Récapitulatif séances 01 à 06

Types de graphes

- *graphe* : ensemble de *sommets* et ensemble d'*arêtes*, chaque arête a deux sommets comme *extrémités*
  - les deux extrémités peuvent être le même sommet, on dit que l'arête est une *boucle*.
  - s'il y a plusieurs arêtes qui ont les mêmes extrémités, on parle parfois de *multigraphe* ou de graphe à arêtes multiples.
  - on appelle graphe *simple* un graphe sans boucle et sans arêtes multiples.
- un graphe est *orienté* si les arêtes ont un sommet *source* et un sommet *destination* (on parle d'*arcs*)
- on peut mettre une valuation/pondération/étiquette/etc. sur les arcs/arêtes, on parle alors de graphe valué/pondéré/etc.

Ordre et taille

- l'*ordre* d'un graphe est son nb de sommets
- la *taille* d'un graphe est son nb d'arêtes
- le *graphe nul* est le graphe d'ordre nul (sans sommet, et donc sans arête)
- un graphe *vide* est un graphe sans arête (mais il peut y avoir des sommets, il y a donc plusieurs graphes vides différents)

Vocabulaire de base

- des sommets sont dits *voisins* ou *adjacents* s'ils partagent une arête. Une arête est dite *incidente à un sommet* s'il est une de ses extrémités
  - *degré* d'un sommet = nb d'arêtes incidentes
- dans un graphe orienté, un sommet A est *successeur* d'un sommet B s'il y a un arc de B vers A. On définit *prédecesseur* de la même façon. On parle d'*arcs entrants* et *sortants* d'un sommet.
  - *degré entrant/sortant* d'un sommet = nb d'arcs entrants/sortants.
- un graphe simple non orienté est dit *régulier* si tous ses sommets ont le même degré
- un graphe simple non orienté est dit *complet* s'il y a une arête entre toute paire de sommets

Isomorphisme

- Un *isomorphisme* entre graphes simples G et G' est une bijection $f\colon S_G \to S'_G$ telle que pour tous sommets $s_1, s_2 \in S_G$, il y a une arête/arc de s_1 à s_2 dans G si et seulement s'il y en a une de $f(s_1)$ à $f(s_2)$ dans G'.
- G et G' sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux.

Somme des degrés et poignées de main

Soit $G = (S, A)$ un multigraphe non orienté. La *formule de la somme des degrés* est la suivante :

$$\sum_{s \in S} \mathrm{d}(s) = 2 \cdot |A|$$

Elle permet de prouver le *lemme des poignées de main* : tout multigraphe a un nombre pair de sommets de degré impair.

Familles de graphes non orientés

- K_n : graphe complet d'ordre n
- C_n : graphe-cycle d'ordre n
- P_n : graphe-chemin d'ordre n
- W_n : graphe-roue («wheel graph») d'ordre n, càd le graphe C_{n-1} auquel est ajouté un sommet universel (= relié à tous les autres)
- I_n : graphe vide d'ordre n («I» pour «independant»)
- S_n : graphe-étoile («star graph») d'ordre n, càd le graphe I_{n-1} auquel est ajouté un sommet universel

Sous-graphes

Soit $G = (S, A)$ un multigraphe. On appelle *sous-graphe* de G un graphe $G' = (S', A')$ tq $S' \subseteq S$ et $A' \subseteq A$.

Soit $S' \subseteq S$. Le *sous-graphe de G induit par S'*, noté $G|_{S'}$, est le graphe ayant S' pour ensemble de sommets, et qui maximise le nombre d'arêtes.

Cliques

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté.

Une *clique* dans G est un ensemble de sommets $C \subseteq S$ tel que le sous-graphe de G induit par C est complet.

Parfois on désigne aussi par «clique» le sous-graphe induit par une clique.

Une clique C dans G est *maximale* s'il n'est pas possible d'ajouter un sommet dans C et que le résultat soit une clique. (Elle est «maximale pour l'inclusion».)

Une clique C dans G est *maximum* si aucune clique dans G n'a strictement plus de sommets.

Stables

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté. Un *stable* dans G (independant set) est un ensemble de sommets $C \subseteq S$ tel que le sous-graphe de G induit par C est vide.

