودشان را دارد که باید با آن حل شوند.

یا $x^2 + 2x + 1 = 0 \begin{cases} \to \text{روش حل تجزیه} \to (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ \to \text{روش حل دلتا} \end{cases}$ (۲ بار)

برای بیان کردن هر مسئله در ریاضیات ممکن است به هر کدام از معادلات برسیم و برای حل آنها به روش هایی نیاز داشته باشیم.

MRNOTE

این معادلات باید به روش عددی یا تقریبی حل بشوند.

* هر معادله‌ای را نمی‌توان به روش عددی حل کرد.

حال به بررسی ویژگی های حل معادلات با روش عددی می‌پردازیم:

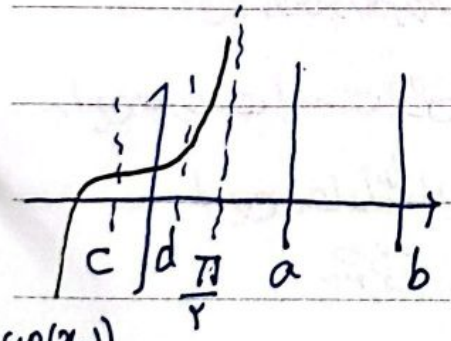
* برای حل معادله $f(x)=0$ به روش عددی باید ویژگی های زیر برقرار باشد:

۱) برای تابع $y=f(x)$ بازه‌ای شامل $[a,b]$ باشد که تابع در آن بازه تعریف شده باشد.

۲) تابع در $[a,b]$ پیوسته باشد.

۳) $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامت باشد. $f(a).f(b)<0$

هرگاه ۳ شرط فوق برقرار باشد می‌توان x_0 ی در بازه $[a,b]$ پیدا کرد که $f(x_0)=0$. به عبارت دیگر x_0 ی می‌توان پیدا کرد که ریشه معادله $f(x)=0$ باشد.

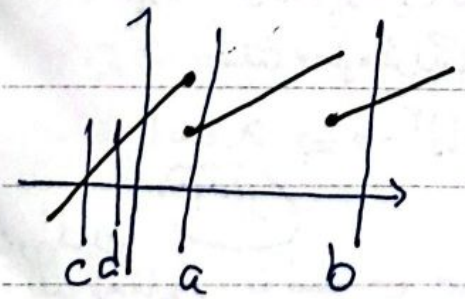


$\tan(x-1)=0$

در بازه $[a,b]$ تعریف شده است (شرط (۱) صدق می‌کند)

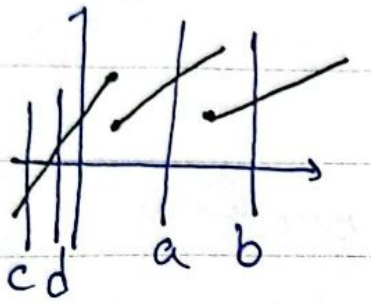
و

در بازه $[c,d]$ تعریف شده است (شرط (۱) صدق می‌کند)

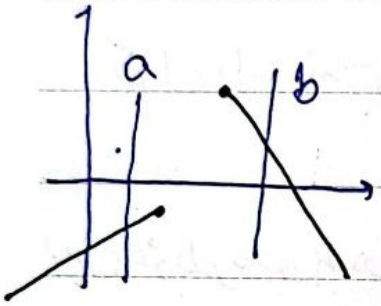


در بازه $[a,b]$ پیوسته نیست. (شرط (۲) صدق نمی‌کند)

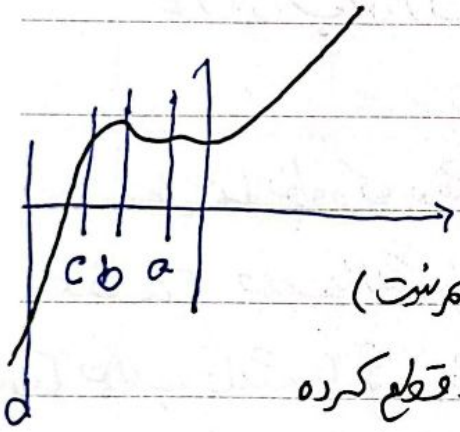
در بازه $[c,d]$ پیوسته است. (شرط (۳) صدق می‌کند)



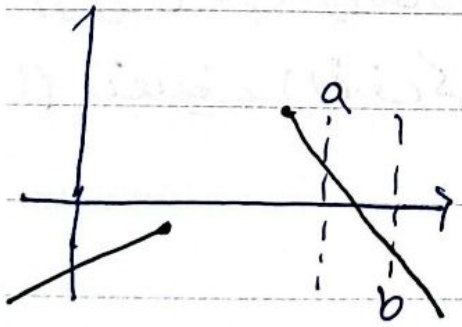
$f(a)$ و $f(b)$ هم علامت هستند
(نقض شرط سوم)
$f(c)$ و $f(d)$ مختلف العلامت هستند.



$f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامت هستند
ولی پیوسته نیست و نمودار محور x ها
را قطع نمی کند لذا جواب ندارد اصلاً



در بازه $[a,b]$ پیوسته است ولی چون محور
x ها را قطع نمی کند جوابی ندارد (مختلف العلامت هم نیست)
در بازه $[c,d]$ پیوسته است و چون محور x ها را قطع کرده
جواب دارد و $f(c)$ و $f(d)$ مختلف العلامت هستند لذا جواب دارد.

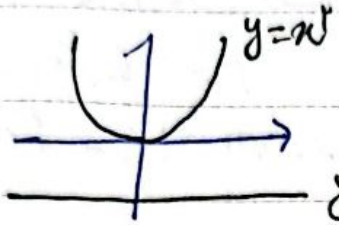


$f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامت
هستند و محور x را قطع کرده و پیوسته
است لذا جواب دارد.

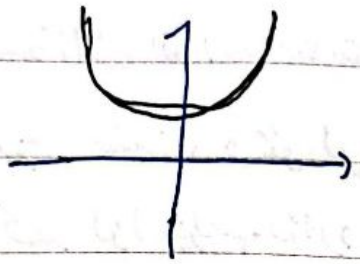
مثال ـ

$x^2 = -2 \xrightarrow[\text{به شکل دیگر نوشت}]{\text{این معادله را می‌توان}} \begin{cases} y = x^2 \\ y = -2 \end{cases}$

این شکل جدید را رسم می‌کنیم



این دو نمودار نقطه مشترک ندارند لذا قابل حل نیست. دلیل دوم: داریم $x^2+2=0$:



این نمودار محور x ها را قطع می‌کند ← لذا جواب ندارد.

نکته ـ همانطور که در شکل‌ها دیدیم ممکن است یک نمودار در یک بازه $[a,b]$ جواب نداشته باشد و شروط درک صدق نکته ولی در بازه دیگری $[c,d]$ جواب داشته باشد و شروط صدق کند.

«روش‌های حل معادلات عددی (تقریبی)»

1) تنصیف (نصف کردن) $f(x)=0 \rightarrow [a,b]\ ,\ f(a).f(b)<0$

$x_1 = \frac{a+b}{2}\ ;\ [a,x_1],[x_1,b]$

$f(x)=0 \xrightarrow[\text{ریشه معادله}]{} f(\alpha)=0$

جدول روش تنصیف

مرحله i	a	b	x_i	معیار توقف	$f(a).f(x_i)$
۱	a	b	$x_1=\frac{a+b}{2}$	① $\lvert a-x_i\rvert<\varepsilon$ $=10^{-2}$ یا 10^{-6}	$-$ $\Rightarrow b=x_1$
۲	a	x_1	$x_2=\frac{a+b}{2}$	② $\frac{\lvert a-x_i\rvert}{\lvert x_i\rvert}<\varepsilon$	
۳	$a=x_2$	b	$x_3=\frac{a+b}{2}$	③ $\lvert f(x_i)\rvert<\varepsilon$	$+$ $\Rightarrow a=x_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	④ حد مرحله	

مثال ←

$x^2-2=0 \Rightarrow f(x)=x^2-2$

i	a	b	$x_i=\frac{a+b}{2}$	$\lvert a-x_i\rvert<10^{-2}$	$f(a).f(x_i)$	علامت
۱	۱	۲	$x_1=1.5$	$\lvert 1-1.5\rvert=0.5\not<10^{-2}$	$f(1).f(1.5)<0$	
۲	۱	۱.۵	$x_2=1.25$	$\lvert 1-1.25\rvert=0.25\not<10^{-2}$	$f(1).f(1.25)>0$	
۳	۱.۲۵	۱.۵	$x_3=1.375$	$\lvert 1-1.375\rvert=0.375\not<10^{-2}$	$f(1.25).f(1.375)<0$	
۴	۱.۳۷۵	۱.۵	$x_4=1.4375$	$\lvert 1-1.4375\rvert=0.4375\not<10^{-2}$	$f(1.25).f$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

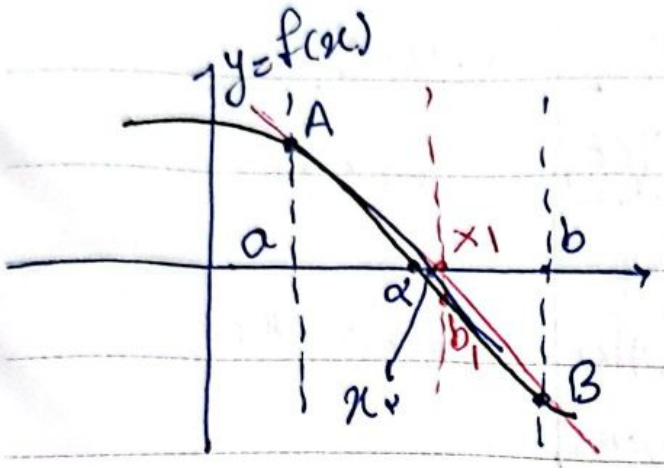
تمرین: حل دو معادله زیر به روش تنصیف:

معیار توقف: $\lvert a-x_i\rvert<10^{-2}$

① $x^3+x+1=0$

② $x+\sin x=0$

۲) روش وتری



$A\left|\begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix}\right.$

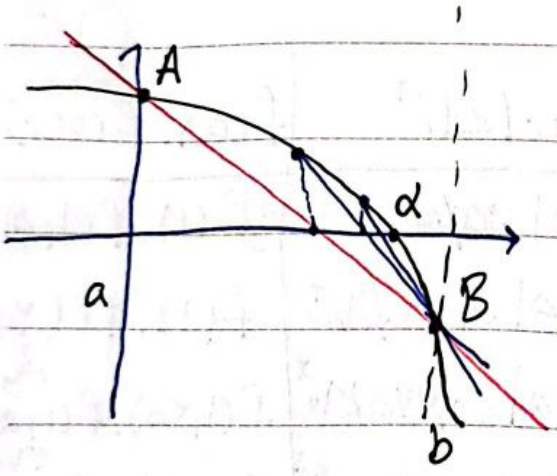
$B\left|\begin{matrix} b \\ f(b) \end{matrix}\right.$

$f(a).f(x_i)<0 \rightarrow [a, x_i]$

$\exists \alpha \; ; \; f(\alpha)=0$

$f(a).f(x_i)>0 \rightarrow [x_i, b]$

هر بار بعد از پیدا کردن x_i ، A یا B را به x_i وصل می‌کنیم بسته به اینکه وسیله کجاست، بازهٔ جدید مشخص می‌شود.



نکته ← اگر همواره بازه به گونه‌ای باشد که همیشه α در یک طرف بازه باشد، سرعت رسیدن به α کم خواهد بود.

$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n,m}\} \longrightarrow \alpha$

$\exists [a,b],\ f(a).f(b)<0 \Rightarrow A\left|\begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix}\right.\quad B\left|\begin{matrix} b \\ f(b) \end{matrix}\right.$

معادله خط AB : $y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

اگر طرفین را صفر گذاریم x_1 بدست می‌آید:

$$0-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_1-a)$$

$$x_1=\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a) \quad \text{یا} \quad x_1=b-\frac{a-b}{f(a)-f(b)}f(b)$$

یا

$$x_1 = a - \frac{a-b}{f(a)-f(b)} f(a)$$

$x^2 - 2 = 0$ مثال ← $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$

i	a	b	$x_i = a - \frac{a-b}{f(a)-f(b)} f(a)$	معیار توقف	$f(a).f(x_i)$
①	۱	۲	$x_1 = 1 - \frac{1-2}{-1-2}(-1) = 1.33$	–	$f(1)f(1.33) > 0$
②	1.33	۲	$x_2 = 1.33 - \frac{1.33-2}{-0.23-2}(-0.23) = 1.399$	–	$f(1.33)f(1.399)$
⋮			⋮	⋮	⋮

تمرین: حل معادلات زیر به دو روش تنصیف و وتری و مقایسه جواب های آنها:

① $x^3 + x - 1 = 0$

② $x^2 - x + 2 = 0$

③ $\sin x + x = 1$

«جزوه جلسات آنلاین»
صفحات پرینت گرفته

تنصیف یا نصف کردن یا دو بخشی

قضیه: اگر $\{x_k\}$ دنباله حاصل از روش تنصیف باشد، آنگاه این دنباله همیشه همگراست و کران بالای خطا در مرحله k ام برابر است با

$$|x_k-\alpha| < \frac{b-a}{2^k}$$

$$x_1=\frac{b+a}{2} \qquad \alpha\in[a,b] \qquad a<\alpha<b$$

$$|x_1-\alpha| < \frac{b-a}{2}$$

$$|x_2-\alpha| < \frac{x_1-a}{2} < \frac{b-a}{2^2} \qquad \left\{\frac{1}{2^k}\right\}\to 0$$

$$|x_3-\alpha| < \frac{b-a}{2^3} \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}=0$$

$$\vdots$$

$$\lim_{k\to\infty}(x_k-\alpha)=0$$

$$0<|x_k-\alpha| < \frac{b-a}{2^k}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k-\alpha=0$$

$$\vdots$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k=\alpha$$

$$\{x_k-\alpha\} \cong \left\{\frac{b-a}{2^k}\right\} \cong \left\{\frac{1}{2^k}\right\}\to 0$$

$$\boxed{\{x_k\}\to\alpha}$$

مثال ← $x^2-3=0$ با $\varepsilon=10^{-2}$ در بازه $[1,3]$ چند تکرار لازم است در روش تنصیف؟

$$|x_k-\alpha|<\frac{b-a}{2^k}<\varepsilon$$

$$\frac{b-a}{\varepsilon}<2^k$$

$$\log\frac{b-a}{\varepsilon}<k$$

$$k=\left[\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}\right]+1$$

$$k=\left[\log_2\frac{3-1}{10^{-2}}\right]+1$$

$$=\left[\log_2 200\right]+1$$

$$=7+1=8$$

$$2^7<200<2^8$$

$$7<7.\dots<8$$

تمرین ← تنصیف مثال بالا تا ۵ مرحله

قضیه: فرض کنید دنباله $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ از یک روش عددی حاصل شده باشد که $\{x_k\}\to\alpha$ همگرا باشد.

