Récapitulatif séances 07 à 11

Arbres

On se place dans le contexte des multigraphes non orientés.

- un graphe est dit *acyclique* s'il ne contient pas de cycle
- un *arbre* est un graphe acyclique connexe
- une *feuille* d'un arbre est un sommet de degré 1
- Prop 1. tout arbre avec au moins 1 arête a au moins 2 feuilles.
- Prop 2. tout arbre d'ordre $n \geq 1$ a exactement n-1 arêtes.
- une *forêt* est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres
  - plus simplement : une *forêt* est un graphe acyclique.
- Corollaire de la prop 2: une forêt d'ordre $n > 0$ avec k composantes connexes a $n - k$ arêtes.
- Soit G un graphe non orienté et a une arête de G ; on note $G - a$ le graphe $(S_G, E_G \setminus \{a\})$.
- Lemme 1. pour tout graphe non orienté G, si a est une arête d'un cycle, alors G et $G - a$ ont le même nombre de composantes connexes.
- Corollaire du corollaire: un graphe non orienté d'ordre $n > 0$ avec k composantes connexes a au moins $n - k$ arêtes.
- Thm 1. Soit G un graphe non orienté d'ordre $n \geq 1$, les énoncés suivants sont équivalents :
  1. G est un arbre
  2. G est acyclique et a $n - 1$ arêtes
  3. G est connexe et a $n - 1$ arêtes
  4. pour toute paire de sommets s, s' de G, il y a exactement un chemin élémentaire entre s et s'
- Lemme 2. Soit G un graphe non orienté d'ordre $n \geq 1$ avec k composantes connexes. Il existe une forêt F d'ordre n avec k composantes qui est un sous-graphe de G.
- Lemme 3. Soit G un graphe non orienté connexe d'ordre $n \geq 1$. Si on ajoute une arête à G, on lui ajoute au moins un cycle.
- Prop 3. Soit G un graphe non orienté d'ordre $n \geq 1$ avec k composantes et m arêtes. Alors G contient au moins $m - n + k$ cycles.

Arbres enracinés

On se place dans le contexte des multigraphes non orientés.

- un arbre enraciné est un couple (G, r) où G est un arbre et r un sommet de G.
- la *profondeur* d'un sommet est sa distance à la racine. Le *niveau* k d'un arbre enraciné (G, r), noté $N_k(G, r)$ (ou simplement N_k quand il n'y a pas d'ambiguïté), est l'ensemble des sommets de profondeur k.
- on dessine les arbres enracinés en mettant la racine en haut, puis le niveau 1, puis le niveau 2, etc.
- la *hauteur* d'un arbre enraciné est la profondeur maximale d'un sommet
- deux arbres enracinés (G, r) et (G', r') sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme f entre G et G' qui préserve la racine, c'est-à-dire que $f(r) = r'$.
  - noter la différence entre un isomorphisme de graphes et un isomorphisme d'arbres enracinés (plus contraint).
- soit un chemin élémentaire partant de la racine, et soit un sommet s sur ce chemin. Tous les sommets qui précèdent s sur le chemin sont appelés *ancêtres* de s, et le sommet qui le précède immédiatement est appelé son *parent*.
- un *enfant* de s est un sommet dont s est le parent. un *descendant* de s est un sommet dont s est un ancêtre.
- une *feuille* d'un arbre enraciné est un sommet sans enfant.
- un *sommet interne* d'un arbre enraciné est un sommet avec au moins un enfant.
- l'*arité d'un sommet* est son nombre d'enfants ; *l'arité d'un arbre enraciné* est l'arité maximale de ses sommets. on parle d'arbre binaire, ternaire, m-aire.
- un arbre enraciné est dit *complet* si tous ses sommets internes ont la même arité et toutes ses feuilles ont la même profondeur.
- Prop. le niveau k d'un arbre m-aire complet (de hauteur $h \geq k$) contient exactement m^k sommets.
- Prop. un arbre m-aire complet de hauteur h a exactement $\frac{m^{h+1}-1}{m-1}$ sommets.
- Corollaire. un arbre m-aire de hauteur h a au plus $\frac{m^{h+1}-1}{m-1}$ sommets.

