فرض کنید {مجموعه تمامی مضارب صحیح ۴} = $4Z$. الف) این مجموعه با جمع و ضرب معمولی اعداد صحیح یک حلقه است.آیا $< 8 >$ یک ایده‌آل ماکسیمال از $4Z$ است؟

ب) $\frac{4Z}{<8>}$ میدان است؟ چرا؟

قسمت الف) در ابتدا ایده‌آل ماکسیمال را تعریف می‌کنیم: I ایده‌آل ماکسیمالی از حلقه‌ای چون R است اگر هیچ ایده‌آل شامل I و نامساوی با R وجود نداشته باشد. به عبارتی غیر از خود حلقه، ایده‌آل دیگری وجود نداشته باشد که I زیرمجموعه آن باشد.
حال با توجه به تعریف ایده‌آل‌های ماکسیمال به ادامه حل می‌پردازیم:

$$4Z = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$$
$$< 8 >= \{..., -16, -8, 0, 8, 16, ...\}$$

بدیهی است که $< 8 >$ ایده‌آل است و به غیر از خود حلقه، ایده‌آل دیگری وجود ندارد که زیرمجموعه آن باشد. لذا $< 8 >$ یک ایده‌آل ماکسیمال است.

قسمت ب) قضیه‌ای داریم که می‌گوید: R یک حلقه یکدار وI ایده‌آل ماکسیمال از آن باشد، آنگاه حلقه تقسیم $\frac{R}{I}$ یک میدان است.
مشخص است که $4Z$ یکدار نیست، چون دارای عضو خنثی عمل ضرب که1 می باشد نیست، لذا در این قضیه صدق نمی‌کند و $\frac{4Z}{<8>}$ یک میدان نیست.حتی می‌توان این حلقه خارج قسمتی رو تعریف کرد و با دو عملی که می‌شناسیم، آن را مورد بررسی قرار داد:

$$\forall (a+I), (b+I) \in \frac{R}{I} \rightarrow (a+I) + (b+I) = (a+b) + I$$

$$\forall (a+I), (b+I) \in \frac{R}{I} \rightarrow (a+I) * (b+I) = (a*b) + I$$

$$4Z = \{< 8 >, 4+ < 8 >\}$$

حال به بررسی آبلی بودن عمل جمع و ضرب می‌پردازیم:

عمل جمع:

بسته بودن:

$$\forall (a+ < 8 >), (b+ < 8 >) \in \frac{4Z}{<8>} \rightarrow (a+ < 8 >) + (b+ < 8 >) = (a+b)+ < 8 > \in \frac{4Z}{<8>}$$

شرکت پذیری: چون عمل جمع در اعداد صحیح شرکت پذیر است، بدیهی است که در اینجا هم شرکت پذیر است.

عضوهمانی:

$$\forall(a+<8>),\in \frac{4Z}{<8>}\exists(b+<8>)\in \frac{4Z}{<8>},(a+<8>)+(b+<8>)=(a)+<8>$$

$$\rightarrow (b+<8>)=0+<8>=<8>\in \frac{4Z}{<8>}$$

عضو وارون:

$$\forall(a+<8>),\in \frac{4Z}{<8>}\exists(b+<8>)\in \frac{4Z}{<8>},(a+<8>)+(b+<8>)=0+<8>$$

$$\rightarrow (b+<8>)=(a)+<8>$$

جابه‌جایی: چون عمل جمع در اعداد صحیح جابه‌جایی است،بدیهی است که در اینجا هم جابه‌جایی است.

پس با عمل جمع آبلی است. حال عمل ضرب:

بسته بودن:

$$\forall(a+<8>),(b+<8>)\in \frac{4Z}{<8>}\rightarrow (a+<8>)*(b+<8>)=(a*b)+<8>\in \frac{4Z}{<8>}$$

شرکت‌پذیری: چون ضرب در اعداد صحیح شرکت‌پذیر است، لذا بدیهی است که در اینجا هم شرکت‌پذیر است.

عضو وارون:

$$\forall(a+<8>)\in \frac{4Z}{<8>}\exists(b+<8>)\in \frac{4Z}{<8>},(a+<8>)*(b+<8>)=(a)+<8>$$

$$\rightarrow (b+<8>)=1+<8>$$

مشخص است که به دلیل یکدار نبودن $4Z$، عضو $1+<8>$ در مجموعه وجود ندارد. لذا عضو خنثی نداریم.

لذا این حلقه با عمل ضرب و جمع آبلی نیست و میدان نیست.