.۱

$$[B\ I]=\begin{bmatrix}1&0&-2&1&0&0\\-3&1&4&0&1&0\\2&-3&4&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&1&0&0\\0&1&-2&3&1&0\\0&-3&8&-2&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&1&0&0\\0&1&-2&3&1&0\\0&0&2&7&3&1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&1&0&0\\0&1&-2&3&1&0\\0&0&1&\frac{7}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&8&3&1\\0&1&0&10&4&1\\0&0&1&\frac{7}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\to B^{-1}=\begin{bmatrix}8&3&1\\10&4&1\\\frac{7}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

.۲

(آ)

$$[A_1\ I]=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{bmatrix}\to A_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$[A_2\ I]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{bmatrix}\to A_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

(ب)

$$A_{ij}=\begin{cases}1;i\ge j\\0;i<j\end{cases},B_{ij}=\begin{cases}1;i=j\\-1;i=j+1\\0;other\ wise\end{cases}$$

$$AB_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}=\sum_{k=1}^{i}A_{ik}B_{kj}+\sum_{k=i+1}^{n}A_{ik}B_{kj}=\sum_{k=1}^{i}1\times B_{kj}+0=\sum_{k=1}^{i}B_{kj}=\begin{cases}1;i=j\\0;o.w.\end{cases}=I_{ij}\to\square$$

$$BA_{ij}=\sum_{k=1}^{n}B_{ik}A_{kj}=\sum_{k=1}^{j-1}B_{ik}A_{kj}+\sum_{k=j}^{n}B_{ik}A_{kj}=0+\sum_{k=j}^{n}B_{ik}\times 1=\sum_{k=j}^{n}B_{ik}=\begin{cases}1;i=j\\0;o.w.\end{cases}=I_{ij}\to\blacksquare$$

(ج)

$$[A_1\ I]=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\to A_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$A_{ij}=\begin{cases}j;i\ge j\\0;i<j\end{cases},B_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{i};i=j\\-\frac{1}{i};i=j+1\\0;other\ wise\end{cases}$$

$$AB_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}=\sum_{k=1}^{i}A_{ik}B_{kj}+\sum_{k=i+1}^{n}A_{ik}B_{kj}=\sum_{k=1}^{i}j\times B_{kj}+0=j\sum_{k=1}^{i}B_{kj}=\begin{cases}1;i=j\\0;o.w.\end{cases}=I_{ij}\to\square$$

$$BA_{ij}=\sum_{k=1}^{n}B_{ik}A_{kj}=\sum_{k=1}^{j-1}B_{ik}A_{kj}+\sum_{k=j}^{n}B_{ik}A_{kj}=0+\sum_{k=j}^{n}B_{ik}\times j=j\sum_{k=j}^{n}B_{ik}=\begin{cases}1;i=j\\0;o.w.\end{cases}=I_{ij}\to\blacksquare$$

.۳

(آ)

$$y_i=(VC)_i=\sum_{k=1}^{n}V_{ik}C_k=\sum_{m=0}^{n-1}x_i^m c_m=p(x_i)$$

(ب) با توجه به اینکه چند جمله ای درون یاب (p) حداکثر می تواند n-1 ریشه داشته باشد، اگر ستون های ماتریس واندرموند مستقل خطی نباشند، معادله $Vc = 0$ دارای بی نهایت جواب که یعنی بی نهایت ریشه برای p خواهد بود. بنابراین طبق برهان خلف، ستون های v مستقل خطی اند.

(ج) با قرار دادن مقادیر x_i ها در V و تشکیل دستگاه $Vc = y$، بردار c که یعنی ضرایب p بدست می آید. طبق نتیجه قسمت (ب)، این دستگاه جواب یکتا دارد.(زیرا V وارون پذیر است)

۴. اگر نقطه ورودی را X در نظر بگیریم، مؤلفه سوم ماتریس ورودی، اِعمال انتقال را معلوم می کند که در اینجا یک در نظر گرفته شده:

$$\begin{bmatrix} A_{2\times2} & p_{2\times1} \\ 0_{1\times2}^{T} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{2\times1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX+p \\ 0^{T}X+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX+p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه، تبدیل خطی $T(X) = AX$ را اعمال و به اندازه ی p، انتقال می دهد.

۵.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[L\ b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 21 \\ 2 & 1 & 1 & 24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[U\ y] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۶.

(آ) اگر ستون های A و B مستقل خطی باشند، طبق قضیّه ماتریس وارون، وارون پذیر اند. می توان ثابت کرد AB نیز ستون های مستقل دارد.