Notions de stable maximal et maximum similaires au cas des cliques.

Connexité et chemins

Soit G un multigraphe non orienté.

- un *chemin* dans G est une suite non vide de sommets et d'arêtes telle que
  - le premier et le dernier élément sont des sommets
  - les sommets et les arêtes sont alternés
  - chaque arête est encadrée par ses extrémités
- Autrement dit, c'est une suite non vide de la forme

$$(s_0, a_1, s_1, a_2, s_2, \ldots, s_{n-1}, a_n, s_n)$$

  , où les s_i sont des sommets et les a_i des arêtes telles que pour tout i, les extrémités de a_i sont s_{i-1} et s_i.
  - on dit alors que c'est un chemin de s_0 à s_n.
- à tout chemin sont associées une suite d'arêtes et une suite de sommets.
- sur les graphes simples, la donnée d'une suite de sommets suffit.
- Un sommet s_2 est dit *accessible depuis un sommet* s_1 ssi il existe un chemin de s_1 à s_2.
- Un graphe non nul est connexe ssi tout sommet est accessible depuis tout autre.
- *composante connexe* : sous-graphe induit connexe maximal pour l'inclusion, càd que si on rajoute un sommet le sous-graphe n'est plus connexe.
  - un graphe est connexe ssi il a une seule composante connexe.
- *longueur* d'un chemin = nb d'arêtes.
- un *plus court chemin* de s_1 à s_2 est un chemin de s_1 à s_2 tel que tout chemin de s_1 à s_2 est au moins aussi long.
- *distance* entre deux sommets = longueur d'un plus court chemin entre eux (si pas atteignable : $+\infty$)

Caractéristiques des chemins

Soit G un multigraphe non orienté. Soit $c = (s_0, a_1, s_1, a_2, s_2, \ldots, s_{n-1}, a_n, s_n)$ un chemin dans G.

- on appelle s_0 et s_n les *extrémités* de c, et les autres des « sommets internes ».
  - NB: un même sommet peut intervenir à la fois comme une extrémité et comme sommet interne.
- c est dit *vide* si $n = 0$
- c est dit *fermé* si $s_0 = s_n$, *ouvert* si $s_0 \neq s_n$
- c est dit *simple* si ses arêtes sont toutes distinctes : pour toute paire i, j d'indices distincts dans $[1, n]$, on a $a_i \neq a_j$.
- un croisement de c est un sommet qui apparaît plusieurs fois dans c, dont au moins une fois comme sommet interne.
- c est dit *sans croisement* si aucun de ses sommets n'est un croisement ; autrement dit, si ses sommets internes sont tous distincts, et aucune extrémité n'est rencontrée comme sommet interne.
- c est dit *élémentaire* s'il est simple et sans croisement.
- un *cycle* dans G est un chemin fermé non vide élémentaire.

Des caractéristiques de graphes liées à la distance

Soit $G = (S, A)$ un multigraphe non orienté non nul.

- l'*excentricité* d'un sommet s de G est $\mathrm{exc}(s) = \max_{s' \in S} \mathrm{d}(s, s')$
- le *diamètre* de G est $\mathrm{diam}(G) = \max_{s \in S} \mathrm{exc}(s)$
  - c'est la plus longue distance entre deux sommets
- le *rayon* de G est $\mathrm{ray}(G) = \min_{s \in S} \mathrm{exc}(s)$
- un sommet s de G est dit *central* s'il est d'excentricité minimale, c'est-à-dire que $\mathrm{exc}(s) = \mathrm{ray}(G)$ (autrement dit, $s \in \arg\min_{s' \in S} \mathrm{exc}(s')$)

Tournées eulériennes

On se place dans le contexte des multigraphes non orientés.

- un chemin est dit *eulérien* s'il passe une et une seule fois par chaque arête du graphe
- une *tournée eulérienne* est un chemin eulérien fermé
- un graphe est dit *eulérien* s'il a une tournée eulérienne
- theorème de caractérisation : un graphe connexe non nul est eulérien ssi tous ses sommets sont de degré pair.
- un graphe est dit *semi-eulérien* s'il a un chemin eulérien ouvert
- theorème de caractérisation : un graphe connexe non nul est semi-eulérien ssi il a exactement deux sommets de degré impair.