Inlämning 1

ERE103, Reglerteknik D3

Positions- och varvtalsreglering av hjulen

Ali Mohamed, almoha@student.chalmers.se
Ali Mohamud, almoh@student.chalmers.se

15 November, 2017

Avdelningen för Elektroteknik. Institutionen för System och reglerteknik
Chalmers tekniska högskola

Innehåll

1 Laplacetransformeringar och överföringsfunktioner

Systemet består av en elektrisk och mekanisk komponent, nämligen DC- motorn med tillhörande hjul. Effekten som motorn genererar regleras med spänningen u, som ger upphov till en ström i_a. Strömmen kommer att således ge upphov till ett vridmoment τ, vridmomentet är direkt proportionerligt emot strömmen med en proportionalitetskonstant.

Genom att härleda ekvationen $F = ma$ och nyttja sambandet att $a(t) = \frac{\partial}{\partial t}v(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}s(t)$ återfinns en förta ordningens differentialekvation som beskriver det mekaniska sambandet.

$$I\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = \tau_d(t) - b\cdot\omega(t); \quad I = I_m + I_h \tag{1}$$

Genom att tillämpa Kirchoffs spänningslag d.v.s att $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$ fås nedanstående samband.

$$R_a i_a(t) + L_a\frac{\partial}{\partial t}i_a(t) + u_m(t) = u(t) \tag{2}$$

Eftersom att systemet innehåller en induktor bildas ett mot-EMK[1] som är proportionerlig emot DC-motorns vinkelhastighet ω. Relationen ges av

$$u_m(t) = K_u\omega(t) \tag{3}$$

På samma sätt är strömmen i_a proportionerlig emot DC-motorns vridmoment τ. Relationen ges av

$$\tau_d(t) = K_m i_a(t) \tag{4}$$

1.1 Identifiera överföringsfunktionen: Elektrisk

Identifiera, med hjälp av modellen för DC-motorn, $G_e(s)$ i följande uttryck.

$$\tau_d(t) = G_e(s)(U(s) - K_u\Omega(s))$$

Lösning

$$\begin{aligned}
G_e(s) &= \frac{\tau_d(t)}{U(s) - K_u\Omega(s)} = \frac{K_m I_a(s)}{U(s) - K_u\Omega(s)} = \frac{K_m I_a(s)}{R_a I_a(s) - L_a s I_a(s) + U_m(s) - K_u\Omega(s)} \\
&= \frac{K_m I_a(s)}{I_a(s)(R_a + L_a s) + U_m(s) - K_u\Omega(s)} = \frac{K_m I_a(s)}{I_a(s)(R_a + L_a s) + K_u\Omega(s) - K_u\Omega(s)} \\
&= \frac{K_m}{R_a + L_a s}
\end{aligned}$$

[1] Motriktad elektromotorisk kraft

1.2 Identifiera överföringsfunktionen: Mekanisk

Identifiera, med hjälp av modellen för hjulet, $G_m(s)$ i följande uttryck.

$$\Omega(s) = G_m(s)\tau_d(s); \quad \text{där} \;\; \mathcal{L}\{\omega(t)\} = \Omega(s)$$

Bearbetning av ekvation (1) ger följande samband

$$= I\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = \tau_d(t) - b\cdot\omega(t) \Rightarrow I\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) + b\cdot\omega(t) = \tau_d(t) \Rightarrow \omega(t)(\frac{\partial}{\partial t}I + b) = \tau_d(t)$$

$$\omega(t) = \frac{\tau_d(t)}{\frac{\partial}{\partial t}I + b} = \underbrace{\tau_d(t)}_{\mathcal{L}^{-}1\{\tau_d(s)\}} \cdot \underbrace{(\frac{\partial}{\partial t}I + b)^{-}1}_{\mathcal{L}^{-}1\{G_m(s)\}}$$

$$G_m(s) = (Is + b)^{-1} = \frac{1}{Is + b}$$

1.3 Bestäm tidskonstanten för det mekaniska och elektriska systemen

Överföringsfunktionen $H(s)$ är ett bråk som kan omskrivas som $\frac{P(s)}{Q(s)}$, där dessa är täljar- och nämnarpolynom. Rötterna till $P(s)$ betecknas som nollställen medan rötterna till $Q(s)$ betecknas som poler. Om polerna är imaginära kommer systemet att oscillera, storleken på oscillationen beror på storleken av imaginärdelen.

Parametern T i $Q(s) = sT + 1$ är ett mått på systemets tempo och benämns för tidskonstant. Tidskonstanten är tid det tar för stegstvaret att uppgå till 63% av slutsvärdet. I tidsdomänen blir $\mathcal{L}^{-}1\{Q(s)\} = K_0 e^{-t/T}$.

$$\begin{cases} G_m(s) = \dfrac{1}{Is + b}, \quad \mathcal{L}^{-}1\{G_m(s)\} = e^{-b/I} \\ G_e(s) = \dfrac{K_m}{L_a s + R_a}, \mathcal{L}^{-}1\{G_e(s)\} = K_m e^{-R_a/L_a} \end{cases}$$

Genom att ansätta variabler b, I, R_a, L_a finner man att det elektriska systemet är snabbare.