هرگاه $p>0$ عددی و $\lambda\neq 0$ وجود داشته باشد که

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x_k-\alpha)}{(x_{k-1}-\alpha)^p}\right|=\lambda$$

آنگاه p را مرتبه همگرایی دنباله $\{x_k\}$ یا مرتبه همگرایی روش مربوطه گویند.

برای روش تنصیف ← $\lambda = \frac{1}{2}$ ، $p = 1$

۱. روش تنصیف یک روش خطی است.

۲. نقطه شروع برای روش تنصیف لازم نیست.

۱. روش تنصیف همیشه همگرا است.

۱. در روش های عددی فقط یک ریشه می توان پیدا نمود.

$$\frac{|x_k - \alpha|}{|x_{k-1} - \alpha|} < \frac{\frac{b-a}{2^k}}{\frac{b-a}{2^{k-1}}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{x_k - \alpha}{(x_{k-1} - \alpha)^1} \right| = \frac{1}{2}$$

عیب روش تنصیف : سرعت همگرایی خطی است یا برلین کند است.

«روش نیوتن (مماس)»

یک رابطه بازگشتی است ←

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

مثال ← $x=\sqrt{a} \Rightarrow x^2=a \Rightarrow x^2-a=0$

چون $f(x)$, $f''(x)=2>0$ $\quad f(x)=x^2-a \Rightarrow f'(x)=2x$

در هر بازه‌ای پیوسته است، روش نیوتن مناسب است.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - a}{2x_{n-1}}$$

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$$

$\sqrt{5} \Leftarrow a=5$

$x_1=2$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1+\frac{5}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2+\frac{5}{2}\right) = 2.25$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2+\frac{5}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(2.25+\frac{5}{2.25}\right) = 2.2351$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3+\frac{5}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(2.2351+\frac{5}{2.2351}\right) = 2.2361$$

در نتیجه با دو رقم اعشار دقت داریم: $\sqrt{5} \approx 2.23$

شرط لازم: $f''(x)$ در فاصله A و B تغییر علامت ندهد ← $f(x).f''(x)$ در A و B مختلف العلامت خواهند بود.

« روش تکراری ساده (نقطه ثابت) »

$x=g(x) \Rightarrow$

شرط 1: به ازای هر x از بازه $[a,b]$ داشته باشیم: $g(x) \in [a,b]$

یعنی $R_G \subseteq D_f$

شرط ۲: برازای هر x از بازه $[a,b]$ داشته باشیم: $|g'(x)|<1$

$x_n = g(x_{n-1})$

دنباله بازگشتی:

مثال: $f(x) = x^3+x^2-1$

$x^3+x^2-1=0 \to x^3+x^2=1 \to x^2(x+1)=1 \to x^2=\frac{1}{x+1}$

$0.5 \le x \le 1 \to 1.5 \le x+1 \le 2 \to 1.2 \le \sqrt{x+1} \le 1.4$

$\to 0.7 \le g(x) \le 0.8 \Rightarrow R_G=[0.7, 0.8] \subset [0.5, 1]$

$|g'(x)| = \frac{1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow 0.18 < |g'(x)| < 0.24$ شرط اول

$\Rightarrow |g'(x)|<1$

شرط دوم:

$x_0 = 0.75$

$x_n = \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}+1}}$

$x_0 = 0.75$

$x_1 = 0.75593$

$x_2 = 0.75469$

$x_3 = 0.75493$

$x_4 = 0.75487$

$x_5 = 0.75486$

$\alpha \approx 0.75486$

قضیه: ثابت کنید روش نقطه ثابت بطور منحصربه فردی به ریشه واقعی معادله جبری همگرا است.

اثبات: فرض کنیم α ریشه واقعی معادله (1) و شرایط ناشی از محاصره و روش نقطه ثابت برقرار باشد. با در نظر گرفتن قضیه مقدار میانگین و x_0 به عنوان تقریب اولیه داریم:

$$x_n = g(x_{n-1}) \ , \ f(\alpha)=0 \ , \ g(\alpha)=\alpha$$

$$, \ \forall x \in [a,b] : |g'(x)| = k < 1$$

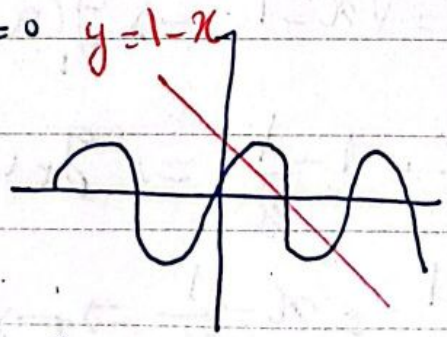
تمرین: پیاده سازی روش ها در برنامه های mathmatica، maple، matlab.

$$x_{n+1} = \frac{\lambda x_n + 1 - \sin x_n}{1+\lambda} \quad \Big| \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

$1 - x - \sin x = 0$

$y = \sin x$

$y = 1 - x$



$$x_{n+1} = \frac{\lambda x_n + 1 - \sin x}{1+\lambda} \quad \Big| \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

$f(x) = 0$

$1 - x - \sin x = 0$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = g(x)$

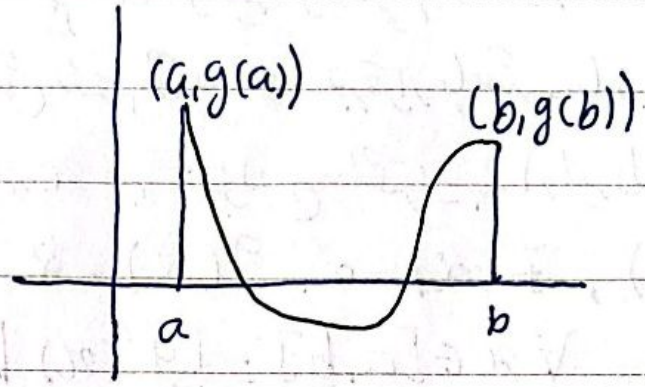
$x = 0/5$ $\quad x^2 - x = 0$

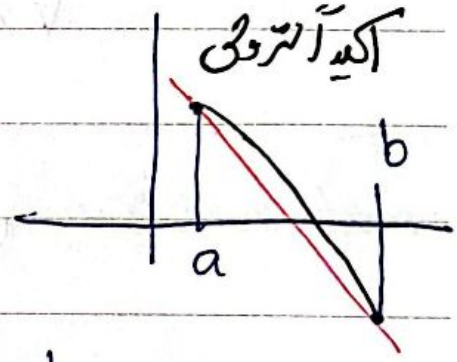
$x = x^2$ $\quad x^3 - x^2 + 1 = 0$

$y = \sin x$

$y = 1 - x$

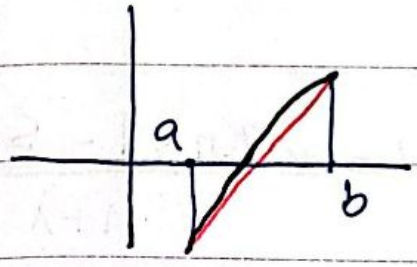
$\begin{cases} y = 1 - \sin x \\ y = x \end{cases}$





$x \in [a,b] \rightarrow g[a,b] \subseteq [a,b]$

$g(a)$, $g(b)$ $\rightarrow \begin{cases} g(a) < g(b) \\ g(a) > g(b) \end{cases}$



$x^3 - x^2 + 1 = 0$

$x^3 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - 1} \Rightarrow g_1(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

$\rightarrow x = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow g_2(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$\rightarrow x^2 = \dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow g_3(x) = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} \\ \rightarrow g_4(x) = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} \end{cases}$

$|g'(x)| \leq L < 1$

به صفر نزدیک تر باشد

سرعت همگرایی بیشتر است

$x^2 = x^3 + 1 \Rightarrow x = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow g_5(x) = \sqrt{x^3+1}$

$\hookrightarrow x = -\sqrt{x^3+1} \Rightarrow g_6(x) = -\sqrt{x^3+1}$

$x = \dfrac{x^3+1}{x}$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = g(x)$

$g'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow p = 1$ ⟶ چرا؟

$\alpha = g(\alpha)$

$x_{n+1} = g(x_n)$

$\Rightarrow x_{n+1} - \alpha = \underbrace{g(x_n) - g(\alpha)}_{\text{قطعیه مقدار میانگین}} = g'(\xi)(x_n - \alpha)$ $\quad \exists\, \xi$

از این فرمول بدست می‌آید

$= g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2} g''(\alpha)(x_n - \alpha)^2 + \cdots$

نکته ⟵

$g'(\alpha) \neq 0 \rightarrow p = 1$

$g'(\alpha) = 0,\ g''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow p = 2$

$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0,\ g^{(k)}(\alpha) \neq 0 \Rightarrow p = 2$

«تسریع ایتکن»

$f(x)=0$ ، ریشه معادله α $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots\} \to \alpha$

روش از مرتبه ۲

فرمول: $x_{k+3} = x_{k+2} - \dfrac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k}$

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \to$ تغییرات پیشرو

$\Delta^2 x_k = \Delta(\Delta x_k) = \Delta(x_{k+1} - x_k) = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k$

$= (x_{k+2} - x_{k+1}) - (x_{k+1} - x_k) = x_{k+2} - x_{k+1} - x_{k+1} + x_k = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$

$\Rightarrow \Delta^2 x_k = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$

$(\Delta x_k)^2 = (x_{k+1} - x_k)^2 = x_{k+1}^2 - 2x_{k+1}x_k + x_k^2$

$\Rightarrow$ فرمول: $x_{k+3} = x_{k+2} - \dfrac{x_{k+1}^2 - 2x_{k+1}x_k + x_k^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$

برای بدست آوردن این سه نقطه مورد نیاز در فرمول باید از روش های حل عددی، تنصیف، نیوتون و وتری استفاده کرد.

(نابجایی)

نقطه شروع نمی خواهد ← روش تنصیف

نیوتون $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ← یک نقطه شروع

وتری ، نابجایی ← دو نقطه شروع

سه نقطه شروع

سه نقطه شروع برای این فرمول نیاز داریم

MRNOTE

تمرین ← $f(x)=0 \quad x^3-x^2+x-1=0$

$[a,b]$ ← از روش تنصیف بدست آورید ← x_0 ← $\frac{a+b}{2}$

$x_1 \longrightarrow$ از روش نیوتون بدست آورید

$x_2 \longrightarrow$ از روش جایگزینی بدست آورید

$x_3 \Longrightarrow$ روش اینکوک

$x_4 = ?$ "

$x_5 = ?$ "

ارقام (اعداد) بامعنی:

۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹ مگر صفرهایی که بین صفر ممیز و اولین رقم غیرصفر قرار بگیرند.

۰,۰۰۴۵۶ ← فقط ۳ رقم بی معنی: ۴، ۵، ۶

۱۰۰,۰ ← ۴ رقم بامعنی دارد. چون صفر بعد از ممیز نوشته شده، یعنی کلا با دقت اندازه گیری شده

۰,۰۰۵۰۳۰ ← ۴ رقم بامعنی دارد: ۵، ۳، ۰، ۰

«حل دستگاه معادلات خطی» ← «روش های حل دستگاه معادلات خطی»

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

n معادله - n مجهول ←

تعداد مجهولات = تعداد معادلات = n

$\Rightarrow AX = b$ در این درس با دستگاه‌های مربعی سروکار داریم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

مثال ← یک دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightarrow x_1 = 1 \\ \rightarrow x_2 = 1 \\ \rightarrow x_3 = -1 \end{matrix}$$

دو نوع روش حل معادلات

- روش مستقیم ← تجزیه معادله به چند پیراشتر
- روش های عددی یا تقریبی

$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\} \rightarrow \alpha$

$\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_k, \dots\} \rightarrow \alpha$

بردارها

$\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots\}$ بردار هستند

نکته ←

$$Ax = b \Rightarrow x = \underbrace{A^{-1}}_{\text{وارون ماتریس ضرایب}} b$$

MRNOTE

«24»

نکته ← $|A|=0$ ← وجود نداشته باشد A^{-1} جواب ندارد.

لذا ماتریس‌هایی بررسی می‌کنیم که $|A|\neq 0$ و وارون وجود داشته باشد.

روش‌های مستقیم ←

در ماتریس‌ها با ابعاد بسیار بزرگ، بدست آوردن وارون به راحتی ممکن نیست و هزینه بسیاری دارد.

لذا روش دیگری پیاده می‌کنیم.

