Corrections des TD 7 à 11

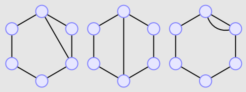
Remarques importantes

- Inutile d'imprimer ces corrigés : ce ne sont pas des documents autorisés lors des examens.
- On ne comprend vraiment qu'en faisant soi-même. Lire la correction d'un exercice sans avoir fait l'exercice est une perte de temps ; c'est même pire, puisque potentiellement on perd une occasion d'apprendre quelque chose.

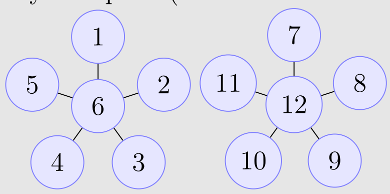
Correction TD 7 : Arbres

Exercice 1.

1. Dessiner un graphe non orienté d'ordre 6 et de taille 7 ayant exactement 3 cycles (à sens de parcours et sommet de départ près).

   > C_6 avec n'importe quelle corde (y compris une arête multiple – mais *pas* une boucle)
   > 
   > et il y a en a d'autres...

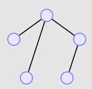
2. Dessiner une forêt d'ordre 12 et de taille 10.

   > Il y en a plein (la seule contrainte est qu'il y a forcément deux composantes connexes).
   > 
   >

> Rappel des propriétés vues en cours :
>
> **Proposition 1.** Tout arbre ayant au moins une arête a au moins deux feuilles.
>
> **Proposition 2.** Tout arbre d'ordre $n > 0$ contient exactement $n - 1$ arêtes.
>
> **Corollaire 1.** Toute forêt d'ordre $n > 0$ ayant k composantes connexes contient exactement $n - k$ arêtes.
>
> **Corollaire 2.** Tout graphe non orienté d'ordre n ayant k composantes connexes a au moins $n - k$ arêtes.

Exercice 2. Pour chaque spécification, dessiner un graphe correspondant ou expliquer pourquoi ce n'est pas possible. GSNO signifie « graphe simple non orienté », n est l'ordre, m la taille, et k le nombre de composantes connexes.

1. Arbre $n = 5$, $m = 4$, 3 feuilles.

   > 

2. Arbre $n = 5$, $m = 5$, 2 feuilles.

   > Impossible par la prop 2 (il y a autant de sommets que d'arêtes).

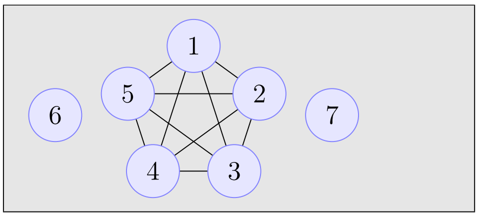
3. Arbre $n = 5$, $m = 1$, 1 feuille.

   > Impossible par la prop 1 (il y a forcément une deuxième feuille).

4. Arbre $n = 1$, $m = 0$, 1 feuille.

   > Un graphe d'ordre 1 et de taille 0 est simplement un sommet isolé, or ce n'est pas une feuille (il est de degré 0, pas 1).

5. GSNO $n = 7$, $m = 10$, $k = 3$.



6. GSNO $n = 11$, $m = 8$, $k = 2$.

Impossible par le corollaire 2 : $m = 8 < n - k = 9$.

7. Forêt $n = 10$, $m = 9$, $k = 2$.

Impossible par le corollaire 1 : $m = 9 \neq n - k = 8$.

8. Forêt $n = 11$, $m = 9$, $k = 2$.

On peut prendre (parmi d'autres) le graphe dont les composantes sont P_9 et P_2.

9. Forêt $n = 12$, $m = 8$, $k = 3$.

Impossible par le corollaire 1 : $m = 8 \neq n - k = 9$.

Exercice 3. Prouver que tout arbre de taille paire contient au moins un sommet de degré pair.

Si le nombre d'arêtes m est pair, alors le nombre de sommets $m + 1$ est impair. D'après le lemme des poignées de main, il ne peut y avoir qu'un nombre pair de sommets de degré impair. Il y a donc forcément au moins un sommet de degré pair.

Exercice 4. Soit G un graphe non orienté non nul. Montrer que G est un arbre si et seulement si pour toute paire de sommets $\{s, s'\}$ de G, il y a exactement un chemin élémentaire entre s et s'.

($\Rightarrow$) Soit deux sommets s et s' de G. Supposons qu'il y a deux chemins élémentaires distincts entre s et s' ; on va montrer que G contient alors un cycle, ce qui est contradictoire. Les deux chemins ont le même départ et la même arrivée, on peut donc définir un sommet s_1 à partir duquel les chemins divergent et un sommet s_2 où ils se rassemblent pour la première fois. (Il se peut que $s_1 = s$ et $s_2 = s'$, ou pas, ce n'est pas important.) Notons $(s_1, e_1, \ldots, e_n, s_2)$ et $(s_1, e'_1, \ldots, s'_{m-1}, e'_m, s_2)$ les deux chemins élémentaires de s_1 à s_2 ; ils ne partagent pas de sommet interne, puisqu'ils ne se rassemblent pas avant s_2 (on a choisi s_2 comme ça), et donc pas non plus d'arête (car si c'était le cas ils partageraient un sommet interne). Par conséquent $(s_1, e_1, \ldots, e_n, s_2, e'_m, s'_{m-1}, e'_{m-1}, \ldots, e'_1)$ est un chemin élémentaire de s_1 à s_1, c'est-à-dire un cycle.

($\Leftarrow$) On va montrer la contraposée de la réciproque, c'est-à-dire que si G n'est pas un arbre, alors il existe des sommets s et s' tels qu'il n'y a pas exactement un chemin élémentaire entre eux. Soit G un graphe non orienté qui n'est pas un arbre. Il se présente deux cas :

— soit G n'est pas connexe, auquel cas il existe deux sommets qui n'ont pas de chemin entre eux ;

— soit G contient un cycle, auquel si on prend deux sommets s et s' sur ce cycle, il y a deux chemins élémentaires entre s et s' (en partant de s, on peut partir « vers la gauche » ou « vers la droite ».

Dans les deux cas on a trouvé deux sommets qui n'ont pas exactement un chemin élémentaire entre eux.

Exercice 5. Prouver qu'un graphe non orienté connexe d'ordre $n \geq 1$ et de taille n contient exactement un cycle.

Soit G un graphe non orienté connexe d'ordre n et de taille n. Il contient forcément au moins un cycle, car sinon il serait acyclique, et comme il est supposé connexe, ce serait un arbre ; c'est impossible car il aurait alors $n - 1$ arêtes.

Il nous reste à montrer que ce cycle est unique. Pour cela on va regarder ce qui se passe quand on enlève une arête, puis qu'on la remet.

Soit c un cycle de G et a une arête de c : le graphe $G - a$ est connexe (les extrémités de l'arête qu'on a enlevée sont toujours liés, puisque l'arête était dans un cycle), d'ordre n et a $n - 1$ arêtes, c'est donc un arbre (par l'équivalence montrée à l'exercice 6), il n'a donc pas de cycle.

