



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
( پلی تکنیک تهران )

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

# تمرین‌های سری دوم طراحی الگوریتم الگوریتم‌های حریصانه و گراف‌ها

نیمسال دوم ۹۵-۹۶

دکتر زاهد رحمتی

### نکات:

- در مسائلی که الگوریتم خواسته شده است، ابتدا یک توضیح فارسی در مورد ایده کلی راه حلتان بدهید و سپس یک سودوکد سطح بالا برای حل ارائه دهید.
- هر الگوریتمی ارائه می‌دهید باید آن را اثبات کنید و مرتبه زمانی‌اش را تحلیل کنید.
- در همه سوالات فرض شده است که همه گراف‌ها، ساده، بدون جهت، و بی‌وزن هستند. مگر در مواردی که خلاف آن گفته شود.

## ۱. مساله زمانبندی

فرض کنید شرکتی داریم که یک تیم برنامه نویس دارد. و در  $n$  پروژه قرارداد بسته ایم. تیم برنامه نویس برای انجام هر کدام از پروژه‌ها، دقیقاً به یک هفته کار نیاز دارد. همچنین تیم برنامه نویس نمی‌تواند به صورت همزمان روی دو پروژه وقت بگذارد. و باید ابتدا یک پروژه را به صورت کامل تمام کند. سپس به سراغ پروژه بعدی برود.

همچنین برای انجام پروژه  $i$  ام، تا هفته  $d_i$  فرصت داریم. در صورتی کار  $i$  ام از deadline خود یعنی  $d_i$  بگذرد، باید خسارت  $w_i$  بپردازیم. در صورتی که قبل از deadline انجام شود، هیچ خسارتی را نباید بپردازیم.

الف) با فرض اینکه به ازای تمام  $i$  ها،  $w_i = w$  که مقدار ثابتی است، الگوریتمی برای یافتن زمانبندی مناسب پیشنهاد دهید به طوری که خسارت شرکت کمینه شود.

ب) حال به ازای  $w_i$  های دلخواه، مساله را حل کنید.

(ورودی مساله آرایه های  $d$  و  $w$  است و خروجی مساله، آرایه  $schedule[n]$  است. به طوری که خانه اول آن، نشان‌دهنده کاری است که در هفته اول انجام می‌شود. و خانه دوم آن نشان‌دهنده کاری است که در هفته دوم انجام می‌شود و به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند)

## ۲. بررسی زیردنباله

رشته  $s = \text{"aabbccdddef"}$  و رشته  $s' = \text{"acddf"}$  را در نظر بگیرید. رشته  $s'$  زیردنباله ای از رشته  $s$  است. زیرا تنها با حذف بعضی از حروف رشته  $s$  (و بدون تغییر در ترتیب حروف  $s$ ) می‌توان رشته  $s'$  را ساخت.

در بعضی کاربردها، نیازمند بررسی این هستیم که آیا یک رشته زیر رشته‌ای از یک رشته دیگر هست یا خیر.

الگوریتمی ارائه دهید که با گرفتن دو رشته  $s$  و  $s'$ ، مشخص کند که آیا رشته  $s'$  زیررشته رشته  $s$  هست یا خیر. زمان اجرای الگوریتم شما از مرتبه  $O(m + n)$  باشد که  $n$  طول رشته  $s$  و  $m$  طول رشته  $s'$  است.

### ۳. درخت چاق!

حمید اعتقاد دارد اگر فردی حداقل یکی از اعضای بدنش چاق باشد مستقل از این‌که سایر اعضای بدنش چقدر لاغر باشند چاق محسوب می‌شود. او می‌گوید فرد  $A$  از فرد  $B$  چاق‌تر است اگر و تنها اگر چاق‌ترین عضو فرد  $A$  از چاق‌ترین عضو فرد  $B$  چاق‌تر باشد. غزال طور دیگری فکر می‌کند! او اعتقاد دارد فرد  $A$  از فرد  $B$  چاق‌تر است اگر و تنها اگر وزن کل بدن فرد  $A$  از وزن کل بدن فرد  $B$  بیش‌تر باشد. حمید و غزال در مورد گراف‌ها نیز اعتقاد مشابهی دارند. اگر  $G1$  و  $G2$  دو گراف باشند که هر یک از یال‌های آن‌ها وزن مثبتی دارد، از نظر حمید گراف  $G1$  از گراف  $G2$  چاق‌تر است اگر و تنها اگر چاق‌ترین یال گراف  $G1$  از چاق‌ترین یال گراف  $G2$  چاق‌تر باشد. و از نظر غزال گراف  $G1$  از گراف  $G2$  چاق‌تر است اگر و تنها اگر مجموع وزن یال‌های گراف  $G1$  از مجموع وزن یال‌های گراف  $G2$  بیش‌تر باشد. فرض کنید  $G$  یک گراف باشد که هر یال آن وزن مثبتی دارد:

(الف) آیا لاغرترین درخت فراگیر  $G$  از نگاه حمید از نظر غزال هم لاغرترین درخت فراگیر  $G$  است؟ اگر بله، اثبات کنید. و اگر نه، مثال نقضی ارائه دهید.

(ب) آیا لاغرترین درخت فراگیر  $G$  از نگاه غزال از نظر حمید هم لاغرترین درخت فراگیر  $G$  است؟ اگر بله، اثبات کنید. اگر نه، مثال نقضی ارائه دهید.

(پ) الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(|V|+|E|)$  ارائه دهید که با گرفتن گراف  $G$  و عدد ورودی  $k$  بگوید آیا  $G$  زیردرخت فراگیری دارد که وزن سنگین‌ترین یالش از  $k$  بیش‌تر نباشد؟

(ت) با استفاده از الگوریتم بالا الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O((|E|+|V|)\log|E|)$  ارائه دهید که با گرفت گراف وزن‌دار  $G$  لاغرترین درخت فراگیر از نگاه حمید را بیابد.

(ث) الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O((|E|+|V|)\log|E|)$  ارائه دهید که با گرفتن گراف وزن‌دار  $G$  و دو رأس  $u$  و  $v$  از این گراف، از بین مسیرهای بین  $u$  و  $v$ ، لاغرترین از نگاه حمید را پیدا کند. (وزن یک مسیر از نگاه حمید بزرگترین یال آن مسیر است و لاغرترین مسیر، مسیری است وزن آن کمینه باشد)

(ج) (امتیازی) با استفاده از الگوریتم بالا الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(|E|+|V|)$  ارائه دهید که با گرفت گراف وزن‌دار  $G$  لاغرترین درخت فراگیر از نگاه حمید را بیابد.

### ۴. مهمان ناخواسته!

حمید در دانشکده‌ای با  $n$  دانشجو تحصیل می‌کند. بین برخی از دانشجویان این دانشگاه رابطه دوطرفه دوستی برقرار است. حمید یک مهمانی ترتیب داده. با این‌که این مهمانی حمید است ولی حمید کنترل چندانی بر افرادی که در آن شرکت می‌کنند ندارد. در واقع یک شخص می‌تواند در مهمانی حمید شرکت کند، اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر را داشته باشد.

۱. حمید باشد!

۲. هم‌دانشکده‌ای حمید باشد و با یکی از کسانی که در مهمانی حمید شرکت می‌کنند دوست باشد.

غزل، که هم‌دانشکده‌ای حمید است، خیلی روی اعصاب حمید راه می‌رود! به همین دلیل حمید خیلی از غزل بدش می‌آید و می‌خواهد مطمئن شود که غزل نمی‌تواند در این مهمانی شرکت کند. هم‌دانشکده‌ای‌های حمید که دوست دارند این مهمانی به حمید خیلی خوش بگذرد تصمیم گرفته‌اند که چند نفر را انتخاب کنند که در راه شادی حمید در این مهمانی فداکاری کنند و به مهمانی نیایند به طوری که با نیامدن این افراد به مهمانی، غزل شرایط شرکت در این مهمانی را نداشته باشد. اما حمید دوست دارد که همه هم‌دانشکده‌ای‌هایش (به جز غزل) بتوانند در این مهمانی شرکت کنند. پس تعداد افرادی که فداکاری می‌کنند و به مهمانی نمی‌آیند باید حداقل تعداد ممکن باشد. حالا سوآلی که برای هم‌دانشکده‌ای‌های حمید مطرح است این است که حداقل تعداد افرادی که نباید به مهمانی بیایند تا غزل شرایط شرکت در مهمانی را نداشته باشد چقدر است. آن‌ها که در درس طراحی الگوریتم ضعیف هستند نمی‌توانند به این سوآل پاسخ دهند و از شما خواسته‌اند این مسأله را برایشان حل کنید.

