علی نظری ۹۶۳۱۰۷۵

۱

الف) دستگاه سمت چپ

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

پلکانی

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

→ دارای ۴ محوری مشخص شده اند

$$\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \\ w = 3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$ ۱ جواب دارد

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ب) دستگاه سمت راست

پلکانی

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

درایه‌های محوری مشخص شده‌اند

$$\begin{cases} u = 1 \\ v = \frac{29}{7} \\ w = \frac{6}{7} \end{cases} \longrightarrow$$

جواب

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{29}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

۲

ماتریس سمت راست

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱

ماتریس سمت چپ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲

هم ارز نیستند چون فرم ماتریس پلکانی یکسانی ندارند.

فرم پلکانی باید یکسان باشد.

۳

۱- الف) سمت چپ

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 4 & 8 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 8-4h & k-8 \end{bmatrix}$$

۱ جواب داشته باشد ← متغیر آزاد نداشته باشیم ← $8-4h\neq 0$ ← $\boxed{h\neq 2}$

بی نهایت جواب داشته باشد ← متغیر آزاد داشته باشیم ← $\begin{cases} 8-4h=0 \\ k-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=2 \\ k=8 \end{cases}$

بدون جواب ← $\begin{cases} 8-4h=0 \\ k-8\neq 0 \end{cases}$ ← $\begin{cases} h=2 \\ k\neq 8 \end{cases}$

ب) سمت راست

$$\begin{bmatrix} -2 & h & 1 \\ 6 & k & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & h & 1 \\ 0 & k+3h & 1 \end{bmatrix}$$

۱ جواب ← $k+3h\neq 0$ ← $k\neq -3h$

بی نهایت جواب ← امکان ندارد

بدون جواب ← $k+3h=0$ ← $k=-3h$

۲-

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda+4 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda+4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

باید سطر آخر صفر شود تا بی نهایت جواب داشته باشیم و فقط جواب صفر نداشته باشیم

$$\Rightarrow 1-\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=1}$$

۳- متغیر آزاد نداشته باشیم

$$\begin{bmatrix} a & b & c & y_1 \\ d & e & f & y_2 \\ g & h & i & y_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جواب}}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e-\frac{bd}{a} & f-\frac{cd}{a} \\ 0 & h-\frac{bg}{a} & i-\frac{cg}{a} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e-\frac{bd}{a} & f-\frac{cd}{a} \\ 0 & 0 & i-\frac{cg}{a}-\left(f-\frac{cd}{a}\right)\left(\frac{h-\frac{bg}{a}}{e-\frac{bd}{a}}\right) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a \neq 0 \ , \ e-\frac{bd}{a} \neq 0 \ , \ i-\frac{cg}{a}-\left(f-\frac{cd}{a}\right)\left(\frac{h-\frac{bg}{a}}{e-\frac{bd}{a}}\right) \neq 0$$

---

۴) فرومعین

در دستگاه‌های فرومعین چون حتماً متغیر آزاد داریم ⇐ بی‌نهایت جواب داریم.
یعنی چون تعداد ستون‌ها از سطرها بیشتر است با وجود عنصر محوری داشتن هر سطر، باز هم برخی از ستون‌ها محوری نمی‌شوند و متغیر آزاد داریم.

در دستگاه فرامعین اگر به تعداد سطرهایی که از متغیرها بیشتر هستند، سطرهایی داشته باشیم که از ترکیب خطی بقیه سطرها بوجود آمده باشند، دستگاه سازگار خواهد بود و جواب خواهد داشت.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & -11 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

سازگار ← جواب دارد

$\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\text{مستقل خطی}} \Rightarrow t_1 v_1 + \dots + t_n v_n = 0 \xrightarrow[\text{جواب بدیهی}]{\text{فقط دارای}} \{ t_i = 0$

$\Rightarrow p_1 v_1 + p_2(v_1+v_2) + \dots + p_n(v_1+\dots+v_n) =$

$\to = v_1(p_1+\dots+p_n) + v_2(p_2+\dots+p_n)+\dots+v_n p_n = 0$

اگر مستقل خطی باشد فقط جواب بدیهی را دارد؛

$p_n = t_n = 0 \qquad p_n + p_{n-1} = t_{n-1} = 0 \to p_{n-1} = 0$

$\dots \qquad p_1+\dots+p_n = t_1 = 0 \to p_1 = 0$

$\{v_1, v_1+v_2, \dots, v_1+\dots+v_n\} \longleftarrow$ مستقل خطی است $\Longleftarrow$

