اثبات: هر هیوریستیک سازگار، قابل قبول است

صورت مسئله

یک هیوریستیک سازگار است اگر و تنها اگر برای هر گره n و هر جانشین n' از n که با اقدام a تولید می‌شود، داشته باشیم:

$$h(n) \leq c(n, a, n') + h(n')$$

ثابت کنید که یک هیوریستیک سازگار همواره قابل قبول (Admissible) است.

تعاریف

هیوریستیک سازگار :(Consistent) یک تابع هیوریستیک h سازگار است اگر برای هر گره n و جانشین آن n' (تولید شده توسط اقدام a):

$$h(n) \leq c(n, a, n') + h(n') \tag{۱}$$

هیوریستیک قابل قبول :(Admissible) یک تابع هیوریستیک h قابل قبول است اگر هرگز هزینه رسیدن به هدف را بیشتر از مقدار واقعی تخمین نزند. یعنی برای هر گره n:

$$h(n) \leq h^*(n) \tag{۲}$$

که در آن $h^*(n)$ کمترین هزینه واقعی از گره n تا هدف است.

اثبات

برای اثبات این قضیه از استقرای ریاضی روی تعداد گام‌ها (گره‌های) k در کوتاه‌ترین مسیر از گره n تا هدف استفاده می‌کنیم.

پایه استقرا ($k = 1$):

فرض کنید n' گره هدف باشد. در این صورت n تنها 1 گام با هدف فاصله دارد. طبق ویژگی سازگاری:

$$h(n) \leq c(n, a, n') + h(n') \tag{۳}$$

چون n' گره هدف است، هزینه رسیدن از هدف به خودش صفر است، در نتیجه $h(n') = 0$. پس نامساوی به صورت زیر در می‌آید:

$$h(n) \leq c(n, a, n') \tag{۴}$$

از آنجا که n' خود هدف است، هزینه واقعی و بهینه $h^*(n)$ دقیقاً برابر با همان هزینه گام یعنی $c(n, a, n')$ است. بنابراین:

$$h(n) \leq h^*(n) \tag{۵}$$

پس پایه استقرا برقرار است.

فرض استقرا:

فرض کنید برای گره دلخواه n' که در مسیر بهینه دقیقاً k گام با هدف فاصله دارد، هیوریستیک قابل قبول باشد. یعنی:

$$h(n') \leq h^*(n') \tag{۶}$$

گام استقرا ($k+1$ گام):
گره n را در نظر بگیرید که $k+1$ گام با هدف فاصله دارد. فرض کنید جانشین آن در مسیر بهینه به سمت هدف، گره n' باشد. پس n' دقیقاً k گام با هدف فاصله دارد.
طبق خاصیت سازگاری تابع هیوریستیک داریم:

$$h(n) \leq c(n, a, n') + h(n') \tag{۷}$$

با استفاده از فرض استقرا ($h(n') \leq h^*(n')$) می‌توانیم نامساوی را جایگذاری کنیم:

$$h(n) \leq c(n, a, n') + h^*(n') \tag{۸}$$

چون گره n' روی کوتاه‌ترین مسیر از n به هدف قرار دارد، هزینه واقعی و دقیق از n تا هدف (یعنی $h^*(n)$) برابر است با مجموع هزینه گام از n به n' و هزینه واقعی از n' تا هدف. به زبان ریاضی:

$$h^*(n) = c(n, a, n') + h^*(n') \tag{۹}$$

با قرار دادن این عبارت در نامساوی بالا نتیجه می‌گیریم:

$$h(n) \leq h^*(n) \tag{۱۰}$$

این نشان می‌دهد که $h(n)$ برای گرهی در فاصله $k+1$ گام از هدف نیز قابل قبول است.

نتیجه‌گیری

بر اساس اصل استقرای ریاضی، رابطه $h(n) \leq h^*(n)$ برای تمام گره‌های n صادق است. بنابراین، هر هیوریستیک سازگار، قطعا یک هیوریستیک قابل قبول (Admissible) نیز هست.