

Inlämning 1

ERE103, Reglerteknik D3

Positions- och varvtalsreglering av hjulen

Ali Mohamed, almoha@student.chalmers.se

Ali Mohamud, almoh@student.chalmers.se

15 November, 2017

Innehåll

1	Laplacestransformeringar och överföringsfunktioner	1
1.1	Identifiera överföringsfunktionen: Elektrisk	1
1.2	Identifiera överföringsfunktionen: Mekanisk	2
1.3	Bestäm tidskonstanten för det mekaniska och elektriska systemen	2
1.4	Bestäm överföringsfunktionen	2
2	Varvtalsreglering	3
2.1	Blockschema för systemet	3
2.2	Bestäm det kvarstående felet	3
2.2.1	P-reglering	4
2.2.2	PI-reglering	4
2.3	Jämför P-,I- och PI-reglering	4
3	Positionsreglering	5
3.1	Blockschema för systemet	5
3.2	Bestäm kvarstående felet	5
3.2.1	P-reglering	6
3.3	Bestäm dämpningsfaktorn och svängningsfrekvensen	6
3.4	Undersök dämpningen	7
4	Styrsignal	7
5	5	8

1 Laplacetransformeringar och överföringsfunktioner

Systemet består av en elektrisk och mekanisk komponent, nämligen DC- motorn med tillhörande hjul. Effekten som motorn genererar regleras med spänningen u , som ger upphov till en ström i_a . Strömmen kommer att således ge upphov till ett vridmoment τ , vridmomentet är direkt proportionerligt emot strömmen med en proportionalitetskonstant.

Genom att härleda ekvationen $F = ma$ och nyttja sambandet att $a(t) = \frac{\partial}{\partial t}v(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}s(t)$ återfinns en förta ordningens differentialekvation som beskriver det mekaniska sambandet.

$$I \frac{\partial}{\partial t} \omega(t) = \tau_d(t) - b \cdot \omega(t); \quad I = I_m + I_h \quad (1)$$

Genom att tillämpa Kirchoffs spänningslag d.v.s att $\sum_{i=1}^n u_i = 0$ fås nedanstående samband.

$$R_a i_a(t) + L_a \frac{\partial}{\partial t} i_a(t) + u_m(t) = u(t) \quad (2)$$

Eftersom att systemet innehåller en induktor bildas ett mot-EMK¹ som är proportionerlig emot DC-motorns vinkelhastighet ω . Relationen ges av

$$u_m(t) = K_u \omega(t) \quad (3)$$

På samma sätt är strömmen i_a proportionerlig emot DC-motorns vridmoment τ . Relationen ges av

$$\tau_d(t) = K_m i_a(t) \quad (4)$$

1.1 Identifiera överföringsfunktionen: Elektrisk

Identifiera, med hjälp av modellen för DC-motorn, $G_e(s)$ i följande uttryck.

$$\tau_d(t) = G_e(s)(U(s) - K_u \Omega(s))$$

Lösning

$$\begin{aligned} G_e(s) &= \frac{\tau_d(s)}{U(s) - K_u \Omega(s)} = \frac{K_m I_a(s)}{U(s) - K_u \Omega(s)} = \frac{K_m I_a(s)}{R_a I_a(s) - L_a s I_a(s) + U_m(s) - K_u \Omega(s)} \\ &= \frac{K_m I_a(s)}{I_a(s)(R_a + L_a s) + U_m(s) - K_u \Omega(s)} = \frac{K_m I_a(s)}{I_a(s)(R_a + L_a s) + K_u \Omega(s) - K_u \Omega(s)} \\ &= \frac{K_m}{R_a + L_a s} \end{aligned}$$

¹Motriktad elektromotorisk kraft

1.2 Identifiera överföringsfunktionen: Mekanisk

Identifiera, med hjälp av modellen för hjulet, $G_m(s)$ i följande uttryck.

$$\Omega(s) = G_m(s)\tau_d(s); \quad \text{där } \mathcal{L}\{\omega(t)\} = \Omega(s)$$

Bearbetning av ekvation (1) ger följande samband

$$\begin{aligned} &= I \frac{\partial}{\partial t} \omega(t) = \tau_d(t) - b \cdot \omega(t) \Rightarrow I \frac{\partial}{\partial t} \omega(t) + b \cdot \omega(t) = \tau_d(t) \Rightarrow \omega(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} I + b \right) = \tau_d(t) \\ \omega(t) &= \frac{\tau_d(t)}{\frac{\partial}{\partial t} I + b} = \underbrace{\tau_d(t)}_{\mathcal{L}^{-1}\{\tau_d(s)\}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} I + b \right)^{-1}}_{\mathcal{L}^{-1}\{G_m(s)\}} \\ G_m(s) &= (Is + b)^{-1} = \frac{1}{Is + b} \end{aligned}$$

