بسمه تعالی

جبر خطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۸-۹۷

تمرین (۱)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهلت تحویل: ۱۳۹۷/۱۲/۱۹

دانشکده مهندسی کامپیوتر

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری

شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

.۱

الف)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2u & - & v & & & & & = & 0 \\ -u & + & 2v & - & w & & & = & 0 \\ & - & v & + & 2w & - & z & = & 0 \\ & & & - & w & + & 2z & = & 5 \end{array}$$

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$ فرم پلکانی

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ فرم پلکانی کاهش یافته

درایه های با رنگ قرمز، درایه های محوری می‌باشند و چون تمام متغیر ها پایه[1]هستند، یک جواب دارد و نمی توان آن را به صورت پارامتریک نوشت و جواب نهایی به صورت زیر است:

$$u = 1. v = 2. w = 3. z = 4$$

ب)

$$\begin{array}{ccccccc} u & + & v & + & w & = & ۶ \\ u & + & ۲v & + & ۲w & = & ۱۱ \\ ۲u & + & ۳v & - & ۴w & = & ۱۱ \end{array}$$

فرم پلکانی

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

فرم پلکانی کاهش یافته

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{36}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

تمامی متغیرها پایه هستند و یک جواب دارد و جواب نهایی آن به صورت زیر است، چون یک جواب دارد به صورت پارامتری قابل نوشتن نیست:

$$u = 1. v = 9. w = -4$$

[1] basic

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری — شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

.۲

دو ماتریس هم ارز سطری‌اند، اگر بتوان با عملیات سطری مقدماتی از یکی به دیگری رسید و مجموعه جواب یکسانی دارند. با انجام عملیات سطری ماتریس سمت راست را به ماتریس پلکانی کاهش یافته تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & .5\\ 0 & 1 & 1.5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ماتریس حاصل سطری برابر صفر دارد، اما ماتریس سمت چپ با هیچ عملیاتی قابل تبدیل به این نیست (مثلا درایه ۲۲ ـ ردیف دو و ستون دو ـ برای صفر شدن احتیاج دارد که با ضریبی از سطر سوم جمع شود که این باعث میشود درایه ۲۳ ـ ردیف دو و ستون سه ـ صفر نباشد).

ماتریس کاهش یافته ماتریس سمت چپ:

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ a & -1 & 0\\ b & c & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

دو ماتریس مشابه هم نیستند.

.۳ -۱

الف)

$$\begin{aligned} x_۱ &+ hx_۲ = ۲\\ ۴x_۱ &+ ۸x_۲ = k \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}1 & h & 2\\ 4 & 8 & k\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & h & 2\\ 0 & 8-4h & k-8\end{bmatrix}$$

حالت بدون جواب: باید سطر آخر به فرم $[0\ 0\ x]$ که $x \neq 0$ باشد، پس:

$$8-4h=0 \rightarrow h=2 \ \&\ k-8 \neq 0 \rightarrow k \neq 8$$

حالت یک جواب داشتن: باید هر ردیف یک درایه پیشرو داشته باشد (یعنی ستونی آزاد نباشد)، پس:

$$8 - 4h \neq 0 \rightarrow h \neq 2$$

حالت بیشمار جواب داشتن: باید ستونی آزاد[۲] باشد، اینجا باید سطر آخر صفر شود، پس:

$$8 - 4h = 0 \rightarrow h = 2 \;\&\; k - 8 = 0 \rightarrow k = 8$$

ب)

$$\begin{array}{rcrcr} -۲x_۱ & + & hx_۲ & = & ۱ \\ ۶x_۱ & + & kx_۲ & = & -۲ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & h & 1 \\ 6 & k & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & h & 1 \\ 0 & k + 3h & 1 \end{bmatrix}$$

حالت بدون جواب: باید سطر آخر به فرم $[0\ 0\ x]$ باشد، پس:

$$k + 3h = 0 \rightarrow h = -\frac{k}{3}$$

حالت یک جواب داشتن: باید هر ردیف یک درایه پیشرو داشته باشد، پس:

$$k + 3h \neq 0 \rightarrow h \neq -\frac{k}{3}$$

حالت بیشمار جواب داشتن: باید ستونی آزاد باشد، اینجا باید سطر آخر صفر شود ولی به خاطر وجود یک **امکان ندارد**.

