محمدعلی کشاورز - ۹۶۳۱۰۶۱ - تمارین تئوری

Subject: Year: Month: Date:

تمرین ۱) دستگاه اول:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&6\\1&2&2&11\\2&3&-4&11\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1&1&1&6\\0&1&1&5\\0&1&-6&-1\end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix}1&1&1&6\\0&1&1&5\\0&0&-7&-6\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u+v+w&=6 \rightarrow u=1\\ v+w&=5 \rightarrow v=\tfrac{29}{7}\\ -7w&=-6 \rightarrow w=\tfrac{6}{7}\end{aligned}}$$

دستگاه دوم:

$$\begin{bmatrix}2&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&5\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1&-0.5&0&0&0\\0&1.5&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&-0.5&0&0&0\\0&1.5&-1&0&0\\0&0&\frac{4}{3}&-1&0\\0&0&-1&2&5\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1&-0.5&0&0&0\\0&1.5&-1&0&0\\0&0&\frac{4}{3}&-1&0\\0&0&0&\frac{5}{4}&5\end{bmatrix}$$

داریم:

$$\frac{5}{4}z=5 \rightarrow \boxed{z=4}$$

$$\frac{4}{3}w - z = 0 \rightarrow \frac{4}{3}w = 4 \rightarrow \boxed{w=3}$$

$$\frac{3}{2}v - w = 0 \rightarrow \frac{3}{2}v = 3 \rightarrow \boxed{v=2}$$

$$u - 0.5v = 0 \rightarrow \boxed{u=1}$$

در هر دو دستگاه اول و دوم هیچ کدام از متغیرها Free نبودند

تمرین ۲)

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&5\\-2&0&-1\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&3\\0&2&3\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&3\\0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow$$ تنها ۲ موقعیت محوری دارد

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&c&3\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix} \rightarrow$$ ۳ موقعیت محوری دارد

بدیهیست

پرسش ۳) P1) دستگاه سمت چپ:

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 4 & 8 & k \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 8-4h & k-8 \end{bmatrix}$$

■ برای جواب نداشتن $8-4h=0$ و $k-8\neq 0$ ← $h=2$ و $k\neq 8$

■ برای بی‌شمار جواب داشتن $8-4h=0$ و $k-8=0$ ← $h=2$ و $k=8$

■ برای یک جواب داشتن $8-4h\neq 0$ ← $h\neq 2$

دستگاه سمت راست:

$$\begin{bmatrix} -2 & h & 1 \\ 6 & k & -2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -2 & h & 1 \\ 0 & k+3h & 1 \end{bmatrix}$$

■ جواب نداشتن: $k+3h=0 \Rightarrow \boxed{k=-3h}$

■ جواب داشتن: $k+3h\neq 0 \Rightarrow \boxed{k\neq -3h}$

■ برای بی‌شمار جواب داشتن: چنین چیزی ممکن نیست

P2) چون دستگاه همگن است اگر بخواهیم جواب غیربدیهی داشته باشیم باید در ماتریس
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
اشلون سطر صفر داشته باشیم:

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & \lambda+4 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & \lambda+4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda-4 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\lambda=1}$$

P3) باید سطرهای ماتریس A هم مستقل خطی باشند. برای مثال
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e-\frac{bd}{a} & f-\frac{cd}{a} \\ 0 & h-\frac{bg}{a} & i-\frac{cg}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e-\frac{bd}{a} & f-\frac{cd}{a} \\ 0 & 0 & (i-\frac{cg}{a})-(f-\frac{cd}{a})(\frac{ha-bg}{ea-bd}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ e\neq \frac{bd}{a} \\ (i-\frac{cg}{a})-(f-\frac{cd}{a})(\frac{ha-bg}{ea-bd})\neq 0 \end{cases}$$

محمدعلی کشاورز - ۹۹۳۱۰۸۱

Subject: Year: Month: Date:

تمرین ۴) اگر دستگاه سازگار باشد یعنی اگر به فرم اشلون تبدیل کنیم ستون آخر محوری نشده. از طرفی چون تعداد ستون‌ها (بدون در نظر گرفتن ستون آخر) از تعداد سطرها بیشتر است همه‌ی سطرها دارای موقعیت محوری نیستند و این یعنی متغیر آزاد داریم ← بی‌نهایت جواب داریم (برای حالت فرومعین)

برای فرامعین اگر معادله‌ای ترکیب خطی معادلات دیگر باشد به طوری که تعداد معادلات و مجهولات برابر شود سیستم دارای پاسخ است، و اگر ستون آخر محوری شود در این صورت ناسازگار است.

مثال

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 3y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$$

ستون آخر محوری می‌شود ← ناسازگار است

تمرین ۵)

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 (v_1 + v_2) + \alpha_3 (v_1 + v_2 + v_3) + \dots + \alpha_n (v_1 + \dots + v_n) = 0$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) v_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 + \dots \alpha_n) v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

از طرفی می‌دانیم بردارهای v_1 تا v_n مستقل خطی اند.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

$$\begin{cases} c_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ c_2 = \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ \vdots \\ c_n = \alpha_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \alpha_1 + 0 + 0 + 0 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0} \\ c_2 = \alpha_2 + 0 + 0 + 0 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0} \\ \vdots \\ \boxed{c_n = \alpha_n = 0} \end{cases}$$

باید قرار می‌دهیم

بنابراین ضرایب همه‌ی بردارها صفر است ← مستقل خطی اند

قسمت دوم:

SOBHAN

$$\alpha_1(v_1+v_2)+\alpha_2(v_2+v_3)+\dots+\alpha_n(v_n+v_1)=0$$

$$\Rightarrow (\alpha_1+\alpha_n)v_1+(\alpha_1+\alpha_2)v_2+(\alpha_2+\alpha_3)v_3+\dots+(\alpha_{n-1}+\alpha_n)v_n=0$$

می‌دانیم v_1 تا v_n مستقل خطی است $\Leftarrow$

$$\begin{cases}\alpha_{n-1}+\alpha_n=0\\ \alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}=0\\ \vdots \\ \alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1+\alpha_n=0\end{cases}$$

برای n های زوج مستقل خطی است. برای مثال

$$\alpha_k=\begin{cases}-1 & k \text{ زوج}\\ +1 & k \text{ فرد}\end{cases}$$

نتیجه می‌دهد

برای n های فرد اما حتماً می‌بایست همه α_k ها صفر باشند

$$\begin{cases}\alpha_n+\alpha_1=0\\ \alpha_n-\alpha_2=0\\ \alpha_n+\alpha_3=0\\ \alpha_n-\alpha_4=0\\ \vdots\\ \alpha_n+(-1)^n\alpha_{n-1}=0 \quad (**)\end{cases}$$

از طرفی می‌دانستیم $\alpha_n+\alpha_{n-1}=0$ $(*)$

$$(**)-(*)\Rightarrow (-1)^n\alpha_{n-1}-\alpha_{n-1}=0$$

این در حالی که n فرد باشد نتیجه می‌دهد $\alpha_{n-1}=0$ در غیر این صورت هر عددی می‌تواند باشد.

تمرین ۶)

۱) نادرست؛ از فقط یکی را بتوان با ترکیب دیگری نوشت

$\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,2,0)\}$

۲) نادرست؛ کافیست ماتریس به شکل تبدیل شود مثال

$$\begin{bmatrix}1&0&b_1\\0&1&b_2\\0&0&b_3\end{bmatrix} \quad (\text{که } b_3=0)$$

۳) درست است؛ چون جواب یکتا دارد یعنی ستون‌های آن حتماً موقعیت محوری دارند که این برابر با این است که ستون‌ها مستقل خطی اند $\Leftarrow$ n بردار مستقل خطی می‌توانند فضای $\mathbb{R}^n$ را تولید کنند.

