1.

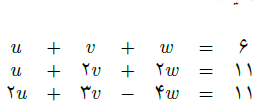
الف)

پاسخ:

فرم پلکانی

فرم پلکانی کاهش یافته

درایه های با رنگ قرمز، درایه های محوری می‌باشند و چون تمام متغیر ها پایه[[1]](#footnote-1) هستند، یک جواب دارد و نمی توان آن را به صورت پارامتریک نوشت و جواب نهایی به صورت زیر است:

 ب)

فرم پلکانی

~ فرم پلکانی کاهش یافته

تمامی متغیرها پایه هستند و یک جواب دارد و جواب نهایی آن به صورت زیر است، چون یک جواب دارد به صورت پارامتری قابل نوشتن نیست:

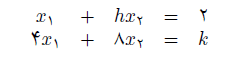
2.

دو ماتریس هم ارز سطری‌اند، اگر بتوان با عملیات سطری مقدماتی از یکی به دیگری رسید و مجموعه جواب یکسانی دارند. با انجام عملیات سطری ماتریس سمت راست را به ماتریس پلکانی کاهش یافته تبدیل می‌کنیم:

ماتریس حاصل سطری برابر صفر دارد، اما ماتریس سمت چپ با هیچ عملیاتی قابل تبدیل به این نیست (مثلا درایه 22 ـ ردیف دو و ستون دو ـ برای صفر شدن احتیاج دارد که با ضریبی از سطر سوم جمع شود که این باعث میشود درایه 23 ـ ردیف دو و ستون سه ـ صفر نباشد).

ماتریس کاهش یافته ماتریس سمت چپ:

دو ماتریس مشابه هم نیستند.

3. 1-

الف)

حالت بدون جواب: باید سطر آخر به فرم که باشد، پس:

حالت یک جواب داشتن: باید هر ردیف یک درایه پیشرو داشته باشد (یعنی ستونی آزاد نباشد)، پس:

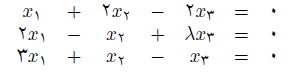
حالت بیشمار جواب داشتن: باید ستونی آزاد[[2]](#footnote-2) باشد، اینجا باید سطر آخر صفر شود، پس:

ب)

حالت بدون جواب: باید سطر آخر به فرم باشد، پس:

حالت یک جواب داشتن: باید هر ردیف یک درایه پیشرو داشته باشد، پس:

حالت بیشمار جواب داشتن: باید ستونی آزاد باشد، اینجا باید سطر آخر صفر شود ولی به خاطر وجود یک **امکان** **ندارد**.

 2-

برای داشتن جوابی به جز صفر باید ستونی متغیر آزاد شود، برای این‌کار باید ردیف دوم مضربی از ردیف سوم باشد (اینجا یک برابر است)، پس:

3-

برای اینکه به ازای هر Y جواب داشته باشد، باید در هر ردیف درایه پیشرو موجود باشد، پس باید هر ردیف مستقل خطی باشد (هیچ کدام به صورت ترکیب خطی دو ردیف دیگر نباشد).

باید درایه های قطر ماتریس بالا مخالف صفر باشند.

4. در دستگاه‌های فرومعین حتی اگر تمام سطر‌ها نیز درایه پیشرو داشته باشد (سازگار فرض شده است) به علت بیشتر بودن تعداد ستون متغیر آزاد ایجاد می‌شود و این باعث ایجاد بینهایت جواب می‌شود.

