تمرین اول درس شناسایی آماری الگو

مریم سعیدی فرد

۹۶۱۳۱۱۳۱

سوال ۱

	a	b	c	d	E
۱	recognition	regression	classification	classification	clustering
۲	camera		Camera & microphon		camerac
۳	تصاویر چهره دانش‌آموزان	نسبت قسمت‌ها در یک بازه زمانی	فیلم‌هایی از محیط زندان	فیلم‌های مختلف	لیست تیم‌ها و چیدمانشان

۴. به دست آوردن مجموعه‌داده

a. عکس گرفتن از چهره دانش‌آموزان در زوایای و نورپردازی و حالات مختلف

b. ثبت نسبت دلار به ریال در بازه‌های زمانی کوتاه و یکسان در مدت زمان مشخص (نسبتا طولانی)

c. ثبت ویدئو رفتارهایی که در زندان اتفاق می‌افتد و برچسب‌گذاری دستی آن‌ها به نرمال یا غیرهجار

d. جمع‌آوری مجموعه بزرگی از فیلم‌های موجود و برچسب‌گذاری آن‌ها توسط افراد ماهر به ژانرهای مرتبطشان

e. ثبت کردن تمام حالاتی که تیم فوتبال می‌تواند با آن حالات بازی کند در طی بازی‌های مختلف

۵.

a. شکل صورت

b. قیمت دلار و قیمت ریال

c. سرعت حرکت و حرکات دست و پوشش

d. آهنگ‌های موجود در فیلم، جلوه‌های ویژه و لوکیشن‌ها و دیالوگ‌ها

e. محل قرارگیری بازیکنان

۶.

a. پیش‌پردازش‌های معمولی که روی تصاویر صورت می‌گیرد. مانند تغییر سایز و زاویه عکس و یا نور آن

b. پیش‌پردازشی نیاز نیست

c. حذف نویزهای محیطی یا شرایط خاصی که روی رفتار افراد تاثیر می‌گذارد

d. حذف قسمت‌های نامرتبط فیلم و نرمال کردن سایر قسمت‌ها

e. پیش‌پردازش نیاز ندارد

۷.

a. شباهت دو دانش‌اموز در چهره، باعث گمراه شدن و پایین آمدن دقت سیستم. یا کیفیت پایین دوربین و یا مخفی شدن پشت موانع موجود

b. نوسانات غیرقابل پیش‌بینی بازار و تحولات سیاسی و جهانی

c. هوشمند بودن عامل نابهنجار و بروز رفتارهای هوشمندانه و نوین که در بین داده‌های آموزشی نبوده است.

d. فیلمی که به ژانرهای بسیاری به نسبت‌های تقریبا مشابه، تعلق داشته باشد.

e. ارائه ساختار جدید که از پیش موجود نبوده است.

۸.

a. خطای انسانی را کاهش می‌دهد. در زمان مدیر و مربی مسئول صرفه جویی می‌شود و حتما هردفعه این کار صورت می‌پذیر، بدون درگیر کردن دانش‌آموزی یا مربی

b. امکان برنامه‌ریزی بلند مدت و سرمایه‌گذاری را فراهم می‌کند.

c. قبل از وقوع رخداد متوجه رفتار غیرعادی می‌شود. در موارد انسانی دقت پایین است و اشتباه بالاست. همچنین امکان برخورد و درگیری فرد ناهنجار با مورد انسانی وجود دارد. غفلت و ناهشیاری مورد انسانی ممکن است ضربات جبران ناپذیر وارد کند و هشیار نگه داشتن دائم مورد انسانی هزینه بالایی دارد.

d. هزینه و زمان زیادی برای برچسب‌گذاری توسط نیروی انسانی مورد نیاز است. همچنین هر فرد بر اساس سلیقه تصمیم گیری می‌کند.

e. خطای انسانی در این موارد بالاست. دقت سیستم بالاتر است و همچنین سیستم می‌تواند زمان بیشتری را مد نظر گرفته و تحلیل کند و به همیمن دلیل معتبرتر است.

سوال ۲

a.

a1. خمیده بودن یا نه (شکل ظاهری)

a2. رنگ

a3. اندازه

a4. قطر

a5. طول

a6. طول و قطر

a7. شکل ظاهری و طول

a8. شکل ظاهری و طول و قطر

b.

b1. رنگ

b2. لکه‌دار بودن

b3. سیاهی داشتن

b4. خمیدگی / رنگ

b5. رنگ

b6. رنگ و میزان لکه‌ها

b7. میزان سیاهی داشتن

b8. رنگ و شدت سیاهی لکه‌ها

c.

