



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تمرین‌های سری سوم طراحی الگوریتم الگوریتم‌های تقسیم و حل

نیمسال دوم ۹۵-۹۶

دکتر زاهد رحمتی

- بارم تمام سوالات یکسان است. (به جز سوال دو که بارم هر موردش برابر با بارم یک سوال یک موردی است.)
- در مسائلی که الگوریتم خواسته شده است، ابتدا یک توضیح فارسی در مورد ایده کلی راه حل‌تان بدهید و سپس یک سودوکد سطح بالا برای حل ارائه دهید.
- درستی هر الگوریتمی که ارائه می‌دهید را ثابت کنید و مرتبه زمانی آن را تحلیل کنید.

۱. وارونگی مهم

یک آرایه n تایی به صورت a_0, a_2, \dots, a_{n-1} از اعداد داریم حقیقی داریم. زوج (i, j) را یک وارونگی مهم می‌نامیم هرگاه $i < j$ و $a_i > 2a_j$ باشد. الگوریتمی از مرتبه $O(n \lg n)$ ارائه دهید که تعداد وارونگی‌های مهم آرایه ورودی را پیدا کند.

۲. مینیمم محلی

(الف) یک آرایه n تایی از اعداد حقیقی متمایز به شما داده شده است. می‌گوییم خانه i ام این آرایه مینیمم محلی است اگر از دو خانه مجاورش (در صورت وجود) کوچک‌تر باشد. با استفاده از روش تقسیم و حل الگوریتمی ارائه دهید که یک مینیمم محلی این آرایه را در زمان $O(\lg n)$ پیدا کند.

(ب) یک درخت دودویی کامل با $2^n - 1$ رأس به شما داده شده است. که روی هر رأس آن یک عدد حقیقی نوشته شده است. (اعداد روی رأس‌ها متمایزند) می‌گوییم یک رأس از این درخت مینیمم محلی است اگر عدد نوشته شده روی آن از عدد نوشته شده روی هر یک از همسایه‌هایش (گره پدر یا فرزند) کمتر باشد. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n)$ ارائه دهید که یکی از مینیمم‌های محلی این درخت را پیدا کند.

(ج) (امتیازی) یک جدول $n \times n$ به شما داده شده است که روی هر خانه آن یک عدد حقیقی متمایز نوشته شده. یک خانه را مینیمم محلی گوییم اگر عدد آن از عدد هر یک از خانه‌های مجاورش (خانه‌هایی که دقیقاً یک یال مشترک با آن خانه دارند) کمتر باشد. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n)$ بیابید که یکی از مینیمم‌های محلی این جدول را پیدا کند.

۳. حذف سطوح مخفی

n خط L_1, L_2, \dots, L_n به شما داده شده است. که معادله خط L_i ، $a_i x_0 + b_i$ است. می‌گوییم خط L_i در نقطه x_0 بالاترین است اگر به ازای هر $j \in \{1, 2, \dots, n\}$: $a_i x_0 + b_i \geq a_j x_0 + b_j$. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \lg n)$ بیابید که مجموعه خطوطی که حداقل در یک نقطه بالاترین هستند را پیدا کند.

۴. تلفن بازی

2^n نفر می‌خواهند اطلاعاتشان را با هم به اشتراک بگذارند. هر یک اطلاعاتی دارد که بقیه از آن خبر ندارند. در هر مرحله هر فرد حداکثر با یک نفر دیگر از پشت تلفن صحبت می‌کند. و پس از پایان تلفن این دو نفر علاوه بر اطلاعات قبلی‌شان، اطلاعات نفر دیگر را نیز می‌داند. الگوریتمی برای انجام این تلفن‌ها ارائه دهید که در کمترین تعداد مراحل مختلف همه افراد از همه اطلاعات مطلع شوند.

۵. جعبه‌های سیاه

n جعبه سیاه به شما داده شده که ظاهر همه آن‌ها یکسان است. اما محتوای آن‌ها فرق می‌کند. دستگاهی وجود دارد که می‌تواند دو جعبه سیاه بگیرد و بگوید محتوای دو جعبه یکسان است یا نه. الگوریتمی طراحی کنید که با $O(n \lg n)$ بار استفاده از دستگاه بگوید آیا $n/2$ جعبه با محتوای یکسان وجود دارند یا نه.

۶. زیرآرایه ماکسیمم

یک آرایه n تایی $a[0], a[1], \dots, a[n-1]$ ، از اعداد صحیح به شما داده شده است. با استفاده از روش تقسیم و حل الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(n \lg n)$ دو عدد $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ($i \leq j$) را طوری برگرداند که مجموع $a[i] + a[i+1] + \dots + a[j]$ ماکسیمم شود.

۷. توان‌رسانی ماتریس

یک ماتریس $k \times k$ به شما داده شده است. فرض کنیم ضرب دو ماتریس $k \times k$ در زمان $O(1)$ انجام می‌شود. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(\lg n)$ ارائه دهید که توان n ام این ماتریس را محاسبه کند.

۸. [پیاده سازی] تعداد نابجایی‌ها

یک آرایه n تایی به صورت $a[0], a[1], \dots, a[n-1]$ به شما داده شده است. برنامه‌ای بنویسید که تعداد نابجایی‌های این دنباله را حساب کند.

زوج (i, j) را یک نابجایی می‌گوییم اگر $i < j$ ولی $a[i] > a[j]$.

ورودی

در سطر اول ورودی عدد n آمده که طول آرایه را نشان می‌دهد.

در سطر دوم ورودی n عدد صحیح آمده که با فاصله از هم جدا شده‌اند.

خروجی

یک عدد که نشان دهنده تعداد زوج‌ها می‌باشد.

محدودیت‌ها

$$n \leq 10^5$$

ورودی و خروجی نمونه

ورودی نمونه	خروجی نمونه
5 2 3 1 5 4	3

موفق باشید