Subject
Date

امیرحسین کاشانی - ۹۶۳۱۰۵۹ - تکلیف ۱ - جبرخطی

۱)

switch

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & 5 \end{bmatrix}$$

echlon

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$u = 1$

$v = 2$

$w = 3$

$z = 4$

تعداد جواب یک عدد می باشد

درایه های محوری

۲) به صورت برداری نمی توان نشان داد

یعنی بردار مورد نظر تهی است

PAPCO

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{36}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

همه درایه‌های محوری

$$u = 1 \quad v = \frac{29}{7} \quad z = \frac{6}{7}$$

۲_

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{I}$$

$$\begin{array}{l} -a/2 \\ -b/2 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{II}$$

با توجه به I و II چون فرم کاهش یافته ماتریس یکتا است پس این دو نمی‌توانند
با هم، هم ارزی داشته باشند

۳-۱.

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 3 & 8 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 8-4h & k-8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-h\times\frac{k-8}{8-4h} \\ 0 & 1 & \frac{k-8}{8-4h} \end{bmatrix}$$

- اگر $h=2$ باشد و $k\neq 8$ جواب ندارد
- اگر $h=2$, $k=8$ باشد متغیر آزاد(؟) داریم
- و اگر $h\neq 2$ یک جواب دارد

$$\begin{bmatrix} -2 & h & 1 \\ 6 & k & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & h & 1 \\ 0 & 3h+k & +1 \end{bmatrix}$$

- اگر $3h+k=0$ باشد جواب ندارد
- در غیر اینصورت یک جواب دارد

۳-۲.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda+4 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda+4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

اگر $\boxed{\lambda=1}$ باشد ← ستون free خواهیم داشت

۳-۳. ؟

$0=h=g=d$ $\qquad$ $a,e,i\neq 0$

بقیه درایه‌ها هر عددی می‌توانند باشند ← برای مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PAPCO

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ h & e & f & g \end{bmatrix}$$

۴- با توجه به اینکه معادلات سازگار هستند می دانیم

در صورت صفر بودن h, c و f => g نیز صفر

به طور کلی در صورت صفر بودن بقیه خودش صفر است

می شود که در این حالت وجود ستون free حتمی است. (همچنین برای حالتی که a, b, c صفر باشند)

★ در بقیه ی شرایط ماکسیمم به تعداد سطرها ستون محوری داریم و با توجه به اینکه تعداد سطرها کمتر از تعداد ستون ها است => قطعاً ستون free خواهیم داشت => بی نهایت جواب داریم

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• بله - دستگاه فرامعین می تواند سازگار باشد

۵- از برهان خلف استفاده می کنیم: اگر $\{v_1, v_1+v_2, \dots, v_1+v_2+\dots+v_n\}$ مستقل خطی نباشد

آنگاه: $c_1 v_1 + c_2(v_1+v_2) + \dots + c_n(v_1+v_2+\dots+v_n) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{(c_1+c_2+\dots+c_n)}_{k_1} v_1 + \underbrace{(c_2+c_3+\dots+c_n)}_{k_2} v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

$$\Rightarrow k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = 0$$

به تناقض رسیدیم، در صورتی که $\{v_1, v_1+v_2, \dots, v_1+v_2+\dots+v_n\}$ مستقل خطی نباشد،

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ نیز مستقل خطی نمی باشد $\xLeftarrow{\text{برهان خلف}}$ $\{v_1, v_1+v_2, v_1+\dots+v_n\}$

مستقل خطی هستند.

به ازای n های فرد و زوج برقرار است   فرض می کنیم مستقل خطی نیست

برهان خلف: $k_1(v_1+v_2) + k_2(v_2+v_3) + \dots + k_n(v_n+v_1) = 0$

$$\underbrace{(k_1+k_n)}_{c_1} v_1 + \underbrace{(k_2+k_1)}_{c_2} v_2 + \dots + \underbrace{(k_n+k_{n-1})}_{c_3} v_n = 0$$

به تناقض می رسیم، اینکه $v_1, \dots, v_n$ مستقل خطی نیستند.