Tous les cycles de G sont donc créés par l'ajout de l'arête a à $G - a$. On va pouvoir maintenant montrer qu'il ne peut y en avoir qu'un. Supposons que l'ajout de a crée (au moins) deux cycles distincts. Soit s_1 et s_2 les extrémités de a : il y a deux chemins élémentaires entre s_1 et s_2 qui ne passent pas par a (le « long chemin » du premier cycle, et celui du deuxième). Cela signifie qu'il y a deux chemins élémentaires entre s_1 et s_2 dans $G - a$, or c'est impossible puisque $G - a$ est un arbre (par la propriété montrée dans l'exercice 4).

Exercice 6. Soit G un graphe non orienté d'ordre $n \geq 1$. Montrer que les trois énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre.
2. G est acyclique et a $n - 1$ arêtes.
3. G est connexe et a $n - 1$ arêtes.

Remarque : il est conseillé de prouver que chaque énoncé implique le suivant, et que le dernier implique le premier – ces trois implications suffisent à montrer l'équivalence des trois. Pour la dernière implication, le lemme suivant vu en cours pourra être utile :

Soit G un graphe non orienté et a une arête de G ; on note $G - a$ le graphe obtenu en enlevant a de G (formellement : $G - a = (S_G, E_G \setminus \{a\})$.

Lemme 1. Pour tout graphe non orienté G, si a est une arête d'un cycle, alors G et $G - a$ ont le même nombre de composantes connexes.

$(1 \Rightarrow 2)$ Si G est un arbre, il est acyclique par définition, et il a $n - 1$ arêtes par la proposition 2.

$(2 \Rightarrow 3)$ Supposons G acyclique, c'est-à-dire que c'est une forêt, et qu'il a $n - 1$ arêtes. Soit k le nombre de composantes connexes de G. Par le corollaire 1, G a exactement $n - k$ arêtes, on a donc $n - k = n - 1$ et ainsi $k = 1$: G est connexe.

$(3 \Rightarrow 1)$ Supposons G connexe et avec $n - 1$ arêtes. On doit montrer qu'il n'a pas de cycle. Supposons qu'il en ait au moins un : on peut procéder comme dans la preuve du corollaire 2 et casser les cycles un par un en leur enlevant une arête jusqu'à ce que le graphe résultant G' soit acyclique ; par le lemme 1, G' est toujours connexe, donc c'est un arbre. Par la proposition 2, G' a exactement $n - 1$ arêtes : c'est impossible puisque G avait $n - 1$ arêtes et qu'on en a enlevé. Ainsi on sait que G ne contenait pas de cycle au départ, c'est donc un arbre.

Correction TD 8 : Arbres, suite

Exercice 1. Écrire le pseudo-code d'une fonction `estUnArbre(G)` qui prend en entrée un graphe non orienté G et renvoie vrai ssi G est un arbre. On choisira la caractérisation astucieusement pour pouvoir réutiliser des fonctions déjà écrites lors de TD précédents.

mon idée est de tester si c'est connexe et de compter les arêtes ; ça me paraît le plus simple puisqu'on a déjà le test de connexité.

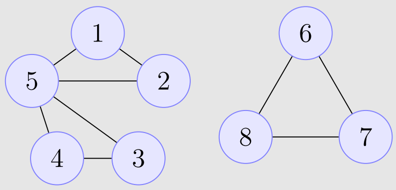
Rappel d'une propriété vue en cours :

Proposition 3. Tout graphe non orienté d'ordre n avec k composantes et m arêtes contient au moins $m - n + k$ cycles.

Exercice 2. Pour chaque spécification, dessiner un graphe non orienté correspondant ou expliquer pourquoi ce n'est pas possible. n est l'ordre, m la taille, k le nombre de composantes connexes, et c le nombre de cycles.

1. $n = 8$, $m = 9$, $k = 2$, $c = 3$.

   Une possibilité :

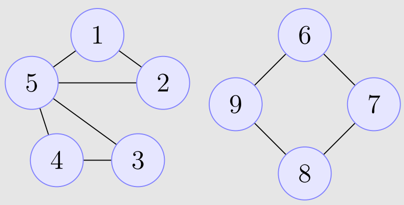
   

2. $n = 8$, $m = 10$, $k = 2$, $c = 3$.

   impossible par la proposition 3 (il y a au moins 4 cycles)

3. $n = 9$, $m = 10$, $k = 2$, $c = 3$.

   Une possibilité :

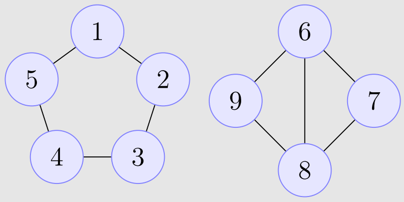
   

4. $n = 9$, $m = 10$, $k = 2$, $c = 2$.

   impossible par la proposition 3 (il y a au moins 3 cycles)

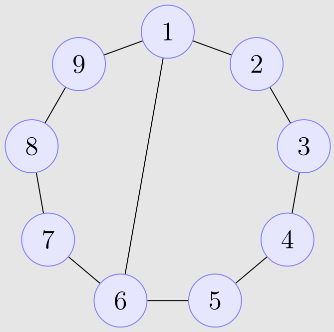
5. $n = 9$, $m = 10$, $k = 2$, $c = 4$.

Une possibilité :



6. connexe, $n = 9$, $m = 10$, $c = 3$.

Une possibilité :



7. connexe, $n = 9$, $m = 12$, $c = 3$.

impossible par la proposition 3 (il y a au moins 4 cycles)

Exercice 3. Montrer que la propriété suivante caractérise les forêts : graphes non orientés dont tout sous-graphe induit d'ordre non nul contient (au moins) un sommet de degré 0 ou 1.

Soit G un sous-graphe induit non nul d'une forêt. C'est forcément aussi une forêt (avec éventuellement davantage de composantes), puisqu'un sous-graphe d'un graphe acyclique ne peut pas contenir de cycles. Par conséquent chaque composante de G est un arbre. Prenons-en un au hasard : s'il ne contient pas d'arête, alors c'est un sommet isolé donc de degré 0. Sinon, il a au moins deux feuilles — des sommets de degré 1.

Pour la réciproque, on va raisonner par contraposition, en montrant que si un graphe non orienté n'est pas une forêt, alors il a au moins un sous-graphe induit dont tous les sommets sont de degré au moins 2. Soit G un graphe non orienté qui n'est pas une forêt. Il contient donc un cycle. Soit $\{s_1, \dots, s_n\}$ les sommets sur ce cycle ; on considère G' le sous-graphe de G induit par $\{s_1, \dots, s_n\}$. Tout s_i est voisin de deux autres sommets dans G' puisqu'on est parti d'un cycle. Donc tous les sommets sont de degré au moins 2.

Exercice 4. Caractériser les graphes (non orientés) dont tout sous-graphe connexe est un sous-graphe induit.

Cette propriété est encore une caractérisation des forêts, c'est-à-dire qu'un graphe non orienté G est une forêt si et seulement si tout sous-graphe connexe de G est un sous-graphe induit de G. Montrons-le.

($\Rightarrow$) Par contraposition. Soit G un graphe non orienté ; supposons qu'il existe un sous-graphe connexe de G qui n'est pas induit. On va montrer que G contient (au moins) un cycle.

