بسمه تعالی

جبرخطی و کاربردها

نیمسال دوم ۹۸-۹۷

تمرین (۴)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی کامپیوتر

مهلت تحویل: ۱۳۹۸/۰۲/۲۵

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری   شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

.۱

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = A_1 + A_2 \rightarrow 0 = -A_3 + A_2 + A_1$$

.۲

(آ) زیرمجوعه را فضای $\mathbb{Z}^2$ در نظر میگیریم، در این صورت جمع هر دو عضو این زیرمجموعه در خودش موجود است ولی نسبت به ضرب اسکالر بسته نیست، برای مثال:

$$(1,1) \in \mathbb{Z} \text{ but } \sqrt{2}(1,1) = \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \notin \mathbb{Z}$$

(ب) فرض کنیم فضای مورد نظر ما به صورت اجتماع دو مجموعه باشد، اجتماع دو بردار x ها و y ها برابر با جواب ماست:

$$U = \{(x,0): x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y): y \in \mathbb{R}\}$$

مثال دیگر می‌توان به مجموعه زیر اشاره کرد:

$$U = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0 \text{ or } x \leq 0, y \leq 0\}$$

مجموعه بالا اجتماع ناحیه اول وسوم دایره مثلثاتی است که نسبت به ضرب اسکالر بسته است ولی نسبت به جمع نه، مثلاً $(1,0)$ و $(0,-1)$ در U موجود است ولی جمعشان یعنی $(1,-1)$ نه.

.۳

۱- فرض کنید مجموعه $A = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ پایه‌ای برای $P_n[x]$ باشد، با استفاده از این پایه ما می‌توانیم عناصر را با استفاده از بردارهای مختصات به عنوان زیر بنویسیم:

$$[1]_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad , \quad [x-a]_A = \begin{bmatrix} -a \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad , \quad [(x-a)^2]_A = \begin{bmatrix} a^2 \\ -2a \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad , \dots , [(x-a)^{n-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} \binom{n-1}{0}(-a)^{n-1} \\ \binom{n-1}{1}(-a)^{n-2} \\ \binom{n-1}{2}(-a)^{n-3} \\ \vdots \\ \binom{n-1}{n-2}(-a)^{1} \\ \binom{n-1}{n-1}(-a)^{0} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

مجموعه بالا پایه است اگر و تنها اگر مستقل خطی باشند، برای تایید این موضوع، ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{0}(-a)^{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{1}(-a)^{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \binom{n-1}{2}(-a)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{n-1}{n-2}(-a)^{1} \\ 0 & 0 & \dots & \binom{n-1}{n-1}(-a)^{0} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

این ماتریس بالامثلثی است و قطرها صفر نیستند، این بدان معناست که ماتریس منفرد نیست و بنابراین ستون‌ها مستقل خطی هستند، پس پایه‌است.

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری | شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

۲- ما می‌توانیم بسط تیلور را حول نقطه a بنویسیم.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-1)^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{n-1}(x)(x-a)^{n-1}$$

۳- چون P_n یک زیر مجموعه از P است و P_n نسبت به عملیات‌های جمع و ضرب اسکالر بسته است (صفر را هم شامل می‌شود) پس یک زیرفضای P است.

خیر، متناهی‌البعد نیست زیرا هر P_n خود زیرفضای P_{n+1} است و همه‌ی این‌ها تا بینهایت می‌رود و همه‌ی آن‌ها زیرفضای P است، پس نامتناهی است.

.۴

قسمت الف می‌گوید که تمام فضای ستونی A زیرمجموعه فضای ستونی B است، این به معنای این است که تمام ستون های A را می‌توان به صورت ترکیب خطی ستون‌های B نوشت. که این برابری الف و ب است.

برابری ب و ج:

$$B_{m\times q}.C_{q\times p} = A_{m\times n} \to [col_1(B) \quad col_2(B) \quad \cdots \quad col_q(B)]\begin{bmatrix} row_1(C) \\ row_2(C) \\ \cdots \\ row_q(C) \end{bmatrix} =$$

$$col_1(B)row_1(C) + col_2(B)row_2(C) + \cdots + col_q(B)row_q(C) = [col_1(A) \quad col_1(A) \quad \cdots \quad col_1(A)]$$

که برابر قسمت ب است.