c1. رنگ

c2. میزان فضای خالی

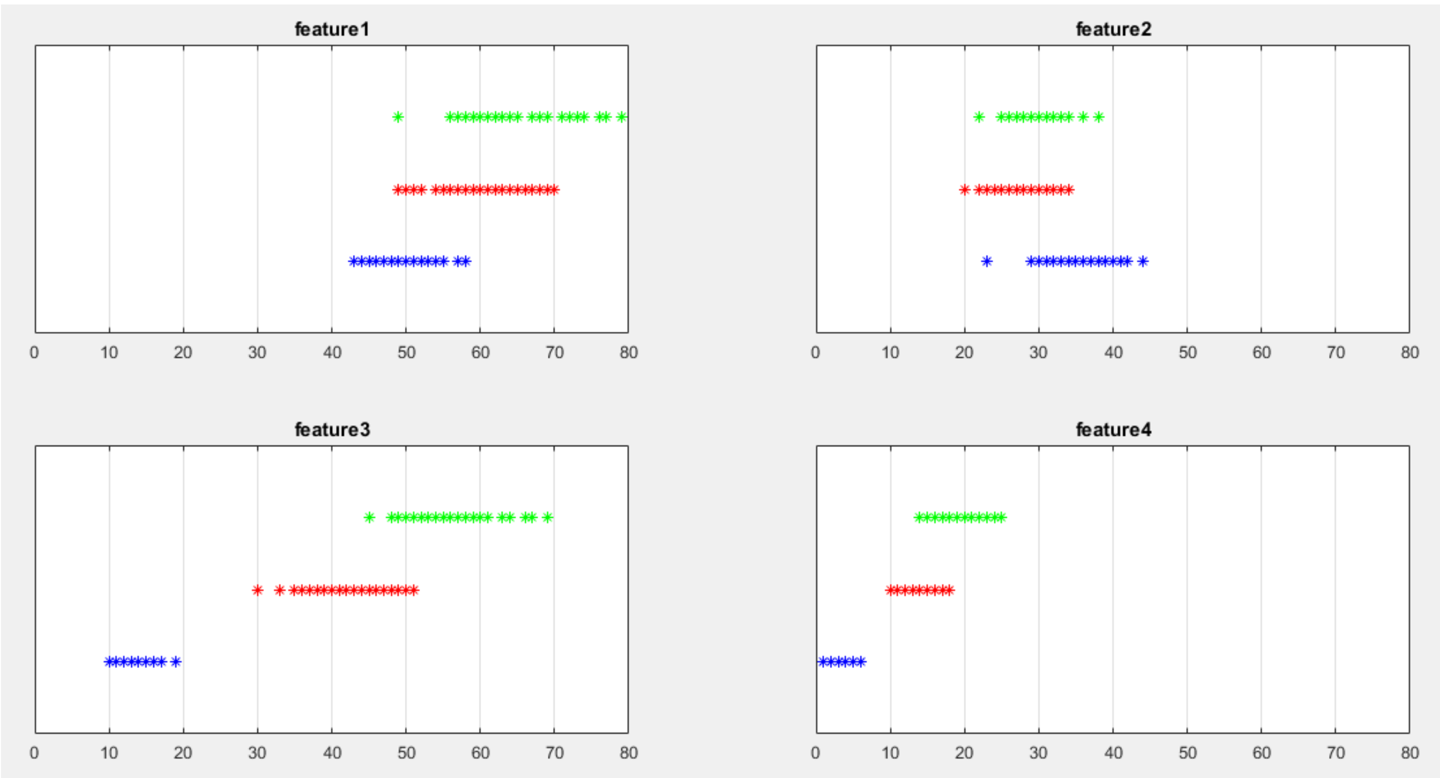
c3. رنگ

c4. رنگ و کادر بندی

d. اندازه طول و عرض هر کدام و نسبت آن‌ها

سوال ۳

a.



a1. ویژگی ۳، ویژگی خوبی است، چراکه کلاس‌ها را بهتر جدا کرده است و همپوشانی مقادیر مربوط به آن ویژگی به ازای نمونه‌های کلاس‌های مختلف کم است. ویژگی ۴ نیز تا حدودی خوب است. اما ویژگی ۱ و ۲، ویژگی‌های بدی هستند. چون نمی‌توانند بین کلاس‌ها تمایز قایل شوند. با در نظر گرفتن یک مقدار برای ویژگی ۱ یا ۲، نمی‌توان با قطعیت کلاس مربوطه را مشخص کرد.

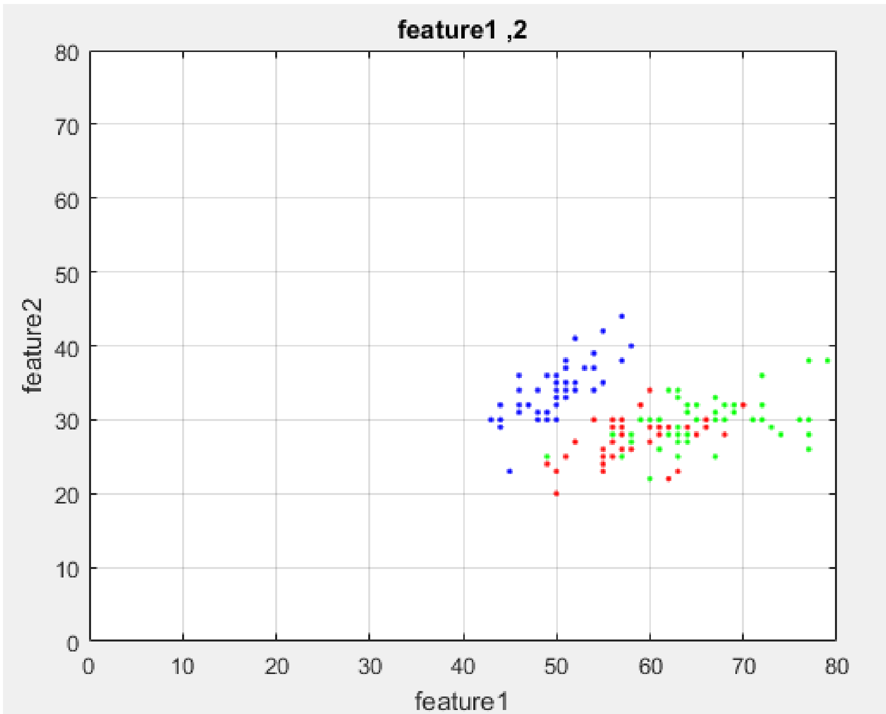
a2. ویژگی ۳ از بین همه ویژگی‌ها بیشتر قابلیت جداپذیری خطی را دارد. این قابلیت در ویژگی ۴ تا حدودی (نه به خوبی) قابل اعمال است. اما ویژگی‌های ۱ و ۲ جداناپذیر خطی هستند.