«روش حذفی گاوس»

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ 0 & L_{22} & L_{23} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} A \longrightarrow U$$ بالا مثلثی

$$A \longrightarrow L$$ پایین مثلثی

تبدیل A با اعمال سطری مقدماتی به یکی از سه نوع ماتریس ← (قطری D) همانی

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} A \longrightarrow I$$

$$[A|b] \xrightarrow[\text{سطری مقدماتی}]{} Ux=b' \Rightarrow$$ با جایگذاری پیرو نیوتون

$x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$

$$Lx=b' \Rightarrow$$ با جایگذاری پیشرو نیوتون

$x_1, x_2, \dots, x_n$

$$Dx=b' \Rightarrow x_i=\frac{b'_i}{d_i}$$

مثال ←

$$\begin{cases} x_1+5x_2+3x_3=3 \\ 4x_1-2x_2-5x_3=7 \\ 2x_1+3x_2-x_3=6 \end{cases}$$

حل با ماتریس بالا مثلثی :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -22 & -17 & -5 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$m_{ij} R_i + R_j \to R_j$

$-4R_1+R_2 \to R_2$

$-2R_1+R_3 \to R_3$

$\alpha R_2 + R_3 \to R_3$

$\alpha(-22) - 7 = 0$

$\alpha = \frac{-7}{22}$

$$\frac{-7}{22}R_2+R_3 \to R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -22 & -17 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{7\times(-5)}{22} & 5\left(\frac{7}{22}\right) \end{array}\right]$$

$$\frac{7(+17)}{22} - 7 = +7\left(\frac{17}{22}-1\right) = 7\left(\frac{-5}{22}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+5x_2+3x_3=3 & \to x_1=1 \\ -22x_2-17x_3=-5 & \to x_2=1 \\ \frac{-35}{22}x_3=\frac{35}{22} & \to x_3=-1 \end{cases}$$

حل با ماتریس پایین مثلثی:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{5}{2}R_2+R_1 \to R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & -9.5 & 20.5 \\ 4 & -2 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

MRNOTE

26n

$$\xrightarrow[-9.5R_3+R_1\to R_1]{-5R_3+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}-8 & -28.5 & 0 & -36.5\\ -6 & -17 & 0 & -23\\ 2 & 3 & -1 & 6\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{28}{17}R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}2.5 & 0 & 0 & 2.5\\ -6 & -17 & 0 & -23\\ 2 & 3 & -1 & 6\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2.5 & 0 & 0\\ -6 & -17 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5\\ -23\\ 6\end{bmatrix}\to\begin{cases}2.5x_1=2.5\to x_1=1\\ -6x_1-17x_2=-23\to -6-17x_2\\ =-23\to -17x_2=-17\to x_2=1\end{cases}$$

$$2x_1+3x_2-x_3=6\to 2+3-x_3=6\to -x_3=1\Rightarrow x_3=-1$$

حل با ماتریس همانی:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & 3 & 3\\ 4 & -2 & -5 & 7\\ 2 & 3 & -1 & 6\end{array}\right]\xrightarrow[-2R_1+R_3\to R_3]{-4R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & 3 & 3\\ 0 & -22 & -17 & -5\\ 0 & -7 & -7 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow -\frac{1}{22}R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & 3 & 3\\ 0 & 1 & +\frac{17}{22} & +\frac{5}{22}\\ 0 & -7 & -7 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[-5R_2+R_1\to R_1]{+7R_2+R_3\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{19}{22} & \frac{41}{22} \\ 0 & 1 & +\frac{17}{22} & \frac{5}{22} \\ 0 & 0 & -\frac{35}{22} & \frac{35}{22} \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to -\frac{22}{35} R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{19}{22} & \frac{41}{22} \\ 0 & 1 & \frac{17}{22} & \frac{5}{22} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{49}{22} R_3 + R_1 \to R_1]{-\frac{17}{22} R_3 + R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

«روش کرامر»

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3-1}{-1-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1-3}{-1-1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

«تجزیه LU»

$$Ax=b \Rightarrow A=LU$$

$$A=\begin{bmatrix}1&5&3\\4&-2&-5\\2&3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{-4R_1+R_2\to R_2\\ -2R_1+R_3\to R_3}}\begin{bmatrix}1&5&3\\0&-22&-17\\0&-7&-7\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{7}{22}R_2+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}1&5&3\\0&-22&-17\\0&0&-\frac{35}{22}\end{bmatrix}=U$$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\2&\frac{7}{22}&1\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}L_{11}&0&0\\L_{21}&L_{22}&0\\L_{31}&L_{32}&L_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{11}&U_{12}&U_{13}\\0&U_{22}&U_{23}\\0&0&U_{33}\end{bmatrix}$$

$L_{ii}=1 \longrightarrow$ دولیتل

$$L_{21}\times \underset{1}{U_{11}}+\overset{1}{L_{22}}\times 0+0=a_{22}\Rightarrow L_{21}=4$$

$$L_{21}U_{12}+L_{22}\times U_{22}+0=a_{22}$$

$$1\times U_{12}+0+0=a_{12}$$

$$\star\ Ax=b \quad b=\begin{bmatrix}3\\7\\4\end{bmatrix} \qquad LUx=b$$

$$Ux=y$$

ادامه

«29»

$Ly = b \longrightarrow y =$ با جایگذاری پیشرو نیوتون

$Ux = y \longrightarrow x =$ با جایگذاری پسرو نیوتون

معلوم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{7}{22} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 3 \\ y_2 = -5 \\ y_3 = \frac{35}{22} \end{matrix} \leftarrow Ly = b$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -22 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{-35}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ \frac{35}{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_3 = -1,\ x_2 = 1,\ x_1 = 1$$

نکته ← $L_{ij} = -m_{ij}$

«روش های عددی حل دستگاه معادلات»

دنباله ای از اعداد پیدا می کنیم:

$$\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots\} \xrightarrow[\text{همگرا}]{} \underset{\text{جواب}}{x}$$

$|f(x)| < \varepsilon,\ |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon,$ معیارهای توقف ←

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon$$

$Ax = b$ $\qquad x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$ نکته ←

نورم ها:

$\|v\|_1 =$ نرم یک ← جمع قدر مطلق عناصر

$\|v\|_2 =$ نرم دو ← جذر جمع مربعات عناصر

$\|v\|_\infty$ فرم بی نهایت

$\|v\|_p =$

---

* سؤال امتحانی: نرم برای اندازه‌گیری نرم چه ویژگی هایی خواهد داشت؟
نرم هیچ ویژگی هایی دارد و در هر مسئله چه کاربردی دارد.

$\|Ax - b\| < \varepsilon \qquad \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|}$$

معیارهای توقف برای حل دستگاه معادلات $Ax - b$

۱) روش ژاکوبی

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\rightarrow x_1^{(k+1)} = 3 - 5x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{-7 + 4x_1^{(k)} - 5x_3^{(k)}}{2}$$

$$x_3^{(k+1)} = -6 + 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}$$

یک روش ← در نظر گرفتن x_1 و صفر گرفتن بقیه

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{7}{2} \\ -6 \end{bmatrix}$$

→ 〃 〃 x_2 〃 〃 〃

→ 〃 〃 〃 x_3 〃 〃 〃

حدس اولیه ←

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ یا } x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

← روش شانسی

$k=0$

$$\rightarrow x_1^{(1)} = 3 - 5\underbrace{\left(-\frac{7}{2}\right)}_{x_2^{(0)}} - 3\underbrace{(-6)}_{x_3^{(0)}} = 38.5$$

$$x_2^{(1)} = \frac{-7 + 4(3) - 5(-6)}{2} = 17.5$$

$$x_3^{(1)} = -6 + 2\underbrace{(3)}_{x_1^{(0)}} + 3\underbrace{\left(-\frac{7}{2}\right)}_{x_2^{(0)}} = -10.5$$

$$\|x\| = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i| \Rightarrow \|\underbrace{x^{(1)} - x^{(0)}}_{35.5}\|_\infty \not< \varepsilon = 10^{-2}$$

ادامه می‌دهیم →

k	$x^{(k)}$	$x^{(k+1)}$	$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$
0		$x^{(1)}$	$35.5 \not< \varepsilon$
1	$\begin{bmatrix} 38.5 \\ 17.5 \\ -10.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -53 \\ 99.75 \\ 124.5 \end{bmatrix}$	$\|x^{(2)} - x^{(1)}\| \not< \varepsilon$
⋮	⋮	⋮	⋮

$$x_1^{(2)} = 3 - 5(17.5) - 3(-10.5) = -52$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-7 + 4(38.5) - 5(-10.5)}{2} = 99.75$$

$$x_3^{(2)} = -6 + 2(38.5) + 3(17.5) = 123.5$$

همانطور مشخص است این روش همگرا نیست. جواب ها دور می شوند. سؤال برای هفته بعد:

چه ویژگی ای لازم است تا روش تکراری ژاکوبی همگرا شود؟

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

ژاکوبی

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(k)} \\ x_i^{(k)} \\ x_{i+1}^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

گاوس - سایدل

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

روش گاوس - سایدل

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\rightarrow x_1^{(k+1)} = 3 - 5x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{-7 + 4x_1^{(k+1)} - 5x_3^{(k)}}{2}$$

$$x_3^{(k+1)} = -6 + 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)}$$

MRNOTE

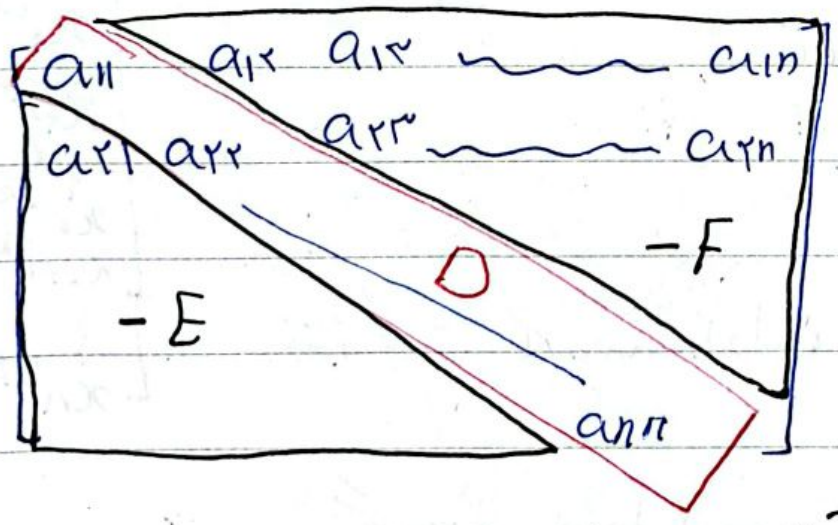
«تشکیل ماتریسی روش های کددی»

$$\underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x} = \underset{n\times 1}{b} \longrightarrow \sum a_{ij}x_j = b_i$$ معادله i ام

n معادله
n مجهول

$$a_{ii}x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

$$\Rightarrow x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$



$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال ←

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = D - E - F$$ ← نکته

$$Ax = b \Rightarrow (D - E - F)x = b$$

$$\Rightarrow Dx - (E+F)x = b$$

$$\Rightarrow Dx = b + (E+F)x$$

یعنی عنصرهای قطری صفر نباشند و در صورت صفر بودن عناصر، ماتریس وارون پذیر است.

$$\Rightarrow x = D^{-1}b + D^{-1}(E+F)x$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = D^{-1}b + D^{-1}(E+F)x^{(k)}$$

نیاز به حدس اولیه برای $x^{(0)}$:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{7}{2} \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}b + D^{-1}(E+F)x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{B}_{\text{به دلیل ماتریس تکرار}} x^{(k)} + d$$

فرمول بازگشتی روش های تکراری ماتریس

همانی

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تمرین: حل دستگاه معادلات قبلی با این روش با شرط توقف $\|Ax-b\|_\infty \le 10^{-3}$.

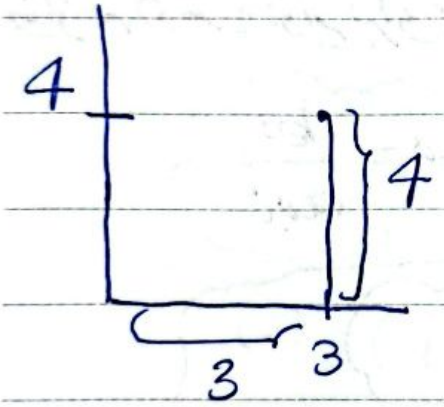
«انواع نرم ها»

۱) نرم ۱ (نرم منهتن) ←

برابر حاصل جمع قدر مطلق مولفه های بردار

$$\|v\|_1 = \sum |x_i|$$

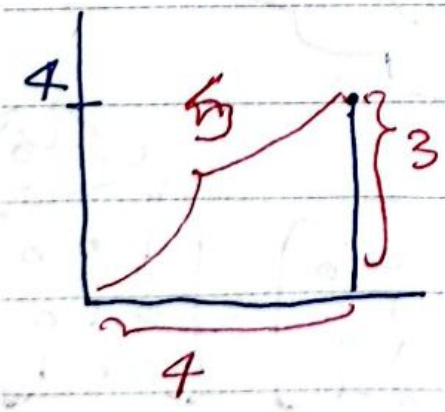
فاصله طبیعی بین دو نقطه (مانند مسافت بین دو نقطه در شهر) ←



$\rightarrow \|v\|_1 = |3| + |4| = 7$

۲) نرم ۲ (نرم اقلیدسی):

$$\|v\|_2 = \left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$



$$\|v\|_2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$$

۳) نرم ∞ (نرم ماکسیمم)

$$\|v\|_\infty = \max(|x_i|)$$

برابر با اندازه بزرگ‌ترین مولفه بردار. در مسائلی استفاده می‌شود که بزرگ‌ترین مولفه برای ما اهمیت دارد مانند آنالیز خطاها در بدترین حالت و ...

۴) نرم p

$$\|v\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

تعمیم نرم‌های قبلی است.

$p=1$ ← نرم یک

$p=2$ ← نرم دو

$p=\infty$ ← نرم بی‌نهایت

«روش‌های عددی»

تکنیک‌هایی است که از تقریب‌های ریاضی برای حل مسائل پیچیده استفاده می‌کند.

دلیل استفاده از روش‌های عددی این است که اغلب مسائل در دنیای واقعی (مانند فیزیک و مهندسی) معادلات و مدل‌های پیچیده‌ای برای آنالیز دارند و استفاده از روش‌های مستقیم کار سختی خواهد بود، بنابراین از روش‌های عددی برای این دسته از مسائل استفاده می‌شود.