1.4 Bestäm överföringsfunktionen

Bestäm överföringsfunktionen från spänningen u till hjulets varvtal ω, d.v.s.

$$G_{u\omega} = \frac{\Omega(s)}{U(s)}$$

Genom att substituera $i_a(t)$ mot ekv.(4) fås uttrycket

$$u(t) = R_a\frac{\tau_d(t)}{K_m} + L_a\frac{\partial}{\partial t}\cdot\left(\frac{\tau_d}{K_m}\right) + K_u\omega(t) = \frac{\tau_d(t)}{K_m}\left(R_a + L_a\frac{\partial}{\partial t}\right) + k_u\omega(t)$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \frac{\tau_d(s)}{K_m}\left(R_a + L_a s\right) + K_u\Omega(s)$$

Vidare är $G_m(s) = \dfrac{1}{Is+b}$ vilket medför att hjulets vinkelhastighet $\mathcal{L}\{\omega(t)\}$ är

$$\Omega(s) = \frac{\tau_d(s)}{Is+b}$$

Genom att ansätta de härledda uttrycken för $\Omega(s)$ och $U(s)$ i överföringsfunktionen G_{uw} blir överföringsfunktionen

$$\begin{aligned} G_{uw} &= \frac{\dfrac{\tau_d(s)}{Is+b}}{\dfrac{\tau_d(s)}{K_m}\Big(R_a + L_a s\Big) + K_u\Omega(s)} = \frac{\dfrac{\tau_d(s)}{Is+b}}{\dfrac{\tau_d(s)}{K_m}\Big(R_a + L_a s\Big) + K_u\dfrac{\tau_d(s)}{Is+b}} \\ &= \frac{K_m}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(Is+b)} \end{aligned}$$

2 Varvtalsreglering

2.1 Blockschema för systemet

2.2 Bestäm det kvarstående felet

Det kvarstående felet beräknas genom att beräkna gränsvärden för reglerfelet e_s d.v.s $\lim_{t\to\infty} e_s(t)$. Genom att laplacetransformera reglerfelet och tillämpa slutvädersstaten blir gränsvärdet $\lim_{s\to 0} sE(s)$. Nedan tillkommer lite ekvationer och samband som finns i labb-PM:et.

$$F(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \Rightarrow U(s) = F(s)E(s) \tag{5}$$

$$w_r(t) = w_o\sigma(t) \Rightarrow \Omega_r(s) = w_o\frac{1}{s}, \quad \sigma(t) \text{ är ett enhetssteg} \tag{6}$$

$$G_{uw} = \frac{\Omega_r(s)}{U(s)} \Rightarrow \Omega(s) = G_{uw}U(s) \Rightarrow \Omega(s) = G_{uw}F(s)E(s) \tag{7}$$

$$U(s) = F(s)\overbrace{(\Omega_r(s) - \Omega(s))}^{E(s)} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} E(s) &= \Omega_r(s) - \Omega(s) = \Omega_r(s) - GuwU(s) = \Omega_r(s) - G_{uw}F(s)E(s) \\ &= \Omega_r(s)(1 + F(s)G_{uw}(s))^{-1} = \frac{\Omega_r(s)}{1 + F(s)G_{uw}(s)} \\ &= \frac{\dfrac{\omega_o}{s}}{1 + F(s)\dfrac{K_m}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(b + Is)}} \end{aligned}$$

2.2.1 P-reglering

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\omega_0}{1 + \dfrac{K_m K_p}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(b + Is)}} &= \frac{\omega_0}{1 + \dfrac{K_m K_p}{K_m K_u + R_a b}} \\ = \frac{w_0(K_m K_u + R_a b)}{K_m Kp + K_m K_u + R_a b} \end{aligned}$$

2.2.2 PI-reglering

$$= \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\omega_0}{1+\frac{K_ps+K_i}{s}\frac{K_m}{K_mK_u+(R_a+L_as)(b+Is)}}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\omega_0 s}{1+\frac{K_ps+K_i}{s}\frac{K_m}{K_mK_u+(R_a+L_as)(b+Is)}} = \lim_{s\to 0} \frac{\omega_0 s}{s+\frac{K_m(K_ps+K_i)}{K_mK_u+(R_a+L_as)(b+Is)}}$$

$$= \frac{0}{\frac{K_mK_i}{K_mK_u+R_ab}} = 0$$

2.3 Jämför P-,I- och PI-reglering

$$F(s) = \begin{cases} K_p, & \text{P-reglering} \\ \frac{K_ps+K_i}{s} & \text{PI-reglering} \end{cases} \qquad L(s) = F(s)G_{uw}(s) \Rightarrow G(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Värden på de regulatorer som skall jämföras