و:

$$\forall v, v \in \ker A \to Av = 0 \to A^2 v = 0 \to v \in \ker A^2 \to \ker A \subseteq \ker A^2$$

و در انتها اگر تعداد ستون‌های ماتریس از سطرهای آن بیشتر شود، متغیر آزاد ایجاد می‌شود و جواب غیر بدیهی دارد. پس فضای آن مخالف صفر میشود.

.۵

$$\begin{bmatrix} 2s+3t \\ r+s-2t \\ r+s-2t \\ 4r+s \\ 3r-s-t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

سه ستون بالا باید ستون‌های محوری A باشند و مابقی ستون‌های A را باید بتوان با ترکیب خطی این ستون ها یافت. حتی A می تواند فقط از این سه ستون تشکیل شود:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

.۶

برای زیر فضا بودن باید نشان دهیم، زیر مجموعه مورد نظر خود یک فضا است. یعنی :

The zero vector 0 of V is in W1+W2.(I)

For any u, v∈W1+W2, we have u+v∈W1+W2.(II)

For any v∈W1+W2 and r∈R, we have rv∈W1+W2. (III)

می دانیم که :

$$Range(T) = G$$

$$x_1 \in U \to T(x_1) = w \in G \text{ and } x_2 \in U \to T(x_2) = w' \in G$$

و چون U یک زیر فضا است، پس شامل صفر است و چون تبدیل خطی است:

$$0 \in U \to T(0) = 0 \in T(U) \;\; (\mathbb{I})$$

و همچنین چون تبدیل خطی است:

$$\alpha w + \beta w' \in G \text{ because } \alpha w + \beta w' = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = T(\overset{\in U}{\alpha w + \beta w'}) \in range\ (T) = G (\mathbb{II}) \text{and } (\mathbb{III})$$

.۷

الف)

$$W = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = span\{v_1, v_2\}$$

$$\text{if } x_1 = 0 \text{ and } x_2 = 0 \to 0 \in W$$

$$w, w' \in W \to w + w' = (\alpha v_1 + \beta v_2) + (\alpha' v_1 + \beta' v_2) = \sigma v_1 + \sigma' v_2 \in W$$

$$kw = k(\alpha v_1 + \beta v_2) = (\alpha' v_1 + \beta' v_2) \in W$$

پس زیرفضایی برای R^4 است.

ب) چون دوبردار v_1 و v_2 مستقل خطی‌اند، پس پایه‌ای برای زیرفضای W هستند و بعد آن برابر با ۲ است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } Dim(W) = 2.$$

ج)

$$k_1(1,0,1,1)^t = k_1(1,0,1,1)^t + 0 \times (0,1,1,-1)^t$$

چون ترکیب خطی از فضای W است، پس مجموعه فوق یک زیرفضا برای W است.

.۸

رنج تبدیل خطی T را با R(T) نمایش می‌دهیم که برابر است با :

$$R(T) = \{w : w \in W, w = T(x) \text{ for some } x \in V\}$$

که یک زیرفضا از W است. چون تبدیل پوشا است طبق تعریف بالا R(T)=W.

حال اگر $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ پایه‌های V باشند و تبدیل یک‌به‌یک باشد، چون v_i ها مستقل خطی هستند، طبق قضیه‌ای[1] $T(v_i)$ ها نیز مستقل خطی‌اند و طبق قضیه‌ای دیگر [2] چون v_i ها فضای V را اسپن می‌کنند، پس $T(v_i)$ نیز R(T) را اسپن می‌کنند پس $T(v_i)$ دوشرط لازم و کافی برای پایه شدن R(T)=W را دارند.

proof of (1):

Proof. Assume that T is one-to-one and $v_1, \dots, v_k$ are linearly independent in $\mathcal{V}$. Suppose that $\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_k T(v_k) = 0$. Since T is linear, this implies that $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = 0$. Since T is one-to-one, it follows that $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$. Since $v_1, \dots, v_k$ are linearly independent, this implies $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, and we conclude that $T(v_1), \dots, T(v_k)$ are linearly independent in $\mathcal{W}$.