چون در کامپیوترها نمی توان بعضی اعداد را به صورت دقیق نمایش داد، بنابراین از روش های عددی استفاده می کنیم تا با تقریب دلخواه به پاسخ خود برسیم.

«ماتریس قطری غالب»

ماتریسی که هم از نظر سطری و هم از نظر ستونی قطری غالب باشد.

«اکیداً قطری غالب (قطری غالب اکید)»

قطری غالب اکید ستونی $\longrightarrow$ $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad j=1,2,\dots,n \quad \forall j$

قطری غالب ستونی $\longrightarrow$ $|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad j=1,2,\dots,n \quad \forall j$

قطری غالب اکید سطری $\longrightarrow$ $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i \quad i=1,2,\dots,n$

قطری غالب سطری $\longrightarrow$ $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i \quad i=1,2,\dots,n$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ اکیداً قطری غالب سطری است ولی اکیداً قطری غالب ستونی نیست

همین که به یک مت قفی برسیم دیگر ادامه نمی دهیم.

* در روش های ژاکوبی، گوس سایدل، SOR چون فقط روی معادلات سطری بحث می شود، فقط یک کردن سطری ماتریس کافی است.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ ← یک ماتریس قطری غالب اکید

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ تبدیل ماتریس به یک دستگاه معادلات

→ این معادلات از هر روشی حل آن همگرا خواهد بود.

* اگر از نظر ستونی هم قطر غالب اکید باشد سرعت همگرایی بیشتر می شود.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow [1,-2,-1] \quad b=\begin{bmatrix} 4 \\ -14 \\ -5 \end{bmatrix}$$ ← یک سوال

«شکل ماتریسی روش گاوس - سایدل»

گاوس - سایدل $x_i^{(k+1)} = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$

$\times a_{ii}$

$$\longrightarrow a_{ii} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k+1)}}_{\text{کی صر قطر اصلی و پایین}} = b_i - \underbrace{\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}_{\text{کی صر بالایی}}$$

$(D-E-F)x=b$

$(D-E)x-Fx=b$

$\rightarrow (D-E)x=b+Fx$

$a_{ij}\neq 0$ یا D معکوس پذیر است $\Rightarrow (D-E)^{-1}$ موجود است

$\Rightarrow x=\underbrace{(D-E)^{-1}b}_{GOS}+\underbrace{(D-E)^{-1}F}_{BGOS}x$

$\Rightarrow x^{(k+1)}=(D-E)^{-1}b+(D-E)^{-1}Fx^{(k)}$

قضیه) هرگاه در روش های تکراری ژاکوبی و گاوس - سایدل ماتریس تکرار اکیداً قطری غالب باشد آنگاه این روش به جواب واقعی دستگاه معادلات $Ax=b$ همگرا هستند.

قضیه) شرط لازم برای همگرایی روش های ژاکوبی و گاوس سایدل برای حل دستگاه $Ax=b$ آن است که ماتریس ضرایب اکیداً قطری غالب باشد.

قضیه) شرط لازم و کافی برای همگرایی روش های ژاکوبی و گاوس سایدل برای حل دستگاه $Ax=b$ آن است که شعاع طیفی ماتریس تکرار کوچکتر از یک باشد.

$\rho(B)<1 \Longleftrightarrow$ روش همگرا است.

«نرم ماتریس ها»

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & -۲ \\ ۷ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

ویژگی

$\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$

① $\forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \geq 0$

$, \|v\| = 0 \iff v = 0$

$v = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بردار غیر صفر

نرم بردار زمانی صفر است که تمامی مؤلفه های آن صفر باشد (بردار صفر)

$v = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ بردار صفر

ویژگی

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda v\| = |\lambda| . \|v\|$

$$v = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۴ \\ ۱۶ \end{bmatrix} = ۴\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = -۴\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$$

$u = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$ $\quad \|v\| = \|-۴u\| = |-۴| . \|u\|$

$\|v\|_1 = |۸| + |-۴| + |۱۶| = ۲۸$

$\|\lambda u\|_1 = \|-۴.u\|_1 = |-۴ \times -۲| + |-۴ \times ۱| + |-۴ \times -۴|$

$= |-۴| (|-۲| + |۱| + |-۴|) = |-۴| \times ۷ = ۲۸$

$$\|v\|_\infty = \max(|۸|, |-۴|, |۱۶|) = ۱۶$$

$$\|-۴u\|_\infty = \max(|-۴\times -۲|, |-۴\times ۱|, |-۴\times -۴|)$$

$$= |-۴| \max(|-۲|, |۱|, |-۴|) = |-۴| \times ۴ = ۱۶$$

$$\|v\|_۲ = \sqrt{|۸|^۲ + |-۴|^۲ + |۱۶|^۲} = \sqrt{۶۴ + ۱۶ + ۲۵۶} = ۱۸,۳$$

$$\|-۴u\|_۲ = \sqrt{(-۴\times -۲)^۲ + (-۴\times ۱)^۲ + (-۴\times -۴)^۲} =$$

$$\sqrt{۶۴ + ۱۶ + ۲۵۶} = ۱۸,۳ \checkmark$$

ویژگی

(۳) $\|v+u\| \le \|v\| + \|u\|$

$$v = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۵ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۷ \\ -۳ \end{bmatrix} \qquad v+u = \begin{bmatrix} +۱ \\ +۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

$$\|v+u\|_۱ = (|+۱| + |۲| + |-۱|) = ۴ \qquad \|v+u\| <$$

$$\|v\|_۱ = (|۳| + |-۵| + |۲|) = ۱۰ \Rightarrow \|v\|_۱ + \|u\|_۱ = ۲۲$$

$$\|u\|_۱ = (|-۲| + |۷| + |-۳|) = ۱۲$$

$$\|v+u\|_\infty = \max(|+۱|, |۲|, |-۱|) = ۲ \qquad \|v+u\|_\infty$$

$$\|v\|_\infty = \max(|۳|, |-۵|, |۲|) = ۵ \qquad < \|v\|_\infty + \|u\|_\infty$$

$$\|u\|_\infty = \max(|-۲|, |۷|, |-۳|) = ۷ \qquad = ۱۲$$

$$\|v+u\|_{\text{فرب}} = \sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2} = \sqrt{6} = 2.44$$

$$\|u\|_{\text{فرب}} = \sqrt{(-2)^2+(7)^2+(-3)^2} = \sqrt{62} = 7.847$$

$$\|v\|_{\text{فرب}} = \sqrt{(3)^2+(-5)^2+2^2} = \sqrt{38} = 6.16$$

$$\|v+u\|_2 < \|v\|_2 + \|u\|_2 = 14.007$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\} = \max\{|3|+|7|+|5|, |5|+|1|+|2|, |-2|+|4|+|-3|\} = 15$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\} = \max\{|3|+|5|+|-2|, |7|+|1|+|4|, |5|+|2|+|-3|\} = 12$$

(جای سطر و ستون کوچک)

ترانهاده A

$$\|A\|_2 = \left(\rho(A^T A)\right)^{\frac{1}{2}}$$

شعاع طیفی

$$A_{m\times n} \to A^T_{n\times m}$$

$$\left(A^T_{n\times m} A_{m\times n}\right)_{n\times n}$$

43n

نکته: اگر $A=A^T$ ماتریس متقارن است.

«نرم فرو بنیوس» «اقلیدسی»

$A_{n\times n}$

$$\|A\|_F = \|A\|_E = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

«شعاع طیفی (ρ)»

$$B_{n\times n} \to \rho(B) = \max_i \{|\underbrace{\lambda_i}_{\text{مقادیر ویژه}}|\}$$

$B_{n\times n}$ جفت ویژه ماتریس (λ, x) که $\boxed{Bx = \lambda x}$

$(\lambda \in \mathbb{R})$ مقدار ویژه $(x \in \mathbb{R}^n)$ بردار ویژه

نکته: شعاع طیفی همیشه برای ماتریس های مربعی مطرح می شود.

جواب بدیهی برای x: بردار صفر $(x=0)$ اما این جواب هیچ موقع بردار ویژه نیست.

★ بردار ویژه همیشه غیر صفر است.

مثال: جفت ویژه های ماتریس همانی:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\lambda, x);\ Ax = \lambda x \to x = \lambda x$$

$\to \lambda = 1$ و هر بردار دلخواه $x \neq 0$

مثال: حفت ویژه‌های ماتریس زیر:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \rightarrow Ax-\lambda x=0 \rightarrow (A-\lambda I)\underbrace{x}_{\text{غیر صفر}}=\underbrace{0}_{\text{بردار صفر}}$$

$(A-\lambda I)$ نباید معکوس پذیر باشد چون:

$$\underbrace{(A-\lambda I)}_{\text{معکوس پذیر}} \rightarrow \underbrace{(A-\lambda I)^{-1}}_{\text{موجود}}$$

$$\underbrace{(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)}_{I}x=(A-\lambda I)^{-1}.0 \rightarrow x=0$$

جواب بدیهی که نمی‌خواهیم.

لذا $(A-\lambda I)$ نباید معکوس پذیر باشد پس

$$|A-\lambda I|=0$$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 1-\lambda & 2\\ 1 & 2 & 3-\lambda\end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

محاسبه دترمینان به وسیله روش بسط سطر و ستونی (بسط طبق سطر اول):

$$|A-\lambda I|=(-1)^{1+1}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(1)\begin{vmatrix}-1 & 1-\lambda\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-4\right]+(-3+\lambda-2)+(-2-1+\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(3-4\lambda+\lambda^2-4)+\lambda-5+\lambda-3$$

$$= -1-4\lambda+\lambda^2+\lambda+4\lambda^2-\lambda^3+2\lambda-8$$

$$= -\lambda^3+5\lambda^2-\lambda-9 \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = 4.27,\ \lambda_2 = 1.86,\ \lambda_3 = -1.13}_{\text{مقادیر ویژه}}$$

نکته:

$A-\lambda I \xrightarrow[\text{با اعمال سطری مقدماتی}]{\text{تبدیل به}}$ بالا مثلثی / پایین مثلثی / قطری

$|A-\lambda I| \Rightarrow$ مقادیر ویژه حاصلضرب عناصر قطر اصلی

$$A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix} \rightarrow A-\lambda I=\begin{bmatrix}3-\lambda&0&0\\0&5-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |A-\lambda I| = (3-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda&0\\0&1-\lambda\end{vmatrix}+0+0=(3-\lambda)(5-\lambda)$$

$$(1-\lambda)=0 \rightarrow \lambda=3,\ \lambda=5,\ \lambda=1$$

$$B=\begin{bmatrix}2&5&1\\0&3&2\\0&0&7\end{bmatrix} \rightarrow B-\lambda I=\begin{bmatrix}2-\lambda&5&1\\0&3-\lambda&2\\0&0&7-\lambda\end{bmatrix}$$

$$|B-\lambda I| = (2-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 7 \end{cases}$$

مثال ←

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-4)(\lambda+2) \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

بردار ویژه : $Ax = \lambda_1 x \xrightarrow{\text{روش اول}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

روش دوم (راحت‌تر)

$$(A-\lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

وابسته خطی

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 2 \Rightarrow (A-2I)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

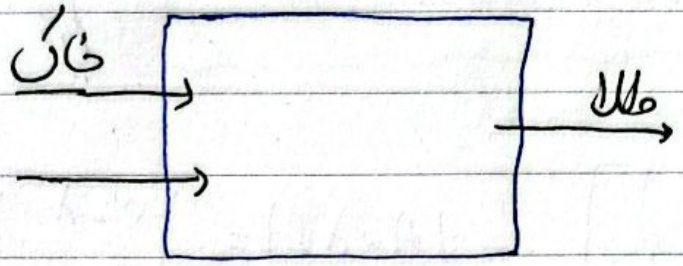
$$\rightarrow x_1 = -x_2 = 0$$

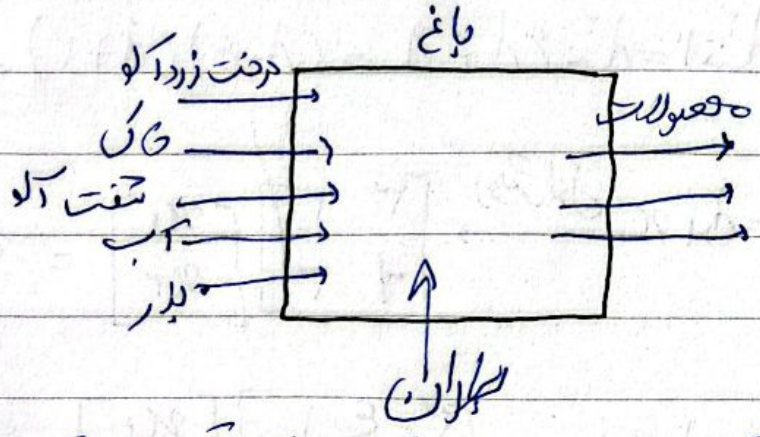
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

MRNOTE

«درون یابی»

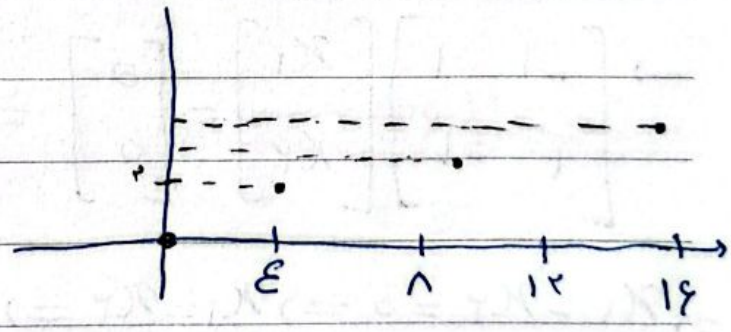
x_i	f_i
x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n





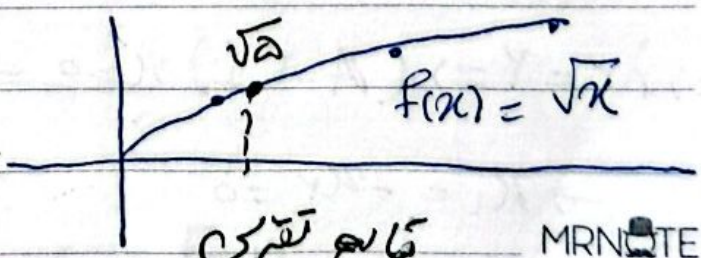
$f(x)$ ناشناخته است و فقط مقادیر آن مشخص است.

x_i	f_i
۰	۰
۴	۲
۹	۳
۱۶	۴



$f(5) = ?$

$f(1/2) = ?$



تابع تقریبی

(x_i, f_i) $i = 1, 2, \dots, n$

نقطه گرهی

148_n

چندجمله‌ای از درجه n

$$f(x) \cong P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$n+1$ نقطه گرهی

وقتی $n+1$ x_i داشته باشیم، حداکثر می‌توان یک چندجمله‌ای از درجه n داشت و کمتر هم می‌شود.