در دستگاه فرامعین امکان دارد بتوان ردیفی را به صورت ترکیب خطی ردیف های دیگر نوشت و این باعث میشود در ماتریس کاهش‌یافته با ردیف‌هایی تمام صفر مواجه شویم و ماتریس تبدیل به مربعی یا فرومعین شود و جواب داشته باشد، مثل:

که ماتریس افزوده آن و فرم پلکانی به صورت زیر میشود:

*دارای دو متغیر پایه و صفر متغیر آزاد است، پس سازگار و دارای جواب است.*

*5.*

*می­دانیم بردارهای مستقل خطی هستند*

*،*

*یعنی ترکیب خطی آن­ها مساوی صفر یک جواب بدیهی دارد و آن هم ضرایب مساوی صفر است. حال:*

*که طبق فرض اولیه می­دانیم معادله بالا تنها یک جواب بدیهی دارد و درنتیجه* ***مستقل خطی*** *است.*

*برای بردارهای* ***دوم*** *نیز به صورت زیر است:*

*معادلات بالا به ازای n های فرد یک جواب بدیهی (همه ضرایب مساوی صفر دارد) و به ازای n های زوج بیشمار جواب دارد، برای اثبات این قضیه از استقرا استفاده می­کنیم، و تفاضل هر دو جمله را حساب می­کنیم:*

*اگر n فرد باشدف تمام ضرایب صفر می­شود و نتیجه می­دهد* ***مستقل خطی*** *است و در غیر اینصورت نتیجه­ای در مورد نمی­توان گرفت و متغیر* ***آزاد*** *می­شود.*

***عکس حکم ها:***.....

6.

1- نادرست، برای مستقل بودن خطی شرط کافی و لازم داشتن یک بردار به صورت ترکیب خطی بقیه است:

فرض کنیم n=3 است.

*بردار v1 را نمی­توان به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشت.*

*2- نادرست، احتمال دارد درایه محوری در ستون b قرار گیرد.*

*3- درست، جواب یکتا داشتن معادله یعنی ستون های ماتریس A فضای را اسپن می­کند.*

*4- درست، بردارv ای وجود ندارد، زیرا و درنتیجه که طبق فرض خطی است.*

*5- نادرست، فرض کنید مقدار A و x به صورت زیر باشد:*

در مثال بالا Ax =0 و یکی از اعضای x برابر صفر است.

6- درست، چون n ستون محوری دارد پس باید باشد، در حالتی که m بزرگتر از n باشد، اگر ماتریس سطرهای صفر ایجاد کند یا ناسازگار می­شود یا یک جواب دارد (اگر b در آن سطر صفر باشد) و در حالت n=m یک جواب خواهد داشت.

7- -------

8- نادرست، فرض کنید S2 شامل S1 و بردار دیگری که ضریبی از این است را شامل می­شود، در این صورت Span(S­1­) = Span(S­­­2) ولی .

7.

می­دانیم برای n=0,1 نمی توان دو درایه غیر صفر تعریف کرد، پس از n=2 شروع می­شود، برای n=2 داریم که: که به وضوح مستقل خطی است، حال برای n=3 بردار A به شکل های زیر می­شود:

برای اثبات استقلال خطی باید نشان دهیم Ax=b دارای فقط یک جواب بدیهی است:

که برقرار است.

برای n>=3 میدانیم جایگشت های قرار گیری دو عضو یک بیشتر از تعداد n است (مثلاً برای n=4 تعداد جایگشت­ها برابر 6 است) پس تعداد ستون­ها از سطر ها بیشتر است، پس متغیر آزاد دارد و استقلال خطی ندارد.

اثبات عکس حکم:

با استفاده از قسمت الف می­دانیم که برای n های کوچکتر از 3 برقرار است.

8.

1-

پس باید a.c.f مخالف صفر باشند ولی برای سایر متغیر‌ها محدودیتی نیست.

2- به وضوح معلوم است که برای هر مقدار متغیرها جواب‌ها مستقل خطی اند.

9.

اگر T(u) و T(v) مستقل خطی باشند، T(P) یک خط گذرنده از مبدا است.

اگر T(u) و T(v) وابسته خطی و غیر صفر باشند، T(P) یک صفحه گذرنده از مبدا است.

اگر T(u) و T(v) صفر باشند، T(P) مبدا است.

10.

الف)

خطی **نیست**.

ب)

خطی **است**.

ج)

خطی **است**.

1. basic [↑](#footnote-ref-1)
2. free [↑](#footnote-ref-2)