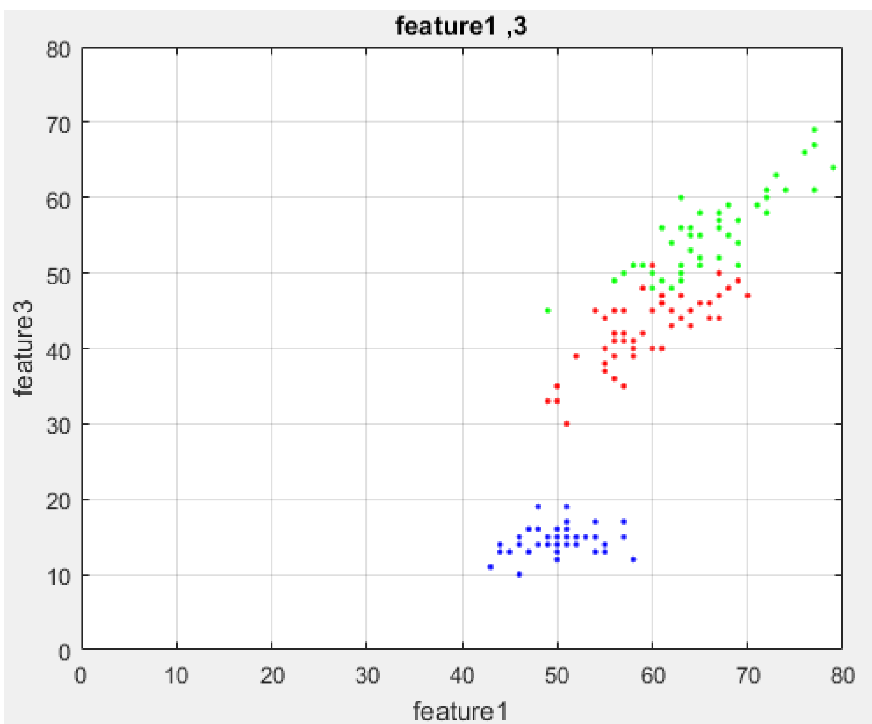
a3.

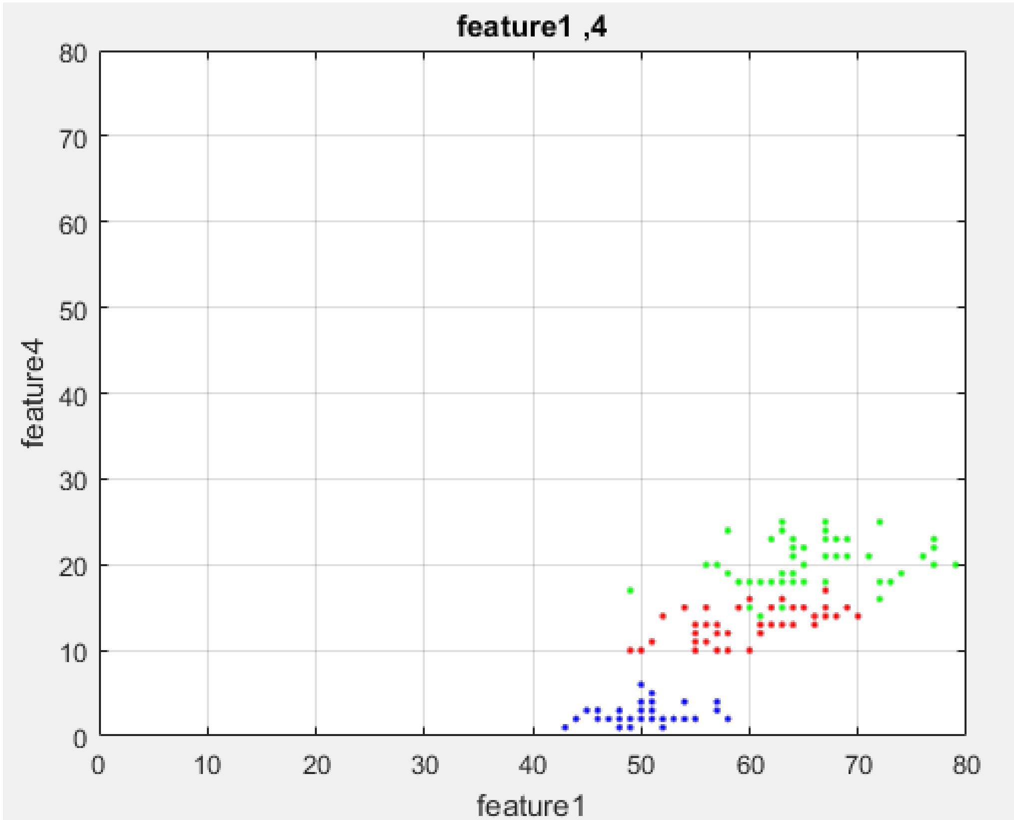
1.0000	-0.1176	0.8718	0.8179
-0.1176	1.0000	-0.4284	-0.3661
0.8718	-0.4284	1.0000	0.9629
0.8179	-0.3661	0.9629	1.0000

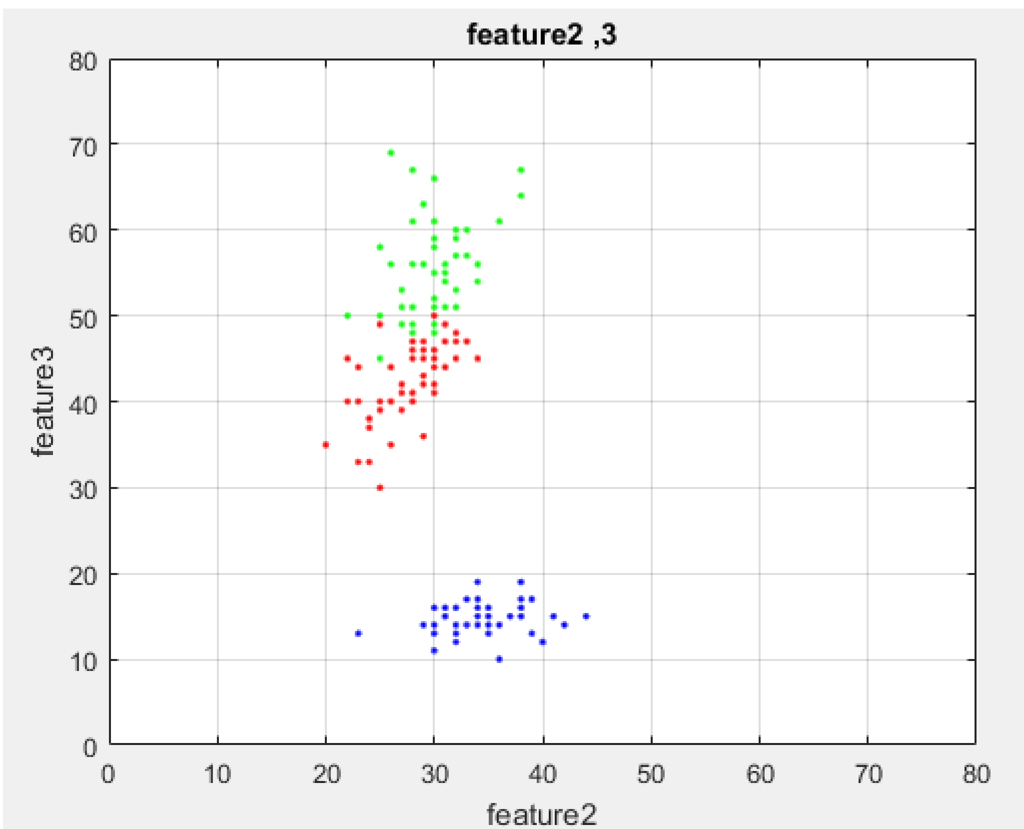
جدول بالا، جدول همبستگی بین داده‌ها را نشان می‌دهد.

