۹۶۳۱۰۷۵ علی نظری

۱)

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

---

۲) آ) بسته نسبت به جمع است

$$Z^2 \subset R^2 \Longrightarrow \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \in Z^2$$

بسته نسبت به ضرب نیست

$$\times\tfrac{1}{2} \rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix} \notin Z^2$$

ب) زیرمجموعه‌ای را در نظر می‌گیریم در $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ آنکه $b|a$ یا $a=bk$

نسبت به جمع بسته نیست $\Rightarrow$ | نسبت به ضرب بسته است $\Longrightarrow$

---

۳) ۱) یک مجموعه پایه است اگر و تنها اگر مستقل خطی باشد:

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_{n-1}(x-a)^{n-1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(c_0 - c_1 a + c_2 a^2 - \dots + c_{n-1}(-a)^{n-1}\right)$$

$$+ \left(c_1 - 2a c_2 + \dots + (n-1)(-a)^{n-2} c_{n-1}\right) x + \dots$$

$$+ c_{n-1} x^{n-1} = 0$$

$\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ پایه $\Leftrightarrow$ مستقل خطی

$$\Rightarrow c_{n-1} = 0 \Longleftrightarrow c_{n-2} = \dots = c_1 = c_0 = 0$$

$\Leftarrow$ مستقل خطی است $\Longleftrightarrow$ پایه است.

۲) از بسط تیلور حول نقطه a را بنویسیم، به شکل چیزی که ما می‌خواهیم در می‌آید:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

۳)

$P_n \subset P$

P_n زیر فضا است $\Rightarrow$ P_n نسبت به جمع و ضرب بسته است $\longrightarrow$ صفر را شامل می‌شود

خیر P متناهی البعد نیست.

---

۴)

ستون‌های A را میتوان با ترکیب خطی ستون‌های B نوشت $\longrightarrow Col(A) \subseteq Col(B)$

ترکیب خطی ستون‌های B نوشت $\longrightarrow$ الف ✓ ب ✓

$$A = [Col_1(A) \ \dots \ Col_n(A)] = Col_1(B) \times row_1(C) + \dots$$

$$+ Col_q(B) \times row_q(C)$$

ستون‌های A از طریق ترکیب خطی ستون‌های B بدست می‌آید.

$$v \in \ker A \longrightarrow Av = 0 \longrightarrow A^2 v = 0 \longrightarrow v \in \ker A^2 \longrightarrow \ker A \subset \ker A^2$$

اگر تعداد ستون‌ها > تعداد سطرها شود $\longleftarrow$ متغیر آزاد $\longleftarrow$ جواب غیربدیهی $\longleftarrow$ فضای مخالف صفر

---

۵)

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_1} r + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_2} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_3} t \Rightarrow A = [v_1 \ \ v_2 \ \ v_3]$$

---

۶)

$$T(x) \subset T(U) \subset T(V) = W$$

$$\Rightarrow T(U) \subset W$$

$0 \in T(U)$

$\underset{\text{بسته به جمع و ضرب}}{T(V)} \xrightarrow{U \subset V} \underset{\text{بسته به جمع و ضرب}}{T(U)}$

$\Leftarrow$ $T(U)$ یک زیر فضای W است.

۷) آ) $W = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}}_{a_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}}_{a_2} x_2 \rightarrow W = \operatorname{span}\{a_1, a_2\}$

$x_1 = x_2 = 0 \rightarrow 0 \in W$

$w_1 + w_2 = (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\gamma a_1 + \theta a_2) = b_1 a_1 + b_2 a_2 \in W$

$cw = c(\alpha a_1 + \beta a_2) = c_1 a_1 + c_2 a_2 \in W$

$\Rightarrow W \subset R^4$

ب) پایه $= \{a_1, a_2\}$ و $\dim = 2$

ج) $k(1,0,1,1)^t = k a_1 + 0 \times a_2 \subset W$

---

۸) $B =$ V پایه $= \{V_1, \dots, V_n\}$

$T(V) = W$

$V = \operatorname{span}($پایه‌های $V) = \operatorname{span}(B)$

برای استقلال $T(B)$

$W = T(\operatorname{span}(B)) = \operatorname{span} T(B) = \alpha_1 T(V_1) + \dots + \alpha_n T(V_n) = 0$

$= T(\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n) = 0 \xrightarrow[\text{پس وارون‌پذیر}]{\text{یک به یک و پوشا}} T^{-1}(T(\dots)) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n = 0 \xrightarrow[\text{مستقل‌اند}]{B \text{ اعضای}} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

---

۹) آ) نادرست ← مثال‌هایی وجود دارد که $r(A) = r(B)$ ولی $r(A^2) \neq r(B^2)$

ب) نادرست ← مثال نقض $A = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

ج) نادرست ← مثال نقض $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}$