Inlämning 2

ERE103, Reglerteknik D3

Modellering och simulering av roboten

Ali Mohamed, almoha@student.chalmers.se
Ali Mohamud, almoh@student.chalmers.se

24 November, 2017

Institutionen för Elektroteknik. Avdelningen för System och reglerteknik
Chalmers tekniska högskola

Innehåll

1 Tillståndsmodell

1.1 a)

För att bevisa uttrycket för tillståndsekvationen

$$\dot{z_3} = \frac{1}{M + m\sin^2(z_1)}(-md\sin(z_1)z_2^2 + gm\cos(z_1)\sin(z_1) + \frac{T_d}{r})$$

måste följande samband och ekvationer härledas.

$$(M + m)\dot{z_3} - md\cos(z_1)\dot{z_2} + md\sin(z_1)z_2^2 = \frac{T_d}{r} \tag{1}$$

$$\cos(z_1)\dot{z_3} - dz_2 + g\sin(z_1) = 0 \tag{2}$$

För att bestämma tillståndsvariabeln $\dot{z_3}$ förlängs ekv. 2 med $m\cos(z_1)$, detta görs för att reducera $\dot{z_2}$. Ekv. 2 blir då istället:

$$m\cos^2(z_1)\dot{z_3} - md\cos(z_1)\dot{z_2} + gm\cos(z_1)\sin(z_1) = 0 \tag{3}$$

Genom en subtraktion mellan ekv. 1 och 3 fås

$$(M + m - m\cos^2(z_1))\dot{z_3} - md\sin(z_1)z_2^2 - gm\cos(z_1)\sin(z_1) = \frac{T_d}{r}$$

Genom att använda sambandet $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ och bryta ut $\dot{z_3}$ fås:

$$\dot{z_3} = \frac{1}{M + m\sin^2(z_1)}(-md\sin(z_1)z_2^2 + gm\cos(z_1)\sin(z_1) + \frac{T_d}{r})$$

1.2 b)

Det elektriska systemet beskrivs av följande differentialekvation:

$$-u + R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + k_u \omega_a(t) = 0 \tag{4}$$

Vidare kan strömmen $i_a(t)$ och vinkelhastigheten $\omega_a(t)$ beskrivas av följande samband

$$T_d = k_m i_a(t) \Rightarrow i_a(t) = \frac{T_d}{k_m} \tag{5}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \omega_a \cdot r \Rightarrow \omega_a = \frac{\overrightarrow{v_a}}{r} \tag{6}$$

Genom att substituera strömmen och vinkelhastigheten från ekv. (5) och (6) blir ekv. (4) följande. Notera att $\overrightarrow{v_a} = z_3$ medan $i_a(t) = z_4$

$$-u + R_a z_4 + L_a \dot{z}_4 + k_u z_3 = 0 \Rightarrow \dot{z}_4 = \frac{u}{L_a} - z_3 \frac{k_u}{r L_a} - z_4 \frac{R_a}{L_a}$$

Med tillståndsvariabeln $\dot{z}_4$ kan systemets tillståndsmodell bestämmas till:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{1}{d(M + m\sin^2(z_1))}(-md\cos(z_1)\sin(z_1)z_2^2 + g(m+M)sin(z_1) + \cos(z_1)\frac{k_m z_4}{r}) \\ \frac{1}{M + m\sin^2(z_1)}(-md\sin(z_1)z_2^2 + gm\cos(z_1)\sin(z_1) + \frac{k_m z_4}{r}) \\ \frac{u}{L_a} - z_3\frac{k_u}{rL_a} - z_4\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}$$

2 Jämviktspunkter

2.1 a)

Bestäm jämviktspunkterna för det olinjära systemet. En jämviktspunkt definieras av att tidsderivatan av alla tillståndsvariabler ska vara 0 vilket medför att alla tillståndvariabler är konstanta. Dessa fås därför genom att lösa ekvationssystemet.

