بسمه تعالی

جبرخطی و کاربردها

نیمسال دوم ۹۸-۹۷

تمرین (۳)

دانشکده مهندسی کامپیوتر مهلت تحویل: ۱۳۹۸/۰۱/۲۴ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱ نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری

۱. الف)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \xrightarrow{-CA^{-1}\times r} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \Rightarrow Y = D - CA^{-1}B$$

$$I_{2n} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \rightarrow L = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & I_n \end{bmatrix} \Rightarrow X = CA^{-1}$$

$$\text{if } M = NK \rightarrow \det M = \det N \times \det K \; (\mathbb{I})$$

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \left(\det \begin{bmatrix} \mathrm{I_n} & 0 \\ \mathrm{CA^{-1}} & \mathrm{I_n} \end{bmatrix}\right) . \left(\det \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{D - CA^{-1}B} \end{bmatrix}\right) \overset{***}{=} \det I_n . (\det(A) . \det D - CA^{-1}B) - \det 0 . \det B) = \det A . (\det D - CA^{-1}B)$$

$*** \text{ proof of } \det \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \text{ is } \det A . \det B :$

$$X = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & A^{-1}C \\ 0 & B \end{bmatrix} \rightarrow \det x = \det A . \det B$$

ب)

$$\text{A is invertible} \rightarrow \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ -CA + AC & AD - CB \end{pmatrix} \overset{AC=CA}{=} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & AD - CB \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathbb{I}}{\rightarrow} \det \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{pmatrix} . \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & AD - CB \end{pmatrix}$$

$$\left(\det A^{-1} . (\det A)\right) \left(\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - CB) \xrightarrow{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

۲. آ)

$$\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} & & & 0 & \cdots & 0 \\ & A & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1_{(n+1)(n+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1_{(2n)(2n)} \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{2n+2n}(1)\det\begin{bmatrix} & & & 0 & \cdots & 0 \\ & A & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1_{(n+1)(n+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1_{(2n-1)(2n-1)} \end{bmatrix} = \cdots$$

$$= \det[A]$$

ب)

مانند قسمت قبل قابل اثبات است ولی این بار از بالا سمت چپ شروع می‌کنیم و برای هرمرحله دترمینان ماتریس به ازای حذف سطر اول و ستون را در درایه اول ضرب می‌کنیم (چون در هر ردیف فقط یک درایه یک موجو است و این درایه روی قطی اصلی قرار دارد در هر مرحله ـ تا مرحله n ام ـ فقط در یک ضرب می‌شود) و جاصل برابر با دترمینان D می‌شود.

ج)

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ب و آ}} \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \, . \det D$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \rightarrow \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} . \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \overset{\mathbb{I},\mathbb{I}}{=} \det A \, . \det B$$

$$\mathbb{II}: \det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \overset{\text{آ}}{=} \det D$$

$$\mathbb{III}: \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}^T = \det\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & I_n^T \end{pmatrix} \overset{\text{ب}}{=} \det A^T = \det A$$

۳.آ)

The **adj** of **A** is the transpose of the cofactor matrix **C** of **A**, $adj(A) = C^T$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} \to adj(A) = A^{-1}\det(A) \xrightarrow{\wedge T} adj(A)^T = (\det A \,.\, A^{-1})^T = \det A\,(A^{-1})^T$$

$$(A^T)^{-1} = \frac{adj(A^T)}{\det(A^T)} \to adj(A^T) = \det(A^T)\,(A^T)^{-1} = \det A\,(A^{-1})^T$$

$$\Rightarrow adj(A^T) = \big(adj(A)\big)^T$$

ب)

$$A.\,adj(A) = \det A\, I_n \xrightarrow{\text{A is singular}} A.\,adj(A) = 0^T$$

if $adj(A)$ is nonsingular , we could use its inverse to solve for A and $A = 0 \to adj(A) = 0$
$\to \det\big(adj(A)\big) = 0 \to adj(A)$ is singular.

ج)

$$A.\,adj(A) = \det A\, I_n \to \det\big(A.\,adj(A)\big) = (\det A)^n \to \det A \det adj(A) = (\det A)^n$$

$$\text{if } \det A \neq 0 \to adj(A) = (\det A)^{n-1}$$

$$\text{else } adj(A) = 0 \to\ adj(A) = (\det A)^{n-1}$$

د) متن سوال غلط است و حالت درست آن به شکل زیر اثبات می شود.

$$adj(BA) = \det(BA)\,(BA)^{-1} = \det B\,.\det A\,(A^{-1}B^{-1}) \xrightarrow{\det x.x^{-1}=adj\,x} adj(BA) = adj(A).adj(B)$$

