



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تمرین‌های سری چهارم طراحی الگوریتم الگوریتم‌های پویا

نیمسال دوم 95-96

دکتر زاهد رحمتی

- بارم هر مورد هر سوال يك نمره است. (مگر در موارد مشخص شده)
- در مسائلي كه الگوريتم خواسته شده است، ابتدا يك توضيح فارسي در مورد ايده كلي راه حلتان بدهيد و سپس يك سودوكد سطح بالا براي حل ارائه دهيد.
- درستي هر الگوريتمي كه ارائه مي دهيد را ثابت كنيد و مرتبه زماني آن را تحليل كنيد.
- در صورت داشتن ابهام با ايميل ftmhsr95@gmail.com تماس بگيريد.

۱. زیر آرایه/مستطیل ماکسیمم

الف) آرایه a_1, a_2, \dots, a_n از اعداد صحیح به شما داده شده است. الگوریتمی از مرتبه زمانی خطی بنویسید که i و j ($1 \leq i \leq j \leq n$) را طوری بیابد که $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ ماکسیمم شود.

ب) آرایه دو بعدی a از اعداد صحیح به شما داده شده است. الگوریتمی طراحی کنید که اعداد (i, j, l, k) ($1 \leq i, j, l, k \leq n$) را طوری بیابد که مجموع اعداد تولید شده توسط زیرمستطیلی از a که گوشه چپ و بالایش خانه (i, j) و گوشه راست و پایینش خانه (l, k) است ماکسیمم شود. (الگوریتم شما باید از $O(n^4)$ باشد، هرچه الگوریتم شما سریع تر باشد نمره بیش تری تعلق می گیرد)

۲. DAG

يك گراف جهت دار بدون دور (DAG) به شما داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که؛

الف) طول بزرگ ترین مسیر جهت دار آن را در زمان $O(V + E)$ پیدا کند.

ب) تعداد مسیرهای بین دو رأس داده شده ی u و v را در زمان $O(V + E)$ پیدا کند.

۳. رنگ آمیزی درخت

درخت T به شما داده شده است. می خواهیم رئوس آن را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ آمیزی کنیم به طوری که هیچ دو رأس مجاوری از آن آبی نباشند. الگوریتمی از مرتبه زمانی خطی ارائه دهید که رئوس این درخت را طوری رنگ آمیزی کند که تعداد رئوس آبی ماکسیمم شود.

۴. چینن مهره ها

تعداد n مهره در اختیار داریم. می خواهیم این مهره ها را در چند ستون کنار هم بچینیم به طوری که ارتفاع هر ستون از ستون قبلی اش بیش تر باشد. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n^3)$ ارائه دهید که تعداد حالات چینش مهره ها را محاسبه کند.

۵. جایگشت پلکانی

به یک جایگشت از اعداد $1, 2, \dots, n$ پلکانی گوییم اگر هر عضو از آن (به جز عضو اول و آخر) اکسترمم محلی باشد. عضو a_i ($1 < i < n$) از دنباله a_1, a_2, \dots, a_n را اکسترمم محلی گوییم اگر $a_{i-1} < a_i > a_{i+1}$ یا $a_{i-1} > a_i < a_{i+1}$.
الف) الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n^3)$ و حافظه $O(n^2)$ ارائه دهید که تعداد جایگشت‌های پلکانی اعداد 1 تا n را بیابد.
ب) الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n^3)$ و حافظه $O(n)$ ارائه دهید که تعداد جایگشت‌های پلکانی اعداد 1 تا n را بیابد.

۶. شکاف کلمات

در یک بازی به شما یک کلمه با حروف لاتین داده می‌شود. شما باید طی عملیاتی این کلمه را به یک کلمه دیگر تبدیل کنید.