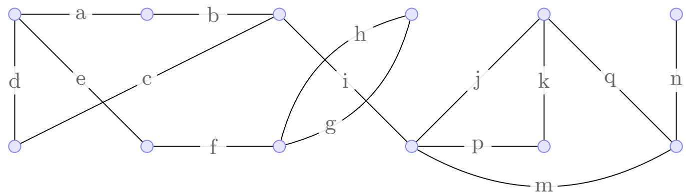
Soit G' un sous-graphe connexe de G qui n'est pas induit : on peut trouver des sommets

s et s' de $S_{G'}$ qui sont voisins dans G mais pas dans G'. Puisqu'on a supposé G' connexe, il y a forcément un chemin (et donc un chemin élémentaire) entre s et s' dans G'. En considérant ce même chemin dans G et en le complétant par l'arête $\{s, s'\}$, on obtient un cycle dans G.

(⇐) Par contraposition. Soit G un graphe non orienté qui n'est pas une forêt. Il contient donc un cycle ; notons $\{s_1, \ldots, s_n\}$ les sommets sur ce cycle. Soit G' le sous-graphe de G induit par ces sommets, auquel on enlève l'arête entre s_1 et s_n. G' est connexe (par construction, il y a un chemin de s_1 à s_n qui passe par tous les sommets) mais n'est pas induit (il manque l'arête qu'on a retirée).

Exercice 5. Soit G un graphe non orienté ; une arête a de G est un *isthme* si $G - a$ (le graphe obtenu en supprimant a) a strictement plus de composantes connexes que G.

1. Lister tous les isthmes du graphe suivant :



e, f, i, n.

2. Caractériser les graphes non orientés dont toutes les arêtes sont des isthmes.

Il s'agit encore des forêts. En effet, on a le lemme suivant :

Lemme. Une arête appartient à un cycle si et seulement si elle n'est pas un isthme. Preuve : (⇒) Soit a une arête d'un cycle. Par le lemme 1, si on l'enlève on ne change pas le nombre de composantes connexes, donc ce n'est pas un isthme. (⇐) Soit a une arête qui n'est pas un isthme. Notons s, s' ses extrémités. Si on enlève a, sa composante connexe reste connexe, donc il existe un chemin élémentaire entre s et s' qui ne passe pas par a, donc un cycle (en prenant le chemin élémentaire suivi de l'arête a).

Une formulation équivalente du lemme est "une arête est un isthme si et seulement si elle n'appartient à aucun cycle".

On peut maintenant prouver qu'un graphe non orienté est une forêt si et seulement si toutes ses arêtes sont des isthmes. Preuve : (⇒) Soit G une forêt, elle n'a pas de cycle, donc aucune de ses arêtes n'appartient à un cycle, donc par le lemme toutes ses arêtes sont des isthmes . (⇐) Par contraposition. Soit G un graphe qui n'est pas une forêt, il contient donc un cycle. Par le lemme, les arêtes de ce cycle ne sont pas des isthmes.

3. Quel est le nombre maximal d'isthmes que peut avoir un graphe non orienté d'ordre $n > 0$?

Si le graphe n'est pas connexe, en reliant des composantes connexes par une arête on ajoute un isthme. Le nombre maximal d'isthmes est donc atteint pour les graphes connexes.

Par le lemme 2 vu en cours, tout graphe connexe G a un sous-graphe connexe de même ordre G' qui est un arbre.

Toutes les arêtes d'un arbre d'ordre n sont des isthmes (voir question précédente), G' a donc $n - 1$ isthmes. Si on ajoute une arête à G', on ajoute nécessairement au moins un cycle (par le lemme 3), donc le nombre d'isthmes ne peut pas augmenter. G n'a donc pas plus d'isthmes que G'.

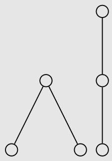
En conclusion, un graphe non orienté d'ordre n peut donc avoir au maximum $n-1$ isthmes.

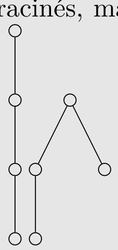
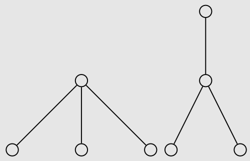
4. Quel est la taille minimale d'un graphe non orienté connexe d'ordre $n \geq 2$ qui n'a aucun isthme ?

Le graphe-cycle C_n n'a aucun isthme, sa taille est n. Aucun graphe de taille strictement inférieure ne satisfait toutes les conditions. En effet, les seuls graphes connexes d'ordre $n \geq 2$ et de taille strictement inférieure à n sont les arbres, or ceux-ci ont $n-1$ arêtes, toutes des isthmes.

Correction TD 9 : Arbres enracinés

Exercice 1. Dessiner tous les arbres enracinés différents (à isomorphisme *d'arbres enracinés* près) d'ordre 3 ou 4. Combien constituent-ils de graphes non orientés différents (à isomorphisme *de graphes* près) ?

Ordre 3 : il y a deux arbres enracinés, mais ils ont le même graphe. 

Ordre 4 : il y a quatre arbres enracinés, mais qui constituent seulement deux graphes non orientés. Deux sont des chemins :  Deux sont des étoiles : 

Exercice 2. À isomorphisme d'arbres enracinés près, combien existe-t-il d'arbres enracinés dont le graphe est :

1. P_n, le graphe-chemin d'ordre n ?

   Ça revient au même de choisir comme racine le premier ou le dernier sommet, le deuxième ou l'avant-dernier, etc. On a donc $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ façons différentes de choisir la racine. (Ça marche bien aussi pour $n = 0$ ou $n = 1$.)

2. S_n, le graphe-étoile d'ordre n, qui se construit comme $n-1$ sommets isolés auxquels on ajoute un sommet universel (relié à tous les autres) ?

   S_0 n'est pas défini ; $S_1 = P_1$ et $S_2 = P_2$, pour ces deux-là il n'y a qu'une seule façon de choisir la racine. Pour S_n avec $n \geq 3$, il y en a toujours deux : on choisit soit le sommet central, soit un des autres.

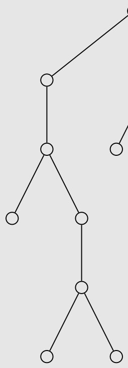
3. K_n, le graphe complet d'ordre n ?

   Il n'existe aucun arbre enraciné dont le graphe soit K_0, car on ne peut pas choisir de racine. Pour K_1 et K_2, ce sont encore les mêmes que S_1 et S_2 : il y a une seule façon de choisir la racine. Enfin, si $n \geq 3$, K_n contient un cycle et n'est donc pas un arbre. La réponse est donc : 1 si $n = 1$ ou $n = 2$, 0 sinon.

Exercice 3. Pour chaque spécification d'arbres enracinés ci-dessous, dessiner le graphe en question ou expliquer pourquoi un tel graphe n'existe pas. On note n l'ordre de l'arbre, m son arité, et h sa hauteur.

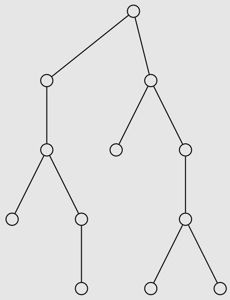
1. $n = 12$, $m = 2$, $h = 5$, avec exactement 5 feuilles.

Un exemple :



2. $n = 12$, $m = 2$, $h = 4$.

Un exemple :

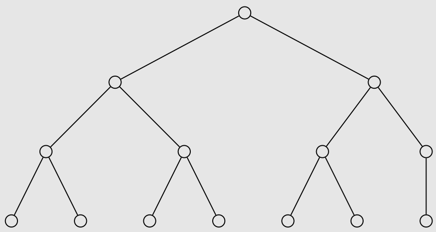


3. $n = 16$, $m = 2$, $h = 3$.