Proof of (2):

Proof. Suppose that $w \in \mathcal{R}(T)$. Then there is some $v \in \mathcal{V}$ such that $T(v) = w$. If $v_1, \dots, v_k$ span $\mathcal{V}$, then we can write $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ for scalars $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Since T is linear, it follows that

$$w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_k T(v_k),$$

and we conclude that $T(v_1), \dots, T(v_k)$ span $\mathcal{R}(T)$. □

.۹

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

الف) نادرست،

$$r(AB) \leq \min\big(r(A), r(B)\big)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{and } r(A) = 2$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{bmatrix} \text{and } r(A^2) = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{and } r(B) = 2$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{and } r(B^2) = 1$$

$$r(A) = r(B) \rightarrow r(A^2) \neq r(B^2)$$

ب)نادرست،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{and } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } r(A) = 2, r(B) = 1$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{and } r(A - B) = 2 > r(A) - r(B)$$

ج)نادرست،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{and } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(AB) = 0 \text{ and } r(A) = r(B) \neq 0$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری | شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

.۱۰

اگر ماتریس x به صورت $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ باشد و ماتریس $y^t = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]$ باشد، حاصل ضرب این دو ماتریس برابر است با:

$$x \times y^t = [x(y_1) \quad x(y_2) \quad \cdots \quad x(y_n)\,]$$

و این به این معنی است که ستون ها ضریبی از هم هستند و پس از کاهش یافته کردن فقط یک ستون باقی می‌ماند (رنک =۱). **اثبات حکم**

اثبات عکس:

حال فرض کنیم ماتریس A دارای رنک ۱ می‌باشد، یعنی پس از کاهش یافته کردن فقط یک ستون غیر صفر دارد، مثل زیر، پس می‌توان به ازای ستون های صفر ترکیب خطی از ستون های دیگر قرار داد.

$$\begin{aligned} A = [a_1 \quad 0^t \quad \cdots \quad 0^t] &\to [a_1 \quad \alpha a_1 \quad \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \quad \cdots \quad \alpha_n (a_{1:n-1})] \\ &= a_1 \times [1 \quad \alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n] = x \times y^t \end{aligned}$$

.۱۱

کافیست نشان دهیم که بردارهای $\{\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \cdots, \lambda_n a_n\}$ مستقل خطی اند

$$\begin{aligned} c_1\lambda_1 a_1 + c_2\lambda_2 a_2 + \cdots + c_n\lambda_n a_n = 0 &\xrightarrow{\lambda_i \neq 0} c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0 \to span\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \\ &= span\{\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \cdots, \lambda_n a_n\} \to \text{is a basis.} \end{aligned}$$

اگر یک نقطه را تحت پایه $x_1, x_2, \cdots, x_n$ نمایش دهیم، به فرم زیر میشود.

$$[A] = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)(\lambda_1 a_1) + \left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right)(\lambda_2 a_2) + \cdots + \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)(\lambda_n a_n)$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\lambda_1} & \frac{x_2}{\lambda_2} & \cdots & \frac{x_n}{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

$$w = [a_1 + a_2 + \cdots + a_n] = \{1,1, \dots 1\}$$

در پایه دوم :

$$\left\{\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right\}$$

.۱۲

فرض کنیم w در زیرفضا موجود است. و فرض میکنیم بشود به صورت خواسته شده سوال نوشت:

$$w = xa_1 + ya_2 + za_3 + ta_4 \overset{\text{فرض}}{=} xa_1 + ya_2 + za_3 - (x+y+z)(-a_1 - a_2 - a_3)$$
$$= (2x+y+z)a_1 + (x+2y+z)a_2 + (x+y+2z)a_3 = span\{a_1,a_2,a_3\} \to w \in \mathbb{R}^3$$

تعمیم برای n:

$$w = c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_na_n + da_{n+1}$$
$$= (2c_1 + c_2 + \cdots + c_n)a_1 + \cdots + (c_1 + c_2 + \cdots + 2c_n)a_n = span\{a_1,a_2, \dots ,a_n\} \to w \in \mathbb{R}^n$$