برای عبارت دوم هم داریم:

$q_1(v_1+v_2)+q_2(v_2+v_3)+\dots+q_{n-1}(v_{n-1}+v_n)+q_n(v_n+v_1)=0$

اگر مستقل خطی باشد فقط یک جواب بدیهی دارد؛

$\to v_1(q_1+q_n)+v_2(q_1+q_2)+\dots+v_n(q_{n-1}+q_n)=0$

$q_n+q_{n-1}=t_n=0 \qquad q_{n-1}+q_{n-2}=t_{n-1}=0$

$\dots \quad q_2+q_1=t_2=0 \qquad q_1+q_n=t_1=0$

باید به صورت استقرایی ثابت کنیم که به ازای n های فرد ⟵ ۱ جواب بدیهی را داریم؛

$n=2 \to q_1+q_n=0 \Rightarrow q_1+q_2=0 \to$ بی‌شمار جواب

$n=3 \to q_1+q_3=0, \ q_1+q_2=0, \ q_2+q_3=0 \Rightarrow q_1=q_2=q_3=0$ ✓ یک جواب

$\{v_1+v_2, \dots, v_n+v_1\}$ مستقل خطی برای n های فرد است $\Longleftarrow$

۱ـ غلط ← اگر یکی از بردارها را به صورت ترکیب خطی بقیه بنویسیم، وابسته خطی اند لزومی ندارد همه آنها این خاصیت را داشته باشند.

$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-V_2 + (0) V_3 = V_1$ ✓ اما V_3 ترکیب خطی V_1 و V_2 نیست.

۲ـ غلط ← اگر درایه محوری در ستون b باشد، ناسازگار است

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ جواب ندارد

۳ـ درست ← جواب یکتا دارد ← همه ستون های A محوری اند و به ازای هر b جواب دارند

۴ـ درست است.

۵ـ غلط ← مثال نقض:

$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x = [1 \quad 0 \quad 0] \Rightarrow Ax = 0$

۶ـ درست ← وقتی n ستون محوری دارد یعنی $m \geq n$ بوده است

اگر $n = m$ ← ۱ جواب دارد و اگر $m > n$ باشد یا ۰ جواب یا ۱ جواب دارد ← حداکثر ۱ جواب دارد.

۷ـ غلط است.

۸ـ غلط است ← $S_1 \subset S_2$

ممکن است $\text{Span}(S1) = \text{Span}(S2) \not\Rightarrow \cancel{S_1 = S_2}$

۷

n = ۰ → ۲ تا درایه ندارد

n = 1 → ۲ تا درایه ندارد

n = ۲ → $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ → مستقل خطی

n = ۳ → $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ مستقل خطی
جواب بدیهی صفر

n > ۳ → تعداد حالت‌ها = تعداد ستون > تعداد سطرها ⇒ متغیر آزاد دارد

n < ۳ ⇐ وابسته می‌شوند

۸

۱

$\begin{bmatrix} a & b & d & 0 \\ 0 & c & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

- $a \neq 0$
- b آزاد
- $c \neq 0$
- d آزاد
- e آزاد
- $f \neq 0$

۲

$\begin{bmatrix} a & b & d & 0 \\ 1 & c & e & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ همه متغیرها را
هر مقداری آزاد هستند.

۹

نمی‌دونم والا

۱۰) الف)

$$T(\alpha x) \overset{?}{=} \alpha T(x)$$

$$T(\alpha x, \alpha y) = \left(\frac{\tan(\alpha x)}{\tan(\alpha x)} + 3\alpha x, 2\alpha y\right) \neq \alpha\left(\frac{\tan(x)}{\tan(x)} + 3x, 2y\right)$$

خطی نیست

ب)

$$T(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x + \alpha y, -\alpha y) = \alpha(2x + y, -y)$$

$$T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2, -y_1 - y_2)$$

$$= (2x_1 + y_1, -y_1) + (2x_2 + y_2, -y_2)$$

خطی است

ج)

$$f(f(v_1, v_2)) = f\left(\frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2}}{2}, \frac{\frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2}\right) = f(v_1, v_2)$$

خطی است.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_1 + v_2}{2} \\ \frac{v_1 + v_2}{2} \end{bmatrix}$$