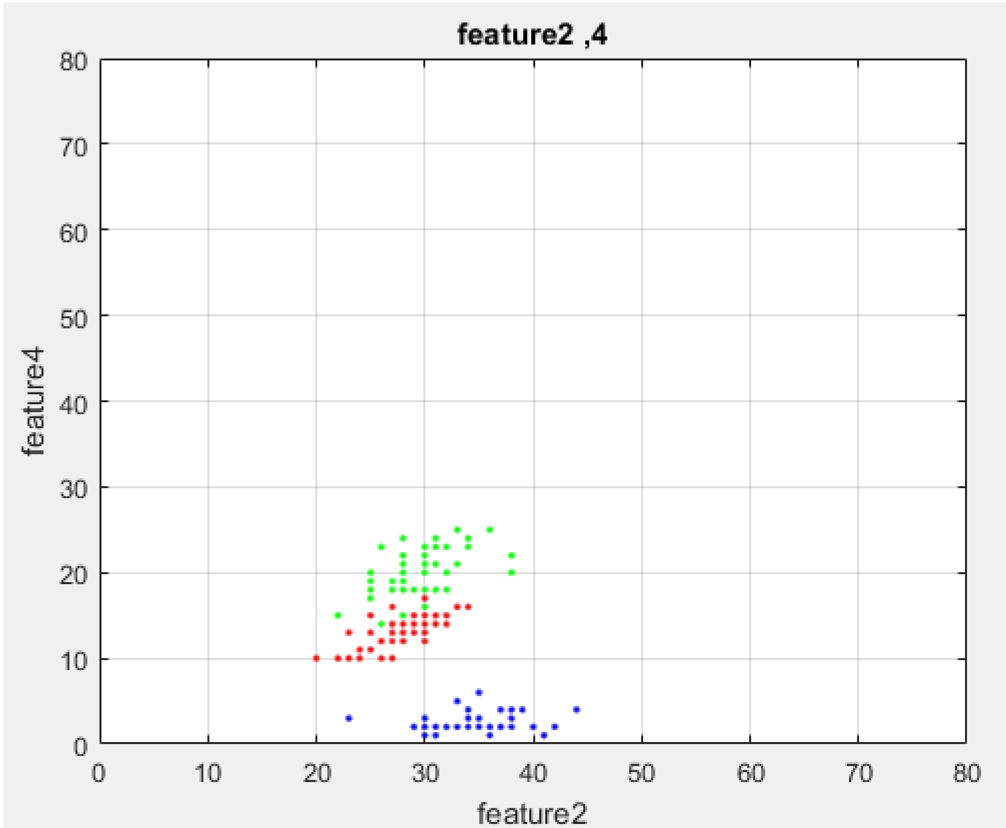
.b

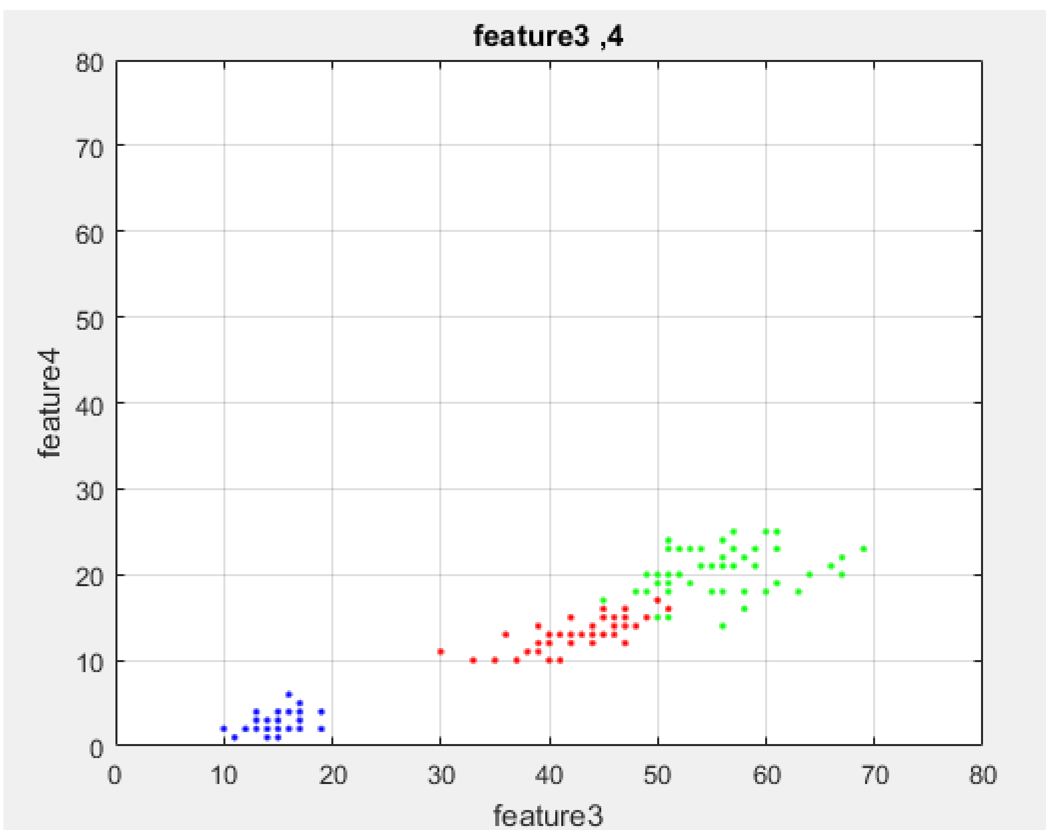





feature1 ,4
feature4
feature1
0
10
20
30
40
50
60
70
80


feature2 ,3
feature3
feature2
0
10
20
30
40
50
60
70
80

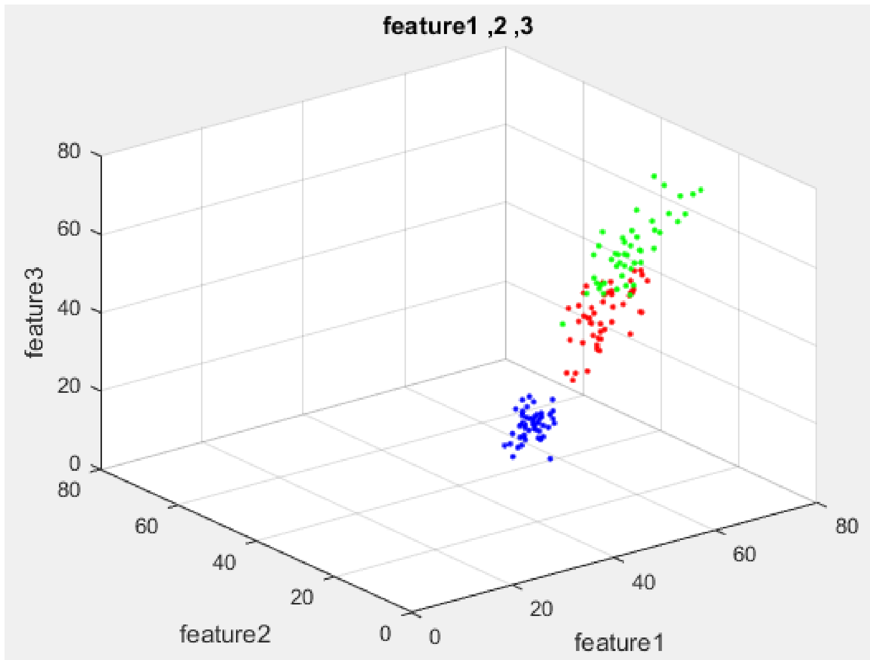

feature2 ,4
feature4
feature2
0
10
20
30
40
50
60
70
80

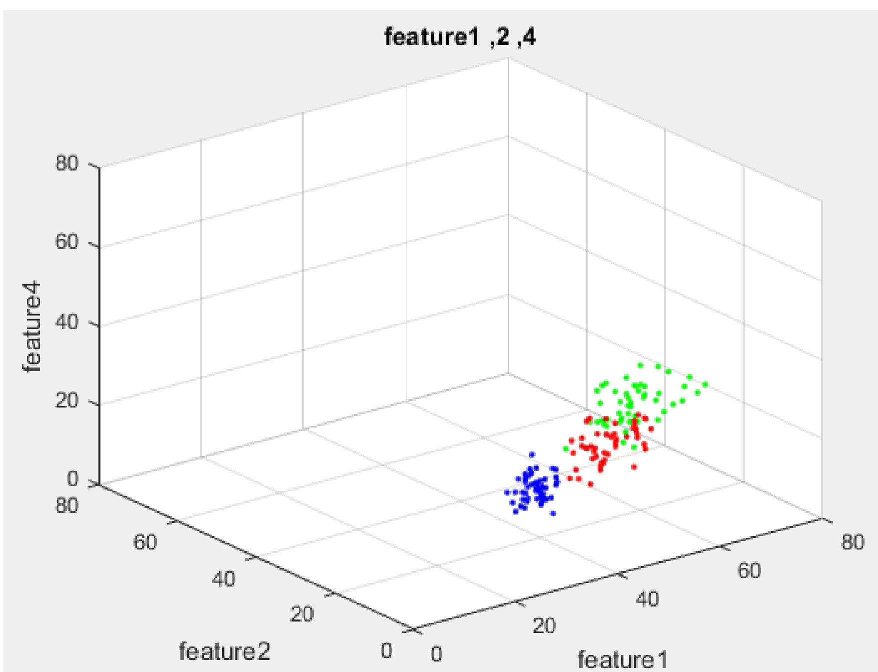

feature3 ,4
feature4
feature3
0
10
20
30
40
50
60
70
80

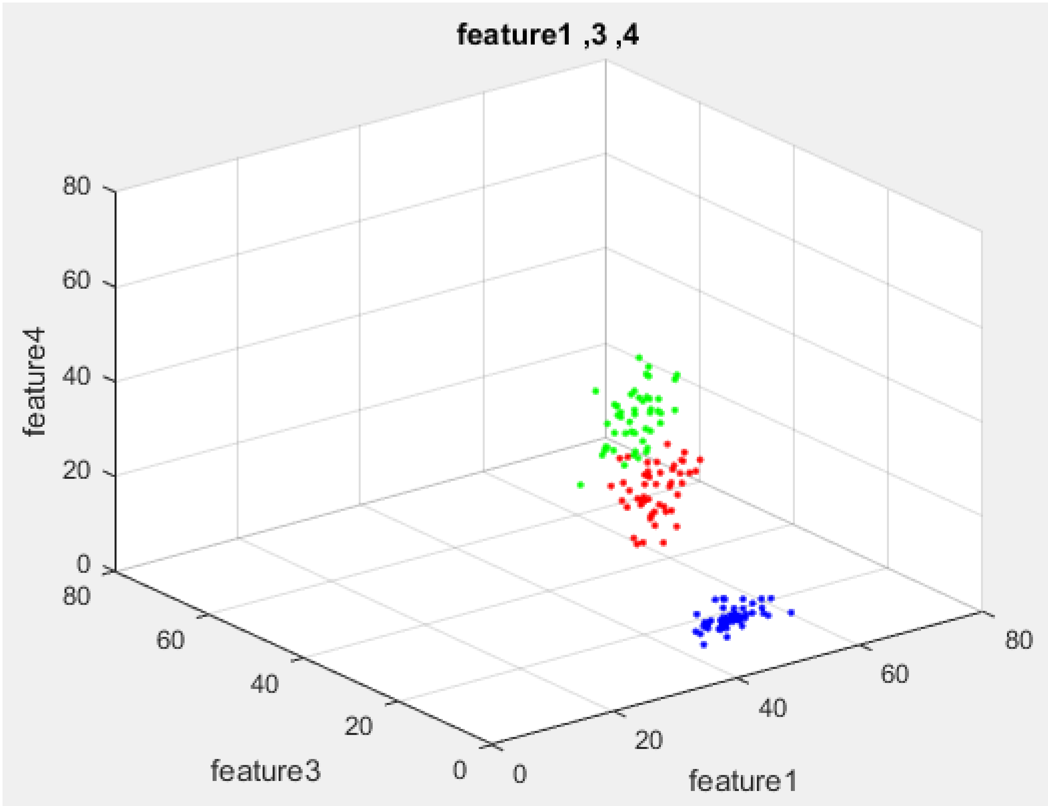