✗ اثبات می شود که $v_1+v_2, \dots, v_n+v_{n-1}$ مستقل خطی است

به طور کاملاً مشابه برای n های زوج اثبات می شود

Subject

Date

برای رد کردن عکس حکم ها:

$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $V_1 + V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $V_1 + V_2 + V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $V_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ - \end{bmatrix}$ $V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

۶_۱. خیر. $v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ و $v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ← v_2 و v_1 برحسب بقیه بدست نمی‌آیند

۶_۲. بله این به این معنی است که echlon بدست آمده ماتریس افزوده دارای سطری باشد که در آن همه‌ی درایه به جز خانه‌ی آخر صفر باشند

۶_۳. بله. با توجه به اینکه $Ax=b$ جواب یکتا دارد تمام ستون‌های A آن محوری است در نتیجه به ازای هر b جواب دارد و کل فضای $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کند

۶_۴. بله چون داریم که برای معادله‌ی $c_1s_1+c_2s_2+\dots+c_ns_n=cv$ فقط جواب بدیهی داریم پس معادله‌ی $cv+c_1s_1+c_2s_2+\dots+c_ns_n=0$ نیز فقط یک جواب که همان جواب بدیهی را دارد و مستقل خطی است

۶_۵. خیر $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

۶_۶. بله. چون ستون free ندارد

۶_۷. خیر. شرط دو طرفه نمی‌تواند باشد برای مثال اگر $T=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$ باشد همه را روی هم تصویر می‌کند

۸_۶. خیر- زیرا فقط حالت اشلون کاهش یافته‌ی آنها با هم یکی است و لزومی در یکی بودن

$$S_2 = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S_1 و S_2 نیست

$$n\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}^{v_1 \;\cdots\; v_n}\right. = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

۷_ می‌دانیم در صورتی که تعداد دلاقان در فضای R^n از n بیشتر شود دیگر مجموعه مستقل خطی نیست زیرا در آن متغیر free به وجود می‌آید.

(در صورتی که ماتریس نشان داده شده فقط یک جواب داشته باشد مستقل خطی است.)

حالت اگر $3<n$ باشد آن گاه تعداد بردارهای به وجود آمده همواره از n (بعد فضا) بیشتر بوده و وابستگی خطی است

برای $n=3$ ← سه بردار $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ بدست می‌آید که به $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ تبدیل می‌شود و مستقل خطی است

برای $n=2$ ← $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ← یک بردار است و مستقل خطی است

برای $n=1$ ← به انتفاع موضوع برقرار است (برداری ندارد)

۸-۱.

$$\begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باید ۳ ستون محوری داشته باشیم

$a \neq 0$ و $c \neq 0$ و $f \neq 0$ و بقیه ی هر عددی می توانند باشند

۸-۲. همه ی متغیر ها هر عددی می توانند باشند

۹-

Subject

Date

۱۰- الف) نیست

$$f(2x, 2y) = \left(\frac{\tan(2x)}{\tan(3x)}, 9x, 4y\right)$$

$$\neq \left(2\cdot\left(\frac{\tan x}{\tan x} + 3x\right), 2\cdot 2y\right) = (2 + 9x, 4y)$$

درصورتی که "+" در صورت سؤال "×" باشد تبدیل خطی نیست اثبات در این آمده

ب) تبدیل خطی هست

$$\bullet\ f(cx, cy) = (2cx + cy, -cy) = c\times(2x + y, -y)$$

$$\bullet\ f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), -(y_1 + y_2))$$

$$\bullet\ f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = (2x_1 + y_1, -y_1) + (2x_2 + y_2, -y_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$$

ج) درمورد f

$$f(cv_1, cv_2) = \left(\frac{c(v_1 + v_2)}{2}, \frac{c(v_1 + v_2)}{2}\right)$$

$$= c\left(\frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2}\right) = c f(v_1, v_2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$f(v_1 + u_1, v_2 + u_2) = \left(\frac{v_1 + u_1 + v_2 + u_2}{2}, \frac{v_1 + u_1 + v_2 + u_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{u_1 + u_2}{2}\right) = f(v_1, v_2) + f(u_1, u_2)$$

☆ درصورتی که بخش الف از $R^2 \to R^3$ باشد:

$$f(cx, cy) = (1, 3cx, 2cy) \neq c\, f(x, y)$$