<روش لاگرانژ>

$n+1$ نقطه $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f_i$$

چندجمله‌ای‌های لاگرانژ

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$= \frac{\prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} (x-x_k)}{\prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} (x_i-x_k)}$$

* x_i درون صورت کسر وجود ندارد.

مثال:

	x_i	f_i
x_0	۰	۰
x_1	٤	۲
x_2	۹	۳

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-٤)(x-۹)}{(۰-٤)(۰-۹)} = \frac{1}{۳۶}(x^2-۱۳x+۳۶)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-۰)(x-۹)}{(٤-۰)(٤-۹)}$$

$$= \frac{-1}{۲۰}(x^2-۹x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-4)}{(9-0)(9-4)} = \frac{1}{45}(x^2-4x)$$

$$P_2(x) = L_0(x)\,f_0 + L_1(x)\,f_1 + L_2(x)\,f_2$$

$$= \frac{1}{36}(x^2-13x+36)\times 0 + \left(\frac{-1}{20}\right)(x^2-9x)(2)$$

$$+ \frac{1}{45}(x^2-4x)(3) = -0.1x^2 + 0.9x + \frac{1}{15}x^2 - \frac{4}{15}x$$

$$= \left(\frac{1}{15}-\frac{1}{10}\right)x^2 + \left(\frac{9}{10}-\frac{4}{15}\right)x$$

$$= \frac{-1}{30}x^2 - \frac{19}{30}x \cong f(x)$$

$$f(1) \cong P_2(1) = \frac{-1}{30}\times 1^2 + \frac{19}{30}\times 1 = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0.6$$

نکته:

$P_2(0) = f(0)$

$P_2(4) = f(4)$ قابل بدست آمده در صورتی درست است که

$P_2(9) = f(9)$

$P_n(x_i) = f_i$ یا $f(x_i)$ خاصیت درون یابی

چند جمله‌ای که خاصیت درون یابی را دارد باشد، درون یاب نیست.

MRNOTE

۵۵۰ n

$(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نقطه $n+1$

x_i	f_i
x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n

$f(x)$

x_i	g_i
x_0	g_0
x_1	g_1
x_2	g_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	g_n

$g(x)$

$$P_f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \, L_i(x) \cong f(x) \longrightarrow$$ تقریب $f(x)$

$$P_g(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i \, L_i(x) \cong g(x) \longrightarrow$$ تقریب $g(x)$

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$$ * نکته ←

$$f(x) \cong P_n(x) = \sum f(x_i) \, L_i(x)$$

x_i	f_i
x_0	1
x_1	1
x_2	1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	1

$$\Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow 1 \cong P_n(x) = \sum L_i(x)$$

$$\Rightarrow L_i(x) = 1$$

MRNOTE

مثال)

x_i	f_i
۰	-۲
۱	-۱

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-1}{0-1} = -x+1$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-0}{1-0} = x$$

$$\sum_{i=0}^{1} L_i(x) = L_0(x) + L_1(x) = (-x+1) + x = 1$$

$$P_1(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 = (-x+1) \times (-۲) + x(-1)$$

$$= ۲x - ۲ - x = x - ۲ \Rightarrow P_1(x) = x - ۲$$

مثال)

x_i	f_i
-۳	۷
-۴	۹

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x+۴}{-۳+۴} = x+۴$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x+۳}{-۴+۳} = -x-۳$$

$$\sum_{i=0} L_i(x) = L_0(x) + L_1(x) = (x+۴) + (-x-۳) = 1$$

$$P_1(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 = (x+۴)(۷) + (-x-۳)$$

$$(۹) = ۷x + ۲۸ - ۹x - ۲۷ = -۲x + 1$$

مثال) استفاده از L_i های روش قبل:

x_i	f_i
-۳	۲
-۴	۵

$$P_1(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 =$$

$$(x+۴)(۲) + (-x-۳)(۵)$$

$$= ۲x + ۸ - ۵x - ۱۵ = -۳x - ۷$$

MRNOTE

x_i	f_i
-3	2
-4	5
1	10

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$= \frac{(x+4)(x-1)}{(-3+4)(-3-1)} = \frac{-1}{4}(x^2+3x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(-4+3)(-4-1)} = \frac{1}{5}(x^2+2x-3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+3)(x+4)}{(1+3)(1+4)} = \frac{1}{20}(x^2+7x+12)$$

$$L_0(x)+L_1(x)+L_2(x) = \frac{-1}{4}(x^2+3x-4)+\frac{1}{5}(x^2+2x-3)$$

$$+\frac{1}{20}(x^2+7x-3) = \left(\frac{-1}{4}x^2+\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{20}x^2\right)$$

$$+\left(\frac{2x}{5}-\frac{3x}{4}+\frac{7}{20}x\right)+\left(+\frac{4}{4}-\frac{3}{5}+\frac{12}{20}\right)$$

$$= \frac{-5x^2+4x^2+x^2}{20} + \frac{8x-15x+7x}{20} + \frac{20-12+12}{20}$$

$$= 0+0+1 = 1$$

ادامه

$P_2(x) = -2x-7$

MRNOTE

$$P_2(x) = L_0(x)\times 2 + L_1(x)\times 5 + L_2(x) = (-10)$$

$$= -\frac{1}{4}(x^2+3x-4)(2) + \frac{1}{5}(x^2+2x-3)(5)$$

$$+\frac{1}{20}(x^2+7x+12)(-10) = -\frac{1}{2}(x^2+3x-4)$$

$$+ x^2+2x-3 - \frac{1}{2}(x^2+7x+12)$$

$$= \left(-\frac{3}{2}+2-\frac{7}{2}\right)x + \frac{4}{2} - 3 - \frac{12}{2} = -2x-7$$

x_i	f_i
-3	2
-4	5
1	-10

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}(x^2+3x-4) + x^2-2x-3$$

$$+\frac{1}{20}(x^2+7x+12)(20)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 + 2x - 3 + x^2 + 7x + 12$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + 11$$

x_i	f_i
-3	2
-4	5
1	-20

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 - x^2$$

$$-7x - 12 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{2}x - 13$$

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{2}x - 13$$

MRNOTE

54n

* با توجه به مثال های قبل دید که نقطه ضعف روش لاگرانژ این است که با اضافه کردن یک نقطه به داده ها می توان گفت تابع همان است (بعضی اوقات می تواند درست باشد و باید چک شود. اگر نقطه جدید در $P_n(x)$ صدق کرد لذا نیاز به محاسبه جدید نیست) ولی اکثر اوقات این گونه می شود و نیاز به این است که محاسبات از ابتدا انجام شود.

به فاصله این نقطه ضعف به روش های دیگر خواهیم پرداخت.

روش لاگرانژ زمانی بهترین روش است که نقاط ما (x_i ها) ثابت باشند و فقط f_i ها تغییر کند. (L_i ها ثابت هستند)

«روش های چند جمله ای های تقسیم شده نیوتون»

خطای چند جمله ای درون یاب:

$f, f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ ← f تا مرتبه $(n+1)$ مشتق پذیر باشد

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \to P_n(x)$

$$\Rightarrow |f(x) - P_n(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \cdot \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

← خطا

از بسط تیلور می توان بدست آید. اما دو مشکل وجود دارد ۱) $f(x)$ را نداریم ۲) نمی دانیم x چند است

لذا ←

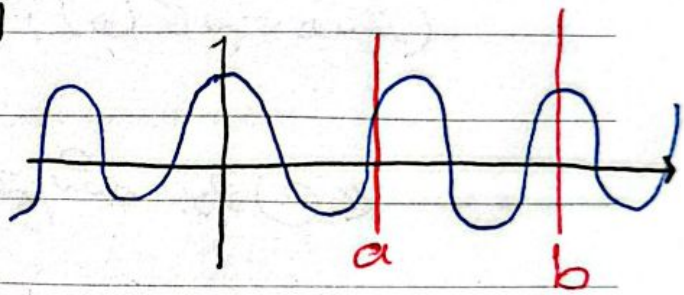
$$|f(x)-P_n(x)| \le \prod_{i=0}^{n} |x-x_i| \cdot M$$

$$|f^{(n+1)}(x)| < M$$ کران بالا برای مشتق $n+1$ f

مثال ← حداکثر خطای تقریب تابع $f(x)=\cos\pi\frac{x}{2}$ با دو نقطه $\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ پیدا کنید.

$$\mathcal{L}_0 = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-1}{0-1} = -x+1$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-0}{1} = x$$



$$P_1(x) = \mathcal{L}_0 \times f_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1 = (-x+1)\times 1 + (x)(0)$$
$$= -x+1$$

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x \rightarrow f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}x$$

$$\Rightarrow |f''(x)| \le M \rightarrow \left|-\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}x\right| \le M \rightarrow M = ?$$

$$\rightarrow \left|-\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{4}x\right| \le \frac{\pi^2}{4} = M$$

$\forall x ; |\cos\theta| \le 1$

$$\Rightarrow |f(x) - P_1(x)| \le (x-0)(x-1) \times \frac{M^2}{8} = \frac{M^2}{8}|(x^2-x)|$$

$$\le \frac{\pi^2}{8}\left(\left|\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right|\right) = \frac{1}{16}\pi^2 < 0{,}95$$

یک مقدار را بیشتر

$2x-1=0$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow$ حداقل مقدار x

چند جمله‌ای های درونیاب نیوتون : (تفاضلات تقسیم شده)

x_i	f_i	تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول
x_0	f_0	
		$\frac{f_0-f_1}{x_0-x_1} = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} = f[x_0,x_1]$
x_1	f_1	
		$\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} = f[x_1,x_2]$
x_2	f_2	
		$\frac{f_3-f_2}{x_3-x_2} = f[x_2,x_3]$
$\vdots$	$\vdots$	
x_{n-1}	f_{n-1}	
		$\frac{f_n-f_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} = f[x_{n-1},x_n]$
x_n	f_n	

$$f[x_{i-1},x_i] = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad *$$

حالت کلی تفاضلات تقسیم شده مرحله اول

ادامه ←

MRNOTE

تفاضلات تقسیم شده مرحله اول	تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم
$\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$	
$\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = f[x_1, x_2]$	$\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$
$\frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = f[x_2, x_3]$	$\frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = f[x_1, x_2, x_3]$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = f[x_n, x_{n-1}]$	

* حالت کلی تفاضلات تقسیم شده مرحله دوم

$$f[x_i, x_k, x_j] = \frac{f[x_k, x_j] - f[x_i, x_k]}{x_j - x_i}$$

این را مشترک در نظر می‌گیریم، می‌توانیم چند دیگری را در نظر گرفت

که یک مخرج مشترک در تفاضل مخرج می‌آید

* حالت کلی تفاضلات تقسیم شده مرحله k ام: (k+1 نقطه مورد نیاز است):

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[\overbrace{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}}^{\text{مشترک}}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

58

مثال ← جدول تفاضلات تقسیم شده جدول مربوط به تفاضلات گرهی داده شده را محاسبه کنید

x_i	f_i	$f[x_{i-1}, x_i]$ مرتبه اول	$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$ مرتبه دوم
۰	-۱		
۱	۰	$f_{01} = \frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	$f_{012} = \frac{15-1}{2-0} = 7$
۲	۱۵	$f_{12} = \frac{15-0}{2-1} = 15$	

$$P_n(x) = -1 + (x-0)(1) + (x-0)(x-1) \times 7 = -1 + x + 7x^2 - 7x$$

$$= 7x^2 - 6x - 1$$ ← درجه‌ی نقاط جدول صدق می‌کند.