گراف دوستی‌های بین دانشجویهای دانشکده به گونه‌ای است که کوتاه‌ترین مسیر بین غزل و حمید بیش از  $n/2$  یال دارد.

الف) ثابت کنید فردی وجود دارد که اگر به مهمانی نیاید غزل شرایط شرکت در مهمانی را نخواهد داشت.  
 ب) الگوریتمی از مرتبه حداکثر  $O(n+m)$  طراحی کنید که چنین فردی را پیدا کند.  
 (راهنمایی: برای حل هر دو مورد می‌توانید از الگوریتم BFS استفاده کنید.)

## ۵. مسیر ناهموار

فرض کنید که شما مدیر یک شرکت توزیع مواد غذایی هستید و می‌خواهید مقدار  $k$  لیتر شیر را به دست یکی از مشتریان خود برسانید. شما تنها در ابتدا می‌توانید شیر از کارخانه لبنیات بگیرید. سپس باید با عبور از مسیر دلخواه به مشتری خود برسید. این مسیر ها به صورت گراف  $G = (V, E)$  داده شده است. شما در ابتدا در راس  $s$  هستید. در انتها باید با راس  $t$  برسید. با این شرط که به ازای عبور از راس  $u$  به راس  $v$  به ازای هر لیتر (در ابتدای مسیر) باید هزینه  $c_{uv} > 0$  را بپردازید. همچنین در هنگام عبور از راس  $u$  به  $v$  بعلا این‌که مسیرها ناهموار است مقداری از شیر از بین می‌رود و به طوری که اگر قبل از حرکت از  $u$  به  $v$  مقدار  $m$  شیرداشته باشیم، با عبور از راس  $u$  به راس  $v$ .

مقدار  $m * \gamma_{uv}$  که  $0 < \gamma_{uv} \leq 1$ ، شیر خواهیم‌داشت.

هزینه خرید هر لیتر شیر نیز، مقدار  $\alpha$  است.

همچنین در انتها باید مقدار  $k$  لیتر شیر داشته باشید.

**الگوریتمی بیابید که مسیری را پیدا کند که با کمترین هزینه بتوان  $k$  لیتر شیر به دست مشتری رساند.**

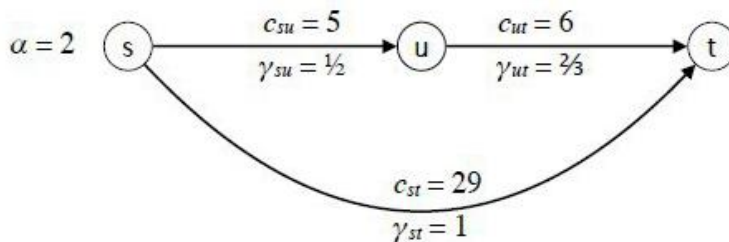
برای مثال در شکل زیر دو مسیر  $s-u-t$  و  $s-t$  را بررسی می‌کنیم:

فرض کنید که  $k=1$  باشد.

برای مسیر  $s-t$ : باید ابتدا ۱ لیتر شیر خریداری شود. که هزینه آن ۲ واحد است. سپس از  $s$  به  $t$  بروید که هزینه ۲۹ دارد. و از مقدار شیر چیزی کم نمیشود زیرا  $\gamma_{st} = 1$  در نتیجه هزینه کلی این مسیر مقدار ۳۱ میشود.