Si on regarde le nombre de sommets d'un arbre complet avec ces caractéristiques, on trouve $\frac{2^4-1}{2-1} = 15$. Avec 16 sommets on ne peut donc pas respecter ces caractéristiques (soit on augmente l'arité, soit on augmente la hauteur).

4. $n = 14$, $m = 2$, $h = 3$.

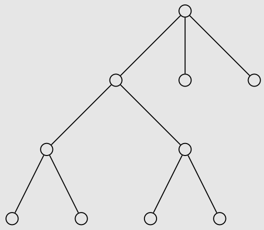
Si on regarde le nombre de sommets d'un arbre complet avec ces caractéristiques, on trouve $\frac{2^4-1}{2-1} = 15$. Il suffit donc de dessiner l'arbre complet en lui enlevant une feuille.



5. $n = 14$ et toute feuille a exactement 3 ancêtres.

la réponse de la question précédente fonctionne.

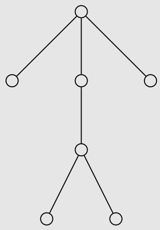
6. $n = 10$, $m = 3$, $h = 3$.

Un exemple : 

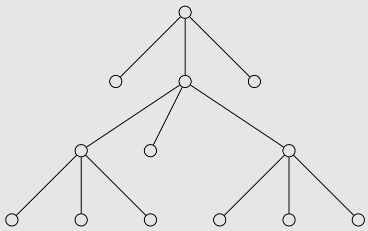
7. $m = 3$, $h = 3$, avec exactement 28 feuilles.

L'arbre complet d'arité 3 et de hauteur 3 a $3^3 = 27$ feuilles (avec la formule m^k en prenant $k = h$). Avec cette arité et cette hauteur, on ne pourra pas avoir davantage de feuilles. Or l'énoncé en demande 28, c'est donc impossible.

8. $m = 3$, $h = 3$, avec exactement 4 feuilles.

Un exemple : 

9. $n = 13$, $m = 3$, $h = 3$, tel que tout sommet interne a exactement 3 enfants.



Exercice 4. On a dit en cours que dans un arbre enraciné, mis à part la racine, tout sommet s a exactement un parent. Le montrer formellement en utilisant une caractérisation des arbres.

Un parent de s est un sommet qui le précède immédiatement sur un chemin élémentaire depuis la racine. Dans un arbre, il y a exactement un chemin élémentaire entre toute paire de sommets, donc en particulier un seul chemin élémentaire entre la racine et s. Le parent de s est donc défini de manière unique.

Exercice 5. Dans un arbre enraciné, quelle est la relation entre la profondeur d'un sommet et son nombre d'ancêtres ? Justifier votre réponse par une démonstration.

La profondeur d'un sommet est égale à son nombre d'ancêtres. En effet, considérons s un sommet, et soit c un chemin élémentaire de longueur n de la racine à s. Tous les sommets qui précèdent s sur le chemin sont des ancêtres de s. Il y en a n. Mais comme le graphe est un arbre, il y a exactement un chemin élémentaire de la racine à s. Par conséquent :

— il n'y a pas d'autre chemin que c, donc il n'y a pas plus d'autres ancêtres que les n qu'on a trouvés

— c est le plus court chemin entre la racine et s, donc n est la distance entre la racine et s, c'est-à-dire la profondeur de s.

Exercice 6. À nouveau, dans cet exercice, on démontre formellement des propriétés vues en cours. Soit (G, r) un arbre enraciné complet d'arité m de hauteur h. Pour $0 \leq k \leq h$, on note N_k le niveau k de (G, r), c'est-à-dire l'ensemble de ses sommets de profondeur k.

1. Montrer que N_k contient m^k sommets.

On le montre par récurrence sur k.

— Le niveau 0 contient toujours un seul sommet (la racine) : $|N_0| = 1 = m^0$

— Supposons que ce soit vrai pour un ℓ tel que $0 \leq \ell < h$, et montrons que ça l'est alors pour $\ell + 1$. Chaque sommet de niveau ℓ a m enfants, on a donc $m \cdot |N_\ell|$ sommets de niveau $\ell + 1$, c'est-à-dire $m \cdot m^\ell$ par l'hypothèse de récurrence, ce qui est égal à $m^{\ell+1}$.

— Par récurrence, les deux points précédents prouvent que c'est vrai pour tout k avec $0 \leq k \leq h$.

2. Montrer que G est d'ordre $\frac{m^{h+1}-1}{m-1}$.

Le nombre de sommets de G est le nombre de sommets de chacun de ses niveaux, autrement dit,

$$\begin{aligned} |S_G| &= \sum_{i=0}^{h} |N_i| \\ &= \sum_{i=0}^{h} m^i \\ &= \frac{m^{h+1} - 1}{m - 1} \end{aligned}$$

en utilisant la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.

Exercice 7. Soit (G, r) un arbre enraciné de hauteur h. À nouveau, pour $0 \leq k \leq h$, on note N_k le niveau k de (G, r), c'est-à-dire l'ensemble de ses sommets de profondeur k.

1. Montrer que N_k est un stable de G (pour $0 \leq k \leq h$).

Soient s et s' deux sommets de N_k. Ils sont à distance k de la racine, donc il y a un chemin élémentaire c de longueur k de la racine vers s, et un autre c' de la racine vers s'. Montrons par l'absurde que s et s' ne sont pas voisins : supposons qu'il y a une arête entre s et s'. Cette arête ne peut pas être présente dans c, car cela signifierait que le chemin élémentaire de la racine à s passe par s', donc s' serait à profondeur $k-1$. L'arête est donc distincte de toutes les arêtes de c ; ainsi, en l'ajoutant à la fin de c, on a un chemin élémentaire de la racine vers s' de longueur $k+1$. Ce chemin et donc distinct de c', qui lui est de longueur k : nous avons deux chemins élémentaires entre la racine et s', ce qui est impossible puisque G est un arbre (et a donc exactement un chemin élémentaire entre toute paire de ses sommets). Par l'absurde, il n'y a donc pas d'arête entre s et s', et cela est valable pour toute paire (s, s') de sommets de N_k, qui est donc un stable.

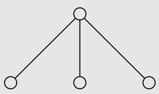
2. Soit k, k' entre 0 et h tels que $k' - k > 1$. Montrer que $N_k \cup N_{k'}$ est un stable de G.

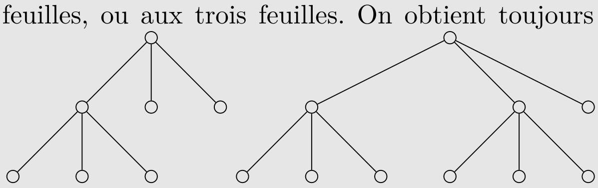
On vient de montrer que N_k et $N_{k'}$ sont des stables. Il faut maintenant montrer qu'il n'y a pas d'arête entre un sommet de N_k et un sommet de $N_{k'}$. Soit $s \in N_k$ et $s' \in N_{k'}$. Soit c le chemin de la racine à s, qui est de longueur k. S'il existait une arête entre s et s', en l'ajoutant à la fin de c, on obtiendrait un chemin de longueur $k+1$ de la racine à s', ce qui est impossible puisque s' est à profondeur $k' > k+1$.

