



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تمرین‌های سری پنجم طراحی الگوریتم پیچیدگی محاسباتی

نیمسال دوم ۹۵-۹۶

دکتر زاهد رحمتی

- بارم هر مورد هر سوال یک نمره است. (مگر در موارد مشخص شده)
- در مسائلی که الگوریتم خواسته شده است، ابتدا یک توضیح فارسی در مورد ایده کلی راه حلتان بدهید و سپس یک سودوکد سطح بالا برای حل ارائه دهید.
- درستی هر الگوریتمی که ارائه می‌دهید را ثابت کنید و مرتبه زمانی آن را تحلیل کنید.
- در صورت داشتن ابهام با ایمیل ftmhsr95@gmail.com تماس بگیرید.

۱. عمق جعبه

مساله BoxDepth را که به صورت مقابل تعریف می‌شود در نظر بگیرید؛ n مستطیل در دستگاه مختصات داده شده که اضلاع آن‌ها با محورهای مختصات موازی است. می‌خواهیم یک زیرمجموعه با سایز ماکسیمم از آن پیدا کنیم که اشتراک اعضای آن ناتهی باشد.

(۱) این مساله را در زمان چندجمله‌ای به مساله Max-Clique کاهش دهید. (یعنی نشان دهید $\text{BoxDepth} \leq_p \text{Max-Clique}$)

(مساله Max-Clique: در گراف ساده G سایز بزرگترین زیرگراف کامل چند است؟)

(۲) یک الگوریتم چندجمله‌ای برای Max-Clique ارائه دهید. (الگوریتمی که ارائه می‌دهید لازم نیست بهینه باشد. تنها کافی است چندجمله‌ای باشد)

(۳) چرا از دو قسمت بالا نتیجه نمی‌شود $P = NP$ ؟

۲. دور همیلتونی

می‌دانیم مساله وجود دور همیلتونی در گراف (آیا در گراف ساده G دوری وجود دارد که از همه رئوس بگذرد؟) یک مساله NP-Complete است.

ثابت کنید مسائل زیر NP-Complete هستند.

(الف) گراف ساده G داده شده است. آیا دوری به طول $n/2$ در G وجود دارد؟

(ب) گراف ساده $G=(V, E)$ و عدد صحیح k داده شده است. آیا G یک درخت فراگیر مثل T دارد که درجه هر رأسی در T حداکثر k باشد؟

۳. مجموعه خیلی مستقل

در گراف ساده $G=(V, E)$ یک زیرمجموعه از رئوس را خیلی مستقل گوئیم اگر بین هیچ دو رأسی از آن مسیری به طول کمتر یا مساوی با ۲ وجود نداشته باشد (یعنی هیچ دو رأسی به هم وصل نباشند و رأسی وجود نداشته باشد که به هر دو آن‌ها وصل باشد) ثابت کنید مسأله روبه‌رو NP-Complete است: گراف ساده $G=(V, E)$ و عدد صحیح k داده شده است. آیا G یک زیرمجموعه خیلی مستقل با سائز حداقل k دارد؟

۴. مجموعه خالی از مثلث

مجموعه S از گراف ساده $G=(V, E)$ را خالی/از مثلث گوئیم، اگر به ازای هر سه رأس u, v, w در S ، حداقل یکی از یال‌های (uv) ، (uw) ، و (vw) در G موجود نباشد.

می‌خواهیم ثابت کنیم، پیدا کردنِ بزرگ‌ترین زیرگرافِ القاییِ خالی از مثلث در گراف ساده $G = (V, E)$ یک مسأله NP-Complete است.

اگر $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. و H گرافی باشد که از روی گراف G به صورت زیر به دست می‌آید: گراف H همان گراف G است که به آن به ازای هر یال در G یک رأس اضافه شده است که به رئوس دو سر آن یال متصل است.

(الف) ثابت کنید گراف H دارای یک زیرگرافِ خالی از مثلث با $|E| + k$ رأس است، اگر و تنها اگر، گراف G دارای یک مجموعه مستقل با k رأس باشد.

(ب) نتیجه بگیرید مسأله پیدا کردنِ بزرگ‌ترین زیرگرافِ القاییِ خالی از مثلث در گراف ساده $G = (V, E)$ یک مسأله NP-Complete است.