۹۶۳۱۰۷۵ علی تقوی

① $Ax=\lambda x \longrightarrow \det(A-\lambda I)=0$ اگر جمع سطرها برابر همدیگر است

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots \\ \vdots & a_{22}-\lambda & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون اول جمع میکنیم}]{\text{همه ستون ها را با}} \begin{vmatrix} S-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ S-\lambda & a_{22}-\lambda \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ S-\lambda & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(S-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & a_{1n} \\ 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \longrightarrow S=\lambda$$

مقدار ویژه یک ماتریس با مقدار ویژه ماتریس ترانهاده اش یکی است ⇐ برای حالتی که جمع درایه ستون ها با هم برابره هم رابطه بالا درسته

---

②

$$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-\lambda_n)\cdots(\lambda-\lambda_1)$$

$$f(0)\Rightarrow \det -A=(-1)^n\det A=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n$$

$$\Rightarrow \det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

---

③ (آ) $Ax=ax \longrightarrow x=aA^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x=\frac{1}{a}x$

(ب) $A^2x=A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda^2x=0 \longrightarrow \lambda=0$

(ج و د)

$\det(A-\lambda I)=0$

$(A-\lambda I)^T=A^T-\lambda I$

$\det A=\det A^T \longrightarrow \det(A-\lambda I)=\det(A-\lambda I)^T$

$\Rightarrow \det(A-\lambda I)=\det(A^T-\lambda I)\Rightarrow$ مقدار ویژه ها یکسان

۴) (آ)

$A = PBP^{-1}$ $\qquad AA^{-1} = I$

$\det A = \det B \neq 0 \longrightarrow$ B معکوس پذیر

$A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = PB^{-1}P^{-1} \longrightarrow$ معکوس A با معکوس B متشابه است

(ب)

$A = PBP^{-1} \longrightarrow A^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1})$

$\Rightarrow A^2 = PB^2P^{-1}$

(ج)

$B = PAP^{-1} \longrightarrow A = P^{-1}BP$

$C = QAQ^{-1} \longrightarrow C = Q(P^{-1}BP)Q^{-1}$

$\xrightarrow{R = QP^{-1}} C = RBR^{-1} \longrightarrow$ B و C متشابه اند

(د)

A قطری شدنی $\longrightarrow$ مشابه ماتریس قطری D

A مشابه B

$\xrightarrow{\text{طبق (ج)}}$ D مشابه $B \Longrightarrow$ B قطری شدنی

(هـ)

$B = PAP^{-1} \longrightarrow \text{Rank}(B) = \text{Rank}(PAP^{-1})$

$\longrightarrow \text{Rank}(B) \leq \text{Rank}(A) = \text{Rank}(P^{-1}BP) \leq \text{Rank}(B)$

$\xrightarrow[\Rightarrow x = t]{t \leq x \leq t} \text{Rank}(A) = \text{Rank}(B)$

(۵) (آ)

$$AV = eV = (a-bi)\big(Re(V) + i\,Im(V)\big)$$ قسمت موهومی

قسمت حقیقی $$= \big(aRe(V) + bIm(V)\big) + i\big(aIm(V) - bRe(V)\big)$$

$$\rightarrow Re(AV) = A\,Re(V) = a\,Re(V) + b\,Im(V)$$

$$\rightarrow Im(AV) = A\,Im(V) = a\,Im(V) - b\,Re(V)$$

(ب)

$$A\,Re(V) = \begin{bmatrix} Re(V) & Im(V) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$A\,Im(V) = \begin{bmatrix} Re(V) & Im(V) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$$

$$AP = A\begin{bmatrix} Re(V) & Im(V) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= P\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = PC \Rightarrow AP = PC$$

---

(۶)

$$Ax = \lambda x \longrightarrow A^2x = A(\lambda x) = \lambda^2 x = Ax = \lambda x$$

$$\Rightarrow \lambda^2 x = \lambda x \longrightarrow \lambda = 0$$ یا $$1$$

---

(۷)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

$$A^TA\hat{x} = A^Tb \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -6 & 15 \\ -6 & 12 & -30 \\ 15 & -30 & 75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -6 & 15 & a+b+c \\ -6 & 12 & -30 & -2(a+b+c) \\ 15 & -30 & 75 & 5(a+b+c) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -6 & 15 & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3\hat{x} - 6\hat{y} + 15\hat{z} = a+b+c$$

$$\Rightarrow \hat{x} - 2\hat{y} + 5\hat{z} = \frac{a+b+c}{3}$$

---

(۸)

(الف)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}}_{A} x = \overbrace{\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}}^{B}$$

$$\Rightarrow A^T A \hat{x} = A^T B \Rightarrow (a^2+c^2)\hat{x} = ab+cd$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{ab+cd}{a^2+c^2}$$

(ب)

$$A^T A \hat{x} = A^T B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

(آ) ۱۰

$\forall w \in W \quad w = a_1 u_1 + a_2 u_2$

$\Rightarrow z \cdot w = a_1 (z \cdot u_1) + a_2 (z \cdot u_2) = 0$

$\Rightarrow z \in W^\perp$