«چند جمله‌ای درون‌یاب»

$$P_n(x) = f_0 + (x-x_0) f_{01} + (x-x_0)(x-x) f_{012}$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f_{0123} + \cdots +$$
$$(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{n-1}) f_{012\cdots n}$$

چند جمله‌ای حداکثر از درجه n ← $n+1$ نقطه گرهی

$\underbrace{(x_0, f_1), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \cdots, (x_n, f_n)}_{n+1 \text{ نقطه گرهی}}$

نکته: آخرین مرتبه تفاضلات تقسیم شده که مقدارش صفر نباشد، مرتبه چند جمله‌ای را معین می‌کند. در مثال بالا، آخرین مرتبه غیر صفر: ۲

MRNOTE

مثال ←

x_i	f_i	مرتبه اول $f[x_{i-1}, x_i]$	مرتبه دو $f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$
x_0 0	-1	$f_{01} = \frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	
x_1 1	0		$f_{012} = \frac{15-1}{2-0} = 7$
x_2 2	15	$f_{12} = \frac{15-0}{2-1} = 15$	
x_3 -1	-2	$f_{23} = \frac{-2-15}{-1-2} = \frac{17}{3}$	$f_{123} = \frac{\frac{17}{3} - 15}{-1-1} = \frac{14}{3}$

مرتبه ۳
$f_{0123} = \frac{\frac{14}{3} - 7}{-1-0} = \frac{7}{3}$

$$P_3(x) = P_2(x) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f_{0123}$$

$$= 7x^2 - 6x - 1 + (x-0)(x-1)(x-2)\frac{7}{3}$$

$$= 7x^2 - 6x - 1 + (x^2 - x)(x-2)\frac{7}{3}$$

$$= 7x^2 - 6x - 1 + (x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x)\frac{7}{3}$$

$$= 7x^2 - 6x - 1 + (x^3 - 3x^2 + 2x)\frac{7}{3}$$

$$= 7x^2 - 6x - 1 + \frac{7}{3}x^3 - 7x^2 + \frac{14}{3}x$$

$$= \frac{7}{3}x^3 - \frac{4}{3}x - 1$$

حل ←

x_i	f_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$	مرتبه ۳
۰	-۱	$f_{01} = \frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	$f_{012} = \frac{15-1}{2-0} = 7$	$f_{0123} = \frac{5-7}{-1-0} = 2$
۱	۰	$f_{12} = \frac{15-0}{2-1} = 15$	$f_{123} = \frac{5-15}{-1-1} = 5$	
۲	۱۵	$f_{23} = \frac{0-15}{-1-2} = 5$		
-۱	۰			
[illegible]	۰			

$$P_3(x) = P_2(x) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f_{0123}$$
$$= 7x^2 - 4x - 1 + (x)(x-1)(x-2)(2) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$$

حل ←

	x_i	f_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$	مرتبه ۳
x_0	۰	-۱	$f_{01} = \frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	$f_{012} = \frac{15-1}{2-0} = 7$	$f_{0123} = \frac{5-7}{-1-0} = 2$
x_1	۱	۰	$f_{12} = \frac{15-0}{2-1} = 15$	$f_{123} = \frac{5-15}{-1-1} = 5$	$f_{1234} = \frac{5-5}{-2-1} = 0$
x_2	۲	۱۵	$f_{23} = \frac{0-15}{-1-2} = 5$	$f_{234} = \frac{-15-5}{-2-2} = 5$	
x_3	-۱	۰	$f_{34} = \frac{15-0}{-2+1} = -15$		
x_4	-۲	۱۵			

مرتبه ۴

$$f_{01234} = \frac{0-2}{-2-0} = 1$$

MRNOTE

۱۵/۱۱

$$P_4(x) = P_3(x) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$f_{01234} = 2x^3 + x^2 - 2x - 1 + (x-0)(x-2)(x-2)(x+1)$$

$$\times 1 \Rightarrow (x^2 - x)(x-2)(x+1) = (x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x)$$

$$(x+1) = (x^3 - 3x^2 + 2x)(x+1) \Rightarrow (x^4 + x^3 - 3x^3 - 3x^2$$

$$+ 2x^2 + 2x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow P_4(x) = \cancel{2x^3} + \cancel{x^2} - \cancel{2x} - 1 + x^4 - \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} + \cancel{2x}$$

$$= x^4 - 1$$

مثال)

x_i	f_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$
0	-1		
		$f_{01} = \frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	
1	0		$f_{012} = \frac{15-1}{2-0} = 7$
		$f_{12} = \frac{15-0}{2-1} = 15$	
2	15		$f_{123} = \frac{5-15}{-1-1} = 5$
		$f_{23} = \frac{0-15}{-1-2} = 5$	
-1	0		$f_{234} = \frac{-15-5}{-2-2} = 5$
		$f_{34} = \frac{15-0}{-2+1} = -15$	
-2	15		$f_{345} = \frac{87+15}{5+1} = 17$
		$f_{45} = \frac{624-15}{5+2} = 87$	
5	624		

سوم	چهارم
$f_{0123} = \frac{5-1}{-1-0} = 2$	
	$f_{01234} = \frac{0-2}{-2-0} = 1$
$f_{1234} = \frac{5-5}{-2-1} = 0$	
	$f_{12345} = \frac{4-0}{5-1} = 1$
$f_{23450} = \frac{17-5}{5-2} = 62$	

MRNOTE

چون در مرحله چهارم همه عناصر مساوی شد لذا ادامه نمی‌دهیم.

* هرگاه در جدول تفاضلات تقسیم شده دوم تمامی عناصر در مرحله k ام با هم برابر باشند آنگاه چندجمله‌ای درون‌یاب از مرتبه k ام خواهد بود و دیگر نیاز نیست به مرحله k+1 را بررسی کنیم.

$$\Rightarrow P_5(x) = x^4 - 1$$

مثال ←

		مرتبه اول	مرتبه دوم
x_i	f_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$
x_0 0	-1	$f_0 = \frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	
x_1 1	0		$f_{012} = \frac{15-1}{2-0} = 7$
x_2 2	15	$f_{12} = \frac{15-0}{2-1} = 15$	
x_3 -1	0	$f_{23} = \frac{0-15}{-1-2} = 5$	$f_{123} = \frac{5-15}{-1-1} = 5$
x_4 -2	15	$f_{34} = \frac{15-0}{-2+1} = -15$	$f_{234} = \frac{-15-5}{-2-2} = 5$
x_5 5	624	$f_{45} = \frac{624-15}{5+2} = 87$	$f_{345} = \frac{87+15}{5+1} = 17$
x_6 -5	624	$f_{56} = \frac{624-624}{-5-5} = 0$	$f_{456} = \frac{0-87}{-5+2} = 29$

مرتبه سوم	مرتبه چهارم
$f_{0123} = \frac{5-7}{-1-0} = 2$	$f_{01234} = \frac{0-2}{-2-0} = 1$
$f_{1234} = \frac{5-5}{-2-1} = 0$	$f_{12345} = \frac{4-0}{5-1} = 1$
$f_{2345} = \frac{17-5}{5-2} = 4$	$f_{23456} = \frac{-3-4}{-5-2} = 1$
$f_{3456} = \frac{29-17}{-5+1} = -3$	

163

* در چه حالتی درونیابی لاگرانژ بهتر از درونیابی تفاضلات تقسیم شده نیوتن هستند؟

$$L_i = \frac{\prod_{k=0 \neq i}^{n} (x - x_k)}{\prod_{k=0, k\neq i}^{n} (x_i - x_k)}$$

براساس x_i ها هستند و ربطی به f_i ها ندارند

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

$$f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

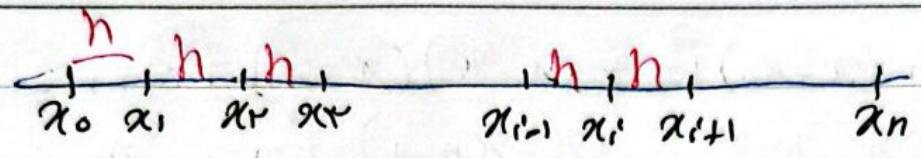
هم براساس x_i ها و هم براساس f_i ها.

فرض کنید مقادیر تابع عوض شود، مثلاً g:

x_i	f_i	g_i
x_0	f_0	g_0
x_1	f_1	g_1
x_2	f_2	g_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{k-1}	f_{k-1}	g_{k-1}
x_k	f_k	g_k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n	g_n

در روش لاگرانژ $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$ فقط کاربرد دارند و وقتی که مقادیر تابع تغییر کنند در نامها تفاوتی ایجاد نمی‌شود و می‌توان باز از آنها استفاده کرد ولی در تفاضلات تقسیم شده باید همه چیز از اول محاسبه شود و این محاسبات زیادی دارد. وگرنه اگر مقادیر تابع عوض شود روش تفاضل خیلی بهتر از لاگرانژ است.

فرض کنید فاصله همه مقادیر باهم برابر باشد. (مساوی الفاصله باشند)



$$x_{i-1} - x_i = h$$

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_0 + 2h$$

$$x_3 = x_0 + 3h$$

$$\vdots$$

$$x_i = x_0 + ih$$

$$f_{i-1,i} = \frac{\Delta f_{i-1}}{h}$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f_i}{h} \rightsquigarrow \text{مرتبه اول}$$

$$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i,i+1} - f_{i-1,i}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{\frac{\Delta f_i}{h} - \frac{\Delta f_{i-1}}{h}}{}$$

$$= \frac{\Delta f_i - \Delta f_{i-1}}{2h^2} \star = \frac{\Delta^2 f_{i-1}}{2h^2}$$

$$\Delta^2 f_{i-1} = \Delta(\Delta f_{i-1}) = \Delta(f_i - f_{i-1}) = \Delta f_i - \Delta f_{i-1} \star$$

$$E f_i = f_{i+1} \longrightarrow E f(x_i) = f(x_{i+1})$$

پیشرو $\Delta = E - 1 \longrightarrow \Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

پسرو (قابل) $\nabla = 1 - E^{-1} \longrightarrow \nabla f_i = f_i - f_{i-1}$

MRNOTE

ادامه

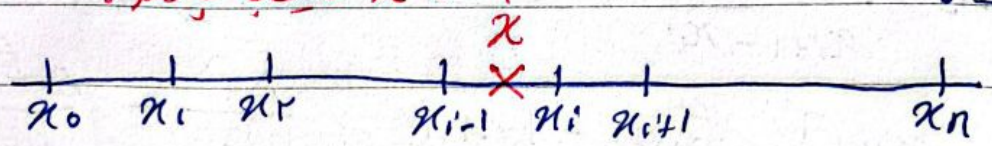
$$P_n(x) = f_0 + (x-x_0) f_{01} + (x-x_0)(x-x_1) f_{012} + \cdots +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) f_{012\cdots n}$$

$$f_{01} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{h}$$

$$f_{012} = \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$$

$$f_{0123} = \frac{\Delta^3 f_0}{3 \times 2 h^3} \quad \cdots \quad f_{012\cdots n} = \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}$$

فرض کنید: x اینجا باشد. $\leftarrow$



$$x_i = x_0 + ih \Rightarrow x_i - x_0 = ih$$

$$x = x_0 + sh \Rightarrow x - x_0 = sh \rightarrow$$

s در حالت کلی یک عدد اعشاری است.

$$x - x_i = (s-i)h$$

اگر طبیعی باشد روی یکی از نقاط گرهی می‌افتد

$$= f_0 + s\cancel{h} \times \frac{\Delta f_0}{\cancel{h}} + (s\cancel{h})(s\cancel{h}-1)h \times \frac{\Delta^2 f_0}{2\cancel{h^2}}$$

$$+ \cdots + s\cancel{h}(s-1)\cancel{h}(s-2)\cancel{h}\cdots(s-n+1)\cancel{h} \times \frac{\Delta^n f_0}{n!\, \cancel{h^n}}$$

$$= f_0 + s\Delta f_0 + (s)(s-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2} + s(s-1)(s-2)\frac{\Delta^3 f_0}{3 \times 2}$$

MRNOTE

$$+ \cdots + \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{s}{r} \Delta^r f_0 \qquad \binom{s}{r} = \frac{s!}{r!(s-r)!}$$

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \qquad \Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

مثال ←

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	1	2		
0	3	-1	-3	
1	2	4	5	8
2	6			

پیشرو →

هیچکس
(نابلد)

$$P_3(x) = 1 + s\times 2 + \frac{s(s-1)}{2}(-3) + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}(8)$$

$$= 1 + 2s - \frac{3}{2}(s^2 - s) + \frac{4}{3}(s^3 - 3s^2 + 2s)$$

$$= \frac{4}{3}s^3 + \frac{11}{2}s^2 + \frac{37}{6}s + 1 \xrightarrow{*} \frac{4}{3}(x+1)^3 + \frac{11}{2}(x+1)^2 + \frac{37}{6}(x+1) + 1$$

$$= \frac{8x^3 + 57x^2 + 127x + 48}{6}$$

$$x = x_0 + sh$$

$$x = -1 + s \rightarrow s = x + 1$$

MRNOTE

اگر طبق نامبا پیش برویم:

$$P_n(x)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{-s}{r}\nabla^r f_n$$

$$=f_n+s\nabla f_n+\frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_n+\frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 f_n+\frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

برای مثال قبل:

$$P_3(x)=6+s\times 4+\frac{s(s+1)}{2}\times 5+\frac{s(s+1)(s+2)}{6}\times 8$$

$$x=x_0+sh \rightarrow x=2+s \rightarrow s=x-2 \star$$

$$6+(x-2)(4)+\frac{(x-2)(x-1)}{2}\times 5+\frac{(x-2)(x-1)x}{6}\times 1$$

$$6+(4x-8)+\frac{(x^2-3x+2)}{2}\times 5+\frac{(x^2-3x+2)}{6}$$

$$=6+(4x-8)+\frac{5x^2-15x+10}{2}+\frac{x^2-3x+2}{6}$$

$$=6+\cancel{4x}+\frac{5}{2}x^2-\cancel{\frac{15}{2}x}+5+\frac{1}{6}x^2-\cancel{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{16}{6}x^2-4x+11+\frac{1}{3}$$

مثال ← برای تابع جدولی زیر چند جمله‌ای درونیاب را به روش تفاضلات بدست آورید.

x_i	f_i	مرتبه اول Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-۳	-۲۵			
		+۲۶		
-۱	۱		-۲۴	
		۲		۴۸
۱	۳		۲۴	
		۲۶		
۳	۳۹			

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{s}{r} \Delta^r f_0$$

$x = x_0 + sh \qquad h = ۲,\ x_0 = -۳$

$\Rightarrow x = -۳ + ۲s \Rightarrow$

$$\boxed{s = \frac{x+۳}{۲}}$$

$$P_۳(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{۲}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-۲)}{۳!}\Delta^3 f_0$$

$$= -۲۵ + \left(\frac{x+۳}{۲}\right)(۲۶) + \left(\frac{x+۳}{۲}\right)\left(\frac{x+1}{۲}\right)\left(\frac{-۲۴}{۲}\right)$$

$$+ \left(\frac{x+۳}{۲}\right)\left(\frac{x+1}{۲}\right)\left(\frac{x-1}{۲}\right)\left(\frac{۴۸}{۶}\right) = x^۳ + ۲$$

تقریب $f(-۲)$ ← $f(-۲) = -۸ + ۲ = -۶$

می‌توانیم بدون بدست آوردن چند جمله‌ای درونیاب $f(-۲)$ را محاسبه کنیم:

$$x = -۲ \Rightarrow s = \frac{-۲+۳}{۲} = \frac{1}{۲}$$

$$f(-۲) \cong P_۳(-۲) = -۲۵ + \frac{1}{۲}(۲۶) + \frac{1}{۲}\left(\frac{1}{۲}-1\right) \times \frac{-۲۴}{۲}$$

$$+ \left(\frac{1}{۲}\right)\left(\frac{1}{۲}-1\right)\left(\frac{1}{۲}-۲\right) \times \frac{۴۸}{۶} = -۶$$

MRNOTE

چون معمولا نقاط گرهی به شکل اولیه هستند.

