تمرین هفتم درس شبیه‌سازی کامپیوتری

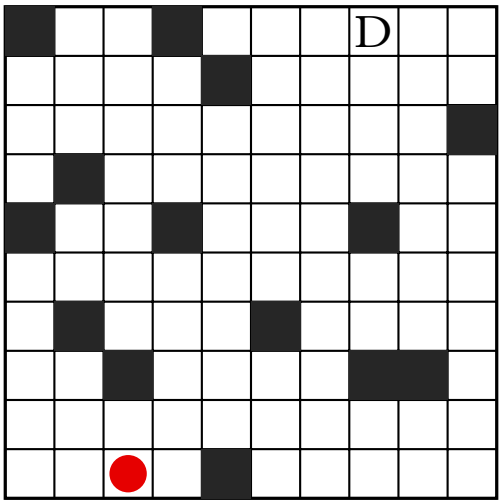
۱ صورت مسئله و شرح شبیه‌سازی

در این تمرین، رفتار یک مهره در یک محیط شبکه‌ای 10×10 شطرنجی مدلسازی می‌شود. قوانین حرکت مهره به شرح زیر است:

- فضای حالت: محیط شامل خانه‌های آزاد (سفید) و موانع غیرقابل عبور (خانه‌های سیاه) است.
- نقطه آغاز و هدف: مهره از نقطه مبدأ (مکان اولیه مهره قرمز در پایین شبکه) حرکت خود را آغاز کرده و هدف رسیدن به خانه مقصد (D) در بالای شبکه است.
- جهت‌های حرکت: در هر گام، یکی از چهار جهت بالا، پایین، چپ و راست با احتمال کاملاً برابر و یکنواخت ($P = 0.25$) انتخاب می‌شود.
- شرایط برخورد و شکست: اگر گام انتخابی منجر به خروج از مرزهای شبکه یا ورود به خانه سیاه شود، حرکت لغو شده (مهره در خانه خود باقی می‌ماند) و یک واحد به متغیر شکست (B) اضافه می‌شود.
- شرایط حرکت موفق: اگر گام انتخابی به خانه سفید مجاز ختم شود، مهره جابجا شده و یک واحد به متغیر موفقیت (A) اضافه می‌شود.

۲ نمودار و شکل شبکه شبیه‌سازی Grid Diagram

شکل زیر نمایی دقیق از شبکه 10×10، موقعیت موانع سیاه، مهره قرمز و مقصد D است:



شکل ۱: شبکه 10×10 شبیه‌سازی همراه با موانع سیاه، مبدأ (مهره قرمز) و مقصد (D)

۳ روش حل و روند الگوریتم

الگوریتم شبیه‌سازی شامل یک حلقه اصلی است که تا زمان رسیدن به مقصد ادامه می‌یابد:

۱. مقداردهی اولیه متغیرها: $A \leftarrow 0$ و $B \leftarrow 0$ و مختصات اولیه مهره $(r, c) \leftarrow (10, 3)$.

۲. تولید جهت تصادفی $dx, dy \in \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$ با احتمال یکنواخت.

۳. محاسبه مختصات جدید: $(r', c') \leftarrow (r + dx, c + dy)$.

۴. بررسی اعتبار گام:

- خروج از مرز: اگر (r', c') خارج از محدوده شبکه باشد:

$$B \leftarrow B + 1$$

- برخورد با مانع: اگر خانه (r', c') مانع سیاه باشد:

$$B \leftarrow B + 1$$

- حرکت موفق: در غیر این صورت:

$$A \leftarrow A + 1 \quad \text{و} \quad (r, c) \leftarrow (r', c')$$

۵. اگر (r, c) معادل خانه D باشد، پایان حلقه؛ در غیر این صورت بازگشت به گام ۲.

۴ تحلیل دنباله $\frac{A}{A+B}$

سوال: آیا دنباله تصادفی $\frac{A}{A+B}$ یکنواخت است یا غیریکنواخت؟
پاسخ: این دنباله غیریکنواخت (Non-uniform) است.

دلایل غیریکنواخت بودن:

۱. وابستگی شدیدی به موقعیت فیزیکی (State-Dependency): احتمال رخ دادن شکست (B) یا موفقیت (A) در هر گام به موقعیت فعلی مهره بستگی دارد. در مرکز فضاهای باز احتمال شکست صفر است، اما در کناره‌ها و مجاورت موانع سیاه، احتمال شکست افزایش می‌یابد.

۲. تغییر نرخ موفقیت لحظه‌ای: نرخ پذیرش حرکت در طول زمان ثابت نیست و با حرکت مهره بین نواحی متراکم (پر مانع) و نواحی باز تغییر می‌کند.

۵ کاربردهای شبیه‌سازی در علوم و مهندسی

مدل‌سازی گام‌زنی تصادفی همراه با موانع و محاسبه نرخ پذیرش $\frac{A}{A+B}$ کاربردهای وسیعی دارد:

- الگوریتم‌های زنجیره مارکوف مونت‌کارلو (MCMC): در روش‌هایی مانند *متروپولیس_هیستینگز*، نرخ پذیرش/رد پیشنهادات دقیقاً معادل نرخ $A/(A+B)$ است.
- شبیه‌سازی نفوذ ذرات (Particle Diffusion): بررسی حرکت ذرات در محیط‌های متخلخل یا دارای موانع فیزیکی.
- مسیریابی رباتیک تحت احتیاط: تحلیل میزان سعی و خطای ربات برای پیمایش در محیط‌های ناشناخته.
- ارزیابی قابلیت اطمینان شبکه (Network Reliability): مدل‌سازی حرکت بسته‌های داده در شبکه‌های دارای گره‌های مسدود یا خرابی لینک‌ها.