۹۶۳۱۰۷۵ علی تقوی

۱ الف)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ XA & XB+Y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} XA = C \rightarrow X = CA^{-1} \\ XB+Y = D \rightarrow CA^{-1}B + Y = D \end{cases}$$

$$\rightarrow Y = D - CA^{-1}B$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}\right) \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det(AY)$$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(AY) = \det(A)\det(Y)$$

$$= \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

ب)

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AY) = \det(AD - ACA^{-1}B)$$

$$= \det(AD - CAA^{-1}B) = \det(AD - CB)$$

---

۲ الف) اگر روی n سطر اول ماتریس، عملیات‌های سطری را انجام دهیم، ماتریس A به فرم پلکانی درمی‌آید. می‌دانیم اگر A پلکانی باشد ⇐ $\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det(A)$

ب) این بار اما سعی می‌کنیم با عملیات‌های سطری روی n سطر پایینی ماتریس به قطرای برسیم که D پایین مثلثی شود و حال ⇐ $\det\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det(D)$

ج)

$$\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \underbrace{\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\text{قسمت (الف)}} \underbrace{\det\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix}}_{\text{قسمت (ب)}} = \det(A)\det(D)$$

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D)$$

۳) آ)

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)} \longrightarrow adj(A) = A^{-1} det(A)$$

$$\longrightarrow (adj(A))^{T} = (A^{-1})^{T} det(A) \quad (1)$$

$$(A^{T})^{-1} = \frac{adj(A^{T})}{det(A^{T})} \longrightarrow adj(A^{T}) = (A^{T})^{-1} \overbrace{det(A^{T})}^{det(A)} \quad (۲)$$

$$\Rightarrow adj(A^{T}) = (adj(A))^{T}$$

ب)

$$A \cdot adj(A) = det(A) I_n \xrightarrow{\text{منفرد}} A.adj(A) = 0$$

برهان خلف:

فرض خلف: $adj(A) \neq 0 \xrightarrow{\text{معادل}} A = 0 \Rightarrow adj(A) = 0$

تناقض $\Rightarrow$ حکم ثابت می‌شود

ج)

$$A.adj(A) = det(A).I_n \longrightarrow det(A)det(adj(A)) = (det(A))^{n}$$

$$\Rightarrow det(adj(A)) = (det(A))^{n-1}$$

د)

$$adj(BA) = det(BA)\,(BA)^{-1} = det(B)det(A)\,A^{-1}B^{-1}$$

$$\Rightarrow adj(BA) = adj(A)\,adj(B)$$

ه)

طبق ج) $det(adj(A)) = (det(A))^{n-1}$

$$\Rightarrow det(adj(adj(A))) = det(adj(A))^{n-1} = \left((det(A))^{n-1}\right)^{n-1} = det(A)^{(n-1)^2}$$

۴

$$\det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & b^2-a^2\\ 0 & c-a & c^2-a^2\end{bmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 1 & c+a\end{bmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 0 & c-b\end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

---

۵ با عملیات‌های سطری می‌توانیم ماتریس A را به شکل زیر در آوریم:

$$A = \begin{bmatrix}\pm 1 & C_{1\times(n-1)}\\ 0 & B_{(n-1)(n-1)}\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{با لاپلاس}} \det(A) = \pm\det(B)$$

درایه‌های B فقط $\{-2, 0, 2\}$ هستند $\Rightarrow B = 2D$

$$\Rightarrow \det(A) = \pm 2^{n-1}\det(D) \Rightarrow 2^{n-1} \mid \det(A)$$

---

۶ الف)

$$\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax_1\\ bx_2\\ cx_3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}x_1' &= ax_1\\ x_2' &= bx_2\\ x_3' &= cx_3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} + \frac{x_3'^2}{c^2} = 1$$

ب)

حجم $T(S) = \det(A)$. حجم $(S) = abc\left(\frac{4\pi}{3}\right)$