[۲] free

-۲

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & h & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & h+4 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

برای داشتن جوابی به جز صفر باید ستونی متغیر آزاد شود، برای این‌کار باید ردیف دوم مضربی از ردیف سوم باشد (اینجا یک برابر است)، پس:

$$h + 4 = 5 \to h = 1$$

-۳

$$\begin{bmatrix} a & b & c & y_1 \\ d & e & f & y_2 \\ g & h & i & y_3 \end{bmatrix}$$

برای اینکه به ازای هر Y جواب داشته باشد، باید در هر ردیف درایه پیشرو موجود باشد، پس باید هر ردیف مستقل خطی باشد (هیچ کدام به صورت ترکیب خطی دو ردیف دیگر نباشد).

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e - \frac{bd}{a} & f - \frac{cd}{a} \\ 0 & h - \frac{bg}{a} & i - \frac{cg}{a} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e - \frac{bd}{a} & f - \frac{cd}{a} \\ 0 & 0 & i - \frac{cg}{a} - \left(f - \frac{cd}{a}\right)\left(\frac{h - \frac{bg}{a}}{e - \frac{bd}{a}}\right) \end{bmatrix}$$

باید درایه های قطر ماتریس بالا مخالف صفر باشند.

۴. در دستگاه‌های فرومعین حتی اگر تمام سطرها نیز درایه پیشرو داشته باشد (سازگار فرض شده است) به علت بیشتر بودن تعداد ستون متغیر آزاد ایجاد می‌شود و این باعث ایجاد بینهایت جواب می‌شود.

در دستگاه فرامعین امکان دارد بتوان ردیفی را به صورت ترکیب خطی ردیف های دیگر نوشت و این باعث میشود در ماتریس کاهش‌یافته با ردیف‌هایی تمام صفر مواجه شویم و ماتریس تبدیل به مربعی یا فرومعین شود و جواب داشته باشد، مثل:

$$x_1 + 2x_2 = 2.$$

$$3x_1 + x_2 = 5.$$

$$8x_1 + 6x_2 = 14$$

که ماتریس افزوده آن و فرم پلکانی به صورت زیر میشود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 8 & 6 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دارای دو متغیر پایه و صفر متغیر آزاد است، پس سازگار و دارای جواب است.

۵.

می‌دانیم بردارهای $v_1.v_2. \dots .v_n$ مستقل خطی هستند

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0 \to c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0،$$

یعنی ترکیب خطی آن‌ها مساوی صفر یک جواب بدیهی دارد و آن هم ضرایب مساوی صفر است. حال:

$$a_1v_1 + a_{2(v_1+v_2)} + \cdots + a_n(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)v_1 + (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)v_2 + \cdots + a_nv_n$$

$$c_n = a_n = 0.$$

$$c_{n-1} = a_{n-1} + a_n = 0 \rightarrow a_{n-1} = 0.$$

$$\vdots$$

$$c_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

که طبق فرض اولیه می‌دانیم معادله بالا تنها یک جواب بدیهی دارد و درنتیجه **مستقل خطی** است.

برای بردارهای **دوم** نیز به صورت زیر است:

$$a_1(v_1 + v_2) + a_2(v_2 + v_3) + \cdots + a_{n-1}(v_{n-1} + v_n) + a_n(v_n + v_1)$$
$$= (a_1 + a_n)v_1 + \cdots + (a_n + a_{n-1})v_n$$

$$(a_1 + a_n)v_1 + (a_1 + a_2)v_2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)v_n = 0$$

$$a_1 + a_n = 0.$$

$$a_1 + a_2 = 0.$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} + a_n = 0$$

معادلات بالا به ازای n های فرد یک جواب بدیهی (همه ضرایب مساوی صفر دارد) و به ازای n های زوج بیشمار جواب دارد، برای اثبات این قضیه از استقرا استفاده می‌کنیم، و تفاضل هر دو جمله را حساب می‌کنیم:

$$a_1 + a_n = 0. a_1 + a_2 = 0 \rightarrow a_n - a_2 = 0.$$

$$a_2 + a_3 = 0. a_n + a_2 = 0 \rightarrow a_n - a_3 = 0.$$

$$\vdots$$

$$a_n + a_{n-1} = 0. a_n + (-1)^n a_{n-1} = 0 \rightarrow (-1)^n a_{n-1} - a_{n-1} = 0$$

$$\text{if n is odd} \Rightarrow -2(a_{n-1}) = 0 \rightarrow a_{n-1} = 0$$

$$\text{otherwise} \Rightarrow a_{n-1} - a_{(n-1)} = 0 \rightarrow 0 = 0$$

اگر n فرد باشدف تمام ضرایب صفر می‌شود و نتیجه می‌دهد **مستقل خطی** است و در غیر اینصورت نتیجه‌ای در مورد a_{n-1} نمی‌توان گرفت و متغیر **آزاد** می‌شود.