ه)

$$\det(adj(A)) = (\det(A))^{n-1} \rightarrow \det\Big(adj\big(adj(A)\big)\Big) = \big(\det\big(adj(A)\big)\big)^{\mathrm{n}-1} = ((\det(A))^{n-1})^{n-1} = (\det(A))^{(n-1)^2}$$

.۴

$$\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & a & a^2\\0 & b-a & b^2-a^2\\0 & c-a & c^2-a^2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & a & a^2\\0 & b-a & b^2-a^2\\0 & 0 & (c^2-a^2)-\dfrac{c-a}{b-a}(b^2-a^2)\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\0 & b-a & b^2-a^2\\0 & 0 & (c-a)\big((c+a)-(b+a)\big)\end{bmatrix} = 1(b-a)(c-a)(c-b)$$

.۵

ماتریس A را عملیات سطری انجام می‌دهیم تا به فرم زیر دربیاید:

$$A = \begin{pmatrix}\pm 1 & *\\ 0 & B\end{pmatrix} \rightarrow \det A = (\pm 1)\det B \ \ \&\, B\ is\ (n-1)\times(n-1)$$

درایه‌های ماتریس B مقدار +۲ یا -۲ یا صفر را می‌توانند داشته باشند، پس می‌توان آن را به فرم B=2C نوشت:

$$\det B = \det(2C) = 2^{n-1}\det C \rightarrow \det A\; mod\; 2^{n-1} = 0$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری | شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

۶. آ)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \to x_i' = kx_i \to x_i = \frac{x_i'}{k} \to \frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} + \frac{x_3'^2}{c^2} = 1$$

ب)

$$\text{Area of T(S): } \det A \times \{\text{Area of S}\} = abc \times \frac{4}{3}\pi$$

۷.

اگر ماتریس وابسته خطی باشد در فرم پلکانی آن سطر صفر ایجاد می‌شود و دترمینان آن صفر می‌شود، پس کافی است تا «ولی» به ازای هر درایه‌ای که «علی» می‌گذارد در ردیف دیگری آن عدد یا ضریبی از آن را بگذارد تا یک یا چند ردیف مضرب ردیف دیگری شود.

۸.الف)

یک تابع بر اساس متغیر P_n برای دترمینان تعریف می کنیم:

$$F(p) = \begin{vmatrix} p_1 & a & \cdots & a & a \\ b & p_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & p_{n-1} & a \\ b & b & \cdots & b & p \end{vmatrix} \to \det A = F(p_n)$$

F یک تابع خطی است و می‌توان بر اساس چند نقطه آن، تابع را نوشت و داریم که:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \to y - y_0 = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) \to y = \frac{y_0(x_1 - x) + y_1(x - x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\to x_0 = a, y_0 = F(a), x_1 = b, y_1 = F(b), x = p_n, y = \det A$$

نام و نام خانوادگی: محمدرضا اخگری شماره دانشجویی: ۹۶۳۱۰۰۱

$$\begin{aligned}\det A &= \frac{b-p_n}{b-a}F(a)+\frac{p_n-a}{b-a}F(b)\\ &= \frac{-a(p_1-b)\cdots(p_{n-1}-b)(p_n-b)+b(p_1-a)\cdots(p_{n-1}-a)(p_n-a)}{b-a}\\ &= \frac{-af(b)+bf(a)}{b-a}\end{aligned}$$

$$F(a)=\begin{vmatrix} p_1 & a & \cdots & a & a\\ b & p_2 & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ b & b & \cdots & p_{n-1} & a\\ b & b & \cdots & b & a\end{vmatrix} \overset{\text{کاهش سطری}}{=} \begin{vmatrix} p_1-b & a-b & \cdots & a-b & 0\\ 0 & p_2-b & \cdots & a-b & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & p_{n-1}-b & 0\\ b & b & \cdots & b & a\end{vmatrix}$$
$$= a(p_1-b)(p_2-b)\cdots(p_{n-1}-b)$$

F(b) به همین ترتیب برابر است با:

$$F(b)=b(p_1-a)(p_2-a)\cdots(p_{n-1}-a)$$

ب)

فرض کنیم ماتریس به فرم زیر باشد:

$$A=\begin{pmatrix} p_1 & a\\ a & p_2\end{pmatrix} \to \det A = \begin{vmatrix} p_1 & a\\ a & p_2\end{vmatrix} = p_1p_2-a^2(\mathbb{I})$$

$$\begin{aligned}a[(p_2-a)+(p_1-a)]+p_2(p_1-a) &= ap_2-a^2+p_1a-a^2+p_1p_2-ap_2\\ &= p_1p_2-2a^2+ap_1(\mathbb{II})\end{aligned}$$

$$(\mathbb{I})\neq(\mathbb{II})$$

پس سوال غلط است. ☺