Graphes orientés

On se place dans le contexte des multigraphes orientés.

Chemins orientés

- *chemin orienté* : suite non vide de la forme $(s_0, a_1, s_1, a_2, s_2, \ldots, s_{n-1}, a_n, s_n)$, où les s_i sont des sommets et tous les a_i sont des arcs de s_{i-1} à s_i (càd que $\mathrm{dest}(e_i) = \mathrm{src}(e_{i+1})$).
- on adapte du cas non orienté les notions de longueur, de chemin orienté ouvert/fermé, de suite de sommets et de suite d'arcs associés à un chemin orienté.
- la *distance orientée de s à s'*, notée $\vec{\mathrm{d}}(s, s')$, est la longueur d'un plus court chemin orienté de s à s'
- un chemin orienté est dit *simple* s'il ne répète pas d'arc
- *croisement* d'un chemin orienté : sommet présent deux fois, dont (au moins) une fois comme sommet interne
- un chemin orienté est dit *élémentaire* s'il est simple et sans croisement
- un *cycle orienté* est un chemin orienté élémentaire fermé non vide

Connexité faible et forte

- le *graphe non orienté sous-jacent* d'un graphe orienté est le graphe obtenu en remplaçant chaque arc par une arête
- un graphe orienté est dit *faiblement connexe* si son graphe non orienté sous-jacent est connexe
- deux sommets s et s' d'un graphe orienté sont dits *mutuellement accessibles* s'il existe un chemin orienté de s à s' et un chemin orienté de s' à s.
- un graphe orienté est dit *fortement connexe* si toutes ses paires de sommets sont mutuellement accessibles.
- Prop. Tout graphe fortement connexe est faiblement connexe (mais la réciproque n'est pas vraie)

Arbres orientés et DAG

- un *arbre orienté* est un graphe orienté dont le graphe non orienté sous-jacent est un arbre
- idem pour les *forêts orientées*
- un graphe orienté est dit *acyclique* s'il n'a pas de cycle orienté. on parle de DAG (*directed acyclic graph*).
- Prop. Tout arbre orienté est acyclique (mais la réciproque n'est pas vraie).
- dans un graphe orienté, un sommet de degré entrant 0 est appelé une source, et un sommet de degré sortant 0 est appelé un puits.
- Tout DAG a au moins une source et un puits.

Composantes fortement connexes

- une *composante fortement connexe* d'un graphe orienté est un sous-graphe induit par un ensemble maximal (pour l'inclusion) de sommets mutuellement accessibles.
- Prop. Les composantes fortement connexes d'un graphe orienté forment une partition de ses sommets (mais pas de ses arcs).
- La *condensation* d'un multigraphe orienté G est le graphe orienté simple dont les sommets $F_1, \ldots, F_k$ sont les composantes fortement connexes de G, et qui contient l'arc de F_i à F_j $(i \neq j)$ si et seulement si il y a (au moins) un arc dans G d'un des sommets de F_i vers un des sommets de F_j.
- Prop. La condensation de tout graphe orienté est acyclique.

Orientations

- une *orientation* d'un graphe non orienté G est un graphe orienté obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête par un arc.
- un graphe non orienté est dit *fortement orientable* s'il admet une orientation fortement connexe.
- une arête a d'un graphe non orienté G est un *isthme* si $G - a$ a strictement plus de composantes connexes que G.
- Théorème de Robbins: un graphe non orienté connexe est fortement orientable si et seulement s'il n'a pas d'isthme.

Arborescences

- un graphe orienté G est une *arborescence* s'il a un sommet r, appelé *racine*, tel que pour tout sommet s de G, il existe exactement un chemin orienté de r à s.
  - une arborescence est une orientation d'un arbre enraciné pour laquelle tout arc va du parent vers l'enfant.