



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
( پلی تکنیک تهران )

طراحی الگوریتم

تمرین سوم

موعد تحویل: ۵ اسفند ۱۳۹۴

پاسخ ها را در کلاس تدریس یار تحویل دهید

بهمن ماه ۱۳۹۴

۱. با استفاده از قضیه اصلی روابط زیر را حل کنید:

$$۱. \quad t(n) = ۲t\left(\frac{n}{۲}\right) + n$$

$$۲. \quad t(n) = ۲t\left(\frac{n}{۲}\right) + n^{\log_۲ ۵}$$

$$۳. \quad t(n) = ۸t\left(\frac{n}{۲}\right) + ۱۸\left(\frac{n}{۲}\right)^۲$$

$$۴. \quad t(n) = ۷t\left(\frac{n}{۲}\right) + ۱۸\left(\frac{n}{۲}\right)^۲$$

۲. با استفاده از روش حل درختی به سوالات زیر پاسخ دهید: (فرض کنید که  $t(۰) = ۰, t(۱) = ۱$ )

$$۱) \quad t(n) = t(n-۱) + n$$

$$۲) \quad t(n) = ۲t\left(\frac{n}{۲}\right) + ۱$$

$$۳) \quad t(n) = ۲t(\sqrt{n}) + ۱$$

$$۴) \quad t(n) = ۴t\left(\frac{n}{۴}\right) + n$$

$$۵) \quad t(n) = ۲t\left(\frac{n}{۲}\right) + n^۲$$

۳. **حداقل** تعداد عناصر یک درخت AVL به ارتفاع  $h$  از رابطه زیر پیروی می کند. زیرا هر درخت AVL به ارتفاع  $h$  **حداقل** یک فرزند به ارتفاع  $h-۱$  دارد که آن درخت **حداقل**  $f(h-۱)$  عنصر دارد و یک فرزند به ارتفاع  $h-۲$  که آن درخت نیز **حداقل**  $f(h-۲)$  عنصر دارد. همچنین این درخت یک ریشه نیز دارد.

$$f(h) = f(h-۱) + f(h-۲) + ۱$$

$$f(۱) = ۱$$

به روش بازگشتی، مقدار  $f(h)$  را بدست آورید.

۴. توابع  $f$  و  $g$  را به صورت صریح بیابید:

راهنمایی: برای محاسبه  $f(n)$  سعی کنید  $g(n-۱)$  را برحسب  $f(n-۱), f(n-۲)$  بنویسید. شاید تفاضل دو رابطه کمک خوبی به حل مساله کند!

$$f(n) = f(n-۱) + g(n-۱)$$

$$g(n) = ۲f(n-۱) + g(n-۱)$$

$$f(۱) = ۱$$

$$g(۱) = ۱$$

۵. رابطه زیر را با استفاده از اثبات قضیه اصلی حل کنید (امتیازی).  
توجه: استفاده از روش درخت بازگشتی مجاز نیست.

$$t(n) = 3t\left(\frac{n}{3}\right) + 2t\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$t(0) = 1, t(1) = 3$$

۶. رابطه بازگشتی ای بنویسید که  $t(n) \in \theta(n^{\lg n})$  باشد. (همچنین درستی ادعای خود را اثبات کنید)  
۷. معادله ناهمگن زیر را حل کنید. توضیح دهید به چه دلیل نمی‌توان به پاسخ دقیق این معادله دست پیدا کرد.

$$t(n) = t\left(\frac{n}{4}\right) + t\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

۸. با در نظر گرفتن معادله زیر به پرسش‌ها پاسخ دهید.  
$$a(n) = 8a(n-1) + 16a(n-2) + F(n)$$
  
الف) جواب معادله همگن همبسته را در رابطه بالا بیابید.  
ب) فرم کلی پاسخ ویژه را در هریک از حالات زیر بیابید.

- $F(n) = n \cdot 4^n$
- $F(n) = n^3 \cdot 2^n$
- $F(n) = 4^n$
- $F(n) = n^2 \cdot 2^n$

موفق و پیروز باشید.