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$ Sort کردن بهتر است

فرض کنیم به این جدول نقطه گرهی $(5,2)$ را اضافه می کنیم.

چون نقطه $(5,2)$ در این $P_3(x)$ صدق می کند: $P_3(5) = f(5)$

چند جمله ای درون یاب همان قبلی می شود.

در صورتی که صدق نکند باید از اول محاسبات را انجام بدهیم. چون اضافه شدن ۵ باعث بهم خوردن متساوی الفاصله بودن می شود ولذا باید از تفاضلات تقسیم شده نیوتون استفاده کنیم:

x_i ها می توانند Sort باشند ولی لازم نیست.

x_i	f_i	$f_{i,i+1}$	$f_{i,i+1,i+2}$	$f_{i,i+1,i+2,i+3}$
x_0 -3	-25	$\frac{26}{-1-(-3)} = 13$	$\frac{-12}{3} = -4$	$\frac{+4}{4} = 1$
x_1 -1	1	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{0}{2} = 0$	$\frac{4}{4} = 1$
x_2 0	2	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{12}{3} = 4$	
x_3 1	3	13		
x_4 3	29			

$$P_4 = f_0 + (x-x_0) f_{01} + (x-x_0)(x-x_1) f_{012} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f_{0123} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) f_{01234} = -25 + (x+3)(13) + (x+3)(x+1)(-4) + (x+3)(x+1)x(1) = -25 + 13x + 39 + (x^2+4x+3)(-4) + (x^3+4x^2+3x) = -25 + \cancel{13x} + 39 - \cancel{4x^2} - \cancel{16x} - 12 + x^3 + \cancel{4x^2} + \cancel{3x} = x^3 + 2$$

ف ضلات تقسیم شده نیوتون برای دو مثال قبل:

x_i	f_i	$f_{i,i+1}$	$f_{i,i+1,i+2}$	$f_{i,i+1,i+2,i+3}$
$x_0=-3$	-25	$\frac{26}{-1-(-3)}=13$	$\frac{1-13}{1-(-3)}=-3$	$\frac{3-(-3)}{3-(-3)}=1$
$x_1=-1$	1	$\frac{3-1}{1-(-1)}=1$	$\frac{13-1}{3-(-1)}=3$	$\frac{4-3}{5-(-1)}=1$
$x_2=1$	3	$\frac{29-3}{3-1}=13$	$\frac{9-13}{5-1}=4$	
$x_3=3$	29	$\frac{2-29}{5-3}=9$		
$x_4=5$	2			

$$P_4 = f_0 + (x-x_0) f_{01} + (x-x_0)(x-x_1) f_{012} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f_{0123} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) f_{01234}$$

$$= -25 + (x+3)(13) + (x+3)(x+1)(-3) + (x+3)(x+1)(x-1)\times 1 = x^3+2$$

«محاسبه‌ی کران بالای خطا»

مثلاً ف چندجمله‌ای درون‌یاب با خود تابع.

$$|f(x) - P_n(x)| = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

ξ رکی $\quad |f^{(n+1)}(\xi)| \le M \Longrightarrow \le \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\times\frac{M}{(n+1)!}$

MRNOTE

«72»

x_i	f_i
x_0	f_0
x_1	f_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n

نکته: $f(x) \cong P_n(x)$

نقاط گرهی ← $x_0 < x_n$ $[x_0, x_n]$

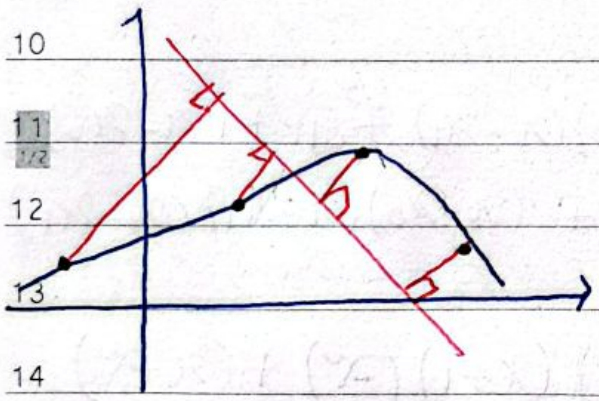
درونیاب ← $x \in [x_0, x_n]$

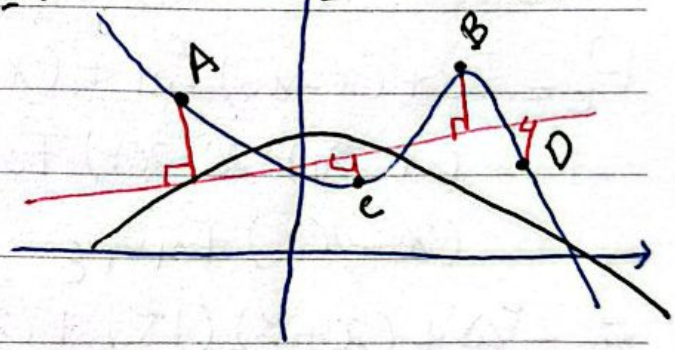
برون یاب ← $x \notin [x_0, x_n]$ (x همواره نقاط گرهی نباشد)

* هرگاه $P_n(x_i) = f(x_i)$ آنگاه به $P_n(x_i)$ چند جمله‌ای درون یاب گفته می‌شود. (دقیقاً از نقاط گرهی عبور کند)

* $|P_n(x_i) - f(x_i)|$ حداقل مقدار ممکن باشد ← چند جمله‌ای درون یاب نیست.

A و B روی منحنی که افتاد ولی C و D خیلی نیفتاده. تقریب زدیم.





$P_1(x)$ ← خط کمترین مربعات

$P_2(x)$ ← سهمی کمترین مربعات

$P_n(x)$ ← سهمی کمترین مقدار

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

می‌خواهیم $P_n(x)$ را پیدا کنیم که

$$\min |f(x) - P_n(x)|$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial i}\right)_{x_i} - \left(P_n(x)\right)'_{x_i} = 0$$

مثال ← خط کمترین مربعات برای جدول زیر:

x_i	f_i
۱	۲
۳	۱۰
-۲	۵
۴	۱۷

$P_1(x)=a_0+a_1x \longrightarrow a_1, a_0$ باید مشخص شود

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} 1 & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_i \\ \sum_{i=1}^{m} f_i x_i \end{bmatrix}$$

m نقطه کرهی

	x_i	f_i	x_i^2	$f_i x_i$
	۱	۲	۱	۲
	۳	۱۰	۹	۳۰
	-۲	۵	۴	-۱۰
	۴	۱۷	۱۶	۶۸
۴	۶	۳۴	۳۰	۹۰

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ ۶ & ۳۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۴ \\ ۹۰ \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۴ & ۶ & ۳۴ \\ ۶ & ۳۰ & ۹۰ \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} ۴ & ۶ & ۳۴ \\ -۱۴ & ۰ & -۸۰ \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{۸۰}{۱۴}, \quad ۶a_1 = ۳۴ - ۴\left(\frac{۸۰}{۱۴}\right) = \frac{۷۸}{۴۲}$$

$$\Rightarrow P_1(x) = \frac{۸۰}{۱۴} + \frac{۷۸}{۴۲}x$$

فرمول کلی در ادامه ←

MRNOTE

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ← $n+1$ مجهول داریم

m نقطه گرهی

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} 1 & \sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_i \\ \sum_{i=1}^{m} f_i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} f_i x_i^n \end{bmatrix}$$

$$X \cdot a = F$$

F ماتریس

X ماتریس

a بردار

مثال ←

$\sum_{k=1}^{8} x_k = 20 \quad \sum_{k=1}^{8} y_k = 37 \quad \sum_{k=1}^{8} x_k^2 = 92 \quad \sum_{k=1}^{8} x_k y_k = 25$

$a = ?,\ b = ?\ ,\ y = ax + b$

$$\begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 20 & 92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۸ & ۲۰ & ۳۷ \\ ۲۰ & ۹۲ & ۲۵ \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۲٫۵ & ۴٫۶۲۵ \\ ۲۰ & ۹۲ & ۲۵ \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۲٫۵ & ۴٫۶۲۵ \\ ۰ & ۴۲ & -۶۷٫۵ \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۲٫۵ & ۴٫۶۲۵ \\ ۰ & ۱ & -۱٫۶۰۷ \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۰ & ۸٫۶۴ \\ ۰ & ۱ & -۱٫۶۰۷ \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} a = -۱٫۶۰۷ \\ b = ۸٫۶۴ \end{array}$$

مثال ← منحنی $y = ax^۲$ را به نقاط زیر برازش کنید.

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^۲$	$x_i^۳$	$x_i^۴$	$x_i^۲ f_i$
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱	-۱	-۱	۱	۱	۱	-۱
-۱	۲	-۲	۱	-۱	۱	۲
۰	۲	-۳	۲	۰	۲	۱

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow$$

MRNOTE

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$2b = -3 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

$$3c + 2a = 1$$

$$c = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$ b باید صفر شود با توجه به صورت سوال ولی در جدول نمی‌توانند صدق کند.

مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

$$f'(x)\Big|_{x=a} = ?$$

$$f(x) \cong P_n(x)$$

$$f'(x) \cong P_n'(x)$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$f'(x_0) = P_n'(x_0) = a_1 + 2a_2 x_0 + \dots$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i$$

در مسائل عملی از مشتق استفاده می‌شود چون باعث کاهش ولز دست رفتن اطلاعاتی می‌شود.

$$P_n'(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i'(x) f_i$$

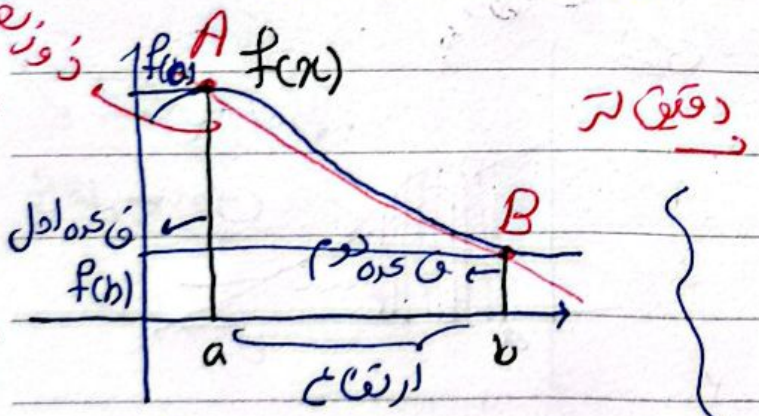
$$\xrightarrow[\text{تیلور}]{\text{بسط}} f(x) = f(a) + (x-a) f'(x) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(x) + \cdots$$

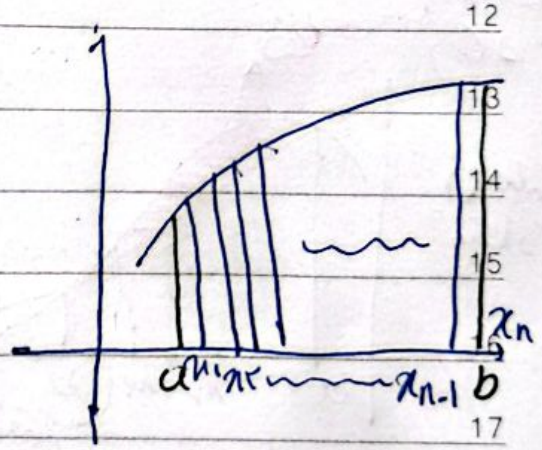
$$+ \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

$$\xrightarrow[a=0]{\text{بسط مکلارن}} f(x) = f(0) + x f'(x) + \cdots$$

* از این مبحث در امتحان سؤال می آید (مبحث مشتق گیری)
و انتگرال گیری عددی،
یا $f(x)$ نداریم یا در صورت داشتن $f(x)$. انتگرال گیری سخت و
گیر هزینه است.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\,dx$$





$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{مجموع دو قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2}$$

$$\int_a^b f\,dx = \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2}$$

قاعده انتگرال گیری ذوزنقه ساده

به بی نهایت سوق دادن (حد)
← تبدیل Σ به انتگرال

تبدیل بازه $[a,b]$ به n
زیر بازه . به $n+1$ نقطه گرمی نیاز
$b=x_n$ ، $a=x_0$

استفاده از قاعده ذوزنقه برای
هر کدام از زیربازه ها ←

مساحت ذوزنقه = مساحت مستطیل

MRNOTE

زیر بازه ها باید با فاصله مساوی باشند. در صورتی که فاصله مساوی نباشد و کوچک و بزرگ داشته باشیم ممکن است خطای محاسباتی بسیار بالا برود.