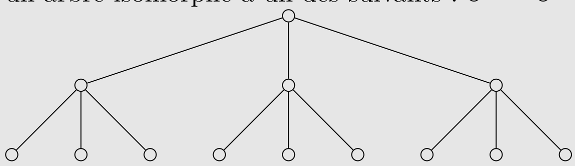
3. Si G est complet d'arité m, quelle est la taille d'un stable de taille maximum dans G ?

On peut toujours faire grossir un stable en ajoutant des sommets de même niveau qu'un sommet du stable, ou un sommet qui n'est ni parent ni enfant d'aucun sommet du stable. Autrement dit, on peut prendre un niveau (entier) sur deux. Pour que le stable soit le plus gros possible, on commence par le niveau le plus bas, celui des feuilles. Si h est paire, la taille de notre stable sera $\sum_{i=0}^{h/2} m^{2i} = \frac{m^{h+2}-1}{m^2-1}$. Si h est impaire, ce sera $\sum_{i=0}^{(h-1)/2} m^{2i+1} = \frac{m^{h+2}-m}{m^2-1}$.

Exercice 8. À isomorphisme d'arbres enracinés près, combien y a-t-il d'arbres ternaires de hauteur 3 tels que tout sommet interne a exactement 3 enfants ?

Pour la hauteur 1, il n'y a qu'un cas possible : 

Pour la hauteur 2, on peut donner 3 enfants aux feuilles de l'arbre précédent. On peut en donner à une seule feuille, à deux feuilles, ou aux trois feuilles. On obtient toujours un arbre isomorphe à un des suivants : 



Il faut maintenant compter le nombre de façons de donner 3 enfants à des feuilles des arbres de hauteur 2 sans retomber sur un arbre isomorphe. On peut le faire à la main pour répondre à la question, mais il est possible de trouver la formule qui justifie le résultat. Pour cela, on va appeler « sous-arbres » les arbres qui commencent à un sommet de niveau 1 dans nos arbres de hauteur 2. Ainsi, le premier arbre a un seul sous-arbre, le deuxième en a deux, et le troisième en a trois.

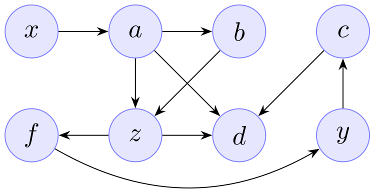
Considérons un de nos trois arbres de hauteur 2, et notons k son nombre de sous-arbres. Pour chaque sous-arbre, on peut choisir zéro, une, deux ou trois feuilles (peu importe lesquelles, ce sera isomorphe) pour leur donner trois enfants. On peut prendre le même nombre de feuilles pour deux sous-arbres, mais c'est pareil de prendre une feuille du premier et deux du 2e ou deux du premier et une du 2e. Il s'agit donc de compter le nombre de combinaisons (l'ordre n'importe pas) avec répétitions de k objets dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Ce nombre est $\left(\!\binom{4}{k}\!\right) = \binom{k+3}{k} = \frac{(k+3)!}{k!\,3!}$, auquel il faut enlever 1 car on ne veut pas choisir 0 feuilles de tous les sous-arbres (car la hauteur doit être de 3).

Au total, si on considère les trois arbres de hauteur 2, cela fait donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{(k+3)!}{k!\,3!}-1\right) &= \frac{4!}{1!\,3!}+\frac{5!}{2!\,3!}+\frac{6!}{3!\,3!}-3\\ &= 4+10+20-3=31\end{aligned}$$

Correction TD 10 : Graphes orientés

Exercice 1. Lister tous les chemins orientés (en tant que suites de sommets) de x à d dans le graphe simple orienté suivant.

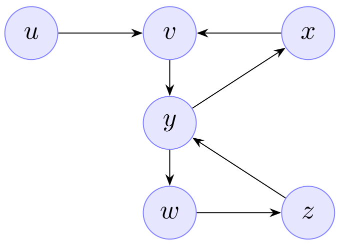


Y en a-t-il qui ne sont pas élémentaires ?

- (x, a, d)
- (x, a, b, z, d)
- (x, a, z, d)
- (x, a, z, f, y, c, d)
- (x, a, b, z, f, y, c, d)

Ils sont tous élémentaires (simples et sans croisement).

Exercice 2. On considère le graphe simple orienté suivant :



Pour chacune des consignes suivantes, donner un exemple qui correspond (sous forme de suite de sommets).

1. un chemin orienté ouvert sans croisement

   (u, v)

2. un chemin orienté ouvert qui n'est pas élémentaire

   (v, y, x, v, y)

3. un chemin orienté ouvert qui est simple mais pas élémentaire

   (u, v, y, x, v)

4. un cycle orienté

   (v, y, x, v)

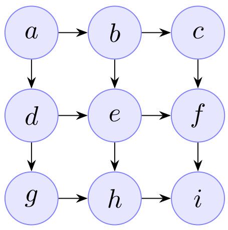
5. un chemin orienté fermé qui n'est pas élémentaire

(v, y, x, v, y, x, v)

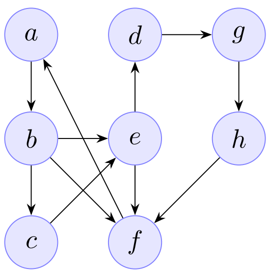
6. un chemin orienté fermé qui est simple mais pas élémentaire

(v, y, w, z, y, x, v)

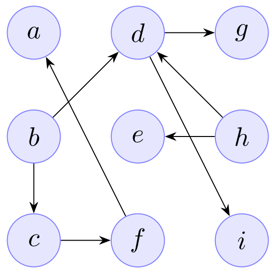
Exercice 3. Pour chacun des graphes orientés suivants, indiquer s'ils sont fortement connexes. S'ils ne le sont pas, trouver le nombre minimum d'arcs qu'il faut ajouter pour qu'ils le deviennent.

1. 

Il n'est pas fortement connexe (par ex., a n'est accessible depuis aucun autre sommet). On peut le rendre fortement connexe en ajoutant simplement un arc de i à a.

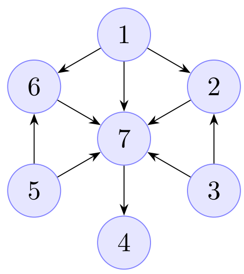
2. 

Il est fortement connexe.

3. 

Il n'est pas fortement connexe (par ex., h n'est accessible depuis aucun autre sommet). On peut le rendre fortement connexe en ajoutant par exemple tous les arcs suivants :

— (a, b)
— (e, b)
— (i, e)
— (g, h)

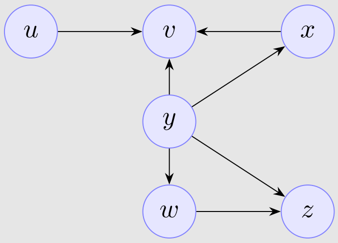
4. 

Il n'est pas fortement connexe (par ex., 1 n'est accessible depuis aucun autre sommet). On peut le rendre fortement connexe en ajoutant par exemple tous les arcs suivants : 4 à 5, 4 à 3, 7 à 1.

Exercice 4.

1. On considère les graphes orientés des exercices 2 et 3. Pour chacun, indiquer si s'agit d'un DAG (graphe acyclique orienté). Si ce n'est pas le cas, pouvez-vous le transformer en DAG en inversant l'orientation de certains arcs ? Combien au minimum ? Donner ensuite toutes les sources et tous les puits du DAG (le graphe de départ ou celui obtenu après transformation).

