محمدعلی کشاورز - ۹۶۳۱۰۹۱ - تمرین سری سوم جبر خطی

تمرین ۱) الف)

$$XA = C \rightarrow \boxed{X = CA^{-1}}$$

$$XB + Y = D \rightarrow CA^{-1}B + Y = D \rightarrow \boxed{Y = (D - CA^{-1}B)}$$

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\det\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}}_{1} \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سؤال ۲ داریم}]{\text{با توجه به قسمت ج}} \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \det(A) \times \det(Y) = \det(A) \times \det(D - CA^{-1}B)$$

ب)

می‌دانیم چون مربعی هستند: $\det(A) \times \det(Y) = \det(AY) = \det(AD - ACA^{-1}B) =$

$$\det(AD - CAA^{-1}B) = \boxed{\det(AD - CB)}$$

تمرین ۲) (الف) می‌دانیم برای این که ماتریس $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ را به فرم پلکانی در آوریم کافیست عملیات‌های سطری‌ای که برای پلکانی کردن A انجام می‌دهیم را روی n سطر اول ماتریس اصلی انجام دهیم که به شکل روبرو در می‌شود $\begin{bmatrix} A_{\text{پلکانی}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ حال ماتریس اصلی نیز پلکانی شده است

حال مطابق عملیات‌های سطری‌ای که انجام دادیم دترمینان را حساب می‌کنیم (I در دترمینان تأثیری ندارد)

$$\longrightarrow \det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det I$$

(ب) فارغ از این که ماتریس C چه باشد، برای این که ماتریس داده شده را پایین مثلثی کنیم کافیست عملیات‌های سطری‌ای که برای پایین مثلثی کردن D لازم است را، روی n سطر آخر ماتریس داده شده انجام دهیم و ماتریس به این شکل تبدیل می‌شود $\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & D_{\text{پایین مثلثی}} \end{bmatrix}$ در حاصل با توجه به بی‌تأثیر بودن X و I روی دترمینان برابر می‌شود با دترمینان D

☑ زیرا دترمینان ماتریس پایین مثلثی فقط به قطر مربوط است (به X ربطی ندارد) و درایه‌های I یک هستند (به I مربوط نیست) و چون عملیات‌های سطری انجام شده همان‌هایی هستند که D را پایین مثلثی می‌کنند $\longrightarrow$ دترمینان کل $= \det D$

ج)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}}_{W} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix}}_{Z} \rightarrow \det(W) = \underbrace{\det(X)}_{\substack{\text{قسمت الف} \\ \downarrow \\ \det A}} \underbrace{\det(Y)}_{\substack{\text{ب} \\ \downarrow \\ \det D}} \underbrace{\det(Z)}_{1}$$

$$\longrightarrow \boxed{\det(W) = \det A \det D}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}}_{W} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{Z} \rightarrow \det(W) = \underbrace{\det(X)}_{\substack{\downarrow \\ \det A}} \underbrace{\det(Y)}_{\substack{\downarrow \\ \det B}} \underbrace{\det(Z)}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\det(W) = \det A \det B}$$

تمرین ۴)

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & (b-a) & (b^2-a^2) \\ 0 & (c-a) & (c^2-a^2) \end{bmatrix} = (b-a)\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (b+a) \\ 0 & (c-a) & (c^2-a^2) \end{bmatrix}$$

$$= (b-a)\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (b+a) \\ 0 & 0 & (c-a)\big((c+a)-(b+a)\big) \end{bmatrix} = \boxed{(b-a)(c-a)(c-b)}$$

تمرین ۵) با انجام عملیات سطری می‌توان ماتریس A را به فرم زیر در آورد

$$A = \begin{bmatrix} \pm 1 & X_{1\times(n-1)} \\ 0_{(n-1)\times 1} & B_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

همه عنصرهای B یا ±۲ هستند یا ۰ بنابراین $B = 2C$

$$\det(B) = \det(2C) = 2^{n-1}\det(C)$$

از طرفی می‌دانیم $\det(A) = (\pm 1)\det(B)$

$$\det(A) = \pm\det(B) = \pm 2^{n-1}\det(C)$$

$$\longrightarrow \det(A) \overset{2^{n-1}}{\equiv} 0$$

۶) الف)

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \end{bmatrix}$$

می‌دانیم $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \longrightarrow \frac{a^2x^2}{a^2} + \frac{b^2y^2}{b^2} + \frac{c^2z^2}{c^2} = 1 \longrightarrow \boxed{\frac{T(x)^2}{a^2} + \frac{T(y)^2}{b^2} + \frac{T(z)^2}{c^2} = 1}$

ب)

volume of $(T(S)) = |\det(A)|$ volume of $(S) \longrightarrow$ حجم بیضی $\boxed{= |abc| \frac{4}{3}\pi}$

Scanned by CamScanner

تمرین ۳) الف)

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} \longrightarrow adj(A) = A^{-1}\cdot \det A \longrightarrow adj(A)^T = (A^{-1})^T \cdot \det A$$

$$\longrightarrow (A^{-1})^T = \frac{adj(A^T)}{\det(A^T)} \longrightarrow adj(A^T) = (A^T)^{-1}\,\det(A^T) = (A^{-1})^T \det(A) \Rightarrow adj(A^T) = (adj A)^T$$

ب)

داریم: $A\cdot adj(A) = \det(A) I_n \xrightarrow{\text{فرض}} A\cdot adj(A) = 0$

فرض خلف: در صورتی که $adj(A)$ غیر صفر باشد ← معکوس دارد.

$$A = 0 \rightarrow adj(A) = 0 \rightarrow \det(adj(A)) = 0 \quad \times$$

حکم برقرار است

ج) اگر $\det A = 0$ که مطابق ب داریم: $0 = \det(adj(A))$ ⟸ می‌توانیم بنویسیم

$$\rightarrow \det(adj(A)) = (\det A)^{n-1}$$

برای $\det A \neq 0$ داریم:

داریم $A\cdot adj(A) = \det(A) I_n \rightarrow \det(A\cdot adj(A)) = (\det(A))^n \rightarrow \det(A)\det(adj(A)) = (\det(A))^n$

$$\rightarrow \boxed{\det(A)^{n-1} = \det(adj(A))}$$

د) به هر صورت سؤال اشتباه نوشته شده.

$$adj(BA) = \det(BA)(BA)^{-1} = \det(B)\det(A)(A^{-1}B^{-1}) = \boxed{adj(A)adj(B)}$$

ه)

$$adj(adj(A)) = (\det(A))^{n-2} I \longrightarrow \det(adj(adj(A))) = ((\det(A))^{n-1})^{n-1} = \boxed{(\det(A))^{(n-1)^2}}$$