1.3 Bestäm tidskonstanten för det mekaniska och elektriska systemen

Överföringsfunktionen $H(s)$ är ett bråk som kan omskrivas som $\frac{P(s)}{Q(s)}$, där dessa är täljar- och nämnarpolynom. Rötterna till $P(s)$ betecknas som nollställen medan rötterna till $Q(s)$ betecknas som poler. Om polerna är imaginära kommer systemet att oscillera, storleken på oscillationen beror på storleken av imaginärdelen.

Parametern T i $Q(s) = sT + 1$ är ett mått på systemets tempo och benämns för tidskonstant. Tidskonstanten är tid det tar för stegsvaret att uppgå till 63% av slutsvärdet. I tidsdomänen blir $\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = K_0 e^{-t/T}$.

$$\begin{cases} G_m(s) = \frac{1}{Is + b}, & \mathcal{L}^{-1}\{G_m(s)\} = e^{-b/I} \\ G_e(s) = \frac{K_m}{L_a s + R_a}, & \mathcal{L}^{-1}\{G_e(s)\} = K_m e^{-R_a/L_a} \end{cases}$$

Genom att ansätta variabler b, I, R_a, L_a finner man att det elektriska systemet är snabbare.

1.4 Bestäm överföringsfunktionen

Bestäm överföringsfunktionen från spänningen u till hjulets varvtal ω , d.v.s.

$$G_{u\omega} = \frac{\Omega(s)}{U(s)}$$

Genom att substituera $i_a(t)$ mot ekv.(4) fås uttrycket

$$\begin{aligned} u(t) &= R_a \frac{\tau_d(t)}{K_m} + L_a \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(\frac{\tau_d}{K_m} \right) + K_u \omega(t) = \frac{\tau_d(t)}{K_m} \left(R_a + L_a \frac{\partial}{\partial t} \right) + K_u \omega(t) \\ \mathcal{L}\{u(t)\} &= U(s) = \frac{\tau_d(s)}{K_m} (R_a + L_a s) + K_u \Omega(s) \end{aligned}$$

Vidare är $G_m(s) = \frac{1}{Is + b}$ vilket medför att hjulets vinkelhastighet $\mathcal{L}\{\omega(t)\}$ är

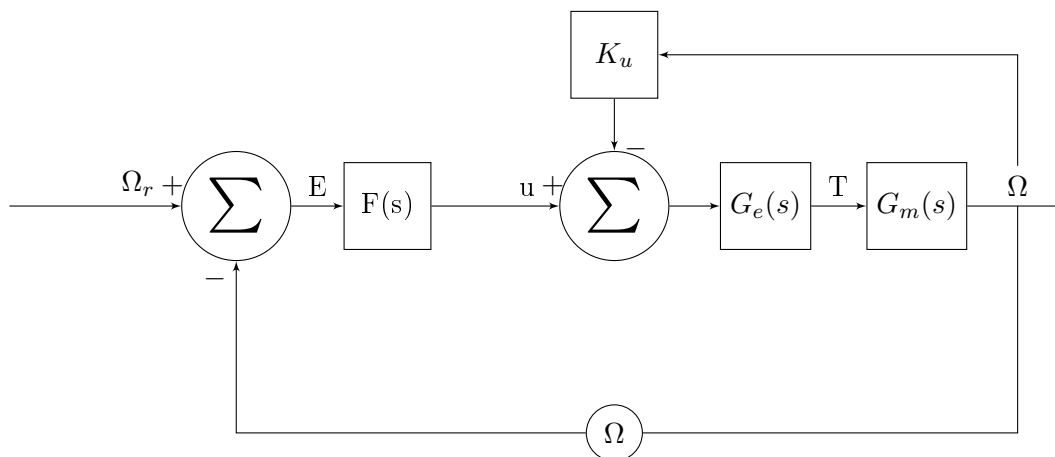
$$\Omega(s) = \frac{\tau_d(s)}{Is + b}$$