— graphe de l'exo 2 : il possède deux cycles orientés simples donc ce n'est pas un DAG. On peut le transformer en DAG en changeant l'orientation d'un arc de chaque cycle simple (n'importe lesquels). Choisissons (v, y) et (y, z) :



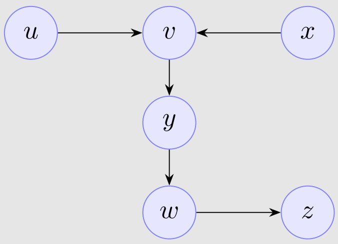
Dans ce cas, les sources sont u et y et les puits sont v et z.

— graphes de l'exo 3

1. c'est un DAG, la source est a et le puits est i
2. ce n'est pas un DAG. Ça le devient si on inverse l'orientation de (a, b) ou (f, a) par exemple.
3. c'est un DAG, les sources sont b et h et les puits sont a, e, g et i
4. c'est un DAG, les sources sont 1, 3 et 5 et le puits est 4

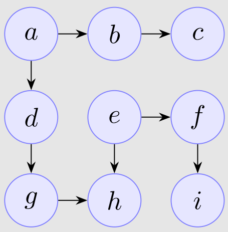
2. On considère les mêmes graphes orientés. Pour chacun, indiquer s'il s'agit d'un arbre orienté. Si ce n'est pas le cas, pouvez-vous le transformer un arbre orienté en inversant l'orientation de certains arcs ? Et en supprimant des arcs ? Combien au minimum ?

— Le graphe de l'exercice 2 n'est pas un arbre orienté, le graphe non orienté sous-jacent a deux cycles simples. On ne peut pas le transformer en arbre orienté simplement en inversant des arcs, puisque cela ne change pas le graphe sous-jacent. Il faut supprimer un arc de chaque cycle simple, n'importe lesquels, par exemple (y, x) et (z, y) :



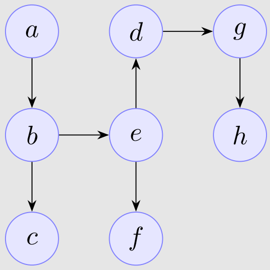
— Graphes de l'exo 3 :

1. ce n'est pas un arbre orienté. il faut supprimer 4 arcs, par exemple (b, e), (d, e), (h, i) et (c, f) :



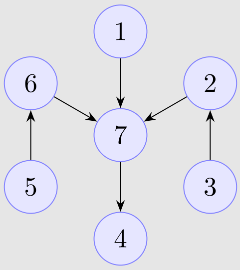
On peut faire différemment, mais il faut forcément supprimer exactement 4 arcs, puisque pour être un arbre il faut une arête de moins que le nombre de sommets.

2. ce n'est pas un arbre orienté. il faut supprimer 4 arcs, par exemple (b, f), (h, f), (f, a) et (c, e) :



3. c'est un arbre orienté.

4. ce n'est pas un arbre orienté. il faut supprimer 4 arcs, par exemple $(1, 2)$, $(1, 6)$, $(3, 7)$ et $(5, 7)$.



Exercice 5. Pour chacune des affirmations suivantes, démontrer qu'elle est vraie ou démontrer qu'elle est fausse.

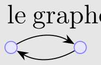
1. Il existe des arbres orientés qui ne sont pas des DAG.

   faux. tout arbre orienté est un DAG : le graphe non orienté sous-jacent n'a pas de cycle, donc a fortiori l'arbre orienté n'a pas de cycle orienté.

2. Aucun DAG n'est fortement connexe.

   faux, les graphes simples d'ordre 1 sont des DAG fortement connexes. Mais à part ce cas dégénéré, être fortement connexe implique de contenir un cycle orienté.

3. Soit G un graphe orienté et G' son graphe non orienté sous-jacent ; G est simple si et seulement si G' est simple.

   La condition est suffisante (si son graphe non orienté sous-jacent est simple, G est forcément simple), mais pas nécessaire : le graphe sous-jacent du graphe orienté suivant a deux arêtes entre ses deux sommets. 

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe (au moins) un DAG d'ordre n dont le graphe non orienté sous-jacent est complet.

   vrai. En partant de K_n, on peut choisir un sommet et orienter toutes ses arêtes incidentes de façon à en faire des arcs sortants. On choisit un 2e sommet et on fait de même avec les arêtes qui n'ont pas déjà été transformées en arcs. Et ainsi de suite.

Exercice 6.

1. Soit G un graphe non orienté avec une arête. Expliquer pourquoi G a des chemins arbitrairement longs (c'est-à-dire aussi longs qu'on veut — formellement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un chemin de longueur n dans G).

En notant l'arête e, toute suite $(e, e, \ldots, e)$ de longueur n correspond à un chemin de longueur n (on passe d'une extrémité à l'autre de l'arête).

2. Est-ce que pour les graphes non orientés, « avoir (au moins) une arête » est une caractérisation des graphes ayant des chemins arbitrairement longs ?

Oui : on vient de voir que c'est une condition suffisante, mais c'est aussi une condition nécessaire puisque les graphes sans aucune arête n'ont que des chemins de longueur 0.

3. Expliquer pourquoi cette condition ne suffit pas pour un graphe orienté.

Dans un graphe orienté, un arc permet de passer d'un sommet à un autre mais pas de revenir. Un graphe orienté avec un seul arc qui n'est pas une boucle possède un chemin de longueur 1 (et des chemins de longueur 0), mais aucun chemin de longueur 2. La condition est nécessaire mais pas suffisante.

4. Dessiner un graphe orienté qui a des chemins arbitrairement longs.

Le graphe orienté avec un sommet et une boucle, par exemple, a des chemins arbitrairement longs.

5. Trouver et démontrer une caractérisation des graphes orientés ayant des chemins orientés arbitrairement longs (autrement dit, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe orienté ait des chemins orientés arbitrairement longs).

Les graphes orientés ayant des chemins arbitrairement longs sont exactement ceux qui possèdent au moins un cycle orienté. Cette condition est clairement suffisante (on peut répéter le cycle autant qu'on veut). Pour prouver qu'elle est nécessaire, considérer un chemin de taille $t + 1$ où t est la taille du graphe. Il y a forcément (au moins) un arc par lequel le chemin passe (au moins) deux fois, donc forcément (au moins) un sommet par lequel le chemin passe (au moins) deux fois.

Notons $(s_0, e_1, s_1, \ldots, s_t, e_{t+1}, s_{t+1})$ le chemin, et supposons que le premier sommet répété est s_j, c'est-à-dire qu'on a $s_i = s_j$, pour $0 \leq i < j \leq t + 1$, et que tous les sommets s_k pour $0 \leq k < j$ sont distincts. Alors le chemin $(s_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, s_j)$ est un cycle orienté : il est fermé ($s_i = s_j$), non vide ($i < j$), sans croisement (s_j a été choisi comme le premier sommet répété) et simple (si un arc était répété, son sommet source constituerait un croisement).

Exercice 7. Soit G un graphe orienté avec au moins un sommet.

1. Démontrer que si tous les sommets de G sont de degré sortant non nul, alors G contient un cycle orienté.

Construisons un chemin orienté qui part d'un sommet quelconque. Il est de degré sortant non nul, donc il a des arcs sortants. On en choisit un comme premier arc du chemin. On se retrouve sur un sommet qui est lui aussi de degré sortant non nul, donc on peut continuer le chemin. Il est ainsi possible de construire un chemin arbitrairement long. Par la caractérisation démontrée dans l'exercice précédent, cela signifie que G possède un cycle orienté.