اگر طول همه زیربازه ها را h قرار دهیم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_0+f_1) + \frac{h}{2}(f_1+f_2)$$

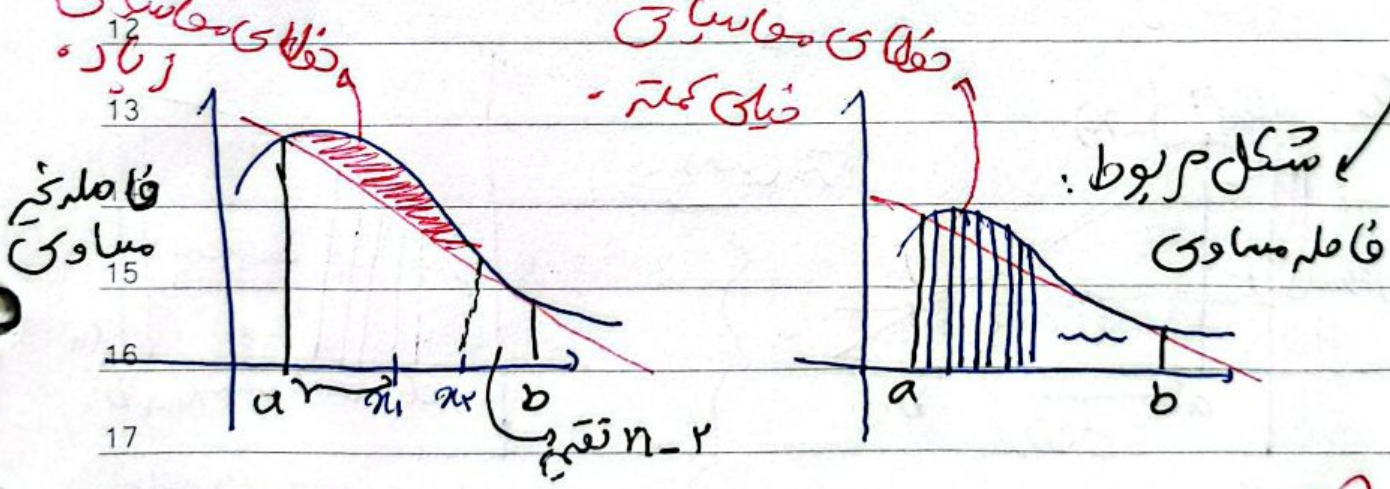
$$+\frac{h}{2}(f_2+f_3) + \cdots + \frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n)$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f_i+f_{i+1}) = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(f_{i-1}+f_i)$$

$$= \frac{h}{2}f_0 + h\sum_{i=1}^{n-1} f_i + \frac{h}{2}f_n = T_n$$

* به این قاعده، قاعده ذوزنقه مرکب گفته می شود.

شکل مربوط:



مثال:

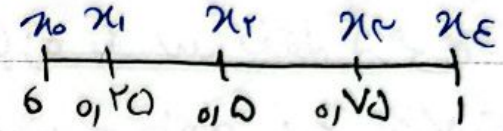
$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx \underset{\text{ساده}}{\overset{\text{ذوزنقه}}{\simeq}} \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(f(a)+f(b)\right) = \frac{1-0}{2}(1+0{,}18) = \frac{1{,}18}{2} = 0{,}59$$

$a=0,\ b=1,\ f(0) = \frac{e^0}{1+0^2} = 1$

$f(1) = \frac{e^{-1}}{1+1^2} = \frac{1}{2e} = 0{,}18$

ذوزنقه مرکب $\longrightarrow h = 0{,}25 \quad \frac{(b-a)}{n} = h \quad , \quad n = \frac{b-a}{h} = \frac{1.0}{0{,}25} = 4$

$$T_4 = \frac{h}{2} f_0 + h(f_1 + f_2 + f_3) + \frac{h}{2} f_4$$



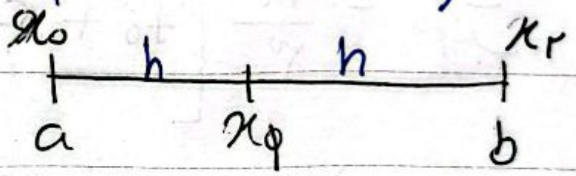
$$= \frac{0{,}25}{2} f(0) + 0{,}25\big(f(0{,}25) + f(0{,}5) + f(0{,}75)\big) + \frac{0{,}25}{2} f(1)$$

$$= \frac{0{,}25}{2} + 0{,}25(0{,}8413 + 0{,}8926 + 0{,}9734) + \frac{0{,}25}{2}$$

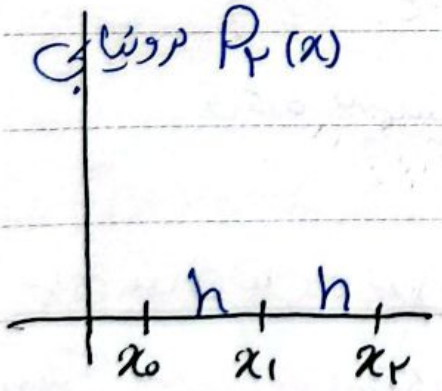
نکته: (قاعده سیمپسون)

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b P_n(x)\,dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

تقسیم به دو زیر بازه



چون فاصله‌ها یکسان است می‌توانیم از تفاضلات متناهی استفاده کنیم.



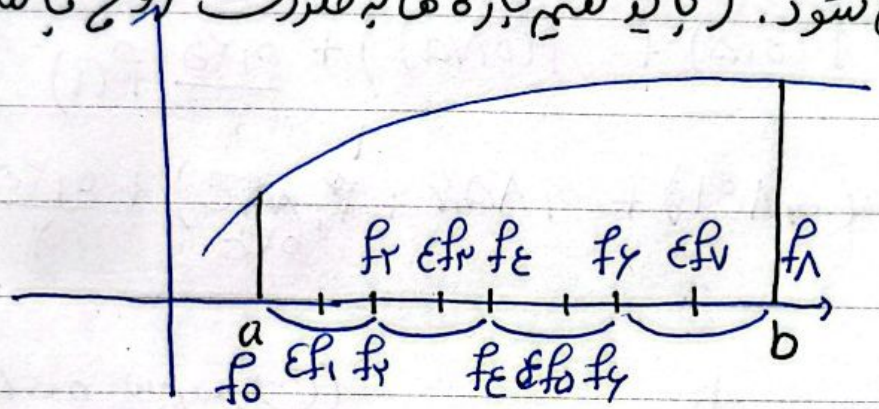
x_i	f_i		
x_0	f_0		
x_1	f_1	Δf_0	
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$

$$P_2(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0$$

$$P_2(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{h}(f_1 - f_0) + \frac{x-x_0}{h} \times \frac{x-x_1}{2h}(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

قاعده سیمپسون ساده

* قاعده سیمپسون برای حداقل دو زیربازه یا سه نقطه گرهی استفاده می‌شود. (باید تعداد بازه‌ها به صورت زوج باشد، شکل زیر)



$$S_{\text{مرکب}} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\sum_{i=0}^{n-1} f_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + f_{2n}\right]$$

$i = 0, 1, 2, 3 \to f_1, f_3, f_5, f_7$

$i = 1, 2, 3 \to f_2, f_4, f_6$

قاعده سیمپسون مرکب

برای مثال قبل: چون $h = 0.125$ و به ۴ بازه تقسیم می‌شود می‌توان از روش سیمپسون استفاده کرد:

$$\frac{0.125}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right]$$

MRNOTE

روش ذوزنقه‌ای $x \in [x_i, x_{i+1}] \rightarrow T = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$ ذوزنقه‌ای ساده

$[a,b] = [x_0, x_n]$; $T_0 = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$ ذوزنقه‌ای مرکب

T کل

خطای انتگرال‌گیری

$$|e| = \frac{-h^3}{12} f''(\xi_i) \quad O(h^3)$$ ساده

$|e| \le \frac{h^3}{12} M$; $|f''(x)| \le M$ $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$E = \frac{-h^2}{12}(b-a) f''(\xi) \quad O(h^2)$$ مرکب

$\xi \in [a,b]$

کران بالا $|E| \le \frac{h^2}{12}(b-a) M$; $|f''(x)| \le M$

$x \in [a,b]$

مثال)

$$\int_0^1 (3x^2+1)\,dx$$

$$e = \frac{-h^3}{12} f''(\xi)$$

$\rightarrow f(x) = 3x^2+1$

$\rightarrow f'(x) = 6x$

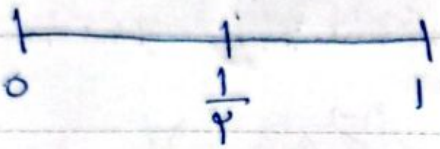
$\rightarrow f''(x) = 6$

$h = b-a = 1-0 = 1$

$|e| = \left|\frac{-1}{12} \times 6\right| = \frac{1}{2}$

$T = \frac{1}{2}[1+4] = \frac{5}{2}$ $\quad 2 \le \int_0^1 (3x^2+1)\,dx \le 3$

$\int_0^1 (3x^2+1)\,dx = x^3+x\Big|_0^1 = 2$ $\rightarrow$ «Bl» $\rightarrow$ حداکثر خطای مرتکب شده $= \frac{1}{2}$



$$T_0 = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + f_2\right)$$

$$= \frac{0.5}{2}\left(1 + \frac{14}{4} + 4\right) = \frac{17}{8}$$

$$= 2.125$$

$$f_0 = 3(0)^2 + 1 = 1$$

$$f_1 = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{7}{4}$$

$$f_2 = f(1) = 4 \qquad h = 0.5$$

$$|E| = \left| -\frac{(0.5)^2}{12}(1-0) \times 6 \right| = 0.125$$

* قاعده ذوزنقه‌ای برای معادله‌هایی با حداکثر درجه ۲ (چندجمله‌ای) دقیق هستند. چون مشتق دوم صفر خواهد شد و در ادامه هم e و هم E صفر خواهند شد.

* طول گام برای ذوزنقه‌ای ساده همیشه مشخص است ← طول بازه.

مثال ←

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \qquad |E| \le 0.0001$$

به روش ذوزنقه‌ای ← حداکثر گام برش (طول گام) چقدر می‌تواند باشد؟ از ذوزنقه‌ای مرکب استفاده می‌کنیم. $|f''(x)| \le M$

$$f(x) = \cos x \qquad |f''(x)| \le 1$$

$$f'(x) = -\sin x \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$|E| = \left|\frac{-h^2}{12}(b-a)f''(x)\right| \le \left|\frac{-h^2}{12}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\times 1\right|$$

$$\le 0/0001 \longrightarrow \frac{h^2}{12}\times\frac{\pi}{2} \le 0/0001 \longrightarrow h^2 \le \frac{0/0001}{\pi}\times 24$$

$$\pi \simeq 3/14 \longrightarrow h^2 \le 0/0007 \longrightarrow h \le \sqrt{2/39} = 0/028$$

حداکثر h $\longrightarrow$ حداقل n

$$nh = b-a \longrightarrow n \ge \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{0/028} = 56/1$$

$\longrightarrow$ n حداقل 57 می‌تواند باشد

$n = 57$

روش سیمپسون $\quad x \in [x_i, x_{i+2}] \longrightarrow S = \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})$

$$[a,b] = [x_0, x_{2n}] \quad S_T = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=0}^{n-1} f_{2i} + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + f_{2n}\right)$$

$$e = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i) \qquad E = \frac{-h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi)$$

$$\xi_i \in [x_i, x_{i+2}] \qquad \xi \in [a,b]$$

* روش سیمپسون برای انتگرال‌گیری از چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه سه دقیق هستش. مثال ← $\int_0^1 (3x^2+1)\,dx$

"83"

$$\int_0^1 (3x^2+1)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right]$$

$$\frac{b-a}{2} = \frac{1-0}{2} = 0.5 \qquad = \frac{0.5}{3}\left[1 + 4\times 1.75 + 4\right]$$

$$f_0 = f(0) = 1 \qquad = \frac{0.5}{3}\left[12\right] = 2$$

$$f_1 = f(0.5) = \frac{7}{4} = 1.75$$

مقدار دقیق انتگرال

$$f_2 = f(1) = 4$$

مثال):

	زیربازه ۱		زیربازه ۲		زیربازه ۳		زیربازه ۴	
x	0		0.25		0.5		0.75	1
$f(x)$	0	0.063		0.249		0.563		1
	f_0	f_1		f_2		f_3		f_4

برای این تابع جدولی $\int_0^1 f(x)\,dx = ?$ به روش سیمپسون

سیمپسون مرکب:

$$S = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right]$$

$$= \frac{0.25}{3}\left[0 + 4(0.063) + 2(0.249) + 4(0.563) + 1\right]$$

$$= 0.3335$$

مثال) $\int_2^7 \frac{dx}{x}$ تعداد تقسیمات لازم به روش انتگرال گیری ذوزنقه‌ای و سیمپسون با دقت 5×10^{-3} را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \longrightarrow f'(x)=-x^{-2} \longrightarrow f''(x)=2x^{-3}$$

$$\longrightarrow f'''(x)=-6x^{-4} \longrightarrow f^{(4)}(x)=24x^{-5}$$

سیمپسون مرکب $\rightarrow |E|=\frac{-h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(x)$

$$\leq \left|\frac{-h^4}{180}(\overbrace{7-2}^{5})\times 0{,}75\right| = \left|\frac{h^4}{36}\times 0{,}75\right| \leq h^4\times 0{,}03$$

$$|f^{(4)}(x)| = |24x^{-5}| \leq |24\times 2^{-5}| = 0{,}75$$

$$\leq 5\times 10^{-3}$$

$$h^4 \leq 5\times 10^{-3}\times\frac{100}{2}=0{,}25$$

$$\longrightarrow h^4\leq 0{,}25 \longrightarrow h\leq 0{,}71$$

$$n\geq\frac{b-a}{h}=\frac{5}{0{,}7}=7{,}14$$

$$\boxed{\longrightarrow \quad n=8 \text{ حداقل}}$$

*n حتما باید زوج باشد

روش ذوزنقه‌ای $\longrightarrow |E|=\left|\frac{-h^2}{12}(b-a)f''(x)\right|$

$$=\left|\frac{-h^2}{12}(7-2)\times 0{,}25\right| = \left|\frac{-h^2}{0{,}48}\times 0{,}25\right| \leq h^2\times 0{,}01$$

$$|f''(x)| = |2x^{-3}| \leq |2\times 2^{-3}| = 0{,}25$$

«65»

$$h^2 \times 0{,}11 \le 5 \times 10^{-3} \rightarrow h^2 \le \frac{5}{0{,}11} \times 10^{-3} \Rightarrow h^2 \le 0{,}45 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow h \le 0{,}21 \rightarrow n \ge \frac{\overset{=5}{b-a}}{0{,}21} = 23{,}8$$

$\boxed{n \text{ حداقل مساوی با } 24}$