Genom att ansätta de härledda uttrycken för $\Omega(s)$ och $U(s)$ i överföringsfunktionen G_{uw} blir överföringsfunktionen

$$\begin{aligned} G_{uw} &= \frac{\frac{\tau_d(s)}{Is + b}}{\frac{\tau_d(s)}{K_m} (R_a + L_a s) + K_u \Omega(s)} = \frac{\frac{\tau_d(s)}{Is + b}}{\frac{\tau_d(s)}{K_m} (R_a + L_a s) + K_u \frac{\tau_d(s)}{Is + b}} \\ &= \frac{K_m}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(Is + b)} \end{aligned}$$

2 Varvtalsreglering

2.1 Blockschema för systemet



2.2 Bestäm det kvarstående felet

Det kvarstående felet beräknas genom att beräkna gränsvärden för reglerfelet e_s d.v.s $\lim_{t \rightarrow \infty} e_s(t)$. Genom att laplacetransformera reglerfelet och tillämpa slutvädersstaten blir gränsvärdet $\lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$. Nedan tillkommer lite ekvationer och samband som finns i labb-PM:et.

$$F(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \Rightarrow U(s) = F(s)E(s) \quad (5)$$

$$w_r(t) = w_o \sigma(t) \Rightarrow \Omega_r(s) = w_o \frac{1}{s}, \quad \sigma(t) \text{ är ett enhetssteg} \quad (6)$$

$$G_{uw} = \frac{\Omega_r(s)}{U(s)} \Rightarrow \Omega(s) = G_{uw}U(s) \Rightarrow \Omega(s) = G_{uw}F(s)E(s) \quad (7)$$

$$U(s) = F(s) \overbrace{(\Omega_r(s) - \Omega(s))}^{E(s)} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
E(s) &= \Omega_r(s) - \Omega(s) = \Omega_r(s) - G_{uw}U(s) = \Omega_r(s) - G_{uw}F(s)E(s) \\
&= \Omega_r(s)(1 + F(s)G_{uw}(s))^{-1} = \frac{\Omega_r(s)}{1 + F(s)G_{uw}(s)} \\
&= \frac{\frac{\omega_o}{s}}{1 + F(s)\frac{K_m}{K_mK_u + (R_a + L_as)(b + Is)}}
\end{aligned}$$

2.2.1 P-reglering

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_0}{1 + \frac{K_mK_p}{K_mK_u + (R_a + L_as)(b + Is)}} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{K_mK_p}{K_mK_u + R_ab}} \\
&= \frac{\omega_0(K_mK_u + R_ab)}{K_mK_p + K_mK_u + R_ab}
\end{aligned}$$

2.2.2 PI-reglering

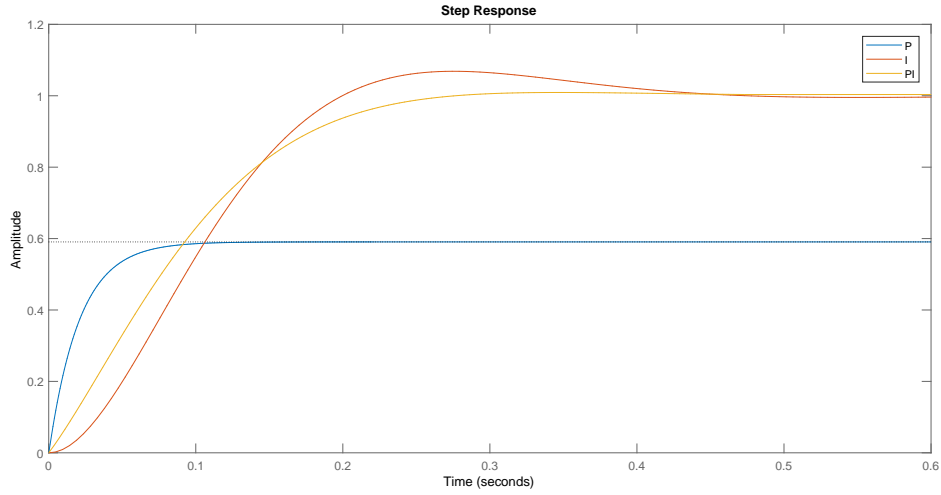
$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_0}{1 + \frac{K_ps + K_i}{s} \frac{K_m}{K_mK_u + (R_a + L_as)(b + Is)}} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_0 s}{1 + \frac{K_ps + K_i}{s} \frac{K_m}{K_mK_u + (R_a + L_as)(b + Is)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_0 s}{s + \frac{K_m(K_ps + K_i)}{K_mK_u + (R_a + L_as)(b + Is)}} \\
&= \frac{0}{\frac{K_mK_i}{K_mK_u + R_ab}} = 0
\end{aligned}$$