برای اثبات نشان می دهیم $(AB)x = 0$ جواب غیر بدیهی ندارد:

$$(AB)x = 0 \rightarrow Bx = A^{-1}0 = 0 \rightarrow x = B^{-1}0 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \blacksquare$$

(ب)

$$C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n \rightarrow A + X = CB \rightarrow X = CB - A$$

(ج) با جابجایی ترتیب جمع ها:

$$trc(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \times B_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{ki} \times A_{ik} = trc(BA)$$

(د)

$$trc(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda A + B)_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} = \lambda trc(A) + trc(B)$$

(ه)

$$trc(AA^{T}) = \sum_{i=1}^{n}(AA^{T})_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \times A_{ki}^{T} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{2}$$

چون $A_{ik}^{2} \geq 0$ و $\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{2} \geq 0$، بنابراین:

$$trc(AA^{T}) = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{2} = 0 \rightarrow A_{ik} = 0 (1 \leq i,k \leq n) \rightarrow A = 0^{T}$$

۷.

(آ)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A_{n\times n} & B_{n\times m} \\ C_{m\times n} & D_{m\times m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_{n\times n} & X_{n\times m} \\ Y_{m\times n} & Z_{m\times m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & I_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} AW + BY & AX + BZ \\ CW + DY & CX + DZ \end{bmatrix}$$

$$AX + BZ = 0 \rightarrow X = -A^{-1}BZ$$

$$CX + DZ = I \rightarrow DZ = I + CA^{-1}BZ \rightarrow Z(D - CA^{-1}B) = I \rightarrow Z = (D - CA^{-1}B)^{-1}$$

$$X = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}$$

$$AW+BY=I\rightarrow W=A^{-1}-A^{-1}BY$$
$$CW+DY=CA^{-1}-CA^{-1}BY+DY=0\rightarrow CA^{-1}+(D-CA^{-1}B)Y=0\rightarrow Y=-(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$
$$W=A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$
$$\begin{bmatrix}W & X\\ Y & Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}\\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1}\end{bmatrix}$$

ب) مشابه قسمت قبل:

$$CW+DY=0\rightarrow Y=-D^{-1}CW$$
$$AW+BY=I\rightarrow AW-BD^{-1}CW=I\rightarrow (A-BD^{-1}C)W=I\rightarrow W=(A-BD^{-1}C)^{-1}$$
$$Y=-D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}$$
$$CX+DZ=I\rightarrow Z=D^{-1}-D^{-1}CX$$
$$AX+BZ=AX+BD^{-1}-BD^{-1}CX=0\rightarrow BD^{-1}+(A-BD^{-1}C)X=0\rightarrow X=-(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}$$
$$Z=D^{-1}+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}$$
$$\begin{bmatrix}W & X\\ Y & Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}\\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}\end{bmatrix}$$

۸.

$$\begin{cases}AB=BA=A^3-2A^2+2A=-2A^2+2A+2I\\ A^2B=BA^2=A^4-2A^3+2A^2=2A^2+2A-4I\end{cases}$$
$$\rightarrow\begin{cases}AB+A^2B=BA+BA^2=4A-2I\\ AB+2B=BA+2B=-2A+6I\end{cases}$$
$$AB+A^2B+2(AB+2B)=BA+BA^2+2(BA+2B)=10I$$
$$(A^2+3A+4I)B=B(A^2+3A+4I)=10I\rightarrow B^{-1}=\frac{1}{10}(A^2+3A+4I)$$

۹.

$$A=LU=L_1U_1$$
$$\rightarrow L_1^{-1}L=U_1U^{-1}$$

می دانیم ضرب دو ماتریس بالا مثلثی(پایین مثلثی) یک ماتریس بالا مثلثی(پایین مثلثی) است. همچنین می دانیم وارون یک ماتریس بالا مثلثی(پایین مثلثی) یک ماتریس بالا مثلثی(پایین مثلثی) است. در نتیجه طرف چپ پایین مثلثی با قطر یک و سمت راست بالا مثلثی است. تنها حالت برابری این است که هر دو ماتریس، یکه باشند که یعنی:

$$L_1^{-1}L=I\rightarrow L={L_1^{-1}}^{-1}=L_1$$
$$U_1U^{-1}=I\rightarrow U_1={U^{-1}}^{-1}=U$$

۱۰.

$$P=E_1E_2\dots E_nI$$

آ) جابجایی سطر i با سطر j یک ماتریس همانی، مانند جابجایی ستون j ام با ستون i ام است. لذا ماتریس های مقدماتی متقارن اند:

$$P^T=I^TE_n^T\dots E_1^T=E_n\dots E_1$$

همچنین وارون جابجایی سطر i با ستون j، همان است که یعنی:

$$P^{-1}=I^{-1}E_n^{-1}\dots E_1^{-1}=E_n\dots E_1$$

روش دیگر:چون ماتریس جایگشت از جابجایی سطر های ماتریس یکه بدست آمده، در هر سطر و ستون آن فقط یک ۱ وجود دارد پس:

$$(PP^T)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}P_{ik}P_{kj}^T=\sum_{k=1}^{n}P_{ik}P_{jk}=\begin{cases}1;\, i=j\\ 0;\, o.w.\end{cases}=I_{ij}\rightarrow P^T=P^{-1}$$

ب) خیر؛ متعامد هست ولی الزاماً جایگشت نیست.مثال نقض:

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}\rightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=A^T$$