



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
( پلی تکنیک تهران )

# تمرین‌های سری اول طراحی الگوریتم

دکتر زاهد رحمتی

## سوال ۱. رشد توابع

در صورتی که  $A \in O(B)$  در خانه O "بله" بنویسید و در غیر این صورت "خیر" بنویسید.

در صورتی که  $A \in o(B)$  در خانه o "بله" بنویسید و در غیر این صورت "خیر" بنویسید.

در صورتی که  $A \in \Omega(B)$  در خانه  $\Omega$  "بله" بنویسید و در غیر این صورت "خیر" بنویسید.

و ....

فرض کنید که مقادیر  $k, \epsilon, c$  ثابت اند و:

$$\rightarrow k \geq 1, \epsilon > 0, c > 1$$

	A	B	O	o	$\Omega$	$\omega$	$\theta$
a	$\lg^k n$	$n^\epsilon$					
b	$n^k$	$c^n$					
c	$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
d	$2^n$	$2^{n/2}$					
e	$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$					
f	$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

## سوال ۲. حل روابط بازگشتی

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1, T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + 18\left(\frac{n}{2}\right)^2, T(1) = 1$$

## سوال ۳. Stable Matching

به ازای هر گزاره بگویید آیا درست است یا خیر.

در صورت غلط بودن مثال نقضی بزنید و در صورت درست بودن، آن را اثبات کنید:

گزاره الف) به ازای هر حالت از stable matching، یک زوج  $(m, w)$  خواهیم داشت که  $w$  بالاترین عضو لیست اولویت  $m$  است و همچنین  $m$  بالاترین عضو لیست اولویت  $w$  است.

گزاره ب) یک حالت را در نظر بگیرید که در آن  $m$  بالاترین عضو لیست اولویت  $w$  و  $w$  بالاترین عضو لیست اولویت  $m$  است. اثبات کنید به ازای هر حالت stable matching، حتما جفت  $m$  و  $w$  با هم جفت خواهند شد.

## سوال ۴. تعمیم Stable Matching

در این مساله شما باید سعی کنید مساله stable matching را در حالتی حل کنید که تعداد زن‌ها و مردها برابر نیست. برای راحتی فرض کنیم تعداد مردها  $m$  از تعداد زن‌ها  $n$  بیشتر است. در این حالت یک matching را perfect گوییم هرگاه هر زن دقیقاً با یک نفر زوج شده باشد. اگر  $S$  یک matching داده شده باشد، زوج  $(m, w)$  را unstable گوییم هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

- $m$  با کسی زوج نشده باشد؛ و  $w$  کسی که  $S$  به آن تخصیص داده را کمتر از  $m$  دوست داشته باشد.
- $m$  با کسی زوج شده باشد؛ و  $m$  کسی که  $S$  به آن تخصیص داده را کمتر از  $w$  دوست داشته باشد؛ و  $w$  کسی که  $S$  به آن تخصیص داده را کمتر از  $m$  دوست داشته باشد.

یک perfect matching را stable matching گوییم هرگاه هیچ زوج unstable نداشته باشد.

یک مساله stable matching در حالتی که تعداد مردها بیشتر از تعداد زن‌ها است به شما داده شده.

۱. ثابت کنید همواره یک stable matching وجود دارد. همچنین الگوریتم بهینه‌ای طراحی کنید که چنین matchingی بیابد. زمان الگوریتم خود را تحلیل کنید.

۲. ثابت کنید مجموعه مردها میتواند به دو مجموعه  $A$  و  $B$  افراز شود به گونه‌ای که اعضای  $A$  در هر stable matching به یک زن تخصیص داده می‌شوند و اعضای مجموعه  $B$  در هر stable matching تنها می‌مانند.

## سوال ۵. جستجو در اجتماع آرایه‌ها

دو آرایه مرتب  $A$  و  $B$  به ترتیب با اندازه‌های  $m$  و  $n$  و عدد صحیح  $k$  را در نظر بگیرید.

- یک الگوریتم با زمان کمتر از خطی ارائه دهید که  $k$  امین عضو کوچک در اجتماع دو آرایه را پیدا نماید.
- یک الگوریتم با زمان  $O(n \lg n)$  ارائه دهید که یک عضو از  $A$  و یک عضو از  $B$  را پیدا کند که مجموعشان  $k$  شود. یا بگوید چنین دو عضوی وجود ندارند.
- یک الگوریتم با زمان حداکثر خطی ارائه دهید که یک عضو از  $A$  و یک عضو از  $B$  را پیدا کند که مجموعشان  $k$  شود. یا بگوید چنین دو عضوی وجود ندارند.

موفق باشید