بسمه تعالی

جبرخطی و کاربردها

نیمسال دوم ۹۸-۹۷

تمرین (۲)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر | مهلت تحویل: ۱۳۹۷/۰۱/۰۹ | دانشکده مهندسی کامپیوتر

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری   شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

.۱

$$[B\ I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\downarrow}{\text{convert to echelon form}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری　شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

۲. آ)

$$[A_1|I]=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{covert to echelon form}}\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow A_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$[A_2|I]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{convert to echelon form}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&-1&0&1&0\\0&1&1&1&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1&1&0\\0&0&1&1&0&-1&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری　　شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

ب)

$$\text{if } A=\begin{bmatrix}1&0&\dots&0\\1&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\dots&1\end{bmatrix} \text{in other words } A_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } i\le j\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

$$\text{then } B_{ij}=A_{ij}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&\dots&0\\-1&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix} \text{in other words } B_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } i=j\\ -1 & \text{if } i=j+1\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

for i in A.rows:

for j in B.columns:

$$AB_{ij}=\Sigma_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}=\Sigma_{k=1}^{i}A_{ik}B_{kj}+\Sigma_{k=i+1}^{n}A_{ik}B_{kj}=\Sigma_{k=1}^{i}1\times B_{kj}+0$$
$$=\Sigma_{k=1}^{i}B_{kj}\rightarrow \text{if } j=i \text{ then } B_{kj}=1 \text{ else } B_{kj}=0$$

for i in B.rows:

for j in A.columns:

$$BA_{ij}=\Sigma_{k=1}^{n}B_{ik}A_{kj}=\Sigma_{k=1}^{i-2}B_{ik}A_{kj}+\Sigma_{k=i-1}^{i}B_{ik}A_{kj}+\Sigma_{k=i+1}^{n}B_{ik}A_{kj}=0+\Sigma_{k=i-1}^{i}B_{ik}A_{kj}+0$$

$\rightarrow$ if $i=j$ then $res=-1\times 0+1\times 1=1$ else $res=-1\times 1+1\times 1=0$

ج)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to [A_1|I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \to A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to [A_2|I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{if } A_{ij} = \begin{cases} i & i \geq j \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \text{ then } B_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i} & i = j \\ -\frac{1}{i} & i = j+1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری　　شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

for i in A.rows:

for j in B.columns:

$$AB_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \Sigma_{k=1}^{i} A_{ik}B_{kj} + \Sigma_{k=i+1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \Sigma_{k=1}^{i} 1 \times B_{kj} + 0$$
$$= \Sigma_{k=1}^{i} B_{kj} \rightarrow \text{if } j = i \text{ then } B_{kj} = 1 \text{ else } B_{kj} = 0$$

for i in B.rows:

for j in A.columns:

$$BA_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} B_{ik}A_{kj} = \Sigma_{k=1}^{i-2} B_{ik}A_{kj} + \Sigma_{k=i-1}^{i} B_{ik}A_{kj} + \Sigma_{k=i+1}^{n} B_{ik}A_{kj} = 0 + \Sigma_{k=i-1}^{i} B_{ik}A_{kj} + 0$$

$$\rightarrow \text{if } i = j \text{ then } res = -\frac{1}{i} \times 0 + \frac{1}{i} \times i = 1 \text{ else } res = -\frac{1}{i} \times i + \frac{1}{i} \times i = 0$$

۳. آ)

$$Vc = y \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} c_0 + x_1 c_1 + x_1^2 c_2 + \cdots + x_1^{(n-1)} c_{n-1} \\ c_0 + x_2 c_1 + x_2^2 c_2 + \cdots + x_2^{n-1} c_{n-1} \\ \vdots \\ c_0 + x_n c_1 + x_n^2 c_2 + \cdots + x_n^{n-1} c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow p(x_i) = y_i \text{ for i in } [0.n]$$

ب)

می‌خواهیم نشان دهیم که :

$$c_0 v_0 + c_1 v_1 + \cdots + c_{n-1} v_{n-1} = \vec{0} \text{ ,where } v_j = \left(x_1^j, x_2^j, \dots, x_{n-1}^j\right) \text{ and } c_{0,} c_{1,} \dots c_{n-1} \in \mathcal{R}$$

پس به صورت زیر می‌شود:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{(n-1)} x^{n-1} = 0$$

معادله بالا دارای حداکثر n-1 جواب است، اگر ستون‌های ماتریس مستقل خطی نباشند باید بیشمار جواب داشته باشد که در تناقض است پس فقط یک جواب دارد آن هم $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ است، پس مستقل خطی می‌باشد.

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری   شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

ج) طبق قسمت (ب) ماتریس افزوده $[v|y]$ بعد از تبدیل به ماتریس پلکانی کاهش یافته هر ردیف یک درایه پیشرو دارد، پس ماتریس جواب دارد.

۴. فرض می‌کنیم نقطه همگن مورد نظر X می‌باشد ($X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$)، آنگاه اعمال تبدیل نتیجه زیر را می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} A & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + Pk \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} k$$

متغیر سوم (k) برای اعمال انتقال است. (اگر صفر باشد انتقال صورت نمی‌گیرد و اگر یک باشد انتقال صورت می‌گیرد)

۵.

$$A = LU \to Ax = b \to LUx = b\ ,Ux = y\ \&\ Ly = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \to U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y: [L|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 21 \\ 2 & 1 & 1 & 24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to y = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x: [U|y] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری | شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

۶.