برای مسیر  $s-u-t$ : ابتدا باید ۳ لیتر شیر بخرد. که هزینه آن برابر با ۶ است. سپس با عبور از مسیر  $s-u$  مقدار شیر ۱٫۵ لیتر می‌شود. همچنین این مسیر به ازای هر لیتر هزینه ۵ واحد دارد. پس ۱۵ هزینه به ازای عبور خواهیم پرداخت. سپس از  $u$  به  $t$  می‌رود. در ابتدای این مسیر مقدار شیر ۱٫۵ لیتر بوده است و هزینه عبور به ازای هر لیتر ۶ است. در نتیجه هزینه عبور از  $u$  به  $t$  مقدار ۹ خواهد بود. در نتیجه هزینه کلی برابر می‌شود با:

$$\alpha * 3 + 3 \text{litre} * 5 + 1.5 \text{litre} * 6 = 30$$



۶. گراف وزن‌دار و بدون جهت  $G$  و یال  $e$  از این گراف داده شده است. الگوریتمی از زمان خطی ارائه دهید که تأیید کند آیا درخت پوشای کمینه‌ای وجود دارد که  $e$  عضو آن باشد؟

## ۷. زمان اتمام وزن‌دار [ پیاده‌سازی ]

$n$  دانشجو به مرکز کپی دانشکده مراجعه کرده‌اند. دانشجوی  $i$ ام جزوه‌ای برای کپی آورده که کپی آن  $t_i$  ثانیه طول می‌کشد. مسئول کپی بعضی دانشجویان را بیش‌تر دوست دارد. به همین خاطر ترجیح می‌دهد کار برخی را زودتر راه بیاندازد. به اینصورت که به دانشجو  $i$ ام وزن  $W_i$  می‌دهد (به دانشجویی که بیش‌تر دوست دارد وزن بیش‌تری می‌دهد). او می‌خواهد برنامه‌ای برای ترتیب کپی کردن جزوه دانشجویان بریزد که میزان رضایت عمومی نسبتاً بالا باشد ولی میزان رضایت کسانی که دوستانشان دارد بیش‌تر باشد. برای در نظر گرفتن یک معیار خوب، او تصمیم می‌گیرد از معیار *زمان اتمام وزن‌دار* استفاده کند. به این صورت که اگر یک برنامه مشخص برای ترتیب انجام کار مشتریان داشته باشد، برای مشتری  $i$ ام  $C_i$  را زمان تمام شدن کار مشتری  $i$ ام تعریف می‌کند. (مثلاً اگر مشتری  $i$ ام اولین مشتری‌ای باشد که کارش را انجام می‌دهد، و مشتری  $i$ ام دومین مشتری‌ای باشد که کارش را انجام می‌دهد،  $C_i = t_i + t_j$  و  $C_j = t_j$ ). زمان اتمام وزن‌دار در یک برنامه‌ریزی مشخص از ترتیب انجام کار مشتریان  $\sum_{i=1}^n W_i C_i$  تعریف می‌شود. هدف او این است که برنامه‌ای برای ترتیب انجام دادن کارها بریزد که زمان اتمام وزن‌دار آن یا همان  $\sum_{i=1}^n W_i C_i$  کمینه شود. برنامه‌ای بنویسید که به او بگوید به چه ترتیبی باید مشتریان را بپذیرد.

### ورودی

در سطر اول ورودی  $n$ ، تعداد مشتریان آمده است.

در سطر دوم  $n$  عدد  $t_1, t_2, \dots, t_n$  آمده است.

در سطر سوم  $n$  عدد  $W_1, W_2, \dots, W_n$  آمده است.

### خروجی

در سطر اول خروجی یک جایگشت از اعداد  $1, 2, \dots, n$  چاپ کنید که نشان‌دهنده یک برنامه بهینه برای ترتیب راه‌اندازی کار مشتریان است.

در سطر دوم  $\sum_{i=1}^n W_i C_i$  را برای برنامه‌ریزی‌ای که برنامه شما پیشنهاد داده نمایش دهید.

### محدودیت‌ها

$$1 \leq n \leq 10^5$$

$$1 \leq t_i, W_i \leq 20$$

### ورودی و خروجی نمونه

ورودی نمونه	خروجی نمونه
<b>2</b> <b>1 3</b> <b>10 2</b>	<b>1 2</b> <b>18</b>

### توضیح ورودی و خروجی نمونه

در ورودی نمونه اگر مشتریان را به ترتیب  $1, 2$  بپذیرد، زمان اتمام وزن‌دار برابر با  $46 = 2 \cdot 3 + 10 \cdot 4$  خواهد بود. در حالی که اگر به ترتیب  $2, 1$  بپذیرد، زمان اتمام وزن‌دار برابر با  $18 = 10 \cdot 1 + 2 \cdot 4$  است.

موفق باشید