دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر
نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری
شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

.۱

فرض کنیم ماتریس A به فرم زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

که در آن مجموع درایه‌های هر سطر برابر با s است. می‌دانیم که:

$$Ax = \lambda x \text{ and } x \neq 0 \rightarrow$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \overset{\text{add with other columns}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} - \lambda & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} - \lambda & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ s - \lambda & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s - \lambda & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (s - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow s = \lambda$$

برای قسمت دوم هم می‌دانیم مقادیر ویژه یک ماتریس با مقادیر ویژه ماتریس ترانهاده‌اش برابر است. پس برای حالتی که جمع درایه‌های هر ستون هم برابر است رابطه برقرار است.

☺

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری | شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

۲.

می توان چندجمله‌ای مشخصه را به فرم زیر نوشت:

$$0 = f(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) = \lambda^n - \lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \cdots + (-1)^n\prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

ضرب یک ستون در منفی یک علامت دترمینان را عوض می‌کند.

$$\det A = (-1)^n \det(-A)$$

و همچنین:

$$f(0) = \det(-A) = (-1)^n \Pi_{i=1}^{n}\lambda_i \rightarrow \det A = \Pi_{i=1}^{n}\lambda_i$$

برای قسمت دوم:

طبق تعریف دترمینان می دانیم که n عبارت دارای عبارت λ^{n-1} در دترمینان هستند.

$$\Pi_{i=1}^{n}(\lambda - A_{ii})$$

با توجه به این شرایط می‌فهمیم که ضریب مربوط به λ^{n-1} مشخص است.

$$-\,trace(A) = \Sigma_{i=1}^{n}A_{ii}$$

با توجه به ضریب λ^{n-1} در $f(\lambda)$ نتیجه می‌شود که:

$$trace(A) = \Sigma_{\mathrm{i}=1}^{n}(\lambda_i)$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری | شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

۳. آ)

$$Ax = ax \to A^{-1}Ax = A^{-1}ax \to x = aA^{-1}x \to \frac{1}{a}x = A^{-1}x$$

ب)

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda^2 x = 0 \xrightarrow{x \neq 0} \lambda = 0$$

ج)

می‌دانیم که:

$$\det A = \det A^T$$

و مقدار ویژه با حل معادله زیر بدست می‌آید.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

همچنین:

$$(A - \lambda I)^t = A^t - \lambda I^t = A^t - \lambda I$$

$$\to \det(A - \lambda I) = \det(A^t - \lambda I)$$

د)

در قسمت قبلی نشان داده شده است.

۴. آ)

$$B = P^{-1}AP \text{ and } AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

$$\det B = \det P^{-1}AP = \det A \neq 0 \to B \text{ is invertible.}$$

$$\to B(P^{-1}A^{-1}P) = (P^{-1}AP)(P^{-1}A^{-1}P) = I$$

$$\to (P^{-1}A^{-1}P)B = (P^{-1}A^{-1}P)(P^{-1}AP) = I$$

$$\Rightarrow B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P.$$

ب)

$$A = PBP^{-1} \to A^2 = AA = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^2P^{-1} \to A^2 \sim B^2$$

ج)

$$A \sim B \to B = P^{-1}AP$$

$$A \sim C \to A = Q^{-1}CQ$$

$$B = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}C(QP) \to B \sim C$$

د)

قطری شدنی بودن یک ماتریس به معنای تشابه با یک ماتریس قطری است.

طبق قسمت ج، A با ماتریس قطری C مشابه است و B نیز با A مشابه است؛ پس B با C مشابه است و یعنی قطری شدنی است.

ه)

$$\text{Let } A = PBP^{-1} \text{ then } Rank(A) = Rank(PBP^{-1}) \leq Rank(PB) \leq Rank(B) = Rank(P^{-1}AP) \leq Rank(A) \to Rank(A) = Rank(B)$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

۵.آ)

$$Av = ev = (a - bi)(Re(v) + iIm(v) = \big(aRe(v) + bIm(v)\big) + i\big(aIm(v) - bRe(v)\big)$$
$$\rightarrow Re(Av) = A\big(Re(v)\big) = aRe(v) + bIm(v)$$

$$\rightarrow Im(Av) = A\big(Im(v)\big) == aIm(v) - bRe(v)$$

ب)

$$A\big(Re(v)\big) = aRe(v) + bIm(v) = [Re(v)Im(v)]\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$A\big(Im(v)\big) = aIm(v) - bRe(v) = [Re(v)Im(v)]\begin{bmatrix}-b\\a\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}-b\\a\end{bmatrix}$$

$$AP = A[Re(v) \quad Im(v)] = [ARe(v) \quad AIm(v)] = \left[P\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \quad P\begin{bmatrix}-b\\a\end{bmatrix}\right] = P\begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix} = PC$$

۶.

اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A باشد، داریم:

$$Ax = \lambda x \rightarrow A^2x = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda^2x = Ax$$

$$\lambda^2x = \lambda x \rightarrow \lambda = 0 \; or \; 1$$

۷.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ and } b = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$A^tA\hat{x} = A^tb \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 15 \\ -6 & 12 & -30 \\ 15 & -3 & 75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 15 & a+b+c \\ -6 & 12 & -30 & -2(a+b+c) \\ 15 & -3 & 75 & 5(a+b+c) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -6 & 15 & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ 3\hat{x} - 6\hat{y} + 15\hat{z} = a+b+c \rightarrow \hat{x} - 2\hat{y} + 5\hat{z} = \frac{a+b+c}{3}$$

۸. آ)

$$A = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \text{and } b = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \rightarrow A^tA = a^2 + c^2$$

$$(a^2 + c^2)\hat{x} = ab + cd \rightarrow \hat{x} = \frac{ab + cd}{a^2 + c^2}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\hat{x} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری — شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

.۹

فرض می‌کنیم نقاط روی خط باشند، در این صورت مسئله کمترین مربعات نزدیکترین خط را به این نقاط می‌دهد.

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \text{ and } d=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \rightarrow A^tA\begin{bmatrix} \widehat{m} \\ \hat{b} \end{bmatrix}=A^td \rightarrow \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^n x_i^2 & \Sigma_{i=1}^n x_i \\ \Sigma_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{m} \\ \hat{b} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^n x_i y_i \\ \Sigma_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow px=q \rightarrow x=p^{-1}q \rightarrow \begin{bmatrix} \widehat{m} \\ \hat{b} \end{bmatrix}=\frac{1}{n\times\Sigma_{i=1}^n x_i^2-(\Sigma_{i=1}^n x_i)^2}\begin{bmatrix} n & -\Sigma_{i=1}^n x_i \\ -\Sigma_{i=1}^n x_i & \Sigma_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^n x_i y_i \\ \Sigma_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}$$

۱۰.آ)

$$\forall w\in W; w=au_1+bu_2 \rightarrow < z,w > = a(z.u_1)+b(z.u_2)=a\times 0+b\times 0=0 \rightarrow z\in W^{\perp}$$

ب) ☺

ج) پایه‌های متعامد W را به فرم $\{w_1,w_2,\dots,w_n\}$ در نظر می‌گیریم؛

$$\begin{aligned} y\in w \rightarrow y=c_1w_1+c_2w_2+\cdots+c_nw_n \rightarrow proj_w y &= \Sigma_{i=1}^n\left(\frac{y.w_i}{w_i.w_i}w_i\right) \\ &= \Sigma_{i=1}^n\left(\frac{c_1w_1+\cdots+c_nw_n}{w_i.w_i}w_i\right) \xrightarrow{\text{orthogonal}} proj_w y=\Sigma_{i=1}^n\left(\frac{c_i(w_i.w_i)}{w_i.w_i}w_i\right) \\ &= \Sigma_{i=1}^n c_iw_i=y \end{aligned}$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری | شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

۱۱.آ)

$$U = (u_1 \quad u_2) \to U^T = \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{pmatrix}$$

$$UU^T = u_1u_1^T + u_2u_2^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

$$U^TU = \begin{pmatrix} u_1^Tu_1 & u_1^Tu_2 \\ u_2^Tu_1 & u_2^Tu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ب)

$$proj_w y = UU^T y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{and } UU^T y = \text{invalid}$$

۱۲.

برای تبدیل خطی بودن کافیست نشان دهیم که:

$$proj_L y(ax + by) = a(proj_L x) + b(proj_L y)$$

$$proj_L y(ax + by) = \frac{(ax + by).u}{u.u} = \frac{(ax).u}{u.u} + \frac{(by).u}{u.u} = a \times \frac{x.u}{u.u} + b \times \frac{y.u}{u.u}$$
$$= a(proj_L x) + b(proj_L y)$$

$$proj_L 0 = \frac{0.u}{u.u} = 0$$

پس خطی است.

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری | شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

۱۳. ☺

۱۴. اعضای B مستقل خطی‌اند، طبق گرام-اشمیت، پایه ای مانند B' می‌توان ساخت و بدین معناست که برای هر $b_i', b_j' \in B'$:

$$b_i''.\ b_j' = b_i^T b_j = 0$$