Regulatorer	K_p	K_i
P	0.5	0
I	0	4.0
PI	0.1	4.0

Figur 1: Mathlab-plot av P-, I- och PI-reglering

3 Positionsreglering

3.1 Blockschema för systemet

3.2 Bestäm kvarstående felet

Det kvarstående felet bestäms genom att tillämpa slutvädersstaten. Förutsatt att $E(\infty)$ existerar medför detta $\lim_{t\to\infty} e_s(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$ Nedan kommer ekvationer och samband från labb-PM:et.

$$U(s) = F(s)(\Phi_r(s) - \Phi(s)) \tag{9}$$

$$U(s) = F(s)E(s) \tag{10}$$

$$\varphi_r(t) = \varphi_0 \cdot \sigma(t) \Rightarrow \Phi_r(t) = \varphi_0 \cdot \frac{1}{s} \tag{11}$$

$$\mathcal{L}\{\varphi\} = \mathcal{L}\{\textstyle\int \omega\} = G_{uw}(s)F(s)E(s)\frac{1}{s} \tag{12}$$

$$E(s) = \Phi_r(s) - \Phi(s) = \Phi_r(s) - G_{uw}(s)E(s)F(s)\frac{1}{s} = \frac{\Phi_r(s)}{1+G_{uw}(s)F(s)\frac{1}{s}}$$

$$= \frac{\frac{\varphi_0}{s}}{1+\frac{F(s)}{s}\frac{K_m}{K_mK_u+(R_a+L_as)(b+Is)}} = \frac{\varphi_0}{s+F(s)\frac{K_m}{K_mK_u+(R_a+L_as)(b+Is)}}$$

3.2.1 P-reglering

$$\lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\varphi_0 \cdot s}{s + F(s)\dfrac{K_m}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(b + Is)}} = \frac{0}{\dots} = 0$$

3.3 Bestäm dämpningsfaktorn och svängningsfrekvensen

Överfunktionen $G(s)$ lyder

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^s} \tag{13}$$

där ζ är systemets dämpningsfaktor och ω_n är systemets naturliga frekvens alt. svängningsfrekvensen. Vidare är systemets kretsöverföring

$$L(s) = F(s)G_{uw}(s) \tag{14}$$

Överföringsfunktionen $G(s)$ bli då

$$G(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{F(s)G_{uw}(s)}{1 + F(s)G_{uw}(s)} \tag{15}$$

Från ekvationer (12),(8) finner man

$$\Phi(s) = F(s)G_{uw}(s)(\Omega_r(s) - \Omega(s))\frac{1}{s} \tag{16}$$

Genom att multiplicera referenssignalen, börvärdet, $\Omega_r(s)$ med överföringsfunktionen måste utsignalen fås, detta medför att

$$\Omega(s) = G(s) \cdot \Omega_r(s) \tag{17}$$

Genom att utveckla ekv.(16)(17) fås

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K_p G_{uw}(s)}{s + K_p G_{uw}(s)} = \frac{\dfrac{K_m K_P}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(b + Is)}}{s + \dfrac{K_m K_p}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(b + Is)}} \\
&= \frac{K_p K_m}{s(K_m K_p + (R_a)(b + Is)) + K_p K_m} = \frac{K_p K_m}{s^2 R_a I + R_a b s + s K_u K_m + K_p K_m} \\
&= \frac{K_p K_m}{s^2 R_a I + s(R_a b + K_u K_m) + K_m K_p} = \frac{\dfrac{K_m K_p}{R_a I}}{s^2 + \dfrac{s}{R_a I}(R_a b + K_u K_m) + \dfrac{K_m K_p}{R_a I}}
\end{aligned}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_m K_p}{R_a I}}, \quad \zeta = \frac{\dfrac{R_a b + K_u K_m}{R_a I}}{2\omega_n} = \frac{R_a b + K_u K_m}{2\sqrt{K_p K_m R_a I}}$$

3.4 Undersök dämpningen

4 Styrsignal

Identifiera konstanterna `C0` och `C1`. Regulatorn har realiserats till källkoden nedan skriven i språket C. Referensvärdet (börvärdet) ges av `reference` medan utsignalen (ärvärdet) ges av `actual_output`.

```
void loop()
{
h = time_since_last_sample(); // samplingstid
reference = setpoint_generator_pulse(); // Borvarde
double actual_output = getRotSpeed(h); // Arvarde
double e = reference - actual_output; // Reglerfel
P = c0 * e; // P-del
double u = P + I; // Berakna styrsignal
I = I + c1*e; // Uppdatera I-delen
// Begransa styrsignalen -12 <= u <= 12
double saturated_u = constrain(u, -12.0, 12.0);
actuateControlSignal(saturated_u); // Aktuera styrsignal
```

`C0` identifieras som K_p och `C1` till $K_i h$