2.3 Jämför P-,I- och PI-reglering

$$F(s) = \begin{cases} K_p, & \text{P-reglering} \\ \frac{K_ps + K_i}{s} & \text{PI-reglering} \end{cases} \quad L(s) = F(s)G_{uw}(s) \Rightarrow G(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Värden på de regulatorer som skall jämföras

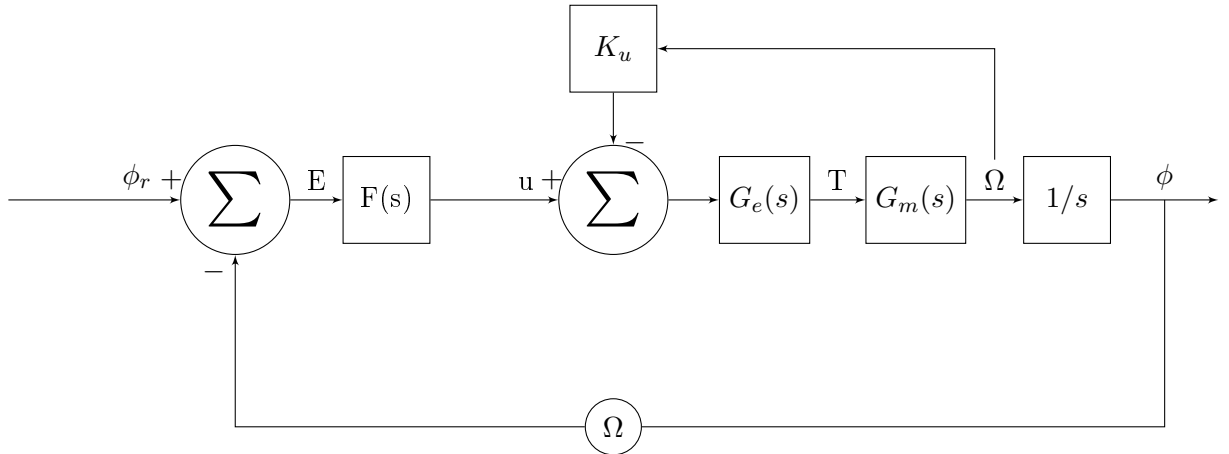
Regulatorer	K_p	K_i
P	0.5	0
I	0	4.0
PI	0.1	4.0



Figur 1: Mathlab-plot av P-, I- och PI-reglering

3 Positionsreglering

3.1 Blockschemat för systemet



3.2 Bestäm kvarstående felet

Det kvarstående felet bestäms genom att tillämpa slutvärdsstaten. Förutsatt att $E(\infty)$ existerar medför detta $\lim_{t \rightarrow \infty} e_s(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$ Nedan kommer ekvationer och samband från labb-PM:et.

$$U(s) = F(s)(\Phi_r(s) - \Phi(s)) \quad (9)$$

$$U(s) = F(s)E(s) \quad (10)$$

$$\varphi_r(t) = \varphi_0 \cdot \sigma(t) \Rightarrow \Phi_r(s) = \varphi_0 \cdot \frac{1}{s} \quad (11)$$

$$\mathcal{L}\{\varphi\} = \mathcal{L}\{f \omega\} = G_{uw}(s)F(s)E(s)\frac{1}{s} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
E(s) &= \Phi_r(s) - \Phi(s) = \Phi_r(s) - G_{uw}(s)E(s)F(s)\frac{1}{s} = \frac{\Phi_r(s)}{1 + G_{uw}(s)F(s)\frac{1}{s}} \\
&= \frac{\frac{\varphi_0}{s}}{1 + \frac{F(s)}{s} \frac{K_m}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(b + Is)}} = \frac{\varphi_0}{s + F(s) \frac{K_m}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(b + Is)}}
\end{aligned}$$

3.2.1 P-reglering

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi_0 \cdot s}{s + F(s) \frac{K_m}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(b + Is)}} = \frac{0}{\dots} = 0$$

3.3 Bestäm dämpningsfaktorn och svängningsfrekvensen

Överfunktionen $G(s)$ lyder

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (13)$$

där ζ är systemets dämpningsfaktor och ω_n är systemets naturliga frekvens alt. svängningsfrekvensen. Vidare är systemets kretsöverföring

$$L(s) = F(s)G_{uw}(s) \quad (14)$$

Överföringsfunktionen $G(s)$ bli då

$$G(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{F(s)G_{uw}(s)}{1 + F(s)G_{uw}(s)} \quad (15)$$