$$0 = f_i(z_{i0}u_0), \quad i = 1, ...4$$

För att bestämma jämviktspunkterna för det olinjära systemet, måste matrisen sättas till noll på sid. 2 d.v.s. att lösa ekvationssystemet.

$$\begin{cases} z_{20} = 0 \\ \dfrac{1}{d(M + m\sin^2(z_{10}))}(-md\cos(z_{10})\sin(z_{10})z_{20}^2 + g(m+M)sin(z_{10}) + \cos(z_{10})\dfrac{k_m z_{40}}{r}) = 0 \\ \dfrac{1}{M + m\sin^2(z_{10})}(-md\sin(z_{10})z_{20}^2 + gm\cos(z_{10})\sin(z_{10}) + \dfrac{k_m z_{40}}{r}) = 0 \\ \dfrac{u}{L_a} - z_{30}\dfrac{k_u}{rL_a} - z_{40}\dfrac{R_a}{L_a} = 0 \end{cases}$$

Genom att substituera $Z_{20} = 0$ i alla led och bryta loss gemensam nämnare fås

$$\begin{cases} z_{20} = 0 \\ g(m+M)sin(z_{10}) + \cos(z_{10})\dfrac{k_m z_{40}}{r} = 0 \\ gm\cos(z_{10})\sin(z_{10}) + \dfrac{k_m z_{40}}{r} = 0 \\ u - z_{30}\dfrac{k_u}{r} - z_{40}R_a = 0 \end{cases}$$

Från system ekvationen fås

$$g(m+M)sin(z_{10}) + \cos(z_{10})\frac{k_m z_{40}}{r} = 0 \Rightarrow z_{40} = -\frac{g(m+M)\sin(z_{10})}{k_m\cos(z_{10})}$$

Genom att substituera z_{40} med tredje ekvationen i systemekvationen fås

$$gm\cos(z_{10})\sin(z_{10}) - \frac{g(m+M)\sin(z_{10})}{\cos(z_{10})} = 0, \;\; z_{10} = 0 \;\; + \;\; \pm\pi n \quad n \in \mathbb{N}$$

Detta betyder vidare att

$$z_{40} = -\frac{g(m+M)\sin(z_{10})}{k_m\cos(z_{10})} = g(m+M)tan(z_{10}) = 0$$

Genom att tillämpa ovanstående samband från tillståndvariablerna på den sista ekvationen fås

$$u - z_{30}\frac{k_u}{r} = 0 \Rightarrow z_{30} = u\frac{r}{k_u}$$

Genom att kombinera ovanstående blir jämviktspunkten:

$$\begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \\ z_{30} \\ z_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \overrightarrow{v_a} \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \pm\pi n \\ 0 \\ u\dfrac{r}{k_u} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.2 b)

Eftersom att den matematiska modellen inte betraktar markplanet kan det konstateras att roboten roterar kring sin axel. En jämviktspunkt blir således när roboten är stillastående. En ytterligare jämviktspunkt blir när roboten har en konstant hastighet. Det finns en relation mellan motorspänning och hastigheten som ges av:

$$u = k_u\omega$$

Detta medför att jämviktsläget istället uppnås genom en konstant motorspänning.

3 Linjärisering av systemet

Roboten skall linjäriseras vid jämviktspunkten då roboten är upprätt stillastående vilket medför att motorspänningen är 0. Detta ger följande:

$$\begin{bmatrix} z_{20} \\ z_{30} \\ z_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eftersom att utsignalen är $\theta = z_1$ behöver man linjärisera de tillståndekvationer som innehåller z_1 nämligen:

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2, z_4) \\ \dot{z}_3 = f_3(z_1, z_2, z_4) \end{cases}$$