2. Démontrer que si tous les sommets de G sont de degré *entrant* non nul, alors G contient un cycle orienté.

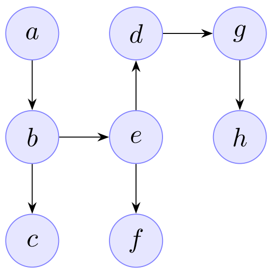
On procède exactement de la même manière mais en partant de la fin : on choisit un sommet quelconque s et on construit un chemin orienté dont s est le sommet d'arrivée. On peut toujours choisir un arc entrant pour prolonger le chemin en arrière. Le graphe G a donc des chemins orientés arbitrairement longs, il contient donc un cycle orienté.

3. Démontrer que tout DAG a (au moins) une source et (au moins) un puits.

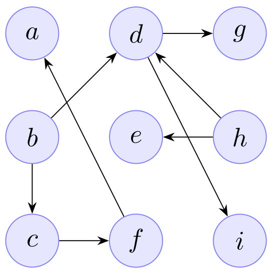
Si un DAG n'a pas de source, alors tous ses sommets sont de degré entrant non nul, il a donc un cycle orienté par la question précédente, contradiction. Idem pour le puits avec la question d'avant.

Correction TD 11 : Arborescences et orientations

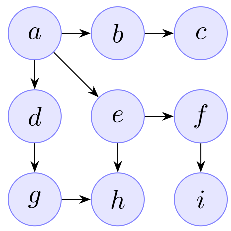
Exercice 1. Pour chacun des graphes suivants, indiquer s'il s'agit ou non d'une arborescence.

1. 

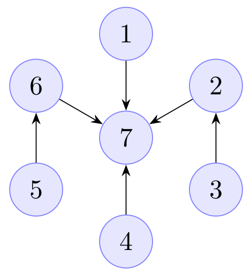
Oui, la racine est a.

2. 

Non, car la racine est forcément une source, or il y a deux sources, b et h, et donc aucun chemin de b à h et aucun chemin de h à b, donc ni b ni h ne sont racine et il ne peut donc y avoir aucune racine.

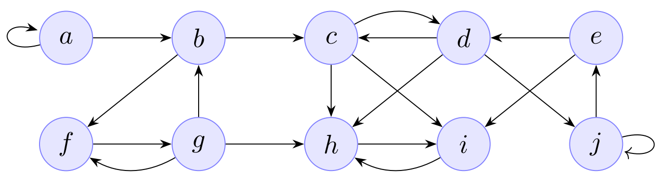
3. 

Non : seul a est une source et est donc candidat à être racine, or il y a deux chemins orientés distincts de a à h, donc a n'est pas racine.

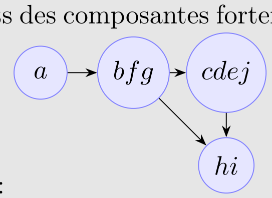
4. 

Non, car il y a quatre sources. On peut quand même noter que ça ressemble à une arborescence, mais à l'envers : si on inverse l'orientation de tous les arcs, on obtient une arborescence. Ce type de graphe s'appelle une *anti-arborescence*.

Exercice 2. Identifier les composantes fortement connexes puis dessiner la condensation de chacun des graphes orientés suivants.

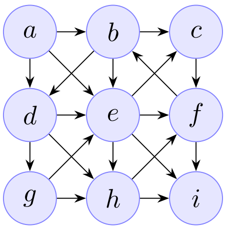
1. 

Ensembles de sommets des composantes fortement connexes : $\{a\}$, $\{b, f, g\}$, $\{c, d, e, j\}$, $\{h, i\}$. Condensation :

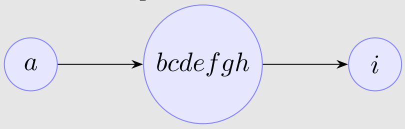


2. Le même graphe, avec en plus un arc (h, a).

Le graphe devient fortement connexe – on comprend bien ce qui se passe en regardant la condensation ci-dessus : l'ajout de l'arc crée en quelque sorte un cycle dans la condensation, qui se réduit donc à un seul sommet.

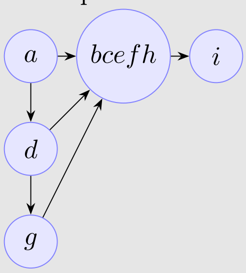
3. 

Ensembles de sommets des composantes fortement connexes : $\{a\}$, $\{b, c, d, e, f, g, h\}$, $\{i\}$. Condensation :

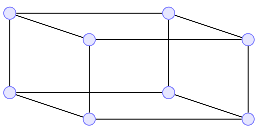


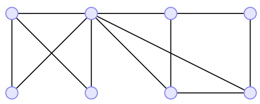
4. Le même graphe, sans l'arc (b, d).

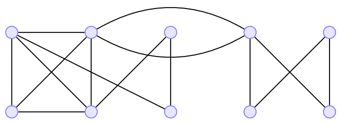
Ensembles de sommets des composantes fortement connexes : $\{a\}$, $\{b, c, e, f, h\}$, $\{d\}$, $\{g\}$, $\{i\}$. Condensation :



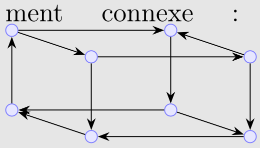
Exercice 3. Dessiner une orientation fortement connexe et une orientation acyclique de chacun des graphes orientés suivants.

1. 

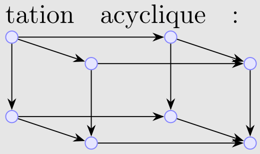
2. 

3. 

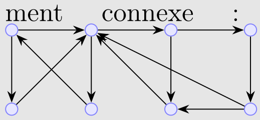
Exemple d'orientation fortement connexe :



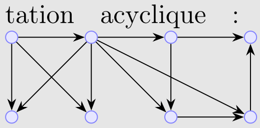
Exemple d'orientation acyclique :



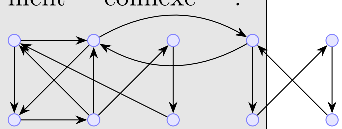
Exemple d'orientation fortement connexe :



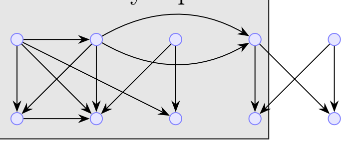
Exemple d'orientation acyclique :



Exemple d'orientation fortement connexe :



Exemple d'orientation acyclique :



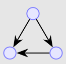
Exercice 4. On rappelle qu'un graphe orienté G est une *arborescence* s'il a un sommet, appelé *racine*, tel qu'il existe exactement un chemin orienté de la racine à n'importe quel sommet.

Dans cet exercice, on étudie les liens entre les arborescences, les arbres orientés, les DAG, et les arbres enracinés.