Från ekvationer (12),(8) finner man

$$\Phi(s) = F(s)G_{uw}(s)(\Omega_r(s) - \Omega(s))\frac{1}{s} \quad (16)$$

Genom att multiplicera referenssignalen, börvärdet, $\Omega_r(s)$ med överföringsfunktionen måste utsignalen fås, detta medför att

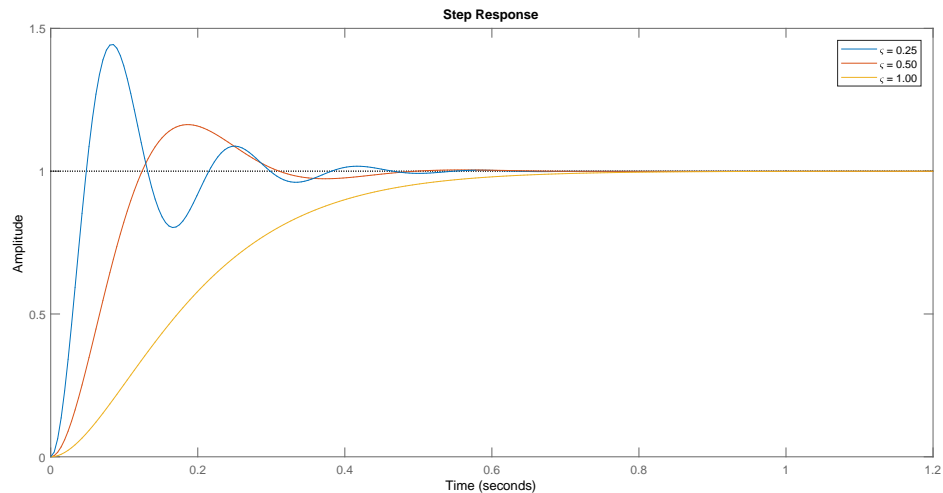
$$\Omega(s) = G(s) \cdot \Omega_r(s) \quad (17)$$

Genom att utveckla ekv.(16)(17) fås

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K_p G_{uw}(s)}{s + K_p G_{uw}(s)} = \frac{\frac{K_m K_p}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(b + Is)}}{s + \frac{K_m K_p}{K_m K_u + (R_a + L_a s)(b + Is)}} \\
&= \frac{K_p K_m}{s(K_m K_p + (R_a)(b + Is)) + K_p K_m} = \frac{K_p K_m}{s^2 R_a I + R_a b s + s K_u K_m + K_p K_m} \\
&= \frac{K_p K_m}{s^2 R_a I + s(R_a b + K_u K_m) + K_p K_p} = \frac{\frac{K_m K_p}{R_a I}}{s^2 + \frac{s}{R_a I}(R_a b + K_u K_m) + \frac{K_m K_p}{R_a I}} \\
\omega_n &= \sqrt{\frac{K_m K_p}{R_a I}}, \quad \zeta = \frac{\frac{R_a b + K_u K_m}{R_a I}}{2\omega_n} = \frac{R_a b + K_u K_m}{2\sqrt{K_p K_m R_a I}}
\end{aligned}$$

3.4 Undersök dämpningen

K_p	ζ
26.9720	0.25
6.7430	0.5
1.6858	1.0



Figur 2: Matlab-plot av olika dämpningar ζ

Vid högre värden på dämpningsfaktorn ζ till mindre översäng. Vidare tar det längre tid för system med hög dämpningsfaktor att nå sitt slutvärde.

4 Styrsignal

Identifiera konstanterna **C0** och **C1**. Regulatorn har realiserats till källkoden nedan skriven i språket C. Referensvärdet (börvärdet) ges av **reference** medan utsignalen (ärvärdet) ges av **actual_output**.

```
void loop()
{
  h = time_since_last_sample(); // samplingstid
  reference = setpoint_generator_pulse(); // Börvarde
  double actual_output = getRotSpeed(h); // Ärvarde
  double e = reference - actual_output; // Reglerfel
  P = c0 * e; // P-del
  double u = P + I; // Beräkna styrsignal
  I = I + c1*e; // Uppdatera I-delen
  // Begränsa styrsignalen -12 <= u <= 12
  double saturated_u = constrain(u, -12.0, 12.0);
  actuateControlSignal(saturated_u); // Aktuera styrsignal
}
```

C0 identifieras som K_p och **C1** till $K_i h$

5 5