För att förenkla linjäriseringen av den olinjära modellen skall nyttjas några egenskaper för sin och cos vid små vinklar. För vinklar z nära noll kan följande approximationer göras: $\sin(z) \approx z$ och $\cos(z) \approx 1$. Vi nyttjar även att f_2 och f_3 inte beror av z_3 därmed blir partialderivatan:

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial z_3}\right|_{z_0} = 0 \text{ och } \left.\frac{\partial f_3}{\partial z_3}\right|_{z_0} = 0$$

Partialderivator för f_2

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f_2}{\partial z_1}\right|_{z_0} &= \left.\frac{(-mdz_2^2 + g(m+M)) \cdot (mdz_1^2 + Md) - 2mdz_1(gz_1(m+M) - mdz_1z_2^2 + \frac{k_u z_4}{4})}{(mdz_1^2 + Md)^2}\right|_{z_0} \\
&= \frac{g(m+M)}{Md} = \frac{g}{d} + \frac{gm}{Md} \\
\left.\frac{\partial f_2}{\partial z_2}\right|_{z_0} &= -\left.\frac{2mdz_1z_2}{mdz_1^2 + Md}\right|_{z_0} = 0 \\
\left.\frac{\partial f_2}{\partial z_4}\right|_{z_0} &= \left.\frac{\frac{k_m}{r}}{mdz_1^2 + Md}\right|_{z_0} = \frac{k_m}{Mdr}
\end{aligned}$$

Partialderivator för f_3

$$\left.\frac{\partial f_3}{\partial z_1}\right|_{z_0} = \left.\frac{(mg - mdz_2^2)(mz_1^2 + M) - 2mz_1(mgz_1 - mdz_1z_2^2 + \frac{k_m z_4}{r})}{(mz_1^2 + M)^2}\right|_{z_0} = \frac{mg}{M}$$

$$\left.\frac{\partial f_3}{\partial z_2}\right|_{z_0} = -\left.\frac{2mdz_1z_2}{mz_1^2 + M}\right|_{z_0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f_3}{\partial z_4}\right|_{z_0} = \left.\frac{\frac{k_m}{r}}{mz_1^2 + M}\right|_{z_0} = \frac{K_m}{Mr}$$

Den linjära tillståndsmodellen blir således:

$$\begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{d} + \frac{mg}{Md} & 0 & 0 & \frac{K_m}{Mdr} \\ \frac{mg}{M} & 0 & 0 & \frac{k_m}{Mr} \\ 0 & 0 & -\frac{k_u}{rL_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}}_{B} \Delta u$$

$$\Delta y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \Delta z$$

4 Beräkningar och simuleringar i Matlab/Simulink

Överföringsfunktionen för den linjära tillståndsmodellen fås genom implementering av tillståndsmodellen i Matlabscriptet: Define`_Balanduino_Model.m`. Följande överingsfunktion erhålls

$$G(s) = \frac{7.247 \cdot 10^4 s}{s^4 + 9600 \cdot s^3 + 8.186 \cdot 10^4 \cdot s^2 - 7.282 \cdot 10^5 \cdot s - 4.466 \cdot 10^6}$$

med tillhörande poler:

$$\begin{cases} P_1 = -9.5915 \cdot 10^3 \\ P_2 = 0.0081 \cdot 10^3 \\ P_3 = -0.0116 \cdot 10^3 \\ P_4 = -0.0050 \cdot 10^3 \end{cases}$$

Systemet innehar en pol i höger planhalva därmed är systemet instabilt med avseende på jämviktspunkten där systemet är linjäriserat. Detta överensstämmer med verkligheten då roboten divergerar från jämviktspunkten d.v.s. när roboten står stilla i upprätt läge.

Vi kan konstatera att den linjära modellen överensstämmer med den givna modellen i det röda blocket på simulationen i `Simulink`. Vidare ser vi att den olinjära modellen bättre tar hänsyn till verkligheten, b.la. ses oscillatoriska inslag när vinkeln går mot π detsamma gäller vinkelhastigheten när den konvergerar mot ett värde.