1. Montrer qu'une arborescence est un DAG avec une seule source.

> On montre d'abord que toute arborescence est un DAG, par contraposition, c'est-à-dire qu'on montre que si un graphe orienté contient un cycle orienté, alors ce n'est pas une arborescence.
>
> Soit G un graphe orienté qui contient un cycle orienté, dont on note $(s_1, \ldots, s_k, s_1)$ la suite de sommets. On veut montrer que G n'est pas une arborescence. Pour cela, on montre qu'on ne peut pas trouver de racine qui respecte les conditions de la définition. Autrement dit, on va montrer que pour tout sommet r de G, il existe (au moins) un sommet s de G tel qu'il n'y a pas un unique chemin de r à s. Soit r n'importe quel sommet de G ; si le sommet s_1 n'est pas accessible depuis r, alors il n'y a pas de chemin unique de r à s (puisqu'il n'y a pas de chemin du tout). Si au contraire s_1 est accessible depuis r, alors c'est qu'il existe un chemin orienté $(r, \ldots, s_1)$, mais dans ce cas on peut construire d'autres, par exemple $(r, \ldots, s_1, \ldots, s_k, s_1)$.
>
> Maintenant qu'il est prouvé que toute arborescence est un DAG, montrons que toute arborescence G a exactement une source. On sait qu'elle en a au moins une (c'est une propriété des DAG). On remarque que si un sommet s de G est une source, alors aucun sommet de G autre que s ne peut être la racine, puisque depuis tout sommet il n'y a aucun chemin qui mène à s. Cela signifie que si G a deux sources s_1 et s_2, alors aucun sommet autre que s_1 ne peut être la racine, mais également aucun sommet autre que s_2 ne peut être la racine, donc en particulier s_1 : G n'a pas de racine, ce qui est absurde. Donc G a exactement une source.

2. Montrer que « DAG avec une seule source » n'est pas une caractérisation des arborescences.

> Il faut montrer qu'il existe des DAGs ayant une seule source qui ne sont pas des arborescences. En voici un : 

3. Montrer qu'une arborescence est un arbre orienté.

> Soit G une arborescence et G' son graphe non orienté sous-jacent. Il faut montrer que G' est un arbre. Il est forcément connexe, car sinon il ne pourrait pas y avoir de chemin depuis la racine à tous les sommets. Supposons que G' ait un cycle $(s_0, a_1, \ldots, a_n, s_n)$. Les arcs correspondant aux arêtes du cycle ne peuvent pas être toutes orientés dans le même sens dans G (toutes dans le sens (s_i, s_{i+1}) ou toutes dans le sens (s_{i+1}, s_i), car si c'était le cas, G contiendrait un cycle orienté, or on a montré que c'est un DAG. Donc il y a au moins un sommet s sur le cycle dont les deux arêtes incidentes sur le cycle ont s comme destination dans G. Soient s' et s'' les origines des deux arcs en question. Il y a dans G un chemin orienté de la racine à s' et un chemin orienté de la racine à s'', donc deux chemins orientés distincts de la racine à s, ce qui contredit la définition d'une arborescence. G' est donc acyclique.
>
> Le graphe non orienté sous-jacent de G est connexe et acyclique, c'est donc un arbre, et G est donc un arbre orienté.

4. Montrer, plus précisément, que toute arborescence est une orientation d'un arbre enraciné où le sens de chaque arête est choisi du parent vers l'enfant.

Soit G une arborescence, r sa racine, et s un sommet quelconque. Soit G' le graphe non orienté sous-jacent de G, qui est un arbre. G est une orientation de G'. Soit r la racine de G ; considérons l'arbre enraciné (non orienté) (G', r). Soit un arc (s, s') quelconque de G. On va montrer que s est le parent de s' dans (G', r). Il y a un unique chemin orienté de r à s dans G. Ce chemin orienté correspond à un chemin dans G' de r à s. En le prolongeant avec l'arête $\{s, s'\}$ (qui correspond à l'arc considéré), on obtient un chemin de r à s' dont l'avant-dernier sommet est s. Par définition, s est donc un parent de s'.

Exercice 5.

1. Dessiner un graphe non orienté connexe qui n'a pas d'orientation forte.

Il suffit d'y mettre un isthme, voir théorème montré en cours. L'exemple le plus simple est celui-ci :

2. Dessiner un graphe non orienté qui n'a pas d'orientation acyclique.

Il suffit d'y mettre une boucle : 

Exercice 6. Trouver et démontrer une caractérisation des graphes orientés qui sont isomorphes à leur condensation.

Ce sont les DAGs simples.

($\Rightarrow$) On montre que les graphes orientés qui sont isomorphes à leur condensation sont des DAG simples. On a vu en cours que la condensation d'un graphe est un DAG. Par ailleurs, une condensation est un graphe simple par définition. Pour finir, un graphe isomorphe à un DAG simple est forcément un DAG simple.

($\Leftarrow$) Soit G un DAG simple ; on montre que G est isomorphe à sa condensation C. Dans un DAG aucune paire de sommets distincts n'est mutuellement accessible, donc les composantes fortement connexes de G sont d'ordre 1. On prend comme bijection la fonction qui associe chaque sommet s de G au sommet de C qui représente la composante fortement connexe de s (c'est-à-dire le sous-graphe de G qui ne contient que s). Il est clair que chaque arc de G correspond à un arc dans la condensation (puisque les composantes fortement connexes sont d'ordre 1), et chaque arc de la condensation correspond à un seul arc de G (car il n'y a pas d'arcs multiples dans un DAG simple), la bijection est donc bien un isomorphisme.

Exercice 7. Caractériser les graphes non orientés pour lesquels on peut trouver une orientation acyclique.

Les graphes sans boucles. Pour trouver une orientation acyclique d'un graphe non orienté simple il suffit de numéroter (arbitrairement) les sommets, et de toujours choisir les arcs qui vont du plus petit au plus grand. Il ne peut pas y avoir de cycle orienté, par construction. S'il y a des arêtes multiples la construction marche toujours. En revanche ça ne marche pas s'il y a une boucle, qui constituera elle-même un cycle orienté.

Exercice 8. Soit G un graphe non orienté avec k isthmes. Montrer que toute orientation de G admet au moins $k + 1$ composantes fortement connexes.

Par récurrence.

— (Cas de base) La propriété est trivialement vraie pour $k = 0$, puisque toute orientation de tout GNO a au moins une composante fortement connexe.

— (Récurrence) Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie pour tout $n \leq k$: toute orientation d'un GNO avec n isthmes admet au moins $n + 1$ composantes fortement connexes. Montrons qu'elle est vraie pour $k+1$. Soit G un GNO avec $k+1$ isthmes. Choisissons un de ses isthmes, a, et considérons le graphe $G-a$. Soit s l'une des extrémités de a dans G. Soit G_1 la composante connexe de s dans $G-a$, et G_2 le sous-graphe de $G-a$ constitué de toutes ses autres composantes connexes. Soit k_1 et k_2 le nombre d'isthmes de G_1 et G_2, respectivement. Puisque $G-a$ contient exactement k isthmes, on a $k_1+k_2=k$. Par l'hypothèse de récurrence, toute orientation de G_1 admet au moins k_1+1 composantes fortement connexes, et toute orientation de G_2 au moins k_2+1, donc toute orientation de $G-a$ en contient au moins $k_1+1+k_2+1=k+2$.

Montrons à présent qu'ajouter a à $G-a$ ne diminue pas le nombre de composantes fortement connexes des ses orientations. Soit G' une orientation quelconque de G : les extrémités de a n'appartiennent pas à la même composante fortement connexe, car si c'était le cas le GNO sous-jacent à cette composante connexe serait fortement orientable, ce qui est impossible par le théorème de Robbins puisque ce GNO est connexe et a un isthme. Le fait d'ajouter a n'a donc pas fusionné de composantes fortement connexes, donc G' a au moins $k+2$ composantes fortement connexes.

— Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.