۴) درست؛ برداری اینچنینی وجود ندارد؛ چراکه می‌دانیم $\mathbb{R}^n-\mathrm{span}\{S\}=\emptyset$ بنابراین $S\cup v=S$ که بنابر فرض مستقل خطی است.

Scanned by CamScanner

۵. نادرست

$$\begin{bmatrix} 3 , & -3 , & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

۶. چون همه ستون‌ها محوری هستند، اگر ماتریس ضرایب باشد، کل فضای $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کند بنابراین دقیقاً یک جواب تولید می‌کند (البته اگر سطر صفر هم داشته باشد همین مشکل است)

در ماتریس افزوده‌ی آن به شکلی باشد که از ستون آخر هم متغیر محوری داشته باشیم جواب ندارد

بنابراین درست است.

۷. نادرست است؛ اگر $T(x,y)=(x+y, x+y)$ و $v_1=(1,0)$, $v_2=(0,1)$

که مستقل خطی هستند $T(v_1)=(1,1)$, $T(v_2)=(1,1)$

۸. نادرست است؛ $S_1=\{(1,0), (0,1)\}$, $S_2=\{(2,0), (0,2)\}$

تمرین ۷. به ازای اولین $n=0$ که بردارهای با وزن صورت فوق تولید نمی‌گردد.

$n=2 \rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ از آن جایی که یک بردار است مستقل خطی است ←

$n=3 \rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

برای اثبات مستقل خطی بودن A و B و C باید ماتریس زیر در هر سطر دارای محور داشته باشد،

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$ بنابراین A و B و C مستقل خطی هستند.

برای $n \geq 3$ داریم $\binom{n}{2} > n$ بنابراین تعداد ستون‌های ماتریس بیشتر از سطرهای آن است

بنابراین حتماً ستون غیر محوری داریم ← یعنی وابسته خطی داریم.

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:

تمرین ۱۸. ① می‌دانیم اگر بخواهد جواب غیر بدیهی نداشته باشد «یعنی ستون‌ها مستقل خطی باشند» باید هر ستون آن درایه محوری داشته باشند ← به فرم اشلون کاهش یافته تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ باید } \boxed{a, c, f \neq 0}$$

② شرطی لازم ندارد چون همه ستون‌ها محوری هستند ← $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

تمرین ۹) $T(p) = T(su+tv) = sT(u) + tT(v) = \mathrm{span}\{T(u), T(v)\}$

«یعنی $T(u)$ و $T(v)$ مستقل خطی باشند»

$f(1,1) = (4,2)$ صدق نمی‌کند خطی نیست

$f(2,2) = (7,4) \neq 2(4,2)$

تمرین ۱۰) الف) خطی نیست.

ب) تبدیل خطی است

① $f(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x + \alpha y, -\alpha y) = \alpha(2x+y, -y) = \alpha f(x,y)$

② $f(x_1+x_2, y_1+y_2) = (2(x_1+x_2) + (y_1+y_2), -(y_1+y_2)) =$

$= (2x_1 + y_1, -y_1) + (2x_2 + y_2, -y_2) = f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ج) خطی است

① $f(\alpha x, \alpha y) = \left(\frac{\alpha x + \alpha y}{2}, \frac{\alpha x + \alpha y}{2}\right) = \alpha\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = \alpha f(x,y)$

② $f(x_1+x_2, y_1+y_2) = \left(\frac{x_1+x_2+y_1+y_2}{2}, \frac{x_1+x_2+y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_1+y_1}{2}\right) + \left(\frac{x_2+y_2}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}\right)$

$= f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

توضیح $f(f(v_1,v_2))$

$= f\left(\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}\right) = \left(\frac{\frac{v_1+v_2}{2} \times 2}{2}, \frac{\frac{v_1+v_2}{2} \times 2}{2}\right) = f(v_1,v_2)$

$$\Rightarrow \boxed{f(f(v_1,v_2)) = f(v_1,v_2)}$$

Scanned by CamScanner