فرض کنید کلمه w به شما داده شده است. شما می‌توانید w را به دو قسمت ناتهی x و y تقسیم کنید به طوری که $w = xy$. به تبدیل کردن کلمه $w = xy$ به کلمه $u = yx$ یک عمل شکاف می‌گوییم. برای مثال یک عمل شکاف می‌تواند کلمه “wordcut” را به هر یک از y کلمه “ordcutw”، “rdcutwo”، “dcutwor”، “cutword” تبدیل کند.

دو کلمه $start$ و end داده شده است. می‌خواهیم دقیقاً k عمل شکاف روی کلمه $start$ انجام دهیم تا کلمه end تولید شود. هدف پیدا کردن الگوریتمی است که با داشتن $start, end, k$ بتواند به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد.

(دو دنباله از عملیات شکاف را متفاوت می‌گوییم اگر عدد طبیعی i که $1 \leq i \leq k$ موجود باشد که در دنباله اول از عملیات شکاف، عمل i ام کلمه را به دو کلمه x و y می‌شکافد و در دنباله دوم، عمل i ام کلمه را به دو کلمه a و b می‌شکافد و $x \neq a$).

الف) نشان دهید هر عمل شکاف معادل یک عمل شیفت به راست است. (۵/۰ نمره)

ب) الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(nk)$ ارائه دهید که تعداد روش‌های تبدیل کلمه $start$ به کلمه end را طی k عمل شکافت متوالی محاسبه کند.

* مثلاً اگر کلمه $start$ و end هر دو ab باشند و $k=2$ ، جواب 1 خواهد بود. زیرا تنها راه تبدیل $start$ به end به صورت زیر است.

$$ab \rightarrow a|b \rightarrow ba \rightarrow b|a \rightarrow ab$$

۷. طولانی ترین زیردنباله صعودی

آرایه a_1, a_2, \dots, a_n از اعداد صحیح متمایز به شما داده شده است. منظور از یک زیردنباله از آرایه a ، یک دنباله به صورت $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ است که، $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

(الف) الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n^2)$ ارائه دهید که طولانی ترین زیردنباله صعودی آرایه a را بیابد. (در صورت یکتا نبودن جواب، پیدا کردن یکی از جواب ها کافی است.)

(ب) الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \lg n)$ ارائه دهید که طولانی ترین زیردنباله صعودی آرایه a را بیابد. (در صورت یکتا نبودن جواب، پیدا کردن یکی از جواب ها کافی است. (۱/۵ نمره)

۸. [پیاده سازی] مجموع فرد

آرایه a_1, a_2, \dots, a_n از اعداد صحیح متمایز به شما داده شده است. از شما خواسته شده که یک زیردنباله از این اعداد پیدا کنید به طوری که مجموع اعداد آن فرد و هم چنین ماکسیمم مقدار ممکن باشد. (آرایه ورودی حتما یک زیردنباله با مجموع اعضای فرد خواهد داشت)

یک زیردنباله از یک دنباله، دنباله ای است که از حذف برخی اعضای دنباله اول و بدون عوض کردن ترتیب اعضای باقی مانده به دست می آید. به عنوان مثال ۵، ۳، ۹ یک زیردنباله از دنباله ۱، ۴، ۵، ۱۰، ۷، ۳، ۱۱، ۹، ۲ است.

شما باید برنامه ای بنویسید که جمع اعداد بهترین زیردنباله را چاپ کند.

ورودی

در خط اول طول آرایه ورودی، n ، آورده شده است.

در خط دوم n عدد a_1, a_2, \dots, a_n آورده شده است که با فاصله از هم جدا شده اند.

خروجی

در تنها سطر خروجی یک عدد چاپ کنید که مجموع اعضای یک زیردنباله از دنباله a_1, a_2, \dots, a_n است و مجموع اعداد آن فرد و ماکسیمم است.

محدودیت ها

$$1 \leq n \leq 10^5$$

$$-10^4 \leq a_i \leq 10^4$$

آرایه ورودی حداقل یک زیردنباله با مجموع فرد دارد.

ورودی و خروجی نمونه

ورودی نمونه	خروجی نمونه
4 -2 2 -3 1	3
3 2 -5 -3	-1