آ) عبارت نادرست است، زیرا ماتریس A می‌تواند ماتریس صفر باشد یا مثلاً ماتریس B میتواند ماتریس یکه (I) باشد در آن‌هنگام مستقل خطی بودن AB به B مربوط نیست. ولی اگر جمله سوال به فرم زیر بود به طریق زیر اثبات می‌شد:

«اگر ستون‌های ماتریس B وابسته خطی باشند، ستون‌های ماتریس AB وابسته خطی است.»

اثبات:

$$\text{if } B = (b_1,b_2,\dots,b_n) \text{ then } \Sigma_{i=1}^{n} c_i b_i = 0 \ (\mathbb{I}) \text{and } c_i \text{ not all zero}$$

$$\text{Note} : AB = A[b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n] = [Ab_1 \quad Ab_2 \quad \cdots \quad Ab_n]$$

$$\text{then: } \xrightarrow{A\times\mathbb{I}} A \times 0 = 0 = \Sigma_{i=1}^{n} c_i A b_i \text{ and } c_i \text{ not all zero} \Rightarrow AB \text{ is linearly dependent}$$

با ضرب A در دو طرف معادله عملاً اثبات شد که AB مستقل خطی است یا به فرم ساده تر اگر B وابسته خطی باشد یک جواب غیربدیهی مانند x برای معادله Bx=0 وجود دارد، حال به طرفین تساوی A را ضرب می‌کنیم و طبق فرض x جواب غیر بدیهی برای ABx=0 می‌شود، پس ماتریس AB وابسته خطی است.

ب)

$$C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n \rightarrow (A+X)B^{-1} = CI_n = C \rightarrow A + X = CB \rightarrow X = CB - A$$

ج) می‌توان ترتیب سیگماها را عوض کرد:

$$trc(AB) = \Sigma_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}(\Sigma_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki}) = \Sigma_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\Sigma_{i=1}^{n} B_{ki}A_{ik}) = trc(BA)$$

د)

$$trc(\omega A + B) = \Sigma_{i=1}^{n}\omega a_{ii} + b_{ii} = \omega\Sigma_{i=1}^{n} a_{ii} + \Sigma_{i=1}^{n} b_{ii} = \omega trc(A) + trc(B)$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری
شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

۵)

$$trc(AA^T) = \Sigma_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}(\Sigma_{k=1}^{n} A_{ik}A_{ki}^T) = \Sigma_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\Sigma_{k=1}^{n} A_{ik}^2 = res$$

$\rightarrow A_{ik}^2$ is a positive number so res≥0

$trc(AA^T) = 0 \rightarrow A_{ik} = 0$ where $1 \le k,i \le n \rightarrow A = 0$

.۷

آ)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & I_n \end{bmatrix}$$

$$AW + BY = I_n \ (1)$$

$$AX + BZ = 0 \ (2)$$

$$CW + DY = 0 \ (3)$$

$$CX + DZ = I_n (4)$$

in (1): $W = A^{-1}(I - BY)$

in (3): $CA^{-1} - CA^{-1}BY + DY = 0 \rightarrow Y = -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$

$$W = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

in (2): $X = -A^{-1}BZ$

in (4): $-CA^{-1}BZ + DZ = I \rightarrow (D - CA^{-1}B)Z = I \rightarrow Z = (D - CA^{-1}B)^{-1}$

$$X = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}$$

ب) مانند (الف):

$$\text{in (3):} Y = -D^{-1}CW$$

$$\text{in (1):} (A - BD^{-1}C)W = I \rightarrow W = (A - BD^{-1}C)^{-1}$$

$$Y = -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}$$

$$\text{in (4):} Z = D^{-1}(I - CX)$$

$$\text{in (2): AX+}BD^{-1} - BD^{-1}CX = 0 \rightarrow X = -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}$$

$$Z = D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} + D^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} + D^{-1} \end{bmatrix}$$

.۸

$$B = A^2 - 2A + 2I \overset{2I=A^3}{=} A^3 + A^2 - 2A = A(A^2 + A - 2) = A(A - I)(A + 2I)$$

$$A^3 = 2I \to A(\frac{1}{2}A^2) = I \to A \text{ is invertible}$$

$$A^3 = 2I \to A^3 - I = I, (A - I)(A^2 + A + I) = I \to A - I \text{ is invertible}$$

$$A^3 - I = I \to A^3 + 8I = 10I, (A + 2I)(A^2 - 2A + 4I) = 10I \to A + 2I \text{ is invertible}$$

so since B is the product of invertible matrices. it is invertible.

.۹

$$LU = L_1U_1 \xrightarrow{\times L_1^{-1}} L_1^{-1}LU = U_1 \xrightarrow{\times U^{-1}} L_1^{-1}L = U_1U^{-1}$$

$L_1^{-1}L$ is a lower triangular and $U_1U^{-1}$is upper triangular. So:

$$L_1^{-1}L = I = U_1U^{-1} \to L_1^{-1}L = I \to L = (L_1^{-1})^{-1} = L_1$$

$$U_1U^{-1} = I \to U_1 = (U^{-1})^{-1} \to U = U_1$$

.۱۰

آ)

$$(PP^T)_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} P_{ik}P_{kj}^T = \Sigma_{k=1}^{n} P_{ik}P_{jk} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} = I_{ij} \to P^T = P^{-1}$$

ب) خیر،

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \to A^{-1} = A^T = A$$

ولی ماتریس A ماتریس جایگشت نیست