عکس حکم ها:.....

۶.

۱- نادرست، برای مستقل بودن خطی شرط کافی و لازم داشتن یک بردار به صورت ترکیب خطی بقیه است:

فرض کنیم n=3 است.

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.\, v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.\, v_3 = \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$$

بردار v_1 را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشت.

۲- نادرست، احتمال دارد درایه محوری در ستون b قرار گیرد.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

۳- درست، جواب یکتا داشتن معادله یعنی ستون های ماتریس A فضای R^n را اسپن می‌کند.

۴- درست، بردارv ای وجود ندارد، زیرا $R^n - span\{s\} = \emptyset$ و درنتیجه $S \cup v = S$ که طبق فرض خطی است.

۵- نادرست، فرض کنید مقدار A و x به صورت زیر باشد:

شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱ | نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

در مثال بالا Ax =0 و یکی از اعضای x برابر صفر است.

۶- درست، چون n ستون محوری دارد پس باید $n \leq m$ باشد، در حالتی که m بزرگتر از n باشد، اگر ماتریس سطرهای صفر ایجاد کند یا ناسازگار می‌شود یا یک جواب دارد (اگر b در آن سطر صفر باشد) و در حالت n=m یک جواب خواهد داشت.

۷- -------

۸- نادرست، فرض کنید S_2 شامل S_1 و بردار دیگری که ضریبی از این است را شامل می‌شود، در این صورت $\mathrm{Span}(S1) = \mathrm{Span}(S_2)$ ولی $S_1 \neq S_2$.

.۷

می‌دانیم برای n=0,1 نمی توان دو درایه غیر صفر تعریف کرد، پس از n=2 شروع می‌شود، برای n=2 داریم که: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ که به وضوح مستقل خطی است، حال برای n=3 بردار A به شکل های زیر می‌شود:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای اثبات استقلال خطی باید نشان دهیم Ax=b دارای فقط یک جواب بدیهی است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

که برقرار است.

برای n>=3 میدانیم جایگشت های قرار گیری دو عضو یک بیشتر از تعداد n است (مثلاً برای n=4 تعداد جایگشت‌ها برابر ۶ است) پس تعداد ستون‌ها از سطر ها بیشتر است، پس متغیر آزاد دارد و استقلال خطی ندارد.

اثبات عکس حکم:

با استفاده از قسمت الف می‌دانیم که برای n های کوچکتر از ۳ برقرار است.

.۸

-۱

$$Ax = 0. x\ is\ \text{trivial}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & d & 0 \\ 0 & c & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix}$$

پس باید a.c.f مخالف صفر باشند ولی برای سایر متغیرها محدودیتی نیست.

-۲ به وضوح معلوم است که برای هر مقدار متغیرها جواب‌ها مستقل خطی اند.

.۹

$$P = span\,\{u. v\} \rightarrow T(P) = span\{T(u). T(v)\}$$

اگر T(u) و T(v) مستقل خطی باشند، T(P) یک خط گذرنده از مبدا است.

اگر T(u) و T(v) وابسته خطی و غیر صفر باشند، T(P) یک صفحه گذرنده از مبدا است.

اگر T(u) و T(v) صفر باشند، T(P) مبدا است.

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری   شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

.۱۰

الف)

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

$$T\left(\frac{\tan(\alpha x)}{\tan(\alpha x)} + 3\alpha x . 2\alpha y\right) \neq \alpha T\left(\frac{\tan(x)}{\tan(x)} + 3x . 2y\right)$$

خطی **نیست**.

ب)

$$T(2\alpha x + \alpha y . -\alpha y) = \alpha T(2x + y . -y)$$

$$T(x_1 + x_2 . y_1 + y_2) = (2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 . -y_1 - y_2) = T(x_1 . y_1) + T(x_2 . y_2)$$

خطی **است**.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ج)

$$f\big(f(v_1 . v_2)\big) = \left(\frac{\frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2}}{2} . \frac{\frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2}}{2}\right) = f(v_1 . v_2)$$

خطی **است**.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$