b1. ویژگی ۱ و ۲ خیلی بد است، چون اصلا قابل تفکیک نمی‌باشد، اما ویژگی ۳ و ۴ از ترکیب سایر ویژگی‌ها مجزا تر است درنتیجه ویژگی بهتری است.

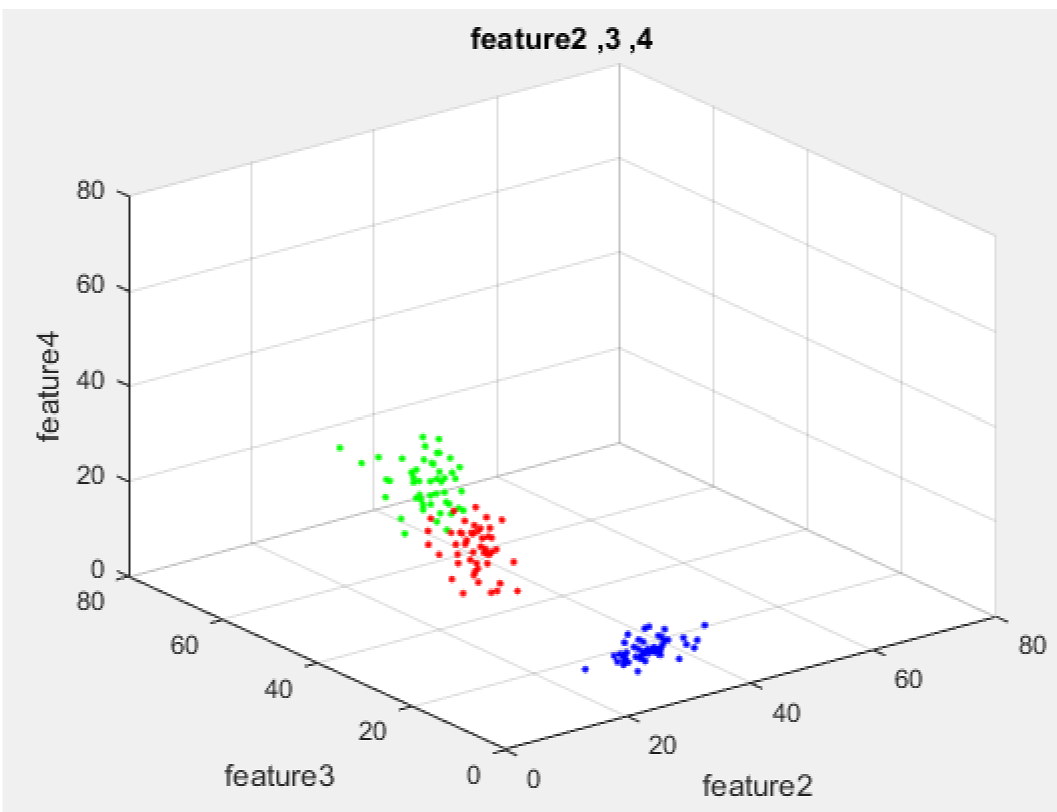
b2. ویژگی ۱ و ۲ به هیچ وجه جداپذیر خطی نمی‌باشد ولی سایر ویژگی‌ها تا حدودی جداپذیرند.

c.






feature1 ,3 ,4
feature4
feature3
feature1
0
20
40
60
80


feature2 ,3 ,4
feature4
feature3
feature2
0
20
40
60
80

c1. ویژگی‌های ۱ و ۲ و۳ و ویژگی‌های ۱و ۲و ۴ در هم تنیده شده و ویژگی خوبی نیستند.

c2. ویژگی‌های ۱و۳و۴ و ویژگی‌های ۲و۳و۴ تا حدود خوبی جداپذیر خطی هستند.

سوال ۴

a.

$X \sim binomial(n = 1400, p = \frac{1}{3})$

a1. $\mathbb{E}[X] = np = \frac{1}{3} \times 1400 = 366.6$

a2. $\sigma_X = np(1-p) = 1400 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 311.1$

b.

$p = \frac{4}{10} \quad , \quad n = 6$

b1. $\binom{6}{3}(\frac{4}{10})^3(\frac{6}{10})^3 = 0.276480$

b2. $\left(\frac{6}{10}\right)^2 . \left(\frac{4}{10}\right) = 0.144$

c.

c1.

$P(X=3) = P(X=0) + P(X=1)$

$\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} + \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!}$

$\lambda^3 - 6\lambda - 6 = 0 \longrightarrow \lambda = 2.847$

$\mu = \lambda = 2.847$

c2.

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) \quad *$$

cdf of poisson $\rightarrow \quad P_X(k) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\lfloor k \rfloor} \frac{\lambda^i}{i!}$

$$* = e^{-\lambda}\left[\left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!}\right) - \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}\right)\right]$$

$$= e^{-\lambda}\left(\frac{4\lambda^3 + \lambda^4}{4!}\right)$$

$\lambda = 2.8$ $\quad 0.37$

d.

d1.

$$E[aX + bY] = \sum_X \sum_Y (aX + bY) P(x, y)$$

$$= \sum_X \sum_Y aX\,P(x, y) + \sum_X \sum_Y bY\,P(x, y)$$

$$= \sum_X aX \underbrace{\sum_Y P(x, y)}_{P(X)} + \sum_Y bY \underbrace{\sum_X P(x, y)}_{P(Y)}$$

$$= a \sum_X X\,P(X) + b \sum_Y Y\,P(Y)$$

$$= a\,E[X] + b\,E[Y]$$

d2.

$$\sigma_x^2 = E[(x - E(x))^2]$$

$$\xrightarrow{E[x]=\mu} E[(x-\mu)^2]$$

$$= \sum (x_i - \mu)^2 \, p_X(x_i)$$

$$= \sum x_i^2 \, p_X(x_i) - 2\mu \sum x_i \, p_X(x_i) + \mu^2 \sum p_X(x_i)$$

$$= E[x^2] - 2\mu \underbrace{E[x]}_{\mu} + \mu^2 = E[x^2] - \mu^2$$

d3.

X and Y are independent $\rightarrow P(xy) = P(x)\,P(y)$

$$E(x,y) = \sum\sum xy \, P_{X,Y}(x,y) = \sum\sum x P_X(x)\, y P_Y(y)$$

$$= \sum x P_X(x) \sum y P_Y(y) = E(x)\,E[Y]$$

↳ uncorrelated

d4.

سه نقطه (-1,1) و (0,0) و (1,-1) که هر کدام احتمال 1/4، 1/2 و 1/4 دارند را در نظر می‌گیریم.

$$\mathbb{E}[X] = -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = 0$$

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{4} = 0$$

$$\mathbb{E}[XY] = -1 \times \tfrac{1}{4} + 0 \times \tfrac{1}{2} + 1 \times \tfrac{1}{4} = 0 \rightarrow \quad \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY]$$

$$p(x=1)p(y=-1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 1/16$$

$$p(x=1, y=-1) = \frac{1}{4} \rightarrow \qquad p(x)p(y) \neq p(x,y)$$

همانطور که از محاسبات مشخص است، correlate هستند اما independent نیستند.

سوال ۵

a.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 e - ke^{kx}\,dx = \int_0^1 e - \int_0^1 ke^{kx}$$

$$= e - e^{kx}\Big|_0^1 = e - (e^{k} - 1) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 1}$$

b.

$$P(0.25 \leq x \leq 0.5) = P(0.5) - P(0.25)$$

$$\text{cdf of } f(x) \longrightarrow P_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$P_X(x) = \int_0^{0.5} e - e^{x} - \int_0^{0.25} e - e^{x}$$

$$= 0.5e - e^{0.5} + \cancel{e^{0}} - 0.25e + e^{0.25} - \cancel{e^{0}}$$

$$= 0.25e - e^{0.5} + e^{0.25}$$

c.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_0^{\min(x,1)} e - e^{x}$$

$$= \min(x,1).e - e^{\min(x,1)} + 1$$

d.

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$
$$= \int_0^1 x(e - e^x)\, dx = e/2 - 1$$

$$var(X) = E[X^2] - E^2[X] = 2 - \frac{2e}{3} - \frac{e^2}{4} + 1 - e$$
$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(e - e^x)\, dx = 2 - \frac{2e}{3}$$

e.

$$1 - P_X(9/12) = 1 - P_X(3/4)$$
$$= 1 - \int_0^{3/4} e - e^x\, dx$$
$$= e^{3/4} - 3/4\, e$$

f.

$$(1 - P(6/12))^3 = \left(1 - \int_0^{1/2} e - e^x\, dx\right)^3$$
$$= e^{3/2} - e^3/8$$

g.

$$3 P_X(6/12)(1 - P(6/12))^2 = \left(\tfrac{3}{2}e - 3e^{1/2} + 3\right)\left(e - e^2/4\right)$$

سوال ۶

a. ابعاد ماتریس کواریانس، بعد مجموعه‌داده یعنی تعداد ویژی‌ها را مشخص می‌کند که در این جا مساوی ۳ است.

b. تعداد نمونه‌ها از روی ماتریس کواریانس به تنهایی قابل تخمین نیست.

c.

$$corr(X) = (diag(\Sigma))^{-1/2}\, \Sigma\, (diag(\Sigma))^{-1/2}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d. از آنجایی که بعد ۲ دوم بیشترین واریانس را دارد، داده‌ها بیشتر روی آن بعد پخش می‌شوند.

e.

$$|\Sigma - \lambda I| = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)((4-\lambda)(2-\lambda)) - 2(8-2\lambda)$$

$$= (4-\lambda)((2-\lambda)^2 - 4) = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$\Sigma u = \lambda u \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u_1 \\ 4u_2 \\ 4u_3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 4 \rightarrow 2u_1 - 2u_3 = 4u_1 \rightarrow u_1 = -u_3$$

$$\lambda_3 = 0 \rightarrow 4u_2 = 4u_2$$

$$\rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$v_1 . v_2 = 0$, $v_1 . v_3 = 0$, $v_2 . v_3 = 0$

eigenvectors are orthogonal.

در حالت کلی بردارهای ویژه عمود نیستند، اما در صورتیکه ماتریس متقارن باشد، بردارهای ویژه عمود می‌شوند.

سوال ۷

a.

a1. $\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-15\\-15\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix} \to \lambda = 5$

a2. $\begin{bmatrix}5 & 6 & 2\\0 & -1 & -8\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\\2\lambda\\\lambda\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}19\\-10\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\\2\lambda\\\lambda\end{bmatrix} \to there\ is\ no\ \lambda$

b.

$(A - \lambda I)u = 0$

b1. $\begin{bmatrix}1 & -6\\-3 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -6\\-3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}3u_1 - 6u_2 = 0\\-3u_1 + 6u_2 = 0\end{cases} \to \ u_1 = 2u_2$$

b2. $\begin{bmatrix}-2 & 4 & 2\\2 & 1 & -2\\4 & -2 & 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8 & 4 & 2\\2 & -5 & -2\\4 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}-8u_1 + 4u_2 + 2u_3 = 0\\2u_1 - 5u_2 - 2u_3 = 0\\4u_1 - 2u_2 - 4u_3 = 0\end{cases} \to$$

c.

c1.

$$|\Sigma - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda) + 2 = 0 \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$2u_2 = u_1 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$u_1 = u_2 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c2.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

c3.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\big((\lambda-3)(1+\lambda)+2\big) + 2(1+\lambda) - 4 - 2(2 - 2(3-\lambda))$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} u_2 = 2u_1 \\ u_2 = 2u_3 \end{matrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d.

$Au = \lambda u$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$-3/2\, x_{11} + x_{12} = 3/2$$

$$-3/2\, x_{21} + x_{22} = -1$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$x_{11}/2 + x_{12} = 7/2$$

$$1/2\, x_{21} + x_{22} = 7$$

$x_{21} = 4 \quad , \quad x_{22} = 5$

$x_{11} = 1 \quad , \quad x_{12} = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

e.

$$Ax = \lambda x \rightarrow x = A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x = \lambda A^{-1}x$$

از آنجاییکه A معکوس پذیر است، $\lambda \neq 0$، درنتیجه داریم.

$$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$$

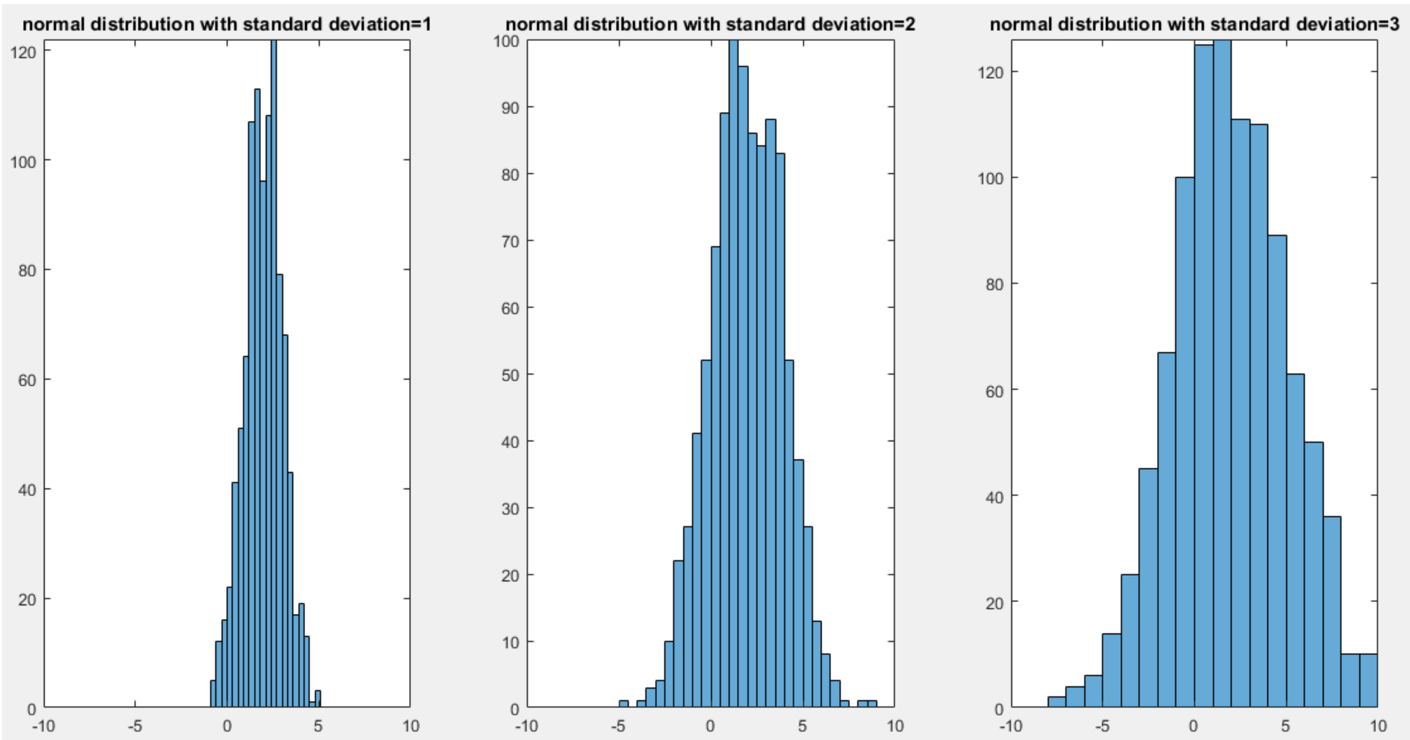
f. اگر ابعاد فضای ویژه با ابعاد ماتریس کواریانس برابر نباشد، ماتریس کواریانس نمی‌تواند قطری باشد.

g.

$$Ax = \lambda x \rightarrow \quad A^2x = AAx = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

سوال ۸

.a



هرچه انحراف معیار توزیع بیشتر باشد، پراکندگی نمونه‌ها بیشتر است و نمودار پخش‌تر است. اما هرچه انحراف معیار کمتر باشد، هیستوگرام نمونه